YOUNG • FREEDMAN

SEARS • ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

CON FÍSICA MODERNA

VOLUMEN 2

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud
$1\ m = 100\ cm = 1000\ mm = 10^6\ \mu m = 10^9\ nm$
$1\ km = 1000\ m = 0.6214\ mi$
$1\ m = 3.281\ ft = 39.37\ in$
$1\ cm = 0.3937\ in$
$1\ in. = 2.540\ cm$
$1\ ft = 30.48\ cm$
$1\ yd = 91.44\ cm$
$1\ mi = 5280\ ft = 1.609\ km$
$1\ Å = 10^{-10}\ m = 10^{-8}\ cm = 10^{-1}\ nm$
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz $= 9.461 \times 10^{15}$ m

Área
$1\ cm^2 = 0.155\ in^2$
$1\ m^2 = 10^4\ cm^2 = 10.76\ ft^2$
$1\ in^2 = 6.452\ cm^2$
$1\ ft = 144\ in^2 = 0.0929\ m^2$

Volumen
$1\ litro = 1000\ cm^3 = 10^{-3}\ m^3 = 0.03531\ ft^3 = 61.02\ in^3$
$1\ ft^3 = 0.02832\ m^3 = 28.32\ litros = 7.477\ galones$
1 galón = 3.788 litros

Tiempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86,400 s
1 año $= 365.24\ d = 3.156 \times 10^7$ s

Ángulo
$1\ rad = 57.30° = 180°/\pi$
$1° = 0.01745\ rad = \pi/180\ rad$
1 revolución $= 360° = 2\pi$ rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Rapidez
1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 furlong/14 días $= 1.662 \times 10^{-4}$ m/s

Aceleración
$1\ m/s^2 = 100\ cm/s^2 = 3.281\ ft/s^2$
$1\ cm/s^2 = 0.01\ m/s^2 = 0.03281\ ft/s^2$
$1\ ft/s^2 = 0.3048\ m/s^2 = 30.48\ cm/s^2$
$1\ mi/h \cdot s = 1.467\ ft/s^2$

Masa
$1\ kg = 10^3\ g = 0.0685\ slug$
$1\ g = 6.85 \times 10^{-5}\ slug$
1 slug = 14.59 kg
$1\ u = 1.661 \times 10^{-27}\ kg$
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando $g = 9.80\ m/s^2$

Fuerza
$1\ N = 10^5\ dinas = 0.2248\ lb$
$1\ lb = 4.448\ N = 4.448 \times 10^5\ dinas$

Presión
$1\ Pa = 1\ N/m^2 = 1.450 \times 10^{-4} lb/in^2 = 0.209\ lb/ft^2$
$1\ bar = 10^5\ Pa$
$1\ lb/in^2 = 6895\ Pa$
$1\ lb/ft^2 = 47.88\ Pa$
$1\ atm = 1.013 \times 10^5\ Pa = 1.013\ bar$
$= 14.7\ lb/in^2 = 2117\ lb/ft^2$
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

Energía
$1\ J = 10^7 ergs = 0.239\ cal$
1 cal = 4.186 J (con base en caloría de 15°)
$1\ ft \cdot lb = 1.356\ J$
$1\ Btu = 1055\ J = 252\ cal = 778\ ft \cdot lb$
$1\ eV = 1.602 \times 10^{-19}\ J$
$1\ kWh = 3.600 \times 10^6\ J$

Equivalencia masa-energía
$1\ kg \leftrightarrow 8.988 \times 10^{16}\ J$
$1\ u \leftrightarrow 931.5\ MeV$
$1\ eV \leftrightarrow 1.074 \times 10^{-9}\ u$

Potencia
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz	c	2.99792458×10^{8} m/s
Magnitud de carga del electrón	e	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.6742(10) \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Planck	h	$6.6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	8.314472(15) J/mol · K
Masa del electrón	m_e	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817 \ldots \times 10^{-12}$ C^2/N · m^2
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787 \ldots \times 10^{9}$ N · m^2/C^2

Otras constante útiles

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (15° caloría)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^{5} Pa
Cero absoluto	0 K	−273.15 °C
Electrón volt	1 eV	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.510998918(44) MeV
Volumen del gas ideal (0 °C y 1 atm)		22.413996(39) litros/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	9.80665 m/s^2

Fuente:* National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores que no indican incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos†

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 y
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 y
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 y
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 y
Plutón‡	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 y

†*Fuente:* NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jlp.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, "radio" es el radio en su ecuador y "radio de la órbita" es la distancia media desde el Sol (en el caso de los planetas) o desde la Tierra (en el caso de la Luna).

‡En agosto de 2006 la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y a otros pequeños objetos que giran en órbita alrededor del Sol como "planetas enanos".

ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS		PÁGINA
21.1	Ley de Coulomb	719
21.2	Cálculos de campo eléctrico	728
22.1	Ley de Gauss	762
23.1	Cálculo del potencial eléctrico	794
24.1	Capacitancia equivalente	822
24.2	Dieléctricos	831
25.1	Potencia y energía en los circuitos	865
26.1	Resistores en serie y en paralelo	884
26.2	Reglas de Kirchhoff	888
27.1	Fuerzas magnéticas	921
27.2	Movimiento en campos magnéticos	927
28.1	Cálculo de campos magnéticos	961
28.2	Ley de Ampère	973
29.1	Ley de Faraday	999
30.1	Inductores en circuitos	1041

ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS		PÁGINA
31.1	Circuitos de corriente alterna	1073
32.1	Ondas electromagnéticas	1103
33.1	Reflexión y refracción	1128
33.2	Polarización lineal	1138
34.1	Formación de imágenes con espejos	1168
34.2	Formación de imágenes por lentes delgadas	1180
35.1	Interferencia en películas delgadas	1221
37.1	Dilatación del tiempo	1276
37.2	Contracción de la longitud	1281
37.3	Transformaciones de Lorentz	1286
38.1	Fotones	1312
39.1	Partículas y ondas	1351
41.1	Estructura atómica	1405
43.1	Propiedades nucleares	1474

CONTENIDO BREVE

Electromagnetismo

21 Carga eléctrica y campo eléctrico 709
22 Ley de Gauss 750
23 Potencial eléctrico 780
24 Capacitancia y dieléctricos 815
25 Corriente, resistencia y fuerza electromotriz 846
26 Circuitos de corriente directa 881
27 Campo magnético y fuerzas magnéticas 916
28 Fuentes de campo magnético 957
29 Inducción electromagnética 993
30 Inductancia 1030
31 Corriente alterna 1061
32 Ondas electromagnéticas 1092

Óptica

33 Naturaleza y propagación de la luz 1121
34 Óptica geométrica 1157
35 Interferencia 1207
36 Difracción 1234

Física moderna

37 Relatividad 1268
38 Fotones, electrones y átomos 1307
39 La naturaleza ondulatoria de las partículas 1349
40 Mecánica cuántica 1375
41 Estructura atómica 1401
42 Moléculas y materia condensada 1433
43 Física nuclear 1468
44 Física de partículas y cosmología 1509

APÉNDICES

A El sistema internacional de unidades A-1
B Relaciones matemáticas útiles A-3
C El alfabeto griego A-4
D Tabla periódica de los elementos A-5
E Factores de conversión de unidades A-6
F Constantes numéricas A-7
Respuestas a los problemas con número impar A-9

CONTENIDO

ELECTROMAGNETISMO

21 CARGA ELÉCTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO 709

21.1 Carga eléctrica 710
21.2 Conductores, aislantes y cargas inducidas 713
21.3 Ley de Coulomb 716
21.4 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas 721
21.5 Cálculos de campos eléctricos 727
21.6 Líneas de campo eléctrico 733
21.7 Dipolos eléctricos 735
Resumen/Términos clave 739
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

22 LEY DE GAUSS 750

22.1 Carga y flujo eléctrico 750
22.2 Cálculo del flujo eléctrico 753
22.3 Ley de Gauss 757
22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss 761
22.5 Cargas en conductores 767
Resumen/Términos clave 772
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

23 POTENCIAL ELÉCTRICO 780

23.1 Energía potencial eléctrica 780
23.2 Potencial eléctrico 787
23.3 Cálculo del potencial eléctrico 794
23.4 Superficies equipotenciales 798
23.5 Gradiente de potencial 801
Resumen/Términos clave 804
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

24 CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS 815

24.1 Capacitores y capacitancia 816
24.2 Capacitores en serie y en paralelo 820
24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico 824
24.4 Dieléctricos 828
*24.5 Modelo molecular de la carga inducida 833
*24.6 La Ley de Gauss en los dieléctricos 835
Resumen/Términos clave 837
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

25 CORRIENTE, RESISTENCIA Y FUERZA ELECTROMOTRIZ 846

25.1 Corriente eléctrica 847
25.2 Resistividad 850
25.3 Resistencia 853
25.4 Fuerza electromotriz y circuitos 857
25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos 863
*25.6 Teoría de la conducción metálica 867
Resumen/Términos clave 871
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

26 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA 881

26.1 Resistores en serie y en paralelo 881
26.2 Reglas de Kirchhoff 886
26.3 Instrumentos de medición eléctrica 891
26.4 Circuitos *R-C* 896
26.5 Sistemas de distribución de energía 900
Resumen/Términos clave 905
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

27 CAMPO MAGNÉTICO Y FUERZAS MAGNÉTICAS 916

27.1 Magnetismo 916
27.2 Campo magnético 918
27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético 922
27.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético 925
27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas 929
27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente 932
27.7 Fuerza y par de torsión en una espira de corriente 935
*27.8 El motor de corriente directa 941
*27.9 El Efecto Hall 943
Resumen/Términos clave 945
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

28 FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO 957

28.1 Campo magnético de una carga en movimiento 957

28.2 Campo magnético de un elemento de corriente 960
28.3 Campo magnético de un conductor que transporta corriente 962
28.4 Fuerza entre alambres paralelos 965
28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente 967
28.6 Ley de Ampère 969
28.7 Aplicaciones de la ley de Ampère 973
*28.8 Materiales magnéticos 976
Resumen/Términos clave 982
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

29 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA 993
29.1 Experimentos de inducción 994
29.2 Ley de Faraday 996
29.3 Ley de Lenz 1004
29.4 Fuerza electromotriz de movimiento 1006
29.5 Campos eléctricos inducidos 1008
*29.6 Corrientes parásitas 1011
29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell 1013
*29.8 Superconductividad 1017
Resumen/Términos clave 1019
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

30 INDUCTANCIA 1030
30.1 Inductancia mutua 1030
30.2 Autoinductancia e inductores 1034
30.3 Energía del campo magnético 1038
30.4 El circuito *R-L* 1041
30.5 El circuito *L-C* 1045
30.6 El circuito *L-R-C* en serie 1049
Resumen/Términos clave 1052
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

31 CORRIENTE ALTERNA 1061
31.1 Fasores y corrientes alternas 1061
31.2 Resistencia y reactancia 1064
31.3 El circuito *L-R-C* en serie 1070
31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna 1074
31.5 Resonancia en los circuitos de corriente alterna 1077
31.6 Transformadores 1080
Resumen/Términos clave 1084
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

32 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 1092
32.1 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 1093
32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz 1096
32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales 1101
32.4 Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas 1106
32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias 1111
Resumen/Términos clave 1115
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

ÓPTICA

33 NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ 1121
33.1 La naturaleza de la luz 1121
33.2 Reflexión y refracción 1123
33.3 Reflexión interna total 1129
*33.4 Dispersión 1132
33.5 Polarización 1133
*33.6 Dispersión de la luz 1142
33.7 Principio de Huygens 1144
Resumen/Términos clave 1147
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

34 ÓPTICA GEOMÉTRICA 1157
34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana 1157
34.2 Reflexión en una superficie esférica 1161
34.3 Refracción en una superficie esférica 1169
34.4 Lentes delgadas 1174
34.5 Cámaras fotográficas 1182
34.6 El ojo 1185
34.7 La lente de aumento 1189
34.8 Microscopios y telescopios 1191
Resumen/Términos clave 1196
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

35 INTERFERENCIA 1207
35.1 Interferencia y fuentes coherentes 1208
35.2 Interferencia de la luz procedente de dos fuentes 1211

35.3 La intensidad en los patrones de interferencia 1214
35.4 Interferencia en películas delgadas 1218
35.5 El interferómetro de Michelson 1224
Resumen/Términos clave 1227
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

36 DIFRACCIÓN 1234

36.1 Difracción de Fresnel y Fraunhofer 1235
36.2 Difracción desde una sola ranura 1236
36.3 Intensidad en el patrón de una sola ranura 1239
36.4 Ranuras múltiples 1243
36.5 Rejilla de difracción 1246
36.6 Difracción de rayos x 1250
36.7 Aberturas circulares y poder de resolución 1253
*36.8 Holografía 1256
Resumen/Términos clave 1259
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

FÍSICA MODERNA

37 RELATIVIDAD 1268

37.1 Invariabilidad de las leyes físicas 1268
37.2 Relatividad de la simultaneidad 1272
37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo 1274
37.4 Relatividad de la longitud 1278
37.5 Transformaciones de Lorentz 1283
*37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas 1287
37.7 Cantidad de movimiento relativista 1289
37.8 Trabajo y energía relativistas 1292
37.9 Mecánica newtoniana y relatividad 1295
Resumen/Términos clave 1298
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

38 FOTONES, ELECTRONES Y ÁTOMOS 1307

38.1 Emisión y absorción de la luz 1307
38.2 El efecto fotoeléctrico 1309
38.3 Espectros atómicos de líneas y niveles de energía 1314
38.4 El átomo nuclear 1319
38.5 El modelo de Bohr 1322
38.6 El láser 1327
38.7 Producción y dispersión de rayos x 1330
38.8 Espectros continuos 1334
38.9 Dualidad onda-partícula 1338
Resumen/Términos clave 1340
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

39 LA NATURALEZA ONDULATORIA DE LAS PARTÍCULAS 1349

39.1 Ondas de De Broglie 1350
39.2 Difracción de electrones 1352
39.3 Probabilidad e incertidumbre 1355
39.4 El microscopio electrónico 1360
39.5 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger 1361
Resumen/Términos clave 1368
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

40 MECÁNICA CUÁNTICA 1375

40.1 Partícula en una caja 1375
40.2 Pozos de potencial 1380
40.3 Barreras de potencial y tunelamiento 1384
40.4 El oscilador armónico 1387
40.5 Problemas tridimensionales 1392
Resumen/Términos clave 1394
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

41 ESTRUCTURA ATÓMICA 1401

41.1 El átomo de hidrógeno 1401
41.2 El efecto Zeeman 1409
41.3 Espín del electrón 1413
41.4 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión 1417
41.5 Espectros de rayos x 1423
Resumen/Términos clave 1427
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

42 MOLÉCULAS Y MATERIA CONDENSADA 1433

42.1 Clases de enlaces moleculares 1433
42.2 Espectros moleculares 1436
42.3 Estructura de los sólidos 1441

42.4 Bandas de energía 1445
42.5 Modelo de electrones libres para los metales 1447
42.6 Semiconductores 1452
42.7 Dispositivos con semiconductores 1455
42.8 Superconductividad 1460
Resumen/Términos clave 1461
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

43 FÍSICA NUCLEAR 1468

43.1 Propiedades de los núcleos 1468
43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear 1473
43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad 1478
43.4 Actividades y vidas medias 1485
43.5 Efectos biológicos de la radiación 1489
43.6 Reacciones nucleares 1492
43.7 Fisión nuclear 1494
43.8 Fusión nuclear 1498
Resumen/Términos clave 1502
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

44 FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA 1509

44.1 Las partículas fundamentales y su historia 1509
44.2 Aceleradores y detectores de partículas 1514
44.3 Partículas e interacciones 1519
44.4 Los quarks y las ocho maneras 1525
44.5 El modelo estándar y más allá 1530
44.6 El Universo en expansión 1532
44.7 El principio del tiempo 1538
Resumen/Términos clave 1547
Preguntas para análisis/Ejercicios
Problemas

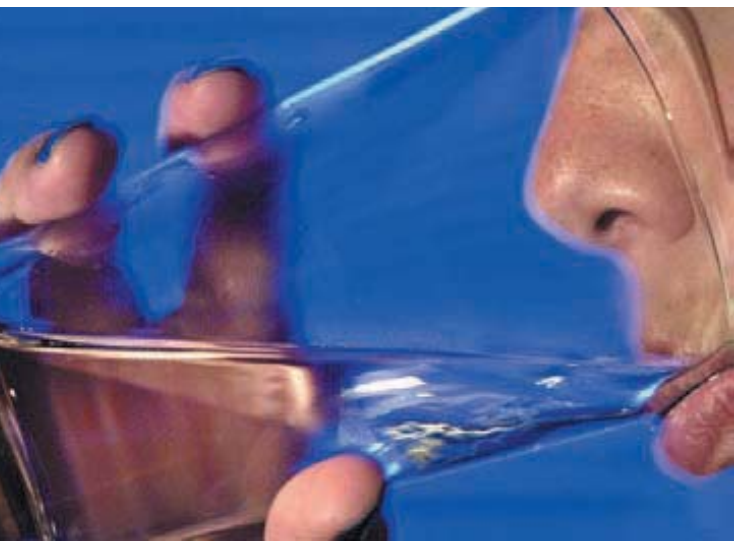
Apéndices A-1

Respuestas a los problemas con número impar A-9

Créditos de fotografías C-1

Índice I-1

21 CARGA ELÉCTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO



?El agua hace posible la vida. Las células de su cuerpo no podrían funcionar sin agua donde se disolvieran las moléculas biológicas esenciales. ¿Qué propiedades eléctricas del agua la hacen tan buen solvente?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La naturaleza de la carga eléctrica y cómo sabemos que ésta se conserva.
- Cómo se cargan eléctricamente los objetos.
- Cómo usar la ley de Coulomb para calcular la fuerza eléctrica entre cargas.
- La diferencia entre fuerza eléctrica y campo eléctrico.
- Cómo calcular el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas.
- Cómo usar la idea de las líneas de campo eléctrico para visualizar e interpretar los campos eléctricos.
- Como calcular las propiedades de los dipolos eléctricos.

En el capítulo 5 mencionamos brevemente las cuatro clases de fuerzas fundamentales. Hasta este momento, la única de tales fuerzas que hemos estudiado con cierto detalle es la gravitatoria. Ahora estamos listos para analizar la fuerza del *electromagnetismo*, que incluye tanto la electricidad como el magnetismo. Los fenómenos del electromagnetismo ocuparán nuestra atención en la mayoría de lo que resta del libro.

Las interacciones del electromagnetismo implican partículas que tienen una propiedad llamada *carga eléctrica*, es decir, un atributo que es tan fundamental como la masa. De la misma forma que los objetos con masa son acelerados por las fuerzas gravitatorias, los objetos cargados eléctricamente también se ven acelerados por las fuerzas eléctricas. La descarga eléctrica inesperada que usted siente cuando de frota sus zapatos contra una alfombra, y luego toca una perilla metálica, se debe a partículas cargadas que saltan de su dedo a la perilla. Las corrientes eléctricas como las de un relámpago o una televisión tan sólo son flujos de partículas cargadas, que corren por cables en respuesta a las fuerzas eléctricas. Incluso las fuerzas que mantienen unidos a los átomos y que forman la materia sólida, evitando que los átomos de objetos sólidos se atraviesen entre sí, se deben en lo fundamental a interacciones eléctricas entre las partículas cargadas en el interior de los átomos.

En este capítulo comenzamos nuestro estudio del electromagnetismo con el análisis de la naturaleza de la carga eléctrica, la cual está cuantizada y obedece cierto principio de conservación. Después pasaremos al estudio de las interacciones de las cargas eléctricas en reposo en nuestro marco de referencia, llamadas *interacciones electrostáticas*, y que tienen muchísima importancia en la química y la biología, además de contar con diversas aplicaciones tecnológicas. Las interacciones electrostáticas se rigen por una relación sencilla que se conoce como *ley de Coulomb*, y es mucho más conveniente describirlas con el concepto de *campo eléctrico*. En capítulos posteriores incluiremos en nuestro análisis cargas eléctricas en movimiento, lo que nos llevará a entender el magnetismo y, en forma notable, la naturaleza de la luz.

Si bien las ideas clave del electromagnetismo son sencillas en lo conceptual, su aplicación a cuestiones prácticas requerirá muchas de nuestras destrezas matemáticas,

en especial el conocimiento de la geometría y del cálculo integral. Por esta razón, el lector verá que este capítulo y los siguientes son más demandantes en cuanto a nivel matemático que los anteriores. La recompensa por el esfuerzo adicional será una mejor comprensión de los principios que se encuentran en el corazón de la física y la tecnología modernas.

21.1 Carga eléctrica

En una época tan remota como 600 A.C., los griegos de la antigüedad descubrieron que cuando frotaban ámbar contra lana, el ámbar atraía otros objetos. En la actualidad decimos que con ese frotamiento el ámbar adquiere una **carga eléctrica** neta o que *se carga*. La palabra "eléctrico" se deriva del vocablo griego *elektron*, que significa ámbar. Cuando al caminar una persona frota sus zapatos sobre una alfombra de nailon, se carga eléctricamente; también carga un peine si lo pasa por su cabello seco.

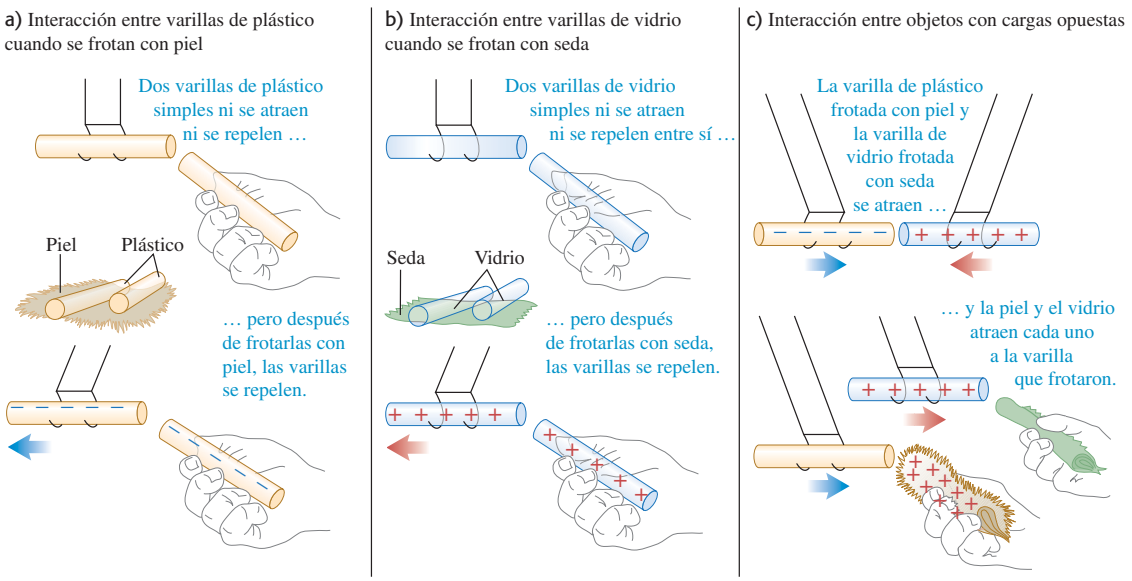
Las varillas de plástico y un trozo de piel (verdadera o falsa) son especialmente buenos para demostrar la **electrostática**, es decir, la interacción entre cargas eléctricas en reposo (o casi en reposo). La figura 21.1a muestra dos varillas de plástico y un trozo de piel. Observamos que después de cargar las dos varillas frotándolas contra un trozo de piel, las varillas se repelen.

Cuando frotamos varillas de vidrio con seda, las varillas de vidrio también se cargan y se repelen entre sí (figura 21.1b). Sin embargo, una varilla de plástico cargada *atrae* otra varilla de vidrio también cargada; además, la varilla de plástico y la piel se atraen, al igual que el vidrio y la seda (figura 21.1c).

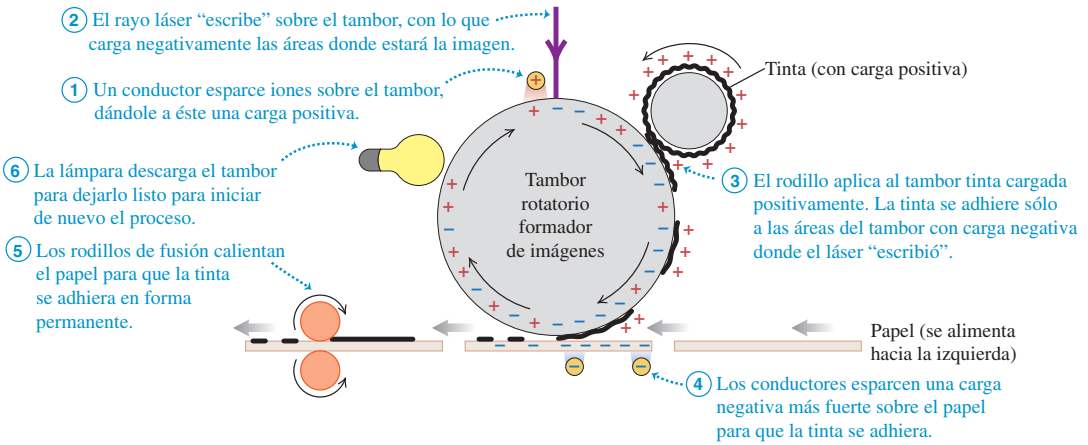
Estos experimentos y muchos otros parecidos han demostrado que hay exactamente dos tipos de carga eléctrica: la del plástico cuando se frota con piel y la del vidrio al frotarse con seda. Benjamín Franklin (1706-1790) sugirió llamar a esas dos clases de carga *negativa* y *positiva*, respectivamente, y tales nombres aún se utilizan. La varilla de plástico y la seda tienen carga negativa; en tanto que la varilla de vidrio y la piel tienen carga positiva.

Dos cargas positivas se repelen entre sí, al igual que dos cargas negativas. Una carga positiva y una negativa se atraen.

21.1 Experimentos de electrostática. a) Los objetos cargados negativamente se repelen entre sí. b) Los objetos cargados positivamente se repelen entre sí. *c*) Los objetos con carga positiva se atraen con los objetos que tienen carga negativa.



21.2 Esquema de la operación de una impresora láser.



CUIDADO **Atracción y repulsión eléctricas** En ocasiones, la atracción y la repulsión de dos objetos cargados se resume como "cargas iguales se repelen, y cargas opuestas se atraen". Sin embargo, tenga en cuenta que la frase "cargas iguales" *no* significa que las dos cargas sean idénticas, sino sólo que ambas carga tienen el mismo *signo* algebraico (ambas positivas o ambas negativas). La expresión "cargas opuestas" quiere decir que los dos objetos tienen carga eléctrica de signos diferentes (una positiva y la otra negativa).

Una aplicación tecnológica de las fuerzas entre cuerpos cargados es una impresora láser (figura 21.2). Al inicio del proceso de impresión, se da una carga positiva al tambor formador de imágenes que es sensible a la luz. Mientras el tambor gira, un rayo láser ilumina áreas seleccionadas del tambor, lo cual deja tales áreas con carga *negativa*. Partículas cargadas positivamente de la tinta se adhieren sólo en las superficies del tambor en que el láser "escribió". Cuando una hoja del papel entra en contacto con el tambor, partículas de la tinta se adhieren a la hoja y forman la imagen.

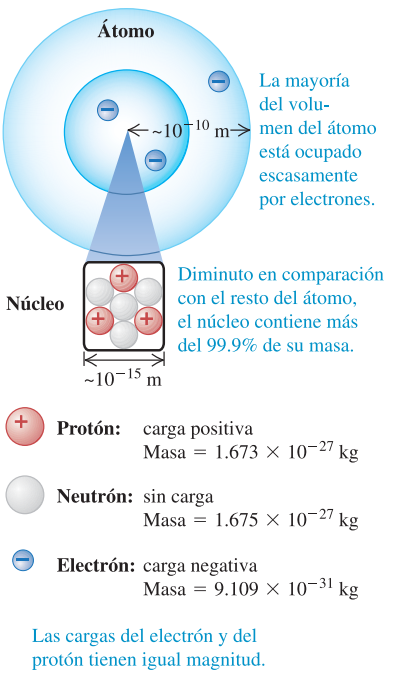
Carga eléctrica y la estructura de la materia

Cuando se carga una varilla frotándola con piel o con seda, como en la figura 21.1, no hay ningún cambio visible en la apariencia de la varilla. Entonces, ¿qué es lo que realmente sucede a la varilla cuando se carga? Para responder esta pregunta, debemos analizar más de cerca la estructura y las propiedades eléctricas de los átomos, que son los bloques que constituyen la materia ordinaria de todas clases.

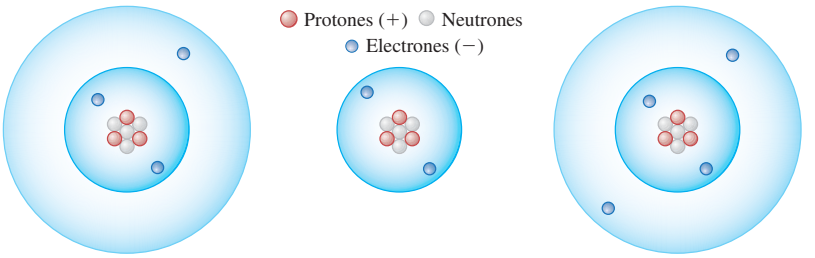
La estructura de los átomos se describe en términos de tres partículas: el **electrón**, con carga negativa; el **protón**, cuya carga es positiva; y el **neutrón**, sin carga (figura 21.3) El protón y el neutrón son combinaciones de otras entidades llamadas *quarks*, que tienen cargas de $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{2}{3}$ de la carga del electrón. No se han observado quarks aislados, y no hay razones teóricas para suponer que en principio esto sea imposible.

Los protones y los neutrones en un átomo forman el **núcleo**, pequeño y muy denso, cuyas dimensiones son del orden de 10^{-15} m. Los electrones rodean al núcleo a distancias del orden de 10^{-10} m. Si un átomo midiera algunos kilómetros de diámetro, su núcleo tendría el tamaño de una pelota de tenis. Los electrones cargados negativamente se mantienen dentro del átomo gracias a fuerzas eléctricas de atracción que se extienden hasta ellos, desde el núcleo con carga positiva. (Los protones y los neutrones permanecen dentro del núcleo estable de los átomos, debido al efecto de atracción de la *fuerza nuclear fuerte*, que vence la repulsión eléctrica entre los protones. La fuerza nuclear fuerte es de corto alcance, por lo que sus efectos no llegan más allá del núcleo.)

21.3 La estructura de un átomo. El átomo que se ilustra es el de litio (véase la figura 21.4a).



21.4 a) Un átomo neutro tiene tantos electrones como protones. b) Un ion positivo tienen un déficit de electrones. c) Un ion negativo tiene exceso de electrones. (Las "órbitas" son una representación esquemática de la distribución real de los electrones, que es una nube difusa muchas veces mayor que el núcleo.)



a) Átomo neutro de litio (Li):	b) Ion positivo de litio (Li^+):	c) Ion negativo de litio (Li^-):
3 protones (3+)	3 protones (3+)	3 protones (3+)
4 neutrones	4 neutrones	4 neutrones
3 electrones (3−)	2 electrones (2−)	4 electrones (4−)
Los electrones igualan a los protones: carga neta cero.	Menos electrones que protones: carga neta positiva.	Más electrones que protones: carga neta negativa.

Las masas de las partículas individuales, con la precisión que se conocen actualmente, son

$$\text{Masa del electrón} = m_e = 9.1093826(16) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$
$$\text{Masa del protón} = m_p = 1.67262171(29) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$\text{Masa del neutrón} = m_n = 1.67492728(29) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

Los números entre paréntesis son las incertidumbres en los dos últimos dígitos. Observe que las masas del protón y del neutrón son casi iguales y aproximadamente 2000 veces la masa del electrón. Más del 99.9% de la masa de cualquier átomo se concentra en el núcleo.

La carga negativa del electrón tiene (dentro del error experimental) *exactamente* la misma magnitud que la carga positiva del protón. En un átomo neutral, el número de electrones es igual al número de protones en el núcleo; en tanto que la carga eléctrica neta (la suma algebraica de todas las cargas) es exactamente igual a cero (figura 21.4a). El número de protones o electrones en un átomo neutro de un elemento se denomina **número atómico** del tal elemento. Si se pierden uno o más electrones, la estructura con carga positiva que queda se llama **ion positivo** (figura 21.4b). Un **átomo negativo** es aquel que ha *ganado* uno o más electrones (figura 21.4c). Tal ganancia o pérdida de electrones recibe el nombre de **ionización**.

Cuando el número total de protones en un cuerpo macroscópico es igual al número total de electrones, la carga total es igual a cero y el cuerpo en su totalidad es eléctricamente neutro. Para dar a un cuerpo una carga excedente negativa, se puede tanto *sumar cargas negativas* como *eliminar cargas positivas* de dicho cuerpo. En forma similar, un exceso de carga positiva se crea cuando se *agregan cargas positivas*, o cuando se *eliminan cargas negativas*. En la mayoría de casos, se agregan o se eliminan electrones con carga negativa (y muy móviles); un "cuerpo cargado positivamente" es aquel que ha perdido algunos de su complemento normal de electrones. Cuando hablamos de la carga de un cuerpo, siempre nos referimos a su carga *neta*, la cual siempre es una fracción muy pequeña (comúnmente no mayor de 10^{-12}) de la carga total positiva o negativa en el cuerpo.

La carga eléctrica se conserva

En el análisis anterior hay implícitos dos principios muy importantes. El primero es el **principio de conservación de la carga**:

> **La suma algebraica de todas las cargas eléctricas en cualquier sistema cerrado es constante.**

Si se frota una varilla de plástico con un trozo de piel, ambas sin carga al inicio, la varilla adquiere una carga negativa (pues toma electrones de la piel), y la piel adquiere una carga positiva de la *misma* magnitud (ya que ha perdido el mismo número de

electrones que ganó la varilla). De ahí que no cambie la carga eléctrica total en los dos cuerpos tomados en conjunto. En cualquier proceso de carga, ésta no se crea ni se destruye, solo se *transfiere* de un cuerpo a otro.

Se considera que el principio de conservación de la carga es una ley *universal*, pues no se ha observado ninguna evidencia experimental de que se contravenga. Aun en las interacciones de alta energía donde se crean y destruyen partículas, como en la creación de pares electrón-positrón, la carga total de cualquier sistema cerrado es constante con toda exactitud.

El segundo principio importante es:

La magnitud de la carga del electrón o del protón es la unidad natural de carga.

Toda cantidad observable de carga eléctrica siempre es un múltiplo entero de esta unidad básica. Decimos que la carga está *cuantizada*. Un ejemplo de cuantización que resulta familiar es el dinero. Cuando se paga en efectivo por un artículo en una tienda, hay que hacerlo en incrementos de un centavo. El dinero no se puede dividir en cantidades menores de un centavo; en tanto que la carga eléctrica no se divide en cantidades menores que la carga de un electrón o un protón. (Es probable que las cargas de los quarks, de $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{2}{3}$, no sean observables como cargas aisladas.) Entonces, la carga de cualquier cuerpo macroscópico siempre es igual a cero o a un múltiplo entero (negativo o positivo) de la carga del electrón.

La comprensión de la naturaleza eléctrica de la materia abre la perspectiva de muchos aspectos del mundo físico (figura 21.5). Los enlaces químicos que mantienen unidos a los átomos para formar moléculas se deben a las interacciones eléctricas entre ellos. Incluyen los enlaces iónicos fuertes que unen a los átomos de sodio y cloro para formar la sal de mesa, y los enlaces relativamente débiles entre las cadenas de DNA que contienen nuestro código genético. La fuerza normal que ejerce sobre usted la silla en que se sienta proviene de fuerzas eléctricas entre las partículas cargadas, en los átomos de usted y los de la silla. La fuerza de tensión en una cuerda que se estira y la fuerza de adhesión de un pegamento se parecen en que se deben a las interacciones eléctricas de los átomos.

Evalúe su comprensión de la sección 21.1 *a*) Estrictamente hablando, ¿la varilla de plástico de la figura 21.1 pesa más, menos o lo mismo después de frotarla con la piel? *b*) ¿Y la varilla de vidrio una vez que se frota con seda? ¿Qué pasa con *c*) la piel y *d*) la seda?

21.2 Conductores, aislantes y cargas inducidas

Ciertos materiales permiten que las cargas eléctricas se muevan con facilidad de una región del material a la otra, mientras que otros no lo hacen. Por ejemplo, en la figura 21.6a se ilustra un alambre de cobre sostenido por una cuerda de nailon. Suponga que usted toca un extremo del alambre con una varilla de plástico cargado, y su otro extremo lo une con una esfera metálica que, al principio, está sin carga; después, quita la varilla cargada y el alambre. Cuando acerca otro cuerpo cargado a la esfera (figuras 21.6b y 21.6c), ésta se ve atraída o repelida, lo cual demuestra que se cargó eléctricamente. Se transfirió carga eléctrica entre la esfera y la superficie de la varilla de plástico, a través del alambre de cobre.

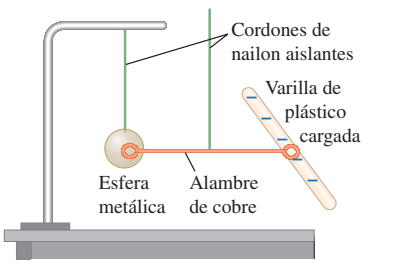
El alambre de cobre recibe el nombre de **conductor** de electricidad. Si se repite el experimento con una banda de caucho o un cordón de nailon en vez del alambre, se verá que *no* se transfiere carga a la esfera. Esos materiales se denominan **aislantes**. Los conductores permiten el movimiento fácil de las cargas a través de ellos; mientras que los aislantes no lo hacen. (En la figura 21.6, los cordones de nailon que sostienen son aislantes, lo cual evita que escape la carga de la esfera metálica y del alambre de cobre.)

Por ejemplo, las fibras de una alfombra en un día seco son buenos aislantes. Cuando usted camina sobre ella, la fricción de los zapatos contra las fibras hace que la carga

21.5 La mayoría de las fuerzas que actúan sobre este esquiador acuático son eléctricas. Las interacciones eléctricas entre moléculas adyacentes originan la fuerza del agua sobre el esquí, la tensión en la cuerda y la resistencia del aire sobre el cuerpo del individuo. Las interacciones eléctricas también mantienen juntos los átomos del cuerpo del esquiador. Sólo hay una fuerza por completo ajena a la eléctrica que actúa sobre el esquiador: la fuerza de la gravedad.

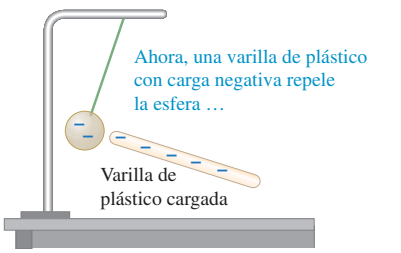
21.6 El cobre es un buen conductor de la electricidad; el nailon es un buen aislante. *a*) El alambre de cobre conduce cargas entre la esfera metálica y la varilla de plástico cargada, y así carga negativamente la esfera. Después, la esfera de metal es *b*) repelida por una varilla de plástico con carga negativa, y *c*) atraída a una varilla de vidrio con carga positiva.

a)

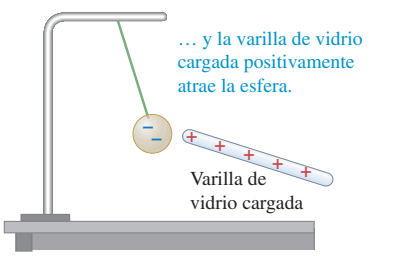


El alambre conduce carga de la varilla de plástico cargada negativamente a la esfera de metal.

b)



c)



se acumule en su cuerpo y ahí permanezca, porque no puede fluir por las fibras aislantes. Si después usted toca un objeto conductor, como una perilla, ocurre una transferencia rápida de la carga entre sus dedos y la perilla, por lo que siente una descarga. Una forma de evitarlo consiste en enrollar algunas de las fibras de la alfombra alrededor de los centros conductores, de modo que cualquier carga que se acumule sobre una persona se transfiera a la alfombra de manera inofensiva. Otra solución es cubrir la alfombra con una sustancia antiestática que no transfiera fácilmente electrones hacia los zapatos o desde éstos; así se evita que se acumulen cargas en el cuerpo.

La mayor parte de metales son buenos conductores; en tanto que los no metales son aislantes en su mayoría. Dentro de un sólido metálico, como el cobre, uno o más de los electrones externos de cada átomo se liberan y mueven con libertad a través del material, en forma parecida a como las moléculas de un gas se desplazan por los espacios entre los granos de un recipiente de arena. El movimiento de esos electrones con carga negativa lleva la carga a través del metal. Los demás electrones permanecen unidos a los núcleos con carga positiva, que a la vez están unidos en posiciones casi fijas en el material. En un material aislante no hay electrones libres, o hay muy pocos, y la carga eléctrica no se mueve con facilidad a través del material. Algunos materiales se denominan *semiconductores* porque tienen propiedades intermedias entre las de buenos conductores y buenos aislantes.

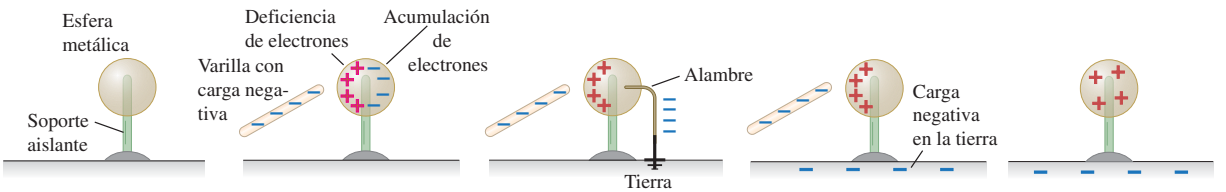
Carga por inducción

Una esfera de metal se puede cargar usando un alambre de cobre y una varilla de plástico eléctricamente cargada, como se indica en la figura 21.6a. En este proceso, algunos de los electrones excedentes en la varilla se transfieren hacia la esfera, lo cual deja a la varilla con una carga negativa más pequeña. Hay otra técnica diferente con la que la varilla de plástico da a otro cuerpo una carga de signo *contrario*, sin que pierda una parte de su propia carga. Este proceso se llama carga por **inducción**.

En la figura 21.7 se muestra un ejemplo de carga por inducción. Una esfera metálica sin carga se sostiene usando un soporte aislante (figura 21.7a). Cuando se le acerca una varilla con carga negativa, sin que llegue a tocarla (figura 21.7b), los electrones libres en la esfera metálica son repelidos por los electrones excedentes en la varilla, y se desplazan hacia la derecha, lejos de la varilla. No pueden escapar de la esfera porque tanto el soporte como el aire circundante son aislantes. Por lo tanto, existe un exceso de carga negativa en la superficie derecha de la esfera y una deficiencia de carga negativa (es decir, hay una carga positiva neta) en su superficie izquierda. Estas cargas excedentes se llaman **cargas inducidas**.

No todos los electrones libres se mueven a la superficie derecha de la esfera. Tan pronto como se desarrolla cualquier carga inducida, ejerce fuerzas hacia la *izquierda* sobre los demás electrones libres. Estos electrones son repelidos por la carga negativa inducida a la derecha y atraídos hacia la carga positiva inducida a la izquierda. El sistema alcanza el equilibrio donde la fuerza hacia la derecha sobre un electrón, debida a la varilla cargada, queda equilibrada por la fuerza hacia la izquierda debida a la carga inducida. Si se retira la varilla cargada, los electrones libres regresan a la izquierda y se restablece la condición de neutralidad original.

21.7 Carga de una esfera metálica por inducción.



a) Esfera metálica sin carga.

b) La carga negativa en la varilla repele a los electrones, lo que crea zonas de **carga inducida** negativa y positiva.

c) El alambre permite que los electrones acumulados (carga negativa inducida) fluyan hacia la tierra.

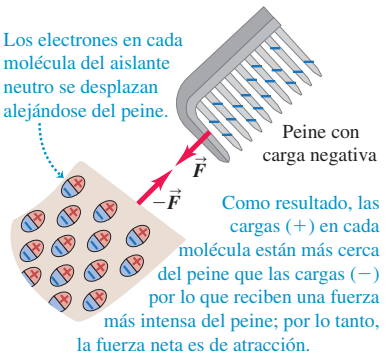
d) Se quita el conductor; ahora, la esfera tiene sólo una región con deficiencia de electrones, con carga positiva.

e) Se quita la varilla; los electrones se reacomodan por sí solos, y toda la esfera tiene una deficiencia de electrones (carga neta positiva).

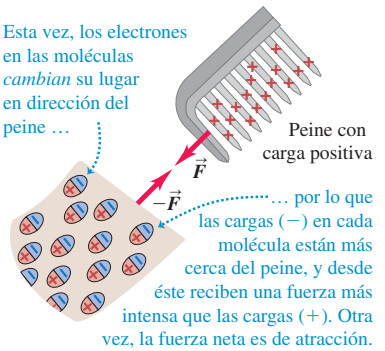
21.8 Las cargas dentro de las moléculas de un material aislante se intercambian un poco. Como resultado, un peine con carga de cualquier signo atrae a un material aislante neutro. Según la tercera ley de Newton, el aislante neutro ejerce una fuerza de atracción de igual magnitud sobre el peine.

a) Un peine cargado levanta trocitos de plástico sin carga

b) Cómo un peine con carga negativa atrae un aislante



c) Cómo un peine con carga positiva atrae un aislante



¿Qué pasaría si, mientras la varilla de plástico se encuentra cerca, el extremo de un alambre conductor se pusiera en contacto con la superficie derecha de la esfera, y el otro extremo de éste se conectara a tierra (figura 21.7c)? La Tierra es un conductor, y es tan grande que actúa como una fuente prácticamente infinita de electrones adicionales o como un receptor de los electrones no deseados. Algunas de las cargas negativas fluyen a tierra a través del alambre. Ahora suponga que desconecta el alambre (figura 21.7d) y luego se quita la varilla (figura 21.7e); en la esfera queda una carga positiva neta. Durante este proceso, no cambió la carga negativa de la varilla. La tierra adquiere una carga negativa de magnitud igual a la carga positiva inducida que queda en la esfera.

La carga por inducción funcionaría igual de bien si las cargas móviles en la esfera fueran positivas, en vez de electrones cargados negativamente, o incluso si estuvieran presentes cargas tanto positivas como negativas. En un conductor metálico, las cargas móviles siempre son electrones negativos; sin embargo, con frecuencia conviene describir un proceso *como si* las cargas en movimiento fueran positivas. En las soluciones iónicas y los gases ionizados, las cargas que se mueven son tanto positivas como negativas.

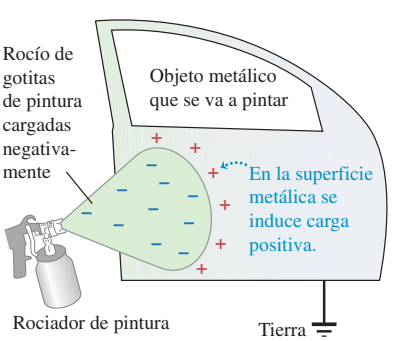
Fuerzas eléctricas en objetos sin carga

Por último, se observa que un cuerpo con carga ejerce fuerzas aun sobre objetos que *no* están cargados. Si usted frota un globo contra la alfombra y después lo coloca junto al techo, el globo se adherirá a éste, aun cuando el techo no tiene carga eléctrica neta. Después de que electrifica un peine pasándolo por su cabello, puede atraer con tal peine trocitos de papel o de plástico que no estén cargados (figura 21.8a). ¿Cómo es posible esto?

Esta interacción es un efecto de carga inducida. Incluso en un aislante, las cargas eléctricas pueden desplazarse un poco en un sentido u otro cuando hay otra carga cerca. Esto se ilustra en la figura 21.8b; el peine de plástico cargado negativamente ocasiona un cambio ligero de carga dentro de las moléculas del aislante neutro: el efecto llamado *polarización*. Las cargas positivas y negativas en el material se hallan presentes en cantidades iguales; no obstante, las cargas positivas están más cerca del peine de plástico, por lo que reciben una fuerza de atracción mayor que la fuerza de repulsión que se ejerce sobre las cargas negativas, dando así una fuerza de atracción neta. (En la sección 21.3 estudiaremos el modo en que las fuerzas eléctricas dependen de la distancia.) Observe que un aislante neutro también es atraído por un peine cargado *positivamente* (figura 21.8c). Ahora las cargas en el aislante se mueven en la dirección opuesta; las cargas negativas en el aislante están más cerca del peine y reciben una fuerza de atracción mayor que la fuerza de repulsión ejercida sobre las cargas positivas del aislante. Por lo tanto, un objeto con carga de *cualquier* signo ejerce una fuerza de atracción sobre un aislante sin carga.

La atracción entre un objeto cargado y uno descargado tiene muchas aplicaciones prácticas importantes como, por ejemplo, el proceso de pintura electrostática que se utiliza en la industria automotriz (figura 21.9). El objeto metálico que va a pintarse se conecta a tierra (al "suelo", en la figura 21.9), y a las gotitas de pintura se les da una carga

21.9 Proceso de pintado electrostático (compárelo con las figuras 21.7b y 21.7c).



eléctrica conforme salen de la boquilla rociadora. Al acercarse las gotitas de pintura al objeto que se pinta, aparecen en éste cargas inducidas del signo opuesto, como se ilustra en la figura 21.7b, que atraen las gotitas a la superficie. Este proceso minimiza la formación de nubes de partículas dispersas de pintura y da un acabado particularmente liso.

Evalúe su comprensión de la sección 21.2 Imagine que tiene dos esferas metálicas ligeras y que cada una de ellas cuelga de un cordón de nailon aislante. Una de las esferas tiene carga neta negativa; en tanto que la otra no tiene carga neta. *a*) Si las esferas están cerca una de otra pero no se tocan, ¿i) se atraerán mutuamente, ii) se repelerán o iii. no ejercerán fuerza alguna sobre la otra? *b*) Ahora se permite que las esferas entren en contacto. Una vez que se tocan, ¿las dos esferas i) se atraerán, ii) se repelerán o iii) no ejercerán fuerza alguna sobre la otra?

21.3 Ley de Coulomb

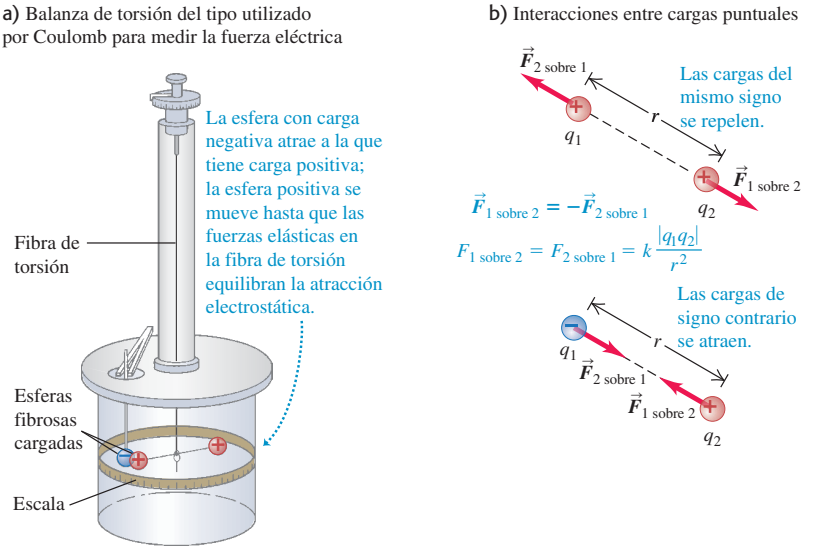
Activ Physics ONLINE
11.1 Fuerza eléctrica: ley de Coulomb
11.2 Fuerza eléctrica: principio de superposición
11.3 Fuerza eléctrica: superposición (cuantitativa)

En 1784 Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) estudió con mucho detalle las fuerzas de atracción de partículas cargadas. Usó una balanza de torsión (figura 21.10a) similar a la que Cavendish emplearía 13 años después para estudiar la mucho más débil interacción gravitacional, como vimos en la sección 12.1. Para **cargas puntuales**, cuerpos cargados muy pequeños en comparación con la distancia r que los separa, Coulomb descubrió que la fuerza eléctrica es proporcional a $1/r^2$. Es decir, cuando se duplica la distancia r, la fuerza disminuye a $\frac{1}{4}$ de su valor inicial; cuando la distancia disminuye a la mitad, la fuerza incrementa cuatro veces su valor inicial.

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales también depende de la cantidad de carga en cada cuerpo, la que se denotará con q o Q. Para estudiar esta dependencia, Coulomb dividió una carga en dos partes iguales poniendo en contacto un conductor esférico con carga pequeño, con una esfera idéntica pero sin carga; por simetría, la carga se compartía por igual entre las dos esferas. (Observe el papel esencial que tiene el principio de conservación de la carga en este procedimiento.) De esa manera, él podía obtener un medio, un cuarto, etcétera, de cualquier carga inicial. Descubrió que las fuerzas que dos cargas puntuales q_1 y q_2 ejercían una sobre la otra eran proporcionales a cada carga, por lo que también eran proporcionales a su *producto* q_1q_2.

De ese modo, Coulomb estableció la que ahora se conoce como **ley de Coulomb**:

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.



21.10 a) Medición de la fuerza eléctrica entre cargas puntuales. b) Las fuerzas eléctricas entre cargas puntuales obedecen la tercer ley de Newton: $\vec{F}_{1\text{ sobre }2} = -\vec{F}_{2\text{ sobre }1}$.

En términos matemáticos, la magnitud F de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales, q_1 y q_2, separadas una distancia r, ejerce sobre la otra se expresa como

$$F = k\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \tag{21.1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende del sistema de unidades que se emplee. En la ecuación (21.1) se utiliza la notación de valor absoluto porque las cargas q_1 y q_2 pueden ser positivas o negativas; en tanto que la magnitud de la fuerza F siempre es positiva.

Las direcciones de las fuerzas que las dos cargas ejercen sobre la otra siempre son a lo largo de la recta que las une. Cuando las cargas q_1 y q_2 tienen el mismo signo, positivo o negativo, las fuerzas son de repulsión; cuando las cargas tienen signos opuestos, las fuerzas son de atracción (figura 21.10b). Las dos fuerzas obedecen la tercera ley de Newton; siempre tienen la misma magnitud y dirección opuesta, aun cuando las cargas no tengan igual magnitud.

La proporcionalidad de la fuerza eléctrica con respecto a $1/r^2$ es algo que se ha comprobado con gran precisión. No hay razón para sospechar que el exponente sea distinto de 2. Así que la forma de la ecuación (21.1) es la misma que la forma de la ley de la gravitación. No obstante, las interacciones eléctricas y gravitacionales son dos clases distintas de fenómenos. Las interacciones eléctricas dependen de las cargas eléctricas y pueden ser de atracción o de repulsión; mientras que las gravitacionales dependen de la masa y siempre son de atracción (porque no existe algo como la masa negativa).

Constantes eléctricas fundamentales

El valor de la constante de proporcionalidad k en la ley de Coulomb depende del sistema de unidades que se emplee. En nuestro estudio de la electricidad y el magnetismo, tan sólo usaremos unidades del SI, las cuales incluyen la mayoría de las unidades con que estamos familiarizados, como el volt, ampere, ohm y watt. (*No* existe un sistema inglés de unidades eléctricas.) La unidad del SI para la carga eléctrica se llama **coulomb** (1 C). En unidades del SI, la constante k que aparece en la ecuación (21.1) es

$$k = 8.987551787 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \cong 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

El valor de k se conoce con un número tan grande de cifras significativas porque se relaciona de cerca con la rapidez de la luz en el vacío. (Esto lo veremos en el capítulo 32, al estudiar la radiación electromagnética.) Como vimos en la sección 1.3, tal rapidez se *define* por ser exactamente $c = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$. El valor numérico de k se define en términos de c como

$$k = (10^{-7}\ \mathrm{N \cdot s^2/C^2})c^2$$

Se invita al lector a comprobar esta expresión para confirmar que k tiene las unidades correctas.

En principio es posible medir la fuerza eléctrica F entre dos cargas iguales q a una distancia de r, y usar la ley de Coulomb para determinar la carga. Es decir, se puede considerar el valor de k como una definición operacional del coulomb. Por razones de precisión experimental, es mejor definir el coulomb en términos de la unidad de *corriente* eléctrica (carga por unidad de tiempo), el *ampere*, que es igual a 1 coulomb por segundo. En el capítulo 28 volveremos a esta definición.

En unidades del SI, la constante k de la ecuación (21.1) se escribe por lo general como $1/4\pi\epsilon_0$, donde ϵ_0 ("épsilon cero") es otra constante. Esto parece complicado, pero en realidad simplifica muchas de las fórmulas que encontraremos en capítulos posteriores. De aquí en adelante, en general escribiremos la ley de Coulomb como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad \text{(ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales)} \tag{21.2}$$

Las constantes en la ecuación (21.2) son, aproximadamente,

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

En los ejemplos y problemas será frecuente que utilicemos el valor aproximado

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

Que está dentro de alrededor del 0.1% del valor correcto.

Como vimos en la sección 21.1, la unidad más fundamental de carga es la magnitud de la carga de un electrón o un protón, que se denota con e. El valor más preciso de que se disponía hasta la escritura de este libro era de

$$e = 1.60217653(14) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Un coulomb representa el negativo de la carga total de aproximadamente 6×10^{18} electrones. En comparación, un cubo de cobre de 1 cm por lado contiene cerca de 2.4×10^{24} electrones. Por el filamento incandescente de una bombilla de linterna pasan cada segundo alrededor de 10^{19} electrones.

En problemas de electrostática (es decir, aquellos que implican cargas en reposo), es muy raro encontrar cargas tan grandes como de 1 coulomb. ¡Dos cargas de 1 C separadas 1 m ejercerían fuerzas entre sí de 9×10^9 N (cerca de 1 millón de toneladas)! La carga total de todos los electrones en una moneda de cobre de un centavo es aún mayor, de 1.4×10^5 C, lo cual demuestra que no podemos alterar mucho la neutralidad eléctrica sin usar fuerzas demasiado grandes. Los valores más comunes de cargas fluctúan desde 10^{-9} hasta 10^{-6} C. Es frecuente usar al microcoulomb ($1\ \mu\mathrm{C} = 10^{-6}$ C) y al nanocoulomb ($1\ \mathrm{nC} = 10^{-9}$ C) como unidades de carga prácticas.

Ejemplo 21.1 La fuerza eléctrica contra la fuerza gravitatoria

Una partícula α ("alfa") es el núcleo de un átomo de helio. Tiene una masa de $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg y una carga de $q = +2e = 3.2 \times 10^{-19}$ C. Compare la fuerza de la repulsión eléctrica entre dos partículas α con la fuerza de la atracción gravitatoria que hay entre ellas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la ley de Newton de la fuerza de gravedad F_g entre partículas (véase la sección 12.1) y la ley de Coulomb para la fuerza eléctrica F_e entre cargas puntuales. Se pide comparar dichas fuerzas, por lo que la incógnita es la *razón* de ambas fuerzas, F_e/F_g.

PLANTEAR: La figura 21.11 muestra el diagrama. La magnitud de la fuerza de repulsión eléctrica está dada por la ecuación (21.2):

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional F_g está dada por la ecuación (12.1):

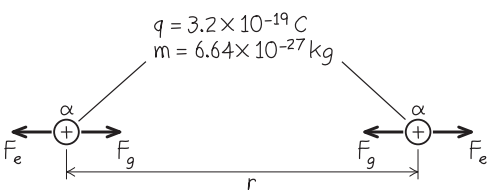
$$F_g = G\frac{m^2}{r^2}$$

EJECUTAR: La razón de la fuerza eléctrica con respecto a la fuerza gravitatoria es

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}\frac{q^2}{m^2} = \frac{9.0 \times 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}}{6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}}\frac{(3.2 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6.64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}$$
$$= 3.1 \times 10^{35}$$

EVALUAR: Este número tan asombrosamente grande muestra que, en esta situación, la fuerza gravitatoria es despreciable por completo en comparación con la fuerza eléctrica. Ello siempre se cumple para interacciones de partículas atómicas y subatómicas. (Observe que este resultado no depende de la distancia r entre las dos partículas α. No obstante, para objetos del tamaño de un ser humano o de un planeta, las cargas positiva y negativa son de magnitud casi igual; en tanto que la fuerza eléctrica neta por lo general es mucho *menor* que la gravitatoria.

21.11 Nuestro esquema para este problema.



Superposición de fuerzas

Según la enunciamos, la ley de Coulomb describe sólo la interacción entre dos cargas *puntuales*. Los experimentos demuestran que cuando dos cargas ejercen fuerzas de manera simultánea sobre una tercera carga, la fuerza total que actúa sobre esa carga es la *suma vectorial* de las fuerzas que las dos cargas ejercerían individualmente. Esta propiedad importante, llamada **principio de superposición de fuerzas**, se cumple para cualquier número de cargas. Varios de los ejemplos al final de esta sección muestran aplicaciones del principio de superposición.

En sentido estricto, la ley de Coulomb tal como fue establecida debería usarse tan sólo para cargas puntuales *en el vacío*. Si hay materia presente entre las cargas, la fuerza neta que actúa sobre cada una se altera, debido a las cargas inducidas en las moléculas del material interpuesto. Este efecto se describirá más adelante. No obstante, es práctico utilizar la ley de Coulomb sin modificar para cargas puntuales en el aire, ya que a presión atmosférica normal, la presencia del aire cambia la fuerza eléctrica en aproximadamente una parte en 2000 de su valor en el vacío.

Estrategia para resolver problemas 21.1 Ley de Coulomb

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Coulomb viene al caso siempre que se necesite conocer la fuerza eléctrica que actúa entre partículas cargadas.

PLANTEAR *el problema* utilizando los siguientes pasos:

1. Haga un dibujo que muestre la ubicación de las partículas cargadas, e indique la carga de cada una. Este paso tiene especial importancia si hay más de dos partículas cargadas.
2. Si hay presentes tres o más cargas que no se localicen sobre la misma línea, elabore un sistema de coordenadas xy.
3. Es frecuente que se necesite encontrar la fuerza eléctrica sobre una partícula dada. Si es así, debe identificarse ésta.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para cada partícula que ejerza una fuerza sobre la partícula de interés, calcule la magnitud de dicha fuerza usando la ecuación (21.2).
2. Dibuje los vectores de fuerza eléctrica que actúen sobre la(s) partícula(s) de interés, debidos a cada una de las demás partículas (es decir, elabore un diagrama de cuerpo libre). Recuerde que si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2 apunta desde la partícula 2 hacia la partícula 1; pero si las cargas tienen el mismo signo, la fuerza sale de la partícula 2 alejándose de la partícula 1.
3. Calcule la fuerza eléctrica total sobre la(s) partícula(s) de interés. Recuerde que la fuerza eléctrica, como toda fuerza, es un *vector*. Cuando las fuerzas que actúan sobre una carga son causadas por dos o más cargas diferentes, la fuerza total sobre la carga es la *suma vectorial* de las fuerzas individuales. Si lo desea, puede regresar y consultar el álgebra de vectores en las secciones 1.7 a 1.9. Con frecuencia es útil emplear componentes en un sistema de coordenadas xy. Asegúrese de utilizar la notación vectorial correcta; si un símbolo representa una cantidad vectorial, escriba una flecha sobre él. Si usted se descuida con su notación, también lo hará con su razonamiento.
4. Como siempre, es esencial usar unidades consistentes. Con el valor de $k = 1/4\pi\epsilon_0$ que se dio, las distancias *deben* expresarse en metros, la carga en coulombs y la fuerza en newtons. Si hubiera distancias en centímetros, pulgadas o estadios, ¡no olvide convertirlas! Cuando se da una carga en microcoulombs (μC) o nanocoulombs (nC), recuerde que $1\ \mu\text{C} = 10^{-6}\ \text{C}$ y que $1\ \text{nC} = 10^{-9}\ \text{C}$.
5. Algunos ejemplos y problemas de este capítulo y posteriores implican una distribución continua de la carga a lo largo de una línea recta o una superficie. En estos casos, la suma vectorial descrita en el paso 3 se vuelve una integral vectorial, por lo general expresada con el empleo de sus componentes. Se divide la distribución de la carga total en elementos infinitesimales, se aplica la ley de Coulomb para cada uno y luego se integra para obtener la suma vectorial. En ocasiones, es posible efectuar este proceso sin el uso explícito de la integración.
6. En muchas situaciones, la distribución de la carga será *simétrica*. Por ejemplo, tal vez se pida encontrar la fuerza sobre una carga Q en presencia de otras dos cargas idénticas q: una arriba y a la izquierda de Q, y la otra abajo y a la izquierda de Q. Si las distancias de Q a cada una de las otras cargas son iguales, la fuerza sobre Q que ejerce cada carga tiene la misma magnitud; si cada vector de fuerza forma el mismo ángulo con el eje horizontal, es muy fácil sumar estos vectores para obtener la fuerza neta. Siempre que sea posible, aproveche cualquier simetría para simplificar el proceso de resolución de problemas.

EVALUAR *su respuesta:* Compruebe si son razonables los resultados numéricos, y confirme que la dirección de la fuerza eléctrica neta esté de acuerdo con el principio de que las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo diferente se atraen.

Ejemplo 21.2 Fuerza entre dos cargas puntuales

Dos cargas puntuales, $q_1 = +25$ nC y $q_2 = -75$ nC, están separadas por una distancia de 3.0 cm (figura 21.12a). Calcule la magnitud y la dirección de *a*) la fuerza eléctrica que q_1 ejerce sobre q_2; y *b*) la fuerza eléctrica que q_2 ejerce sobre q_1.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se piden las fuerzas eléctricas que dos cargas ejercen entre sí, por lo que será necesario utilizar la ley de Coulomb.

PLANTEAR: Se emplea la ecuación (21.2) para calcular la magnitud de la fuerza que ejerce cada partícula sobre la otra. Se utiliza la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que una partícula ejerce sobre la otra.

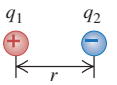
EJECUTAR: *a*) Después de convertir la carga a coulombs y la distancia a metros, la magnitud de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2 es

$$F_{1\text{ sobre }2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$
$$= (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\,\frac{|(+25\times10^{-9}\ \text{C})(-75\times10^{-9}\ \text{C})|}{(0.030\ \text{m})^2}$$
$$= 0.019\ \text{N}$$

Como las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción; es decir, la fuerza que actúa sobre q_2 está dirigida hacia q_1 por la recta que une las dos cargas, como se ilustra en la figura 21.12b.

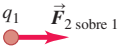
21.12 ¿Qué fuerza q_1 ejerce sobre q_2? ¿Y qué fuerza q_2 ejerce sobre q_1? Las fuerzas gravitatorias son despreciables.

a) Las dos cargas



b) Diagrama de cuerpo libre para la carga q_2

c) Diagrama de cuerpo libre para la carga q_1



b) La tercera ley de Newton se aplica a la fuerza eléctrica. Aun cuando las cargas tienen diferentes magnitudes, la magnitud de la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es la *misma*, que la magnitud de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2:

$$F_{2\text{ sobre }1} = 0.019\ \text{N}$$

La tercera ley de Newton también establece que la dirección de la fuerza que ejerce q_2 sobre q_1 tiene exactamente la dirección opuesta, que la de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2; esto se indica en la figura 21.12c.

EVALUAR: Observe que la fuerza sobre q_1 está dirigida hacia q_2, como debe ser, ya que las cargas con signos opuestos se atraen mutuamente.

Ejemplo 21.3 Suma vectorial de las fuerzas eléctricas sobre una línea

Dos cargas puntuales se localizan en el eje $+x$ de un sistema de coordenadas. La carga $q_1 = 1.0$ nC está a 2.0 cm del origen, y la carga $q_2 = -3.0$ nC está a 4.0 cm del origen. ¿Cuál es la fuerza total que ejercen estas dos cargas sobre una carga $q_3 = 5.0$ nC que se encuentra en el origen? Las fuerzas gravitatorias son despreciables.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aquí hay *dos* fuerzas eléctricas que actúan sobre la carga q_3, las cuales deben sumarse para calcular la fuerza total.

PLANTEAR: La figura 21.13a muestra el sistema de coordenadas. La incógnita es la fuerza eléctrica neta que las otras dos cargas ejercen *sobre* la carga q_3. Ésta es la suma vectorial de las fuerzas debidas a q_1 y q_2 individualmente.

EJECUTAR: La figura 21.13b es un diagrama de cuerpo libre para la carga q_3. Observe que q_3 es repelida por q_1 (que tiene el mismo signo) y atraída hacia q_2 (que tiene signo opuesto). Después de convertir la carga a coulombs y la distancia a metros, se utiliza la ecuación (21.2) para encontrar la magnitud de $F_{1\text{ sobre }3}$ de la fuerza de q_1 sobre q_3:

$$F_{1\text{ sobre }3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_3|}{r^2}$$
$$= (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\,\frac{(1.0\times10^{-9}\ \text{C})(5.0\times10^{-9}\ \text{C})}{(0.020\ \text{m})^2}$$
$$= 1.12\times10^{-4}\ \text{N} = 112\ \mu\text{N}$$

Esta fuerza tiene una componente x negativa porque q_3 es repelida (es decir, empujada en la dirección $-x$) por q_1.

La magnitud $F_{2\text{ sobre }3}$ de la fuerza de q_2 sobre q_3 es

$$F_{2\text{ sobre }3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2 q_3|}{r^2}$$
$$= (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\,\frac{(3.0\times10^{-9}\ \text{C})(5.0\times10^{-9}\ \text{C})}{(0.040\ \text{m})^2}$$
$$= 8.4\times10^{-5}\ \text{N} = 84\ \mu\text{N}$$

Esta fuerza tiene una componente $+x$ debido a que q_3 es atraída (es decir, jalada en la dirección $+x$) hacia q_2. La suma de las componentes x es

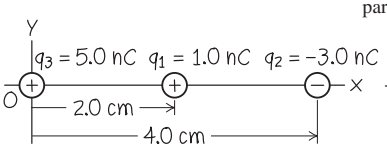
$$F_x = -112\ \mu\text{N} + 84\ \mu\text{N} = -28\ \mu\text{N}$$

No hay componentes y ni z. Así que la fuerza total sobre q_3 se dirige hacia la izquierda, con magnitud $28\ \mu\text{N} = 2.8\times10^{-5}$ N.

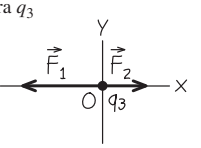
EVALUAR: Para comprobar las magnitudes de las fuerzas individuales, observe que q_2 tiene el triple de carga (en magnitud) que q_1, pero está dos veces más alejada de q_3. Según la ecuación (21.2), esto significa que $F_{2\text{ sobre }3}$ debe ser $3/2^2 = \frac{3}{4}$ veces la magnitud de $F_{1\text{ sobre }3}$. En realidad, nuestros resultados muestran que esta razón es $(84\ \mu\text{N})/(112\ \mu\text{N}) = 0.75$. La dirección de la fuerza neta también es lógica: $\vec{F}_{1\text{ sobre }3}$ es opuesta a $\vec{F}_{2\text{ sobre }3}$, y tiene una magnitud mayor, por lo que la fuerza neta tiene la dirección de $\vec{F}_{1\text{ sobre }3}$.

21.13 Nuestro esquema para este problema.

a) Nuestro diagrama de la situación



b) Diagrama de cuerpo libre para q_3



Ejemplo 21.4 Suma vectorial de fuerzas eléctricas en un plano

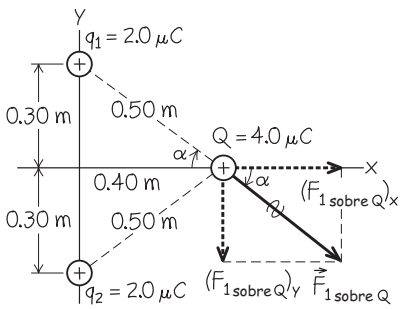
Dos cargas puntuales iguales y positivas, $q_1 = q_2 = 2.0\ \mu C$ se localizan en $x = 0$, $y = 0.30$ m y $x = 0$, $y = -0.30$ m, respectivamente. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica total (neta) que ejercen estas cargas sobre una tercera carga, también puntual, $Q = 4.0\ \mu C$ en $x = 0.40$ m, $y = 0$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 21.3, tenemos que calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre Q y después obtener la suma vectorial de las fuerzas.

PLANTEAR: En la figura 21.14 se ilustra la situación. Como las tres cargas no se encuentran en una línea, la mejor forma de calcular las fuerzas que q_1 y q_2 ejercen sobre Q consiste en usar componentes.

21.14 Nuestro esquema para este problema.



EJECUTAR: La figura 21.14 presenta la fuerza sobre Q debida a la carga superior q_1. De acuerdo con la ley de Coulomb, la magnitud F de esta fuerza es:

$$F_{1\text{ sobre }Q} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(2.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.50\ \text{m})^2}$$
$$= 0.29\ \text{N}$$

El ángulo α está por debajo del eje x, de manera que las componentes de esta fuerza están dadas por

$$(F_{1\text{ sobre }Q})_x = (F_{1\text{ sobre }Q})\cos\alpha = (0.29\ \text{N})\frac{0.40\ \text{m}}{0.50\ \text{m}} = 0.23\ \text{N}$$

$$(F_{1\text{ sobre }Q})_y = -(F_{1\text{ sobre }Q})\,\text{sen}\,\alpha = -(0.29\ \text{N})\frac{0.30\ \text{m}}{0.50\ \text{m}} = -0.17\ \text{N}$$

La carga inferior q_2 ejerce una fuerza de la misma magnitud, pero con ángulo α por *arriba* del eje x. Por simetría, se ve que su componente x es la misma que la de la carga superior; pero su componente y tiene signo contrario. Por lo tanto, las componentes de la fuerza total $\vec{F}$ sobre Q son:

$$F_x = 0.23\ \text{N} + 0.23\ \text{N} = 0.46\ \text{N}$$
$$F_y = -0.17\ \text{N} + 0.17\ \text{N} = 0$$

La fuerza total sobre Q está en la dirección $+x$, con magnitud de 0.46 N.

EVALUAR: La fuerza total sobre Q se ejerce en una dirección que no apunta alejándose directamente de q_1 ni de q_2. En vez de ello, su dirección es intermedia y apunta hacia fuera del *sistema* de cargas q_1 y q_2. ¿Puede ver el lector que la fuerza total *no* estaría en la dirección $+x$, si q_1 y q_2 no fueran iguales o si la disposición geométrica de las cargas no fuera tan simétrica?

Evalúe su comprensión de la sección 21.3 Suponga que la carga q_2 del ejemplo 21.4 fuera de $-2.0\ \mu C$. En este caso, la fuerza eléctrica total sobre Q estaría i) en la dirección $+x$; ii) en la dirección $-x$; iii) en la dirección $+y$; iv) en la dirección $-y$; v) igual a cero; vi) ninguna de las anteriores.

MP

21.4 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas

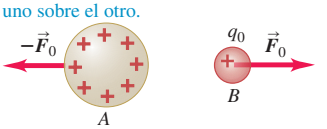
Cuando dos partículas cargadas eléctricamente interactúan en el espacio vacío, ¿cómo sabe cada una que la otra está ahí? ¿Qué ocurre en el espacio entre ellas que comunica el efecto de una sobre la otra? Podemos comenzar a responder estas preguntas y, a la vez, reformular la ley de Coulomb de una manera muy útil, con el empleo del concepto de *campo eléctrico*.

Campo eléctrico

Para introducir este concepto, veamos la repulsión mutua de dos cuerpos cargados positivamente, A y B (figura 21.15a). Suponga que B tiene carga q_0, y sea $\vec{F}_0$ la fuerza eléctrica que A ejerce sobre B. Una manera de concebir esta fuerza es como una fuerza de "acción a distancia", es decir, como una fuerza que actúa a través del espacio vacío sin necesidad de materia (tal como una varilla que empuje o una cuerda que jale), que la transmita a través del espacio. (La gravedad también puede considerarse como una fuerza que ejerce una "acción a distancia".) Sin embargo, un enfoque más fructífero de visualizar la repulsión entre A y B es como un proceso de dos etapas. En primer lugar, imaginemos que el cuerpo A, como resultado de la carga que porta, *modifica de algún modo las propiedades del espacio que lo rodea*. Después veamos que

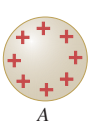
21.15 Un cuerpo cargado crea un campo eléctrico en el espacio que lo rodea.

a) Los cuerpos A y B ejercen fuerzas eléctricas uno sobre el otro.

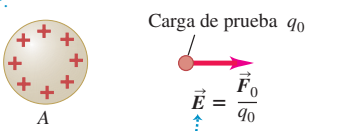


b) Quitemos el cuerpo B …

… e indiquemos su posición anterior como P.



c) El cuerpo A genera un campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P.



$\vec{E}$ es la fuerza por unidad de carga que el cuerpo A ejerce sobre una carga de prueba situada en P.

Activ ONLINE Physics
11.4 Campo eléctrico: carga puntual
11.9 Movimiento de una carga en un campo eléctrico: introducción
11.10 Movimiento en un campo eléctrico: problemas

el cuerpo B, como resultado de la carga que tiene, percibe cómo el espacio se modificó en su posición. La respuesta del cuerpo B es experimentar la fuerza $\vec{F}_0$.

Para entender como ocurre este proceso de dos etapas, primero se debe considerar sólo el cuerpo A: eliminamos el cuerpo B e indicamos su posición anterior con el punto P (figura 21.15b). Decimos que el cuerpo A cargado produce o causa un **campo eléctrico** en el punto P (y en todos los demás puntos de su entorno). Este campo eléctrico está presente en P incluso si no hay carga en P, ya que tan sólo es consecuencia de la carga en el cuerpo A. Si después se coloca una carga puntual q_0 en el punto P, experimenta la fuerza $\vec{F}_0$. Adoptamos el punto de vista de que esta fuerza es ejercida sobre q_0 *por el campo* en P (figura 21.15c). Así, el campo eléctrico es el intermediario con el que A comunica su presencia a q_0. Debido a que la carga puntual q_0 experimentaría una fuerza en *cualquier* punto del entorno de A, el campo eléctrico que A produce existe en todos los puntos de la región que rodea A.

De igual modo, podríamos decir que la carga puntual q_0 produce un campo eléctrico en el espacio alrededor suyo, y que este campo eléctrico ejerce la fuerza $-\vec{F}_0$ sobre el cuerpo A. Por cada fuerza (la fuerza de A sobre q_0 y la fuerza de q_0 sobre A), hay una carga que origina un campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre la segunda carga. Hacemos énfasis en que ésta es una *interacción* entre *dos* cuerpos cargados. Una sola carga produce un campo eléctrico en el espacio circundante; sin embargo, este campo eléctrico no ejerce una fuerza neta sobre la carga que lo creó; se trata de un ejemplo del principio general de que un cuerpo no puede ejercer una fuerza neta sobre sí mismo, como se vio en la sección 4.3. (Si este principio dejara de ser válido, ¡el lector sería capaz de elevarse hasta el techo si tirara de su cinturón hacia arriba!)

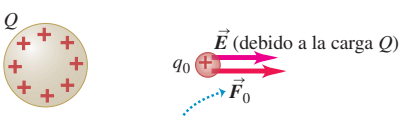
La fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico que *otros* cuerpos cargados originan.

Para averiguar experimentalmente si hay un campo eléctrico en un punto específico, colocamos un pequeño cuerpo cargado, al que llamamos **carga de prueba**, en el punto (figura 21.15c). Si la carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica, entonces en ese punto existe un campo eléctrico. Este campo lo producen cargas distintas de q_0.

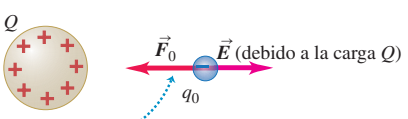
La fuerza es una cantidad vectorial, por lo que el campo eléctrico también es una cantidad vectorial. (Observe que en el análisis siguiente se usa notación de vectores, así como letras en negritas y signos de más, menos e igual.) Se define el *campo eléctrico* $\vec{E}$ en un punto como la fuerza eléctrica $\vec{F}_0$ que experimenta una carga de prueba q_0 en dicho punto, dividida entre la carga q_0. Es decir, el campo eléctrico en cierto punto es igual a la *fuerza eléctrica por unidad de carga* que una carga experimenta en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \quad \text{(definición de campo eléctrico como fuerza eléctrica por unidad de carga)} \tag{21.3}$$

21.16 Fuerza $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}$ ejercida sobre una carga puntual q_0 colocada en un campo eléctrico $\vec{E}$.



La fuerza sobre una carga de prueba positiva q_0 apunta en la dirección del campo eléctrico.



La fuerza sobre una carga de prueba negativa q_0 apunta en dirección contraria a la del campo eléctrico.

En unidades del SI, en las cuales la unidad de fuerza es 1 N y la unidad de carga es 1 C, la unidad para la magnitud del campo eléctrico es 1 newton por coulomb (1 N/C).

Si se conoce el campo eléctrico $\vec{E}$ en cierto punto, la ecuación (21.3) se reacomoda y da la fuerza $\vec{F}_0$ experimentada por una carga puntual q_0 colocada en ese punto. Esta fuerza es igual al campo eléctrico $\vec{E}$ producido en ese punto por cargas distintas de q_0, multiplicado por la carga q_0:

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E} \quad \text{(la fuerza ejercida sobre una carga puntual } q_0 \text{ por un campo eléctrico } \vec{E}\text{)} \tag{21.4}$$

La carga q_0 puede ser positiva o negativa. Si q_0 es *positiva*, la fuerza $\vec{F}_0$ experimentada por la carga tiene la misma dirección que $\vec{E}$; si q_0 es *negativa*, $\vec{F}_0$ y $\vec{E}$ tienen direcciones opuestas (figura 21.16).

Aunque el concepto de campo eléctrico tal vez sea nuevo para usted, la idea básica —que un cuerpo origina un campo en el espacio que lo rodea, y un segundo cuerpo responde a dicho campo— en realidad ya la ha utilizado antes. Compare la

ecuación (21.4) con la expresión ya conocida de la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$ que la Tierra ejerce sobre una masa m_0:

$$\vec{F}_g = m_0\vec{g} \tag{21.5}$$

En esta expresión, $\vec{g}$ es la aceleración debida a la gravedad. Si dividimos ambos lados de la ecuación (21.5) entre la masa m_0, obtenemos

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}$$

Así, $\vec{g}$ puede considerarse como la fuerza gravitatoria por unidad de masa. Por analogía con la ecuación (21.3), interpretamos $\vec{g}$ como el *campo gravitacional* y, de esta manera, tratamos la interacción gravitacional entre la Tierra y la masa m_0 como un proceso de dos etapas: la Tierra origina un campo gravitacional $\vec{g}$ en el espacio que la rodea, y éste ejerce una fuerza dada por la ecuación (21.5) sobre la masa m_0 (que se puede considerar como una *masa de prueba*). En este sentido, cada vez que empleamos la ecuación (21.5) usamos el concepto de campo para la fuerza de gravedad. El campo gravitacional $\vec{g}$, o fuerza gravitatoria por unidad de masa, es un concepto útil porque no depende de la masa del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza gravitatoria; asimismo, el campo eléctrico $\vec{E}$, o fuerza eléctrica por unidad de carga, es útil porque no depende de la carga del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza eléctrica.

CUIDADO $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}_0$ **es sólo para cargas de prueba *puntuales*** La fuerza eléctrica experimentada por una carga de prueba q_0 varía de un punto a otro, de manera que el campo eléctrico también es diferente en puntos distintos. Por esta razón, la ecuación (21.4) se usa únicamente para calcular la fuerza eléctrica sobre una carga *puntual*. Si un cuerpo cargado tiene un tamaño suficientemente grande, el campo eléctrico $\vec{E}$ llega a tener magnitudes y direcciones muy distintas en sus diversos puntos, y el cálculo de la fuerza eléctrica neta sobre él puede ser más complicado.

Hasta este momento hemos ignorado una dificultad sutil pero importante en nuestra definición de campo eléctrico: en la figura 21.15, la fuerza que ejerce la carga de prueba q_0 sobre la distribución de carga en el cuerpo A provoca desplazamientos de esta distribución, lo cual es especialmente cierto si el cuerpo A es un conductor donde la carga se mueva con libertad. Por lo tanto, el campo eléctrico alrededor de A cuando q_0 está presente tal vez no sea el mismo que si q_0 está ausente. No obstante, si q_0 es muy pequeña, la redistribución de la carga en el cuerpo A también es muy pequeña, por lo que para hacer una definición completamente correcta del campo eléctrico tomamos el *límite* de la ecuación (21.3), a medida que la carga de prueba q_0 tiende a cero, y el efecto perturbador de q_0 sobre la distribución de la carga se vuelve despreciable:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

En los cálculos prácticos del campo eléctrico $\vec{E}$ producido por una distribución de carga, consideraremos que tal distribución es fija, por lo que no será necesario considerar el límite del proceso.

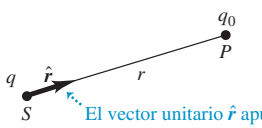
El campo eléctrico de una carga puntual

Si la fuente de distribución es una carga puntual q, será fácil encontrar el campo eléctrico que produce. A la ubicación de la carga la llamamos el **punto de origen**; y al punto P donde se determina el campo, el **punto del campo**. También es útil introducir un *vector unitario* $\hat{\boldsymbol{r}}$ que apunte a lo largo de la línea que va del punto de origen al punto del campo (figura 21.17a). Este vector unitario es igual al vector de desplazamiento $\vec{r}$ del punto de origen al punto del campo, dividido entre la distancia $\hat{r} = |\vec{r}|$ que separa a los dos puntos; es decir, $\hat{r} = \vec{r}/r$. Si colocamos una pequeña carga de prueba q_0 en el punto del campo P, a una distancia r del punto de origen, la magnitud F_0 de la fuerza está dada por la ley de Coulomb, ecuación (21.2):

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2}$$

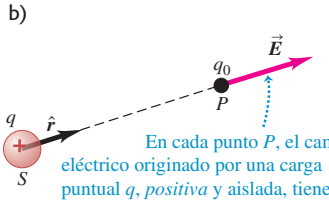
21.17 Campo eléctrico $\vec{E}$ producido en el punto P por una carga puntual aislada q en S. Observe que tanto en b) como en c), $\vec{E}$ es *producido* por q [véase la ecuación (21.7)] pero *actúa* sobre la carga q_0 en el punto P [véase la ecuación (21.4)].

a)



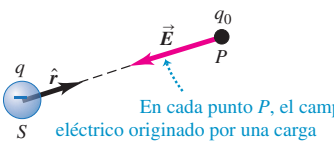
El vector unitario $\hat{r}$ apunta del punto de origen S al punto del campo P.

b)



En cada punto P, el campo eléctrico originado por una carga puntual q, *positiva* y aislada, tiene una dirección que se *aleja* de la carga en la *misma* dirección que $\hat{r}$.

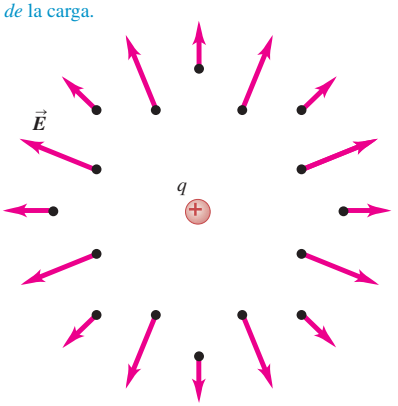
c)



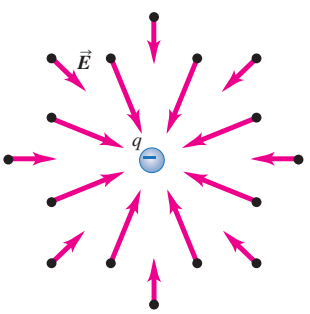
En cada punto P, el campo eléctrico originado por una carga puntual q, *negativa* y aislada, tiene una dirección *hacia* la carga en dirección *opuesta* de $\hat{r}$.

21.18 Una carga puntual q produce un campo eléctrico $\vec{E}$ en *todos* los puntos del espacio. La intensidad del campo disminuye conforme la distancia aumenta.

a) El campo producido por una carga puntual positiva apunta en una dirección que se *aleja de* la carga.



b) El campo producido por una carga puntual negativa apunta *hacia* la carga.



De la ecuación (21.3) se obtiene que la magnitud E del campo eléctrico en P es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \qquad \text{(magnitud del campo eléctrico en una carga puntual)} \qquad (21.6)$$

Con el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$, escribimos una ecuación *vectorial* que da tanto la magnitud como la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{(campo eléctrico de una carga puntual)} \qquad (21.7)$$

Por definición, el campo eléctrico de una carga puntual siempre tiene una dirección que *se aleja de* una carga positiva (es decir, en la misma dirección que $\hat{\boldsymbol{r}}$; véase la figura 21.17b), pero *se acerca* hacia una carga negativa (es decir, en la dirección opuesta a $\hat{\boldsymbol{r}}$; véase la figura 21.17c).

Hemos hecho hincapié en el cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ en cierto punto. Sin embargo, como $\vec{E}$ puede variar de un punto a otro, no es una cantidad vectorial única, sino un conjunto *infinito* de cantidades vectoriales, cada una de las cuales está asociada con un punto del espacio. Éste es un ejemplo de **campo vectorial**. En la figura 21.18 se ilustran algunos de los vectores del campo producidos por una carga puntual positiva o negativa. Si usamos un sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z), cada componente de $\vec{E}$ en cualquier punto en general es función de las coordenadas (x, y, z) del punto. Dichas funciones se representan como $E_x\,(x, y, z)$, $E_y\,(x, y, z)$ y $E_z\,(x, y, z)$. Los campos vectoriales forman parte importante del lenguaje de la física, no sólo en la electricidad y el magnetismo. Un ejemplo de campo vectorial de la vida cotidiana es la velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$ de las corrientes de viento; la magnitud y la dirección de $\vec{\boldsymbol{v}}$, y por lo tanto de sus componentes vectoriales, varían de un punto a otro en la atmósfera.

En ciertas situaciones, la magnitud y la dirección del campo (así como sus componentes vectoriales) tienen los mismos valores en cualquier parte de una región dada, en cuyo caso se dice que el campo es *uniforme* en tal región. Un ejemplo importante de esto es el campo eléctrico dentro de un *conductor*: cuando esto sucede el campo ejerce una fuerza en cada carga en el conductor, lo cual da a las cargas libres un movimiento neto. Por definición, una situación electrostática es aquella donde las cargas *no* tienen movimiento neto. De lo anterior se concluye que *en electrostática, el campo eléctrico en cada punto dentro del material de un conductor debe ser igual a cero*. (Observe que no se dice que el campo sea necesariamente cero en un *agujero* dentro de un conductor.)

Con el concepto de campo eléctrico, nuestra descripción de las interacciones eléctricas tiene dos partes. La primera es que una distribución de carga dada actúa como una fuente del campo eléctrico. La segunda es que el campo eléctrico ejerce una fuerza sobre cualquier carga presente en el campo. Con frecuencia, nuestro análisis tiene dos etapas correspondientes: primero se calcula el campo causado por una distribución de carga de fuente; en segundo lugar, se examina el efecto del campo en términos de fuerza y movimiento. Es frecuente que el segundo paso implique las leyes de Newton y los principios de las interacciones eléctricas. En la sección siguiente, veremos cómo calcular campos originados por varias distribuciones de fuente; aunque en primer lugar se presentan algunos ejemplos de cálculo del campo debido a una carga puntual, así como de la obtención de la fuerza sobre una carga debida a un campo dado $\vec{E}$.

Ejemplo 21.5 Magnitud del campo eléctrico para una carga puntual

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto situado a 2.0 m de una carga puntual $q = 4.0$ nC? (La carga puntual puede representar cualquier objeto pequeño cargado con este valor de q, si las dimensiones del objeto son mucho menores que la distancia entre el objeto y el punto del campo.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema requiere la expresión para el campo eléctrico debido a una carga puntual.

PLANTEAR: Se dan la magnitud de la carga y la distancia que hay del objeto al punto del campo, por lo que usamos la ecuación (21.6) para calcular la magnitud del campo E.

EJECUTAR: De la ecuación (21.6),

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9.0\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{4.0\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{(2.0\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 9.0\ \mathrm{N/C}$$

EVALUAR: Para comprobar el resultado, se emplea la definición de campo eléctrico como la fuerza eléctrica por unidad de carga. Primero se usa la ley de Coulomb, ecuación (21.2), para obtener la magnitud F_0 de la fuerza sobre una carga de prueba q_0 colocada a 2.0 m de q:

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2} = (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{4.0\times10^{-9}\ \text{C}|q_0|}{(2.0\ \text{m})^2}$$
$$= (9.0\ \text{N/C})|q_0|$$

Entonces, a partir de la ecuación (21.3), la magnitud de $\vec{E}$ es

$$E = \frac{F_0}{|q_0|} = 9.0\ \text{N/C}$$

Como q es positiva, la *dirección* de $\vec{E}$ en este punto ocurre a lo largo de la línea que va de q a q_0, como se ilustra en la figura 21.17b. Sin embargo, la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ no dependen del signo de q_0. ¿Se da cuenta el lector de por qué no?

Ejemplo 21.6 Vector de campo eléctrico de una carga puntual

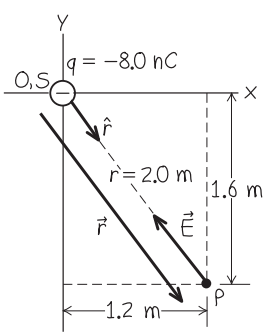
Una carga puntual $q = -8.0$ nC se localiza en el origen. Obtenga el vector de campo eléctrico en el punto del campo $x = 1.2$ m, $y = -1.6$ m.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se pide calcular el *vector* de campo eléctrico $\vec{E}$ debido a una carga puntual. Entonces, es necesario obtener ya sea las componentes de $\vec{E}$, o su magnitud y dirección.

PLANTEAR: En la figura 21.19 se ilustra la situación. El campo eléctrico está dado en forma vectorial por la ecuación (21.7). Para emplear esta ecuación, primero se encuentra la distancia r que hay entre el punto de origen S (la posición de la carga q) y el punto P en el campo, así como el vector unitario $\hat{r}$ que tiene la dirección que va de S a P.

21.19 Nuestro esquema para este problema.



EJECUTAR: La distancia entre la carga localizada en el punto de origen S (que en este ejemplo está en el origen O) y el punto P en el campo, es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.2\ \text{m})^2 + (-1.6\ \text{m})^2} = 2.0\ \text{m}$$

El vector unitario $\hat{r}$ está dirigido del punto de origen al punto del campo. Es igual al vector de desplazamiento $\vec{r}$ del punto de origen al punto del campo (que en la figura 21.19 se ilustra desviado a un lado para que no oculte los otros vectores), dividido entre su magnitud r:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}{r}$$
$$= \frac{(1.2\ \text{m})\hat{\imath} + (-1.6\ \text{m})\hat{\imath}}{2.0\ \text{m}} = 0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath}$$

Entonces, el vector de campo eléctrico es

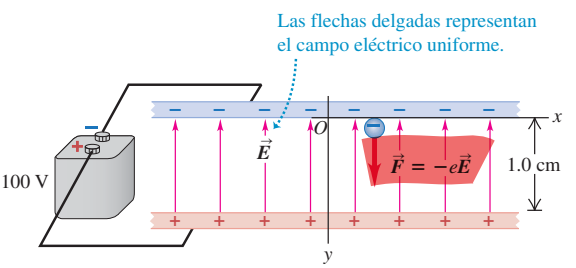
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$
$$= (9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-8.0\times10^{-9}\ \text{C})}{(2.0\ \text{m})^2}(0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath})$$
$$= (-11\ \text{N/C})\hat{\imath} + (14\ \text{N/C})\hat{\jmath}$$

EVALUAR: Como q es negativa, $\vec{E}$ tiene una dirección que va del punto del campo a la carga (el punto de origen), en dirección opuesta a $\hat{r}$ (compare la situación con la figura 21.17c). El cálculo de la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ se deja al lector (véase el ejercicio 21.36).

Ejemplo 21.7 Un electrón en un campo uniforme

Cuando la terminal de una batería se conecta a dos placas conductoras, grandes y paralelas, las cargas resultantes en las placas originan un campo eléctrico $\vec{E}$ en la región entre ellas, que es casi uniforme. (En la siguiente sección veremos la razón de esta uniformidad. Las placas cargadas de esta clase se usan en los dispositivos eléctricos comunes llamados *capacitores*, que estudiaremos en el capítulo 24.) Si las placas son horizontales y están separadas por 1.0 cm y se conectan a una batería de 100 volts, la magnitud del campo es $E = 1.00\times10^4$ N/C. Suponga que la dirección de $\vec{E}$ es vertical hacia arriba, como se ilustra con los vectores en la figura 21.20. *a*) Si un electrón en reposo se libera de la placa superior, ¿cuál es su aceleración? *b*) ¿Qué rapidez y qué energía cinética adquiere el electrón cuando viaja 1.0 cm hacia la placa inferior? *c*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que recorra esa distancia? Un electrón tiene una carga $-e = -1.60\times10^{-19}$ C y masa $m = 9.11\times10^{-31}$ kg.

21.20 Campo eléctrico uniforme entre dos placas conductoras paralelas conectadas a una batería de 100 volts. (En esta figura, la separación de las placas se exageró en relación con las dimensiones de las placas.)



continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo implica varios conceptos: la relación entre campo eléctrico y fuerza eléctrica, la relación entre fuerza y aceleración, la definición de energía cinética, y las relaciones cinemáticas entre aceleración, distancia, velocidad y tiempo.

PLANTEAR: En la figura 21.20 se ilustra el sistema de coordenadas. Se da el campo eléctrico, por lo que se utiliza la ecuación (21.4) para calcular la fuerza sobre el electrón; y la segunda ley de Newton, para obtener su aceleración. Como el campo entre las placas es uniforme, la fuerza y la aceleración son constantes y se pueden usar las fórmulas de aceleración constante del capítulo 3, para calcular la velocidad del electrón y el tiempo de su recorrido. La energía cinética se determina con la definición $K = \frac{1}{2}mv^2$.

EJECUTAR: (*a*) Observe que $\vec{E}$ está dirigido hacia arriba (en la dirección positiva del eje *y*), pero $\vec{F}$ va hacia abajo porque la carga del electrón es negativa. Por ello, F_y es negativa. Como F_y es constante, el electrón se mueve con aceleración constante a_y dada por

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.00 \times 10^{4}\ \text{N/C})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}$$
$$= -1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$$

¡Ésta es una aceleración enorme! Para acelerar así a un automóvil de 1000 kg, se necesitaría una fuerza aproximada de 2×10^{18} N (casi de 2×10^{14} toneladas). La fuerza gravitatoria sobre el electrón es despreciable por completo en comparación con la fuerza eléctrica.

(*b*) El electrón parte del reposo, por lo que su movimiento es tan sólo en la dirección del eje *y* (la dirección de la aceleración). Podemos encontrar la rapidez del electrón en cualquier posición usando la fórmula con aceleración constante $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Se tiene que $v_{0y} = 0$ y $y_0 = 0$, por lo que la rapidez $|v_y|$ si $y = -1.0$ cm $= -1.0 \times 10^{-2}$ m es

$$|v_y| = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{2(-1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2)(-1.0 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 5.9 \times 10^{6}\ \text{m/s}$$

La velocidad es hacia abajo, de manera que su componente *y* es $v_y = -5.9 \times 10^{6}$ m/s. La energía cinética del electrón es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.9 \times 10^{6}\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.6 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

c) De la fórmula con aceleración constante, $v_y = v_{0y} + a_y t$, tenemos que el tiempo que se requiere es muy corto:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{(-5.9 \times 10^{6}\ \text{m/s}) - (0\ \text{m/s})}{-1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2}$$
$$= 3.4 \times 10^{-9}\ \text{s}$$

(También se obtendría el tiempo despejando *t* de la ecuación $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$.)

EVALUAR: Este ejemplo muestra que en los problemas de partículas subatómicas tales como los electrones, hay muchas cantidades —incluyendo aceleración, rapidez, energía cinética y tiempo— que tienen valores *muy* diferentes de los que vemos en objetos comunes, como una pelota de béisbol o los automóviles.

Ejemplo 21.8 Una trayectoria del electrón

Si se lanzara un electrón hacia el campo eléctrico del ejemplo 21.7 con velocidad horizontal inicial v_0 (figura 21.21), ¿cuál sería la ecuación de su trayectoria?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 21.7 calculamos la aceleración del electrón. Nuestro objetivo ahora es encontrar la trayectoria que corresponde a dicha aceleración.

PLANTEAR: La aceleración es constante en la dirección negativa del eje *y* (no hay aceleración en la dirección *x*). Entonces, pueden usarse las ecuaciones de cinemática que se estudiaron en el capítulo 3, para el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante.

EJECUTAR: Se tiene $a_x = 0$ y $a_y = (-e)E/m$. En $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$ y $v_{0y} = 0$; entonces, en el tiempo *t*,

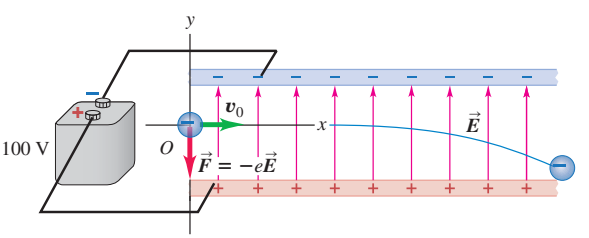
$$x = v_0 t \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$

Se elimina *t* entre estas ecuaciones, y se obtiene

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0^2}x^2$$

EVALUAR: Ésta es la ecuación de una parábola, como la trayectoria de un proyectil que se lanzara horizontalmente en el campo gravitacional de la Tierra (que vimos en la sección 3.3). Para una velocidad inicial dada del electrón, la curvatura de la trayectoria depende de la magnitud *E* del campo. Si invirtiéramos los signos de las cargas en las dos placas de la figura 21.21, la dirección de $\vec{E}$ también se invertiría, en tanto que la trayectoria del electrón sería una curva hacia arriba, no hacia abajo. Entonces, se puede "dirigir" el electrón si se varían las cargas en las placas. El campo eléctrico entre placas conductoras cargadas se utiliza para controlar la trayectoria de los haces de electrones en los osciloscopios.

21.21 Trayectoria parabólica de un electrón en un campo eléctrico uniforme.



Evalúe su comprensión de la sección 21.4 *a*) Una carga puntual negativa se mueve a lo largo de una trayectoria recta directamente hacia una carga puntual positiva estacionaria. ¿Qué aspecto(s) de la fuerza eléctrica sobre la carga puntual negativa permanecerán constantes a medida que se mueve? i) magnitud; ii) dirección; iii) tanto la magnitud como la dirección; iv) ni la magnitud ni la dirección. *b*) Una carga puntual negativa se desplaza a lo largo de una órbita circular, alrededor de una carga puntual positiva. ¿Qué aspecto(s) de la fuerza eléctrica sobre la carga puntual negativa permanecerán constantes a medida que se mueve? i) magnitud; ii) dirección; iii) tanto la magnitud como la dirección; iv) ni la magnitud ni la dirección.

21.5 Cálculos de campos eléctricos

Activ Physics
11.5 Campo eléctrico debido a un dipolo
11.6 Campo eléctrico: problemas

La ecuación (21.7) da el campo eléctrico causado por una sola carga puntual. Sin embargo, en la mayoría de situaciones reales que implican campos y fuerzas eléctricas, se encuentra que la carga está *distribuida* en el espacio. Las varillas de plástico y de vidrio cargadas de la figura 21.1 tiene carga eléctrica distribuida sobre sus superficies, igual que el tambor formador de imágenes en una impresora láser (figura 21.2). En esta sección aprenderemos a calcular los campos eléctricos causados por varias distribuciones de carga eléctrica. Los cálculos de esta clase tienen una importancia enorme para las aplicaciones tecnológicas de las fuerzas eléctricas. Para determinar las trayectorias de los electrones en un cinescopio, de los núcleos atómicos en un acelerador para radioterapia contra el cáncer, o de las partículas cargadas en un dispositivo electrónico semiconductor, se tiene que conocer la naturaleza detallada del campo eléctrico que actúa sobre las cargas.

Superposición de campos eléctricos

Para encontrar el campo originado por una distribución de carga, imaginamos que está constituida por muchas cargas puntuales q_1, q_2, q_3, . . . (En realidad se trata de una concepción muy realista, pues hemos visto que la carga es transportada por electrones y protones, que son tan pequeños que casi parecen puntos.) En cualquier punto P dado, cada carga puntual produce su propio campo eléctrico $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, . . . , por lo que una carga de prueba q_0 colocada en P experimenta una fuerza $\vec{F}_1 = q_0\vec{E}_1$ de la carga q_1, una fuerza $\vec{F}_2 = q_0\vec{E}_2$ de la carga q_2 y así sucesivamente. Del principio de superposición de fuerzas que se estudió en la sección 21.3, la fuerza *total* $\vec{F}_0$ que la distribución de carga ejerce sobre q_0 es la suma vectorial de estas fuerzas individuales:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = q_0\vec{E}_1 + q_0\vec{E}_2 + q_0\vec{E}_3 + \cdots$$

El efecto combinado de todas las cargas en la distribución queda descrito por el campo eléctrico *total* $\vec{E}$ en el punto P. De la definición de campo eléctrico, ecuación (21.3) esto es

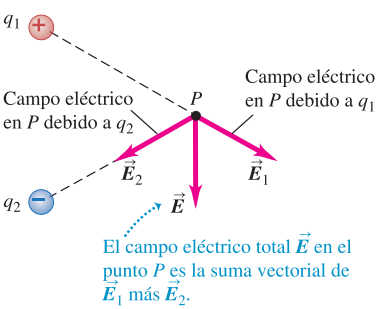
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

El campo eléctrico total en P es la suma vectorial de los campos en P debidos a cada carga puntual en la distribución de carga (figura 21.22). Éste es el **principio de superposición de campos eléctricos**.

Cuando la carga está distribuida a lo largo de una línea, sobre una superficie o en un volumen, son muy útiles algunos términos adicionales. Para una distribución de carga en línea (como la de una varilla de plástico cargada, larga y delgada), usamos λ (letra griega lambda) para representar la **densidad lineal de carga** (carga por unidad de longitud, medida en C/m). Cuando la carga está distribuida sobre una superficie (como la superficie del tambor formador de imágenes de una impresora láser), se usa σ (sigma) para representar la **densidad superficial de carga** (carga por unidad de área, se mide en C/m^2). Y cuando la carga se distribuye en un volumen, se usa ρ (ro) para representar la **densidad volumétrica de carga** (carga por unidad de volumen, C/m^3).

En los ejemplos que siguen, algunos de los cálculos tal vez parezcan intrincados; en los cálculos de campo eléctrico hay cierta complejidad matemática implícita. Una vez que usted haya trabajado con los ejemplos paso a paso, el proceso parecerá menos formidable. En el capítulo 28 usaremos muchas de las técnicas de cálculo de estos ejemplos, para determinar los campos *magnéticos* que las cargas en movimiento ocasionan.

21.22 Ilustración del principio de superposición de campos eléctricos.



Estrategia para resolver problemas 21.2 Cálculos de campo eléctrico

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Usar el principio de superposición donde se necesite, con la finalidad de calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga (dos o más cargas puntuales, una distribución en una línea, una superficie o un volumen, o una combinación de éstos).

PLANTEAR *el problema* en las siguientes etapas:

1. Elabore un dibujo que muestre con claridad las ubicaciones de las cargas y su elección de los ejes de coordenadas.
2. Indique en el dibujo la posición del *punto del campo* (punto donde se desea calcular el campo eléctrico $\vec{E}$). En ocasiones, el punto del campo será una posición arbitraria en una línea. Por ejemplo, quizá se pida determinar $\vec{E}$ en algún punto del eje x.

EJECUTAR *la solución*, como sigue:

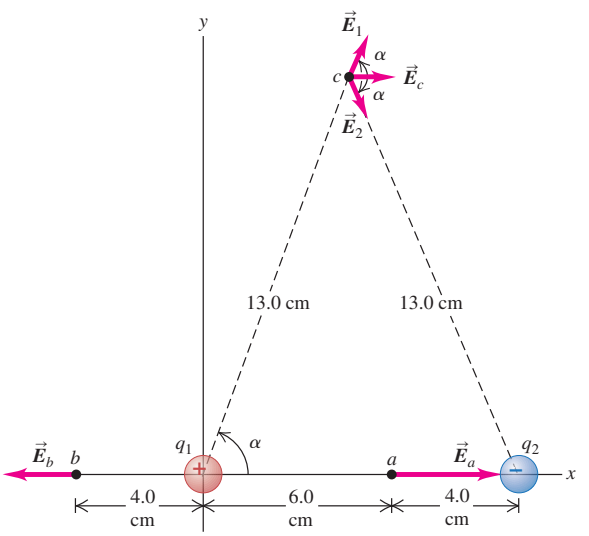
1. Asegúrese de usar unidades consistentes. Las distancias deben estar en metros y las cargas en coulombs. Si se dan en centímetros o nanocoulombs, no olvide convertirlas.
2. Cuando se sumen los campos eléctricos causados por las diferentes partes de la distribución de carga, recuerde que el campo eléctrico es un vector, por lo que se *debe* utilizar la suma vectorial. No sume simplemente las magnitudes de los campos individuales; las direcciones también son importantes.
3. Aproveche cualesquiera simetrías en la distribución de la carga. Por ejemplo, si una carga positiva y otra negativa de igual magnitud están colocadas de manera simétrica con respecto del punto del campo, producen campos eléctricos de la misma magnitud pero con direcciones que son como imágenes en el espejo. El uso de dichas simetrías simplificará los cálculos.
4. Es frecuente que se usen las componentes para efectuar sumas vectoriales. Utilice los métodos que aprendió en el capítulo 1 y de ser necesario repáselos. Use la notación adecuada para los vectores; diferencie con claridad los escalares, los vectores y las componentes de éstos. Asegúrese de que las componentes son consistentes con la elección de los ejes coordenados.
5. Al trabajar en las direcciones de los vectores $\vec{E}$, tenga cuidado de diferenciar entre el *punto de origen* y el *punto del campo*. El campo producido por una carga puntual positiva siempre tiene la dirección que va del punto de origen hacia el punto del campo; pero si la carga es negativa el campo tiene la dirección opuesta.
6. En ciertas situaciones se tendrá una distribución continua de la carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o en un volumen. En ese caso, se debe definir un elemento pequeño de la carga que se pueda considerar como un punto, determinar su campo eléctrico en el punto P, y encontrar la manera de sumar los campos de todos los elementos de carga. Por lo general, es más fácil hacer esto por separado para cada componente de $\vec{E}$, y será frecuente que se necesiten evaluar una o más integrales. Asegúrese de que los límites en las integrales sean los correctos, en especial cuando existe simetría en la situación, para evitar contar dos veces la carga.

EVALUAR *su respuesta:* Compruebe que la dirección de $\vec{E}$ sea razonable. Si el resultado para la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición (por ejemplo, la coordenada x), compruebe el resultado en cada límite, para el que se sepa cuál debería ser la magnitud. Cuando sea posible, verifique la respuesta obteniéndola de una forma diferente.

Ejemplo 21.9 Campo de un dipolo eléctrico

Dos cargas puntuales q_1 y q_2 de $+12$ nC y -12 nC, respectivamente, están separadas por una distancia de 0.10 m (figura 21.23). Esta combinación de dos cargas de igual magnitud y signos opuestos se denomina *dipolo eléctrico.* (Tales combinaciones ocurren con frecuencia en la naturaleza. Por ejemplo, en las figuras 21.8b y 21.8c, cada molécula en el aislante neutro es un dipolo eléctrico. En la sección 21.7 estudiaremos los dipolos con más detalle.) Calcule el campo eléctrico causado por q_1, el campo causado por q_2, y el campo total: *a*) en el punto *a*; *b*) en el punto *b*; y *c*) en el punto *c*.

21.23 Campo eléctrico en tres puntos, a, b y c, originado por las cargas q_1 y q_2, lo que constituye un dipolo eléctrico.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se necesita encontrar el campo eléctrico total en tres puntos diferentes originado por dos cargas puntuales. Usaremos el principio de superposición: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

PLANTEAR: En la figura 21.23 se muestra el sistema de coordenadas y las ubicaciones de los tres puntos del campo, a, b y c.

EJECUTAR: *a*) En el punto *a*, los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$, ocasionados por la carga positiva q_1 y la carga negativa q_2, respectivamente, están dirigidos hacia la derecha. Las magnitudes de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.060\ \text{m})^2}$$
$$= 3.0 \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.040\ \text{m})^2}$$
$$= 6.8 \times 10^4\ \text{N/C}$$

Las componentes de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son

$$E_{1x} = 3.0 \times 10^4\ \text{N/C} \qquad E_{1y} = 0$$
$$E_{2x} = 6.8 \times 10^4\ \text{N/C} \qquad E_{2y} = 0$$

De ahí que en el punto *a*, el campo eléctrico total $\vec{E}_a = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ tenga las componentes

$$(E_a)_x = E_{1x} + E_{2x} = (3.0 + 6.8) \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$(E_a)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

En el punto *a*, el campo total tiene una magnitud de 9.8×10^4 N/C y está dirigido hacia la derecha; por lo tanto,

$$\vec{E}_a = (9.8 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{\imath}$$

b) En el punto *b*, el campo $\vec{E}_1$ debido a q_1 se dirige hacia la izquierda; mientras que el campo $\vec{E}_2$ debido a q_2 tiene dirección hacia la derecha. Las magnitudes de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.040\ \text{m})^2}$$
$$= 6.8 \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.140\ \text{m})^2}$$
$$= 0.55 \times 10^4\ \text{N/C}$$

Las componentes de $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ y el campo total $\vec{E}_b$ en el punto *b* son:

$$E_{1x} = -6.8 \times 10^4\ \text{N/C} \qquad E_{1y} = 0$$
$$E_{2x} = 0.55 \times 10^4\ \text{N/C} \qquad E_{2y} = 0$$
$$(E_b)_x = E_{1x} + E_{2x} = (-6.8 + 0.55) \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$(E_b)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

Es decir, el campo eléctrico en *b* tiene una magnitud de 6.2×10^4 N/C y se dirige hacia la izquierda, por lo que

$$\vec{E}_b = (-6.2 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{\imath}$$

c) En el punto *c*, tanto $\vec{E}_1$ como $\vec{E}_2$ tienen la misma magnitud, ya que dicho punto está equidistante de ambas cargas y las magnitudes de las cargas son las mismas:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.130\ \text{m})^2}$$
$$= 6.39 \times 10^3\ \text{N/C}$$

La dirección de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se ilustran en la figura 21.23. Las componentes *x* de ambos vectores son las mismas:

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1\cos\alpha = (6.39 \times 10^3\ \text{N/C})\left(\frac{5}{13}\right)$$
$$= 2.46 \times 10^3\ \text{N/C}$$

Por simetría, las componentes *y* E_{1y} y E_{2y} son iguales y opuestas, por lo que suman cero. De aquí que las componentes del campo total $\vec{E}_c$ sean

$$(E_c)_x = E_{1x} + E_{2x} = 2(2.46 \times 10^3\ \text{N/C}) = 4.9 \times 10^3\ \text{N/C}$$
$$(E_c)_y = E_{1y} + E_{2y} = 0$$

De modo que en el punto *c* el campo eléctrico total tiene una magnitud de 4.9×10^3 N/C y está dirigido hacia la derecha, por lo que

$$\vec{E}_c = (4.9 \times 10^3\ \text{N/C})\hat{\imath}$$

¿Se sorprende que en el punto *c* el campo sea paralelo a la línea entre las dos cargas?

EVALUAR: Una manera alternativa de calcular el campo eléctrico en *c* consiste en usar la expresión vectorial para el campo de una carga puntual, ecuación (21.7). El vector de desplazamiento $\vec{r}_1$ desde q_1 hasta el punto *c*, a una distancia *r* de 13.0 cm, es

$$\vec{r}_1 = r\cos\alpha\,\hat{\imath} + r\,\text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$$

Entonces, el vector unitario que va de q_1 a *c* es

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r} = \cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$$

y el campo debido a q_1 en el punto *c* es

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$

Por simetría, el vector unitario $\hat{r}_2$ que va de q_2 al punto *c*, tiene la componente *x* opuesta pero la misma componente *y*, así que el campo en *c* debido a q_2 es

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{r}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}(-\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$

Como $q_2 = -q_1$, el campo total en *c* es

$$\vec{E}_c = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q_1)}{r^2}(-\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath})$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(2\cos\alpha\,\hat{\imath})$$
$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.13\ \text{m})^2}\left[2\left(\frac{5}{13}\right)\right]\hat{\imath}$$
$$= (4.9 \times 10^3\ \text{N/C})\hat{\imath}$$

como se había obtenido antes.

Ejemplo 21.10 Campo de un anillo con carga

Un conductor en forma de anillo con radio a tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme en todo su perímetro (figura 21.24). Encuentre el campo eléctrico en el punto P que se localiza sobre el eje del anillo a una distancia x del centro.

SOLUCIÓN

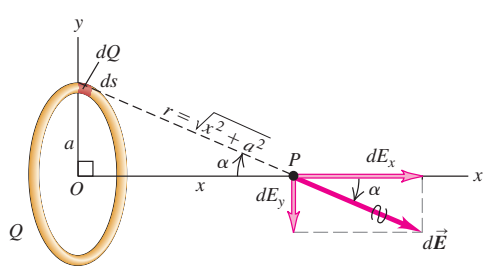
IDENTIFICAR: Éste es un problema de superposición de campos eléctricos. La dificultad es que ahora la carga se distribuye de manera continua alrededor del anillo, y no en cierto número de cargas puntuales.

PLANTEAR: El punto del campo se localiza de manera arbitraria sobre el eje x, como se indica en la figura 21.24. La incógnita es el campo eléctrico expresado en ese punto, expresado en función de la coordenada x.

EJECUTAR: Como se ilustra en la figura 21.24, imaginamos el anillo dividido en segmentos infinitesimales de longitud ds. Cada segmento tiene una carga dQ que actúa como fuente de carga puntual del campo eléctrico. Sea $d\vec{E}$ el campo eléctrico a partir de uno de tales segmentos; entonces, el campo eléctrico neto en P es la suma de todas las aportaciones $d\vec{E}$ desde todos los segmentos que constituyen el anillo. (Esta misma técnica sirve para cualquier situación en que la carga se distribuya a lo largo de una recta o una curva.)

El cálculo de $\vec{E}$ se simplifica mucho debido a que el punto P del campo se ubica sobre el eje de simetría del anillo. Considere dos segmentos en las partes superior e inferior del anillo: las contribuciones $d\vec{E}$ al campo en P a partir de dichos segmentos tienen la misma componente x, pero componentes y opuestas. Así, la componente y total del campo generada por este par de segmentos es igual a cero. Cuando sumamos las contribuciones desde todos los pares correspondientes de segmentos, resulta que el campo total $\vec{E}$ sólo tendrá una componente a lo largo del eje de simetría del anillo (el eje x), sin componente perpendicular a dicho eje (es decir, no hay componentes y ni componente z). Por lo tanto, el campo en P queda descrito completamente por su componente x: E_x.

21.24 Cálculo del campo eléctrico sobre el eje de un anillo de carga. En esta figura, se considera que la carga es positiva.



Para calcular E_x, se observa que el cuadrado de la distancia r a partir de un segmento de anillo al punto P es igual a $r^2 = x^2 + a^2$. De manera que la magnitud de la contribución de este segmento $d\vec{E}$ al campo eléctrico en P es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

Como $\cos\alpha = x/r = x/(x^2 + a^2)^{1/2}$, la componente x, dE_x, de este campo es

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para encontrar la componente x *total*, E_x, del campo en P, se integra esta expresión a lo largo de todos los segmentos del anillo:

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Como x no varía a medida que nos movemos de un punto a otro alrededor del anillo, todos los factores en el lado derecho son constantes, excepto dQ, es posible sacarlos de la integral, y como la integral de dQ es la carga total Q, finalmente resulta que

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath} \qquad (21.8)$$

EVALUAR: Nuestro resultado para $\vec{E}$ demuestra que en el centro del anillo ($x = 0$), el campo es igual a cero, lo que era de esperarse: las cargas en los lados opuestos del anillo empujarían en direcciones opuestas a una carga de prueba que se situara en el centro, y la suma de las fuerzas sería cero. Cuando el punto del campo P se encuentra mucho más lejos del anillo que el tamaño de éste (es decir, $x \gg a$), el denominador de la ecuación (21.8) toma un valor cercano a x^3, y la expresión se convierte aproximadamente en

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

En otras palabras, cuando estamos tan lejos del anillo que el tamaño a de éste es despreciable en comparación con la distancia x, su campo es el mismo que el de una carga puntual. Para un observador distante del anillo, éste parecería un punto, y el campo eléctrico lo refleja.

En este ejemplo, usamos un *argumento de simetría* para concluir que $\vec{E}$ tiene sólo una componente x en un punto sobre el eje de simetría del anillo. Este capítulo y los posteriores utilizaremos muchas veces argumentos de simetría; sin embargo, recuerde que estos únicamente se utilizan en casos especiales. En la figura 21.24, el argumento de simetría no se aplica para un punto en el plano xy que no esté sobre el eje x, y el campo tiene en general componentes tanto x como y.

Ejemplo 21.11 Campo de una línea con carga

Una carga eléctrica, Q, positiva está distribuida uniformemente a lo largo de una línea con longitud de $2a$ que se ubica sobre el eje y, entre $y = -a$ y $y = +a$. (Ésta sería la representación de una de las varillas cargadas de la figura 21.1.) Calcule el campo eléctrico en el punto P sobre el eje x, a una distancia x del origen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 21.10, nuestra incógnita es el campo eléctrico debido a una distribución continua de la carga.

PLANTEAR: La figura 21.25 ilustra la situación. Se necesita encontrar el campo eléctrico en el punto P en función de la coordenada x. El eje x es el bisector perpendicular de la línea cargada, por lo que, al igual que en el ejemplo 21.10, podemos utilizar un argumento de simetría.

EJECUTAR: Se divide la línea de carga en segmentos infinitesimales, cada uno de los cuales actúa como carga puntual; sea dy la longitud de cualquier segmento localizado a la altura y. Si la carga se distribuye de manera uniforme, la densidad lineal de carga λ en cualquier punto de la línea es igual a $Q/2a$ (la carga total dividida entre la longitud total). Entonces, la carga dQ en un segmento de longitud dy es

$$dQ = \lambda dy = \frac{Q dy}{2a}$$

La distancia r entre este segmento y P es $(x^2 + y^2)^{1/2}$, por lo que la magnitud del campo dE, en P, debido a este segmento es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dy}{2a(x^2 + y^2)}$$

Representamos este campo en términos de sus componentes x y y:

$$dE_x = dE\cos\alpha \qquad dE_y = -dE\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Se observa que $\mathrm{sen}\,\alpha = y/(x^2 + y^2)^{1/2}$ y $\cos\alpha = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$; que se combinan con la expresión para dE para obtener

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\,dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y\,dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para determinar las componentes del campo totales E_x y E_y se integran estas expresiones, considerando que para incluir toda la Q se debe integrar desde $y = -a$ hasta $y = +a$. Se invita al lector a que realice los detalles de la integración, para lo cual le sería de utilidad una tabla de integrales. Los resultados finales son

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

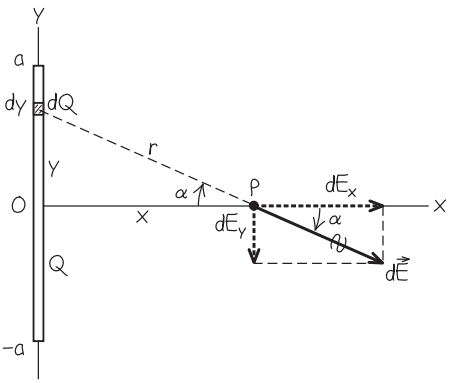
$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

o, en forma vectorial,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{\imath} \qquad (21.9)$$

EVALUAR: Con el argumento de simetría que se usó en el ejemplo 21.10 se habría llegado a que E_y era igual a cero; si se coloca una carga de prueba positiva en P, la mitad superior de la línea de carga empuja hacia abajo sobre ella, y la mitad inferior empuja hacia arriba con igual magnitud.

21.25 Nuestro esquema para este problema.



Para explorar los resultados, primero se verá lo que ocurre en el límite en que x es mucho más grande que a. En ese caso, se puede ignorar a en el denominador de la ecuación (21.9), y el resultado se convierte en

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Esto significa que si el punto P se halla muy lejos de la línea de carga en comparación con la longitud de la línea, el campo en P es el mismo que el de una carga puntual. Se obtiene un resultado similar que para el anillo cargado del ejemplo 21.10.

Al estudiar más el resultado exacto para $\vec{E}$, ecuación (21.9), se expresará ésta en términos de la densidad lineal de carga $\lambda = Q/2a$. Al sustituir $Q = 2a\lambda$ en la ecuación (21.9) y simplificar, se obtiene

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2) + 1}}\hat{\imath} \qquad (21.10)$$

Ahora se puede responder la pregunta: ¿Cuál es el valor de $\vec{E}$ a una distancia x a partir de una línea de carga *muy* larga? Para ello se toma el *límite* de la ecuación (21.10) cuando a tiende a ser muy larga. En ese límite, el término x^2/a^2 en el denominador se hace mucho más pequeño que la unidad y se puede desechar. Queda lo siguiente:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{\imath}$$

La magnitud del campo sólo depende de la distancia en el punto P a la línea de carga. Por lo tanto, a una distancia perpendicular r desde la línea en cualquier dirección, $\vec{E}$ tiene la magnitud

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(línea infinita de carga)}$$

Así, el campo eléctrico debido a una línea de carga de longitud infinita es proporcional a $1/r$, y no a $1/r^2$ como fue el caso para una carga puntual. Si λ es positiva, la dirección de $\vec{E}$ es radial hacia fuera con respecto a la recta, y si λ es negativa es radial hacia dentro.

En la naturaleza no existe en realidad nada como una línea infinita de carga; no obstante, cuando el punto del campo está suficientemente cerca de la línea, hay muy poca diferencia entre el resultado para una línea infinita y el caso finito de la vida real. Por ejemplo, si la distancia r del punto del campo desde el centro de la línea es del 1% de la longitud de ésta, el valor de E difiere menos del 0.02% del valor para la longitud infinita.

Ejemplo 21.12 Campo de un disco con carga uniforme

Encuentre el campo eléctrico que genera un disco de radio R con densidad superficial de carga (carga por unidad de área) positiva y uniforme, σ, en un punto a lo largo del eje del disco a una distancia x de su centro. Suponga que x es positiva.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo se parece a los ejemplos 21.10 y 21.11, en que nuestra incógnita es el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría de una distribución de carga continua.

PLANTEAR: En la figura 21.26 se ilustra la situación. Se representa la distribución de carga como un conjunto de anillos concéntricos de carga dQ, como se indica. Del ejemplo 21.10 se conoce el campo de un solo anillo sobre su eje de simetría, por lo que todo lo que tenemos que hacer es sumar las contribuciones de los anillos.

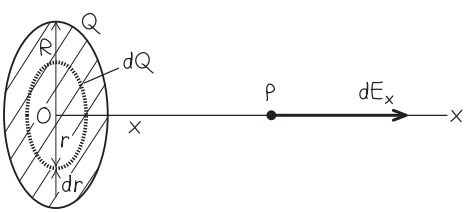
EJECUTAR: Un anillo común tiene una carga dQ, radio interior r y radio exterior $r + dr$ (figura 21.26). Su área dA es aproximadamente igual a su ancho dr multiplicado por su circunferencia $2\pi r$, o $dA = 2\pi r\,dr$. La carga por unidad de área es $\sigma = dQ/dA$, por lo que la carga del anillo es $dQ = \sigma\,dA = \sigma\,(2\pi r\,dr)$, o bien,

$$dQ = 2\pi\sigma r\,dr$$

Se utiliza esta expresión en vez de Q en la ecuación para el campo debido a un anillo, que se obtuvo en el ejemplo 21.10, ecuación (21.8), y también se sustituye el radio del anillo a por r. La componente del campo dE_x en el punto P debido a la carga dQ es

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

21.26 Nuestro esquema para este problema.



Para calcular el campo total debido a todo el anillo, se integra dE_x sobre r, desde $r = 0$ hasta $r = R$ (*no* desde $-R$ hasta R):

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\,dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Recuerde que durante la integración x es una constante, y que la variable de integración es r. La integral se evalúa usando la sustitución $z = x^2 + r^2$. Se invita al lector a que trabaje en los detalles; el resultado es

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}}\right] \end{aligned} \qquad (21.11)$$

El campo eléctrico debido al anillo no tiene componentes perpendiculares al eje. Entonces, en la figura 21.26, en el punto P $dE_y = dE_z = 0$ para cada anillo, y el campo total tiene $E_y = E_z = 0$.

EVALUAR Suponga que se incrementa el radio R del disco y se agrega simultáneamente carga, de manera que la densidad superficial de carga σ (carga por unidad de área) se mantiene constante. En el límite en que R es mucho mayor que la distancia x entre el punto del campo y el disco, el término $1/\sqrt{(R^2/x^2) + 1}$ en la ecuación (21.11) se vuelve despreciable por lo pequeño, con lo que se obtiene

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad (21.12)$$

El resultado final no contiene la distancia x al plano, por lo que el campo eléctrico producido por una lámina cargada, plana e *infinita*, es *independiente de su distancia a la lámina*. La dirección del campo es perpendicular en cualquier parte de la lámina y se aleja de ésta. No existe nada como una lámina infinita de carga, pero si las dimensiones de la lámina son mucho mayores que la distancia x entre el punto del campo P y la lámina, el campo está muy cerca de lo que se obtiene con la ecuación (21.11).

Si P está a la *izquierda* del plano ($x < 0$), el resultado es el mismo, excepto que la dirección de $\vec{E}$ es a la izquierda en vez de a la derecha. Si la densidad de caga superficial es negativa, la dirección de los campos en ambos lados del plano es hacia éste, en vez de alejarse de él.

Ejemplo 21.13 Campo de dos láminas infinitas con carga opuesta

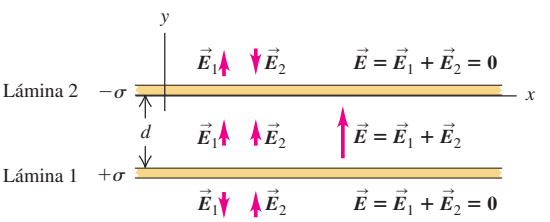
Se colocan dos láminas infinitas y planas paralelas entre sí, separadas por una distancia d (figura 21.27). La lámina inferior tiene una densidad superficial de carga uniforme y positiva σ, y la lámina superior tiene una densidad superficial de carga uniforme y negativa $-\sigma$, ambas de la misma magnitud. Encuentre el campo eléctrico entre las dos láminas, arriba de la lámina superior y debajo de la lámina inferior.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Del ejemplo 21.12 se conoce el campo eléctrico debido a una sola lámina cargada, plana e infinita. Nuestra meta es encontrar el campo eléctrico debido a *dos* de tales láminas.

PLANTEAR: Se utiliza el principio de superposición para combinar los campos eléctricos producidos por las dos láminas, como se indica en la figura 21.27.

21.27 Cálculo del campo eléctrico debido a dos láminas infinitas con cargas opuestas. Se presenta la vista las láminas desde el borde; ¡sólo es posible ver una parte de las láminas infinitas!



EJECUTAR: Sea la lámina 1 la lámina inferior con carga positiva, y la lámina 2 la lámina superior con carga negativa; los campos debidos a cada lámina son $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$, respectivamente. De la ecuación (21.12) del ejemplo 21.12, tanto $\vec{E}_1$ como $\vec{E}_2$ tienen la misma magnitud en todos los puntos, sin importar lo lejos que estén de cada lámina:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

En todos los puntos, la dirección de $\vec{E}_1$ se aleja de la carga positiva de la lámina 1, y la dirección de $\vec{E}_2$ va hacia la carga negativa de la lámina 2. Estos campos y los ejes x y y se ilustran en la figura 21.27.

CUIDADO Los campos eléctricos no "fluyen" Tal vez le sorprenda que $\vec{E}_1$ no se vea afectado por la presencia de la lámina 2, y que a $\vec{E}_2$ tampoco lo afecte la presencia de la lámina 1. Quizás habrá usted pensado que el campo de una lámina es incapaz de "penetrar" la otra lámina. Ésta sería la conclusión, si el campo eléctrico se considerara como una sustancia física que "fluye" hacia adentro de las cargas o desde ellas. Pero en realidad no hay tal sustancia, y los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tan sólo dependen de las distribuciones individuales de cargas que los crean. El campo *total* es sólo la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.

En los puntos entre las láminas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se refuerzan entre sí; en los puntos arriba de la lámina superior o debajo de la lámina inferior, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se cancelan mutuamente. Entonces, el campo total es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{arriba de la lámina superior} \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j} & \text{entre las láminas} \\ \mathbf{0} & \text{debajo de la lámina inferior} \end{cases}$$

Como se considera que las hojas son infinitas, el resultado no depende de la separación d.

EVALUAR: Observe que el campo entre las láminas con cargas opuestas es uniforme. Esto se utilizó en los ejemplos 21.7 y 21.8, donde se conectaban dos placas conductoras, grandes y paralelas, a las terminales de una batería. La batería hace que las dos placas adquieran cargas contrarias, lo cual origina entre ellas un campo que en esencia es uniforme, si la separación de las placas es mucho menor que las dimensiones de las placas. En el capítulo 23 estudiaremos el modo en que una batería produce la separación de cargas positivas y negativas. Un arreglo de dos placas conductoras con cargas opuestas se llama *capacitor*, que es un dispositivo que tienen una utilidad práctica enorme y que es el tema principal del capítulo 24.

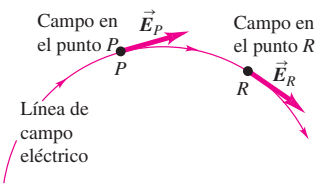
Evalúe su comprensión de la sección 21.5 Suponga que la línea de carga de la figura 21.25 (ejemplo 21.11) tuviera una carga $+Q$ distribuida uniformemente entre $y = 0$ y $y = +a$, y tuviera una carga $-Q$ con distribución uniforme entre $y = 0$ y $y = -a$. En esta situación, el campo eléctrico en P estaría i) en la dirección $+x$; ii) en la dirección $-x$; iii) en la dirección $+y$; iv) en la dirección $-y$; v) igual a cero; vi) ninguna de las anteriores.

MP

21.6 Líneas de campo eléctrico

El concepto de campo eléctrico es un tanto elusivo debido a que ningún campo eléctrico puede verse directamente. Para visualizarlos, las *líneas* de campo eléctrico son de gran ayuda y los hace parecer más reales. Una **línea de campo eléctrico** es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo que es tangente en cualquier punto que esté en la dirección del vector del campo eléctrico en dicho punto. La figura 21.28 ilustra la idea básica. (Utilizamos un concepto similar en el análisis del movimiento de fluidos en la sección 14.5. Una *línea de corriente* es una recta o curva, cuya tangente en cualquier punto está en dirección de la velocidad del fluido en dicho punto. Sin embargo, la similitud entre las líneas de campo eléctrico y las líneas de corrientes de los fluidos es únicamente de carácter matemático, porque en los campos eléctricos no hay nada que "fluya".) El científico inglés Michael Faraday (1791-1867) introdujo por primera vez el concepto de líneas de campo. Las llamó "líneas de fuerza", aunque es preferible el término "líneas de campo".

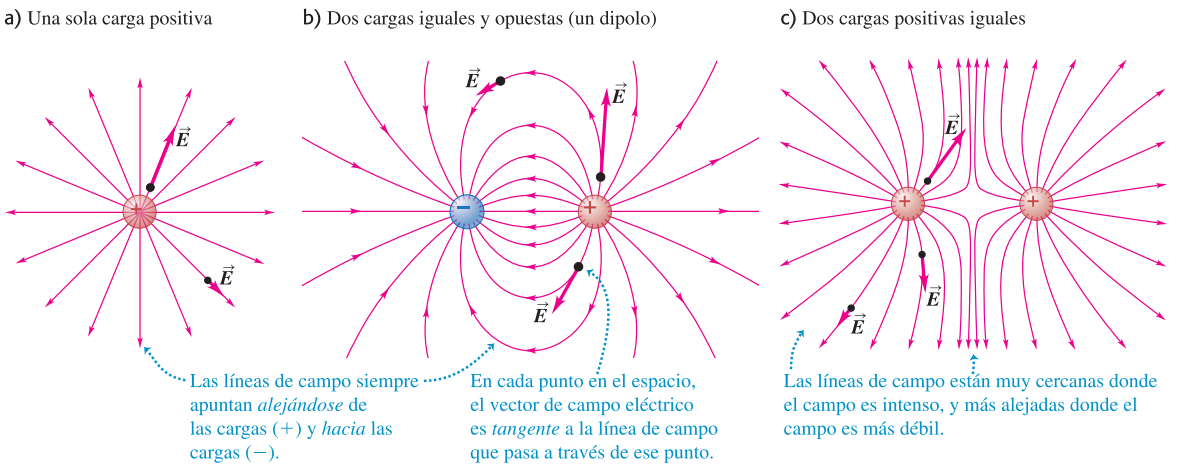
21.28 La dirección del campo eléctrico en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto.



Las líneas de campo eléctrico muestran la dirección de $\vec{E}$ en cada punto, y su espaciamiento da una idea general de la *magnitud* de $\vec{E}$ en cada punto. Donde $\vec{E}$ es fuerte, las líneas se dibujan muy cerca una de la otra, y donde $\vec{E}$ es más débil se trazan separadas. En cualquier punto específico, el campo eléctrico tiene dirección única, por lo que sólo una línea de campo puede pasar por cada punto del campo. En otras palabras, las *líneas de campo nunca se cruzan*.

En la figura 21.29 se ilustran algunas líneas de campo eléctrico en un plano que contiene *a*) una sola carga positiva; *b*) dos cargas de igual magnitud, una positiva y otra negativa (un dipolo); y *c*) dos cargas positivas iguales. A veces estos diagramas reciben el nombre de *mapas de campo*; son secciones transversales de los patrones reales en tres dimensiones. La dirección del campo eléctrico total en cada punto de cada diagrama está a lo largo de la tangente a la línea de campo eléctrico que pasa por el punto. Las flechas indican la dirección del vector del campo $\vec{E}$ a lo largo de

21.29 Líneas de campo eléctrico para tres diferentes distribuciones de carga. En general, la magnitud de $\vec{E}$ es diferente en distintos puntos a lo largo de una línea de campo dada.

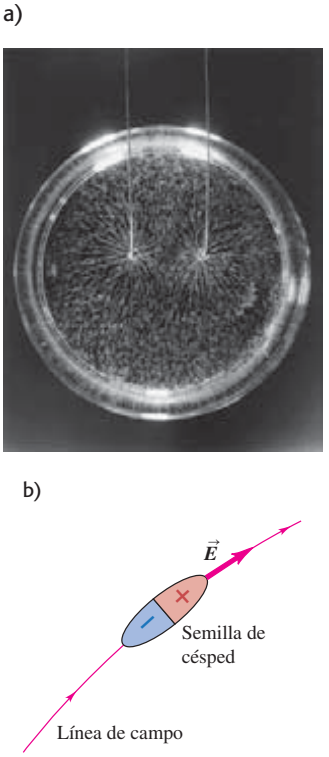


cada línea de campo. Los vectores de campo reales se dibujaron en varios puntos de cada patrón. Observe que, en general, la magnitud del campo eléctrico es diferente en distintos puntos de una línea de campo dada; ¡una línea de campo *no* es una curva de magnitud de campo eléctrico constante!

La figura 21.29 muestra que las líneas de campo se dirigen *alejándose de* las cargas positivas (ya que al estar cerca de una carga puntual positiva, $\vec{E}$ apunta alejándose de la carga) y *van hacia* las cargas negativas (puesto que al estar cerca de una carga puntual negativa, $\vec{E}$ apunta hacia la carga). En las regiones donde la magnitud del campo es grande, como la zona entre las cargas positiva y negativa de la figura 21.29b, las líneas de campo se dibujan aproximándose entre sí; mientras que donde la magnitud del campo es pequeña, como la región entre las dos cargas positivas de la figura 21.29c, las líneas están muy separadas. En un campo *uniforme*, las líneas de campo son rectas, paralelas y con espaciamiento uniforme, como en la figura 21.20.

La figura 21.30 es una vista superior de un arreglo experimental para visualizar las líneas de campo eléctrico. En el arreglo que se muestra, los extremos de dos alambres con carga positiva se insertan en un contenedor de líquido aislante, en el cual se dejan flotando algunas semillas de césped. Tales semillas son aislantes eléctricamente neutros; sin embargo, el campo eléctrico de los dos alambres cargados provoca su *polarización*; en las moléculas de cada semilla, hay un ligero desplazamiento de las cargas positivas y negativas, como se ilustra en la figura 21.8. El extremo cargado positivamente de cada semilla de césped es atraído en la dirección de $\vec{E}$; y el extremo de cada semilla cargado negativamente es atraído en dirección opuesta a $\vec{E}$. De ahí que el eje largo de cada semilla de césped tienda a orientarse en forma paralela al campo eléctrico, en la dirección de la línea de campo que pasa por la posición que ocupa la semilla (figura 21.30b).

21.30 a) Las líneas de campo eléctrico producidas por dos cargas puntuales iguales. El patrón se forma con semillas de césped que flotan en un líquido encima de dos alambres con carga. Compare este patrón con la figura 21.29c. b) El campo eléctrico causa la polarización de las semillas de césped, lo cual a la vez hace que las semillas se alineen con el campo.



CUIDADO **Las líneas de campo eléctrico no son trayectorias** Es un error común suponer que si una partícula con carga q está en movimiento en presencia de un campo eléctrico, la partícula debe moverse a lo largo de una línea de campo eléctrico. Como en cualquier punto $\vec{E}$ es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto, es cierto que la *fuerza* sobre la partícula, $\vec{F} = q\vec{E}$ y, por lo tanto, la aceleración de la partícula, son tangentes a la línea de campo. Pero en el capítulo 3 vimos que cuando una partícula se mueve con una trayectoria curva, su aceleración *no puede* ser tangente a la trayectoria. Así que, en general, la trayectoria de una partícula cargada *no* es la misma que una línea de campo.

Evalúe su comprensión de la sección 21.6 Suponga que las líneas de campo eléctrico en una región del espacio son rectas. Si una partícula cargada parte del reposo en esa región, ¿su trayectoria será una línea de campo?

21.7 Dipolos eléctricos

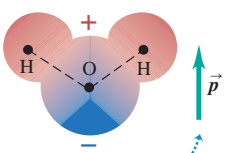
Un **dipolo eléctrico** es un par de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos (una carga positiva q y una carga negativa $-q$) separadas por una distancia d. En el ejemplo 21.9 se presentaron los dipolos eléctricos (sección 21.5); el concepto es digno de estudiarse con más detenimiento porque muchos sistemas físicos, desde moléculas hasta antenas de televisión, se pueden describir como dipolos eléctricos. También usaremos mucho este concepto en el análisis de los dieléctricos en el capítulo 24.

La figura 21.31a muestra una molécula de agua (H_2O), que en muchos sentidos se comporta como un dipolo eléctrico. La molécula de agua en su totalidad es eléctricamente neutra; no obstante, los enlaces químicos dentro de la molécula ocasionan un desplazamiento de la carga. El resultado es una carga neta negativa en el extremo del oxígeno de la molécula, y una carga neta positiva en el extremo del hidrógeno, formando así un dipolo. El efecto es equivalente al desplazamiento de un electrón alrededor de sólo 4×10^{-11} m (aproximadamente el radio de un átomo de hidrógeno); sin embargo, las consecuencias de tal desplazamiento son profundas. El agua es un magnífico solvente para las sustancias iónicas como la sal de mesa (cloruro de sodio, NaCl) precisamente porque la molécula de agua es un dipolo eléctrico (figura 21.31b). Cuando se disuelve en agua, la sal se disocia en un ion de sodio positivo (Na^+) y un ion de cloro negativo (Cl^-), los cuales tienden a ser atraídos hacia los extremos negativo y positivo, respectivamente, de las moléculas de agua; esto mantiene los iones en solución. Si las moléculas de agua no fueran dipolos eléctricos, el agua sería un mal solvente, y casi toda la química que ocurre en soluciones acuosas sería imposible. Esto incluye todas las reacciones bioquímicas que hay en las formas de vida terrestres. En un sentido muy real, ¡nuestra existencia como seres humanos depende de los dipolos eléctricos!

Estudiaremos dos preguntas sobre los dipolos eléctricos. La primera es ¿qué fuerzas y pares de torsión experimenta un dipolo cuando se coloca en un campo eléctrico externo (es decir, un campo originado por cargas fuera del dipolo)? La segunda es ¿qué campo eléctrico produce un dipolo eléctrico por sí mismo?

21.31 a) Una molécula de agua es un ejemplo de dipolo eléctrico. b) Cada tubo de ensayo contiene una solución de diferentes sustancias en agua. El momento dipolar eléctrico grande del agua la convierte en un magnífico solvente.

a) Una molécula de agua, con la carga positiva en color rojo, y la carga negativa en azul



El momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ está dirigido del extremo negativo al extremo positivo de la molécula.

b) Varias sustancias disueltas en agua

Fuerza y par de torsión en un dipolo eléctrico

Para comenzar con la primera pregunta, coloquemos un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo *uniforme* $\vec{E}$, como se indica en la figura 21.32. Las fuerzas $\vec{F}_+$ y $\vec{F}_-$ en las dos cargas tienen una magnitud de qE, pero sus direcciones son opuestas y su suma es igual a cero. *La fuerza neta sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme es cero.*

Sin embargo, las dos fuerzas no actúan a lo largo de la misma línea, por lo que sus *pares de torsión* no suman cero. Los pares se calculan con respecto al centro del dipolo. Sea ϕ el ángulo entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y el eje del dipolo; entonces, el brazo de palanca tanto para $\vec{F}_+$ como para $\vec{F}_-$ es $(d/2)\,\text{sen}\,\phi$. El par de torsión de $\vec{F}_+$ y el par de torsión de $\vec{F}_-$ tienen ambos la misma magnitud de $(qE)\,(d/2)\,\text{sen}\,\phi$, y los dos pares de torsión tienden a hacer girar el dipolo en el sentido horario (es decir, en la figura 21.32, $\vec{\tau}$ se dirige hacia la parte interna de la página). Entonces, la magnitud del par de torsión neto es el doble de la magnitud de cualquier par de torsión individual:

$$\tau = (qE)(d\,\text{sen}\,\phi) \tag{21.13}$$

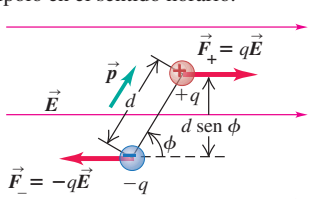
donde $d\,\text{sen}\,\phi$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas.

El producto de la carga q y la separación d es la magnitud de una cantidad llamada **momento dipolar eléctrico**, que se denota con p:

$$p = qd \quad \text{(magnitud del momento dipolar eléctrico)} \tag{21.14}$$

Las unidades de p son de carga por distancia (C · m). Por ejemplo, la magnitud del momento dipolar eléctrico de una molécula de agua es $p = 6.13 \times 10^{-30}$ C · m.

21.32 La fuerza neta sobre este dipolo eléctrico es cero, pero hay un par de torsión dirigido hacia la parte interna de la página, que tiende a hacer girar el dipolo en el sentido horario.



CUIDADO **El símbolo *p* tiene múltiples significados** Hay que tener cuidado de no confundir el momento dipolar con la cantidad de movimiento o la presión. En el alfabeto no hay tantas letras como cantidades físicas, por lo que algunas literales se utilizan con varios significados. Es el contexto el que por lo general aclara lo que se quiere decir, pero hay que estar atento.

Además, el momento dipolar eléctrico se define como una cantidad *vectorial* $\vec{\boldsymbol{p}}$. La magnitud de $\vec{\boldsymbol{p}}$ está dada por la ecuación (21.14), y su dirección ocurre a lo largo del eje dipolar, de la carga negativa a la carga positiva, como se muestra en la figura 21.32.

En términos de p, la ecuación (21.13) para la magnitud τ del par de torsión ejercido por el campo se convierte en

$$\tau = pE \operatorname{sen}\phi \qquad \text{(magnitud del par de torsión sobre un dipolo eléctrico)} \qquad (21.15)$$

Como en la figura 21.32 ϕ es el ángulo entre las direcciones de los vectores $\vec{\boldsymbol{p}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$, esto nos recuerda la expresión de la magnitud del *producto vectorial* que se estudió en la sección 1.10. (Quizás el lector desee repasar ese análisis.) Entonces, es posible escribir el par de torsión sobre el dipolo en forma vectorial como

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}} \qquad \text{(par de torsión sobre un dipolo eléctrico, en forma vectorial)} \qquad (21.16)$$

Se puede utilizar la regla de la mano derecha para el producto vectorial, con la finalidad de verificar que en la situación que se ilustra en la figura 21.32, $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se dirige hacia la parte interna de la página. El par de torsión es el máximo cuando $\vec{\boldsymbol{p}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$ son perpendiculares, y es igual a cero cuando son paralelos o antiparalelos. El par de torsión siempre tiende a hacer que $\vec{\boldsymbol{p}}$ gire para que se alinee con $\vec{\boldsymbol{E}}$. La posición $\phi = 0$, con $\vec{\boldsymbol{p}}$ paralelo a $\vec{\boldsymbol{E}}$, es una posición de equilibrio estable; mientras que la posición $\phi = \pi$, con $\vec{\boldsymbol{p}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$ antiparalelos, es una posición de equilibrio inestable. La polarización de una semilla de césped en el aparato que se ilustra en la figura 21.30b le da un momento dipolar eléctrico; entonces, el par de torsión que ejerce $\vec{\boldsymbol{E}}$ ocasiona que la semilla se alinee con $\vec{\boldsymbol{E}}$ y por ello con las líneas de campo.

Energía potencial de un dipolo eléctrico

Cuando un dipolo cambia de dirección en un campo eléctrico, el par de torsión del campo eléctrico *realiza trabajo* sobre él, con el cambio correspondiente en su energía potencial. El trabajo dW realizado por un par de torsión τ durante un desplazamiento infinitesimal $d\phi$ está dado por la ecuación (10.19): $dW = \tau\, d\phi$. Como el par de torsión está en la dirección en que ϕ disminuye, debemos escribir el par de torsión como $\tau = -pE \operatorname{sen}\phi$, y

$$dW = \tau\, d\phi = -pE \operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

En un desplazamiento finito de ϕ_1 a ϕ_2, el trabajo total realizado sobre el dipolo es

$$\begin{aligned} W &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \operatorname{sen}\phi)\, d\phi \\ &= pE\cos\phi_2 - pE\cos\phi_1 \end{aligned}$$

El trabajo es el negativo del cambio de energía potencial, como se vio en el capítulo 7: $W = U_1 - U_2$. Por lo tanto, se observa que una definición adecuada de la energía potencial U para este sistema es

$$U(\phi) = -pE\cos\phi \qquad (21.17)$$

En esta expresión se reconoce el *producto escalar* $\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = pE\cos\phi$, por lo que también se puede escribir

$$U = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \qquad \text{(energía potencial para un dipolo en el campo eléctrico)} \qquad (21.18)$$

La energía potencial tiene su valor mínimo $U = -pE$ (es decir, su valor más negativo) en la posición de equilibrio estable, donde $\phi = 0$ y $\vec{\boldsymbol{p}}$ es paralelo a $\vec{\boldsymbol{E}}$. La energía potencial es máxima cuando $\phi = \pi$ y $\vec{\boldsymbol{p}}$ es antiparalelo a $\vec{\boldsymbol{E}}$; entonces $U = +pE$. En $\phi = \pi/2$, donde $\vec{\boldsymbol{p}}$ es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{E}}$, U es igual a cero. Por supuesto, es posible definir U de manera diferente para que valga cero en alguna otra orientación de $\vec{\boldsymbol{p}}$, pero nuestra definición es la más sencilla.

La ecuación (21.18) brinda otra manera de considerar el efecto ilustrado en la figura 21.30. El campo eléctrico $\vec{E}$ da a cada semilla de césped un momento dipolar eléctrico, por lo que la semilla se alinea con $\vec{E}$ para minimizar la energía potencial.

Ejemplo 21.14 Fuerza y par de torsión sobre un dipolo eléctrico

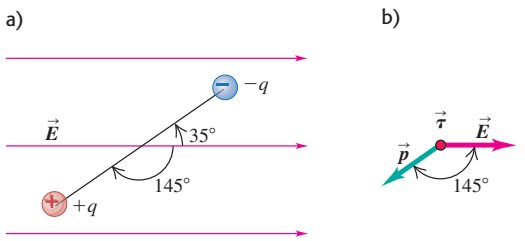
La figura 21.33 muestra un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme con magnitud de 5.0×10^5 N/C dirigido en forma paralela al plano de la figura. Las cargas son $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C; ambas se encuentran en el plano y están separadas por una distancia de 0.125 nm = 0.125×10^{-9} m. (Tanto la magnitud de la carga como la distancia son cantidades moleculares representativas.) Encuentre *a*) la fuerza neta ejercida por el campo sobre el dipolo; *b*) la magnitud y la dirección del momento dipolar eléctrico; *c*) la magnitud y la dirección del par de torsión; *d*) la energía potencial del sistema en la posición que se muestra.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las ideas de esta sección acerca de un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico.

PLANTEAR: Se emplea la relación $\vec{F} = q\vec{E}$ para cada carga puntual, con la finalidad de calcular la fuerza sobre el dipolo en su conjunto. La ecuación (21.14) proporciona el momento dipolar, la ecuación (21.16) da el par de torsión sobre el dipolo y la ecuación (21.18) brinda la energía potencial del sistema.

21.33 a) Un dipolo eléctrico. b) Direcciones del momento dipolar eléctrico, el campo eléctrico y el par de torsión.



EJECUTAR: *a*) Como el campo es uniforme, las fuerzas sobre las dos cargas son iguales y opuestas, y la fuerza total es igual a cero.

b) La magnitud p del momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ es

$$p = qd = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.125 \times 10^{-9}\ \text{m}) = 2.0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

La dirección de $\vec{p}$ es de la carga negativa a la positiva, a 145° en el sentido horario, a partir de la dirección del campo eléctrico (figura 21.33b).

c) La magnitud del par de torsión es

$$\tau = pE \operatorname{sen}\phi = (2.0 \times 10^{-29}\ \text{C})(5.0 \times 10^5\ \text{N/C})(\operatorname{sen} 145°) = 5.7 \times 10^{-24}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha para el producto vectorial (véase la sección 1.10), la dirección del par de torsión es $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ hacia fuera de la página. Esto corresponde a un par de torsión en sentido antihorario que tiende a alinear $\vec{p}$ con $\vec{E}$.

d) La energía potencial es

$$U = -pE\cos\phi = -(2.0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m})(5.0 \times 10^5\ \text{N/C})(\cos 145°) = 8.2 \times 10^{-24}\ \text{J}$$

EVALUAR: El momento dipolar, el par de torsión y la energía potencial son muy pequeños. No se sorprenda por este resultado. Recuerde que tratamos con una sola molécula que, de hecho, ¡es un objeto muy diminuto!

En este análisis supusimos que $\vec{E}$ es uniforme, por lo que no hay fuerza neta sobre el dipolo. Si $\vec{E}$ no fuera uniforme, las fuerzas en los extremos quizá no se cancelarían por completo y la fuerza neta no sería igual a cero. Así que un cuerpo con carga neta igual a cero, pero con momento dipolar eléctrico, puede experimentar una fuerza neta en un campo eléctrico no uniforme. Como vimos en la sección 21.1, un campo eléctrico puede polarizar un cuerpo sin carga, lo que origina una separación de la carga y un momento dipolar eléctrico. Es así como los cuerpos sin carga experimentan fuerzas electrostáticas (figura 21.8).

Campo en un dipolo eléctrico

Ahora pensemos en un dipolo eléctrico como una *fuente* de campo eléctrico. ¿Cómo sería este campo? Su forma general se ilustra en el mapa de campo de la figura 21.29b. En cada punto de la distribución, el campo total $\vec{E}$ es la suma vectorial de los campos generados por dos cargas individuales, como ocurre en el ejemplo 21.9 (sección 21.5). Se invita al lector a que intente dibujar diagramas que ilustren esta suma vectorial con respecto a varios puntos.

Con la finalidad de obtener información cuantitativa sobre el campo de un dipolo eléctrico, tenemos que hacer algunos cálculos, como se ilustra en el siguiente ejemplo. Observe el uso del principio de superposición de campos eléctricos para sumar las contribuciones de las cargas individuales al campo. Asimismo, note que es necesario utilizar técnicas de aproximación aun para el caso relativamente sencillo de un campo originado por dos cargas. Es frecuente que los cálculos de campos sean muy complicados, por lo que es común usar análisis por computadora al determinar el campo debido a una distribución arbitraria de carga.

Ejemplo 21.15 Otro vistazo al campo de un dipolo eléctrico

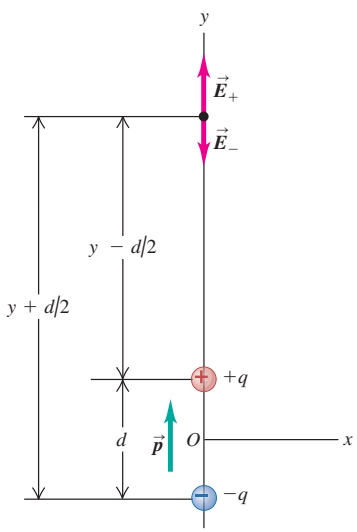
En la figura 21.34, un dipolo eléctrico tiene su centro en el origen, con $\vec{p}$ en dirección del eje $+y$. Obtenga una expresión aproximada para el campo eléctrico en un punto sobre el eje y, para el que y sea mucho mayor que d. Use la expansión binomial de $(1 + x)^n$, es decir, $(1 + x)^n \cong 1 + nx + n(n - 1)x^2/2 + \cdots$ para el caso en que $|x| < 1$. (Este problema ilustra una técnica útil para el cálculo.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se emplea el principio de superposición. El campo eléctrico total es la suma vectorial del campo producido por la carga positiva y el campo causado por la carga negativa.

PLANTEAR: En el punto del campo que se muestra en la figura 21.34, el campo de la carga positiva tiene una componente en y positiva (hacia arriba); en tanto que el campo de la carga negativa tiene una componente y negativa (hacia abajo). Estas componentes se suman para obtener el campo total, para luego aplicar la aproximación en que y es mucho mayor que d.

21.34 Determinación del campo eléctrico de un dipolo eléctrico en un punto situado sobre su eje.



EJECUTAR: La componente y total, E_y, del campo eléctrico de las dos cargas es

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(y - d/2)^2} - \frac{1}{(y + d/2)^2}\right]$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2}\right]$$

Se usa el mismo enfoque que en el ejemplo 21.9 (sección 21.5). Ahora viene la aproximación. Cuando y es mucho más grande que d, es decir, cuando se está muy lejos del dipolo en comparación con su tamaño, la cantidad $d/2y$ es mucho menor que 1. Con $n = -2$ y $d/2y$ desempeñando el papel de x en la expansión binomial, tan sólo conservamos los dos primeros términos, porque los que eliminamos son mucho menores que los que conservamos, así que se tiene

$$\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 + \frac{d}{y} \quad \text{y} \quad \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 - \frac{d}{y}$$

De manera que E_y está dada aproximadamente por

$$E \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[1 + \frac{d}{y} - \left(1 - \frac{d}{y}\right)\right]$$
$$= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$
$$= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$

EVALUAR: Un camino alternativo para esta expresión consiste en obtener el denominador común de las fracciones en la expresión de E_y y combinar, para luego aproximar el denominador $(y - d/2)^2(y + d/2)^2$ como y^4. Se dejan los detalles como problema para que lo resuelva el lector (véase el ejercicio 21.65).

Para puntos P situados fuera de los ejes de coordenadas, las expresiones son más complicadas; sin embargo, en *todos* los puntos muy alejados del dipolo (en cualquier dirección) el campo disminuye con $1/r^3$. Se puede comparar esto con el decaimiento con $1/r^2$ de una carga puntual, el decaimiento con $1/r$ de una carga lineal larga, y la independencia con respecto a r de una lámina de carga grande. Hay distribuciones de carga para las que el campo disminuye aun con más rapidez. Un *cuadrupolo eléctrico* consiste en dos dipolos iguales con orientación contraria, separados por una distancia pequeña. El campo de un cuadrupolo a distancias grandes decae con $1/r^4$.

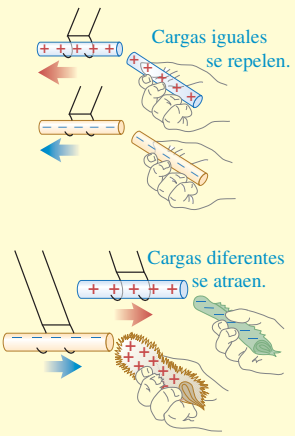
Evalúe su comprensión de la sección 21.7 Se coloca un dipolo eléctrico en una región de campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, con el momento dipolar eléctrico $\vec{p}$, apuntando en la dirección opuesta a $\vec{E}$. ¿El dipolo está i) en equilibrio estable, ii) en equilibrio inestable, o iii) ninguno de los anteriores? (*Sugerencia:* tal vez le convenga al lector repasar la sección 7.5.)

CAPÍTULO 21 RESUMEN

Carga eléctrica, conductores y aislantes: La cantidad fundamental en electrostática es la carga eléctrica. Hay dos clases de carga: positiva y negativa. Las cargas del mismo signo se repelen mutuamente; las cargas de signo opuesto se atraen. La carga se conserva; la carga total en un sistema aislado es constante.

Toda la materia ordinaria está hecha de protones, neutrones y electrones. Los protones positivos y los neutrones eléctricamente neutros del núcleo de un átomo se mantienen unidos por la fuerza nuclear; los electrones negativos circundan el núcleo a distancias mucho mayores que el tamaño de éste. Las interacciones eléctricas son las principales responsables de la estructura de átomos, moléculas y sólidos.

Los conductores son materiales que permiten que la carga eléctrica se mueva con facilidad a través de ellos. Los aislantes permiten el movimiento de las cargas con mucha menos facilidad. La mayoría de los metales son buenos conductores; en tanto que la mayoría de los no metales son aislantes.

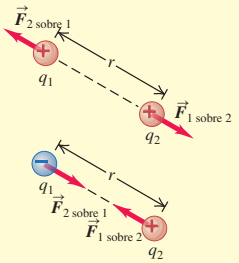


Ley de Coulomb: La ley de Coulomb es la ley fundamental de la interacción de cargas eléctricas puntuales. Para las cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia r, la magnitud de la fuerza sobre cualquiera de ellas es proporcional al producto q_1q_2 e inversamente proporcional a r^2. La fuerza sobre cada carga ocurre a lo largo de la línea que las une, de repulsión si q_1 y q_2 tienen el mismo signo, y de atracción si tienen el signo opuesto. Las fuerzas forman un par de acción-reacción y obedecen la tercera ley de Newton. En unidades del SI, la unidad de la carga eléctrica es el coulomb, que se simboliza como C. (Véanse los ejemplos 21.1 y 21.2.)

El principio de superposición de fuerzas establece que cuando dos o más cargas ejercen cada una fuerza sobre otra carga, la fuerza total sobre esa carga es la suma vectorial de las fuerzas que ejercen las cargas individuales. (Véanse los ejemplos 21.3 y 21.4.)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2} \tag{21.2}$$

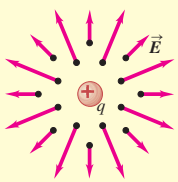
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$



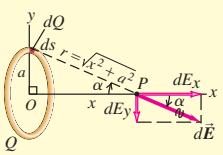
Campo eléctrico: El campo eléctrico $\vec{E}$, una cantidad vectorial, es la fuerza por unidad de carga que se ejerce sobre una carga de prueba en cualquier punto, siempre que la carga de prueba sea tan pequeña que no perturbe las cargas que generan el campo. El campo eléctrico producido por una carga puntual está dirigido radialmente hacia fuera de la carga o hacia ella. (Véanse los ejemplos 21.5 a 21.8.)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \tag{21.3}$$

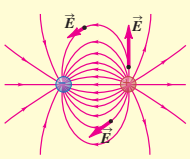
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{21.7}$$



Superposición de campos eléctricos: El principio de superposición de campos eléctricos establece que el campo eléctrico $\vec{E}$ de cualquier combinación de cargas es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales. Para calcular el campo eléctrico generado por una distribución continua de carga, la distribución se divide en elementos pequeños, se calcula el campo producido por cada elemento, y luego se hace la suma vectorial o la suma de cada componente, por lo general con técnicas de integración. Las distribuciones de carga están descritas por la densidad lineal de carga, λ, densidad superficial de carga, σ, y densidad volumétrica de carga, ρ. (Véanse los ejemplos 21.9 a 21.13.)



Líneas de campo eléctrico: Las líneas de campo proporcionan una representación gráfica de los campos eléctricos. En cualquier punto sobre una línea de campo, la tangente a la línea está en dirección de $\vec{E}$ en ese punto. El número de líneas por unidad de área (perpendicular a su dirección) es proporcional a la magnitud de $\vec{E}$ en ese punto.

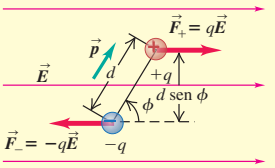


Dipolos eléctricos: Un dipolo eléctrico consiste en un par de cargas eléctricas de igual magnitud q pero signo contrario, separadas por una distancia d. Por definición, el momento dipolar eléctrico $\vec{\boldsymbol{p}}$ tiene magnitud $p = qd$. La dirección de $\vec{\boldsymbol{p}}$ va de la carga negativa a la carga positiva. Un dipolo eléctrico es un campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ que experimenta un par de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ igual al producto vectorial de $\vec{\boldsymbol{p}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$. La magnitud del par de torsión depende del ángulo ϕ entre $\vec{\boldsymbol{p}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$. La energía potencial, U, para un dipolo eléctrico en un campo eléctrico también depende de la orientación relativa de $\vec{\boldsymbol{p}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$. (Véanse los ejemplos 21.14 y 21.15.)

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi \qquad (21.15)$$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{p}} \times \vec{\boldsymbol{E}} \qquad (21.16)$$

$$U = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \qquad (21.18)$$



Términos clave

carga eléctrica, *710*
electrostática, *710*
electrón, *711*
protón, *711*
neutrón, *711*
núcleo, *711*
número atómico, *712*
ion positivo, *712*
ion negativo, *712*
ionización, *712*
principio de conservación de la carga, *712*
conductor, *713*
aislante, *713*
inducción, *714*
carga inducida, *714*
carga puntual, *716*
ley de Coulomb, *716*
coulomb, *717*
principio de superposición de fuerzas, *719*
campo eléctrico, *722*
carga de prueba, *722*
punto de origen, *723*
punto del campo, *723*
campo vectorial, *724*
principio de superposición de campos eléctricos, *727*
densidad lineal de carga, *727*
densidad superficial de carga, *727*
densidad volumétrica de carga, *727*
línea de campo eléctrico, *733*
dipolo eléctrico, *735*
momento dipolar eléctrico, *735*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Las moléculas de agua tienen un momento dipolar eléctrico permanente: un extremo de la molécula tiene carga positiva; y el otro extremo tiene carga negativa. Estos extremos atraen iones negativos y positivos, respectivamente, y los mantienen separados en solución. El agua es menos eficaz como solvente de materiales cuyas moléculas no se ionizan (llamadas sustancias *no iónicas*), como los aceites.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

21.1 Respuestas: *a*) la varilla de plástico pesa más, *b*) la varilla de vidrio pesa menos, *c*) la piel pesa un poco menos, *d*) la seda pesa un poco menos. La varilla de plástico obtiene una carga negativa al tomar electrones de la piel, por lo que la varilla pesa un poco más y la piel pierde peso después del frotamiento. En contraste, la varilla de vidrio obtiene una carga positiva porque cede electrones a la seda, así que después de frotarse, la varilla de vidrio pesa un poco menos, y la seda un poco más. El cambio en el peso es *muy* pequeño: el número de electrones transferidos es una fracción pequeña del mol, y un mol de electrones tiene una masa de tan sólo (6.02×10^{23} electrones) (9.11×10^{-31} kg/electrón) $= 5.48 \times 10^{-7}$ kg = ¡0.548 miligramos!

21.2 Respuestas: *a*) i), *b*) ii) Antes de que las dos esferas se toquen, la esfera con carga negativa ejerce una fuerza de repulsión sobre los electrones de la otra esfera, lo cual origina zonas de caga inducida negativa y positiva (véase la figura 21.7b). La zona positiva está más cerca de la esfera cargada negativamente que la zona negativa, por lo que hay una fuerza neta de atracción que jala a las esferas una hacia la otra, como en el caso del peine y el aislante de la figura 21.8b. Una vez que se tocan las dos esferas metálicas, algo del exceso de electrones de la esfera con carga negativa fluirá hacia la otra esfera (porque los metales son conductores). Entonces, las dos esferas tendrán una carga negativa neta y se repelerán mutuamente.

21.3 Respuesta: iv) La fuerza ejercida por q_1 sobre Q es como en el ejemplo 21.4. La magnitud de la fuerza ejercida por q_2 sobre Q es incluso igual a $F_{1 \text{ sobre } Q}$, pero la dirección de la fuerza ahora es *hacia* q_2 con un ángulo α por debajo del eje x. Entonces, las componentes x de las dos fuerzas se anulan, mientras que las componentes y (negativas) se suman, y la fuerza eléctrica total ocurre en la dirección negativa del eje y.

21.4 Respuestas: *a*) ii), *b*) i) El campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ producido por una carga puntual positiva apunta directamente alejándose de la carga (véase la figura 21.18a) y tiene una magnitud que depende de la distancia r entre la carga y el punto del campo. De ahí que una segunda carga puntual negativa, $q < 0$, recibirá una fuerza $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}$ que apunta directamente hacia la carga positiva y tiene una magnitud que depende de la distancia r entre las dos cargas. Si la carga negativa se mueve directamente hacia la carga positiva, la dirección de la fuerza permanece igual (a lo largo de la línea del movimiento de la carga negativa); pero la magnitud de la fuerza se incrementa a medida que disminuye la distancia r. Si la carga negativa se mueve en círculo alrededor de la carga positiva, la magnitud de la fuerza permanece igual (porque la distancia r es constante); pero la dirección de la fuerza cambia (cuando la carga negativa está en el lado derecho de la carga positiva, la fuerza va hacia la izquierda; cuando la carga negativa está en el lado izquierdo de la carga positiva, la fuerza va hacia la derecha).

21.5 Respuesta: iv) Piense en un par de segmentos de longitud dy, uno en la coordenada $y > 0$ y el otro en la coordenada $-y < 0$. El segmento superior tiene carga positiva y produce un campo eléctrico $d\vec{\boldsymbol{E}}$ en P, que apunta alejándose del segmento, por lo que $d\vec{\boldsymbol{E}}$ tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como el vector $d\vec{\boldsymbol{E}}$ en la figura 21.25. El segmento inferior tiene la misma cantidad de carga negativa. Produce una $d\vec{\boldsymbol{E}}$ que tiene la misma magnitud pero apunta *hacia* el segmento inferior, así que tiene una componente x negativa y una componente y también negativa. Por simetría, las dos componentes x son iguales pero opuestas, de manera que se cancelan. De esta manera, el campo eléctrico total únicamente tiene una componente y negativa.

21.6 Respuesta: sí Cuando las líneas de campo son rectas, $\vec{E}$ debe apuntar en la misma dirección por la región. De ahí que la fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una partícula de carga q siempre esté en la misma dirección. Una partícula que parta del reposo acelera en línea recta en la dirección de $\vec{F}$, por lo que su trayectoria es una línea recta que estará a lo largo de una línea de campo.

21.7 Respuesta: ii) Las ecuaciones (21.17) y (21.18) indican que la energía potencial para un dipolo en un campo eléctrico es $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre las direcciones de $\vec{p}$ y $\vec{E}$. Si $\vec{p}$ y $\vec{E}$ apuntan en direcciones opuestas, de manera que $\phi = 180°$, entonces $\cos\phi = -1$ y $U = +pE$. Éste es el valor máximo que U puede tener. De nuestro análisis de los diagramas de energía en la sección 7.5, se desprende que se trata de una situación de equilibrio inestable.

Otra forma de verlo es con la ecuación (21.15), que dice que la magnitud del par de torsión sobre un dipolo eléctrico es $\tau = pE\,\text{sen}\,\phi$. Ésta es igual a cero si $\phi = 108°$, por lo que no hay par de torsión, y si el dipolo se deja sin perturbación, no girará. No obstante, si se perturba ligeramente el dipolo de modo que ϕ sea un poco menor de 180°, habrá un par de torsión diferente de cero que trata de hacer girar al dipolo hacia $\phi = 0$, así que $\vec{p}$ y $\vec{E}$ apuntan en la misma dirección. De ahí que cuando el dipolo se perturba en su orientación de equilibrio en $\phi = 180°$, se mueve lejos de esa orientación, lo cual es lo distintivo del equilibrio inestable.

Se puede demostrar que la situación en que $\vec{p}$ y $\vec{E}$ apuntan en la misma dirección ($\phi = 0$) es un caso de equilibrio *estable*: la energía potencial es mínima, y si el dipolo se desplaza un poco hay un par de torsión que trata de regresarlo a la orientación original (un par de torsión *restaurador*).

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P21.1. Si usted desprende dos tiras de cinta adhesiva transparente del mismo carrete y de inmediato las deja colgando una cerca de la otra, se repelerán mutuamente. Si luego pega el lado con adhesivo de una con el lado brillante de la otra y las separa, se atraerán entre sí. Dé una explicación convincente donde intervenga la transferencia de electrones entre las tiras de cinta en esta secuencia de eventos.

P21.2. Dos esferas de metal cuelgan de cordones de nailon, y cuando se les acerca una a la otra tienden a atraerse. Con base en esta sola información, analice todas las maneras posibles en que las esferas pudieran estar cargadas. ¿Sería posible que después de que las esferas se toquen quedaran pegadas? Explique su respuesta.

P21.3. La fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas se hace más débil a medida que aumenta la distancia. Suponga que la fuerza eléctrica fuera *independiente* de la distancia. En este caso, ¿un peine cargado haría que un aislante neutro se polarizara, como en la figura 21.8? ¿Por qué? ¿El aislante neutro sería atraído por el peine? Otra vez, ¿por qué?

P21.4. Su ropa tiende a pegarse entre sí cuando regresa de la tintorería. ¿Por qué? ¿Esperaría más o menos atracción si la ropa estuviera hecha del mismo material (por ejemplo, algodón), que si estuviera hecha con distintas telas? De nuevo, ¿por qué? (Tal vez usted querrá experimentar con su próximo envío a la tintorería.)

P21.5. Una esfera de metal sin carga cuelga de un cordón de nailon. Cuando se le acerca una varilla de vidrio con carga positiva, la esfera es atraída hacia la varilla. Pero si la esfera toca la varilla, de pronto se aleja de la varilla. Explique por qué la esfera primero es atraída y luego repelida.

P21.6. Los electrones libres en un metal son atraídos por gravedad hacia la Tierra. Entonces, ¿por qué no se asientan en el fondo del conductor, como los sedimentos en el fondo de un río?

P21.7. Algunos de los electrones en un buen conductor (como el cobre) se mueven a rapideces de 10^6 m/s o más rápido. ¿Por qué no escapan volando del conductor?

P21.8. Es común que los buenos conductores eléctricos, como los metales, también sean buenos conductores del calor; asimismo los aislantes eléctricos, como la madera, por lo general son malos conductores del calor. Explique por qué debe haber una relación entre la conducción eléctrica y la conducción del calor en estos materiales.

P21.9. Defienda el siguiente enunciado: "Si en todo el Universo sólo hubiera una partícula cargada eléctricamente, el concepto de carga eléctrica carecería de significado."

P21.10. Dos objetos metálicos idénticos están montados en soportes aislantes. Describa como podría colocar cargas de signo opuesto, pero de exactamente igual magnitud en los dos objetos.

P21.11. Se puede utilizar la envoltura de plástico para alimentos al cubrir un contendedor, estirándola en la parte superior y luego presionando las partes que cuelgan contra los lados. ¿Por qué es pegajosa? (*Sugerencia:* la respuesta incluye la fuerza eléctrica.) ¿La envoltura para alimentos se adhiere a sí misma con igual tenacidad? ¿Por qué? ¿Funcionaría con contenedores metálicos? Otra vez, ¿por qué?

P21.12. Si usted camina sobre una alfombra de nailon y luego toca un objeto metálico grande, como una perilla, puede recibir una chispa y una descarga. ¿Por qué esto tiende a ocurrir más bien en los días secos que en los húmedos? (*Sugerencia:* véase la figura 21.31.) ¿Por qué es menos probable que reciba la descarga si toca un objeto metálico *pequeño*, como un clip sujetapapeles?

P21.13. Usted tiene un objeto con carga negativa. ¿Cómo lo usa para colocar una carga negativa en una esfera metálica aislada? ¿Y para colocar una carga positiva neta en la esfera?

P21.14. Cuando dos cargas puntuales de igual masa y carga se liberan en una mesa sin fricción, cada una tiene una aceleración inicial a_0. Si en vez de eso una se mantiene fija y se libera la otra, ¿cuál será su aceleración inicial: a_0, $2a_0$ o $a_0/2$? Explique su respuesta.

P21.15. En una mesa libre de fricción, se liberan una carga puntual de masa m y carga Q, y otra carga puntual de masa m pero carga $2Q$. Si la carga Q tiene una aceleración inicial a_0, ¿cuál será la aceleración de $2Q$: a_0, $2a_0$, $4a_0$, $a_0/2$ o $a_0/4$? Explique su respuesta.

P21.16. Se coloca un protón en un campo eléctrico uniforme y luego se libera. Después se sitúa un electrón en el mismo punto y también se libera. ¿Experimentan las dos partículas la misma fuerza? ¿La misma aceleración? ¿Se mueven en la misma dirección cuando se liberan?

P21.17. En el ejemplo 21.1 (sección 21.3) se vio que la fuerza eléctrica entre dos partículas α es del orden de 10^{35} veces más fuerte que la fuerza gravitatoria. Entonces, ¿por qué percibimos fácilmente la gravedad de la Tierra pero no su fuerza eléctrica?

P21.18. ¿Qué similitudes hay entre las fuerzas eléctricas y las fuerzas gravitatorias? ¿Cuáles son sus diferencias más significativas?

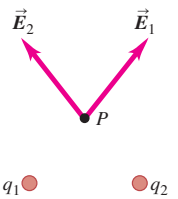
P21.19. A una distancia R de una carga puntual, su campo eléctrico es E_0. ¿A qué distancia (en términos de R) de la carga puntual, el campo eléctrico sería $\frac{1}{3}E_0$?

P21.20. Los núcleos atómicos están hechos de protones y neutrones. Esto demuestra que debe haber otra clase de interacción, además de las fuerzas gravitatorias y eléctricas. Explique su respuesta.

P21.21. Los campos eléctricos suficientemente fuertes hacen que los átomos se ionicen positivamente, es decir, que pierdan uno o más electrones. Explique por qué ocurre esto. ¿Qué es lo que determina la intensidad que debe tener el campo para que esto suceda?

P21.22. En la figura 21.35 se muestran los campos eléctricos en el punto P debidos a las cargas positivas q_1 y q_2. ¿El hecho de que se crucen entre sí contraviene el enunciado de la sección 21.6 acerca de que las líneas de campo eléctrico nunca se cruzan? Explique su respuesta.

Figura **21.35**
Pregunta P21.22.



P21.23. La temperatura y la velocidad del aire tienen diferentes valores en lugares distintos de la atmósfera terrestre. ¿La velocidad del aire es un campo vectorial? ¿Por qué? ¿La temperatura del aire es un campo vectorial? De nuevo, ¿por qué?

Ejercicios

Sección 21.3 Ley de Coulomb

21.1. En una esfera pequeña de plomo con masa de 8.00 g se colocan electrones excedentes, de modo que su carga neta sea de -3.20×10^{-9} C. *a*) Encuentre el número de electrones excedentes en la esfera. *b*) ¿Cuántos electrones excedentes hay por átomo de plomo? El número atómico del plomo es 82, y su masa atómica es de 207 g/mol.

21.2. Los relámpagos ocurren cuando hay un flujo de carga eléctrica (sobre todo electrones) entre el suelo y los cumulonimbos (nubes de tormenta). La tasa máxima de flujo de carga en un relámpago es de alrededor de 20,000 C/s; esto dura 100 μs o menos. ¿Cuánta carga fluye entre el suelo y la nube en este tiempo? ¿Cuántos electrones fluyen en dicho periodo?

21.3. Estime cuántos electrones hay en su cuerpo. Haga todas las suposiciones que crea necesarias; pero diga con claridad cuáles son. (*Sugerencia:* la mayoría de los átomos de su cuerpo tienen números iguales de electrones, protones y neutrones.) ¿Cuál es la carga combinada de todos estos electrones?

21.4. Partículas en un anillo de oro. Usted tiene un anillo de oro puro (24 kilates) con masa de 17.7 g. El oro tiene una masa atómica de 197 g/mol y un número atómico de 79. *a*) ¿Cuántos protones hay en el anillo, y cuál es su carga total positiva? *b*) Si el anillo no tiene carga neta, ¿cuántos electrones hay en él?

21.5. El peso medio de un ser humano es de alrededor de 650 N. Si dos personas comunes tienen, cada una, una carga excedente de 1.0 coulomb, una positiva y la otra negativa, ¿qué tan lejos tendrían que estar para que la atracción eléctrica entre ellas fuera igual a su peso de 650 N?

21.6. Dos esperas pequeñas separadas por una distancia de 20.0 cm tienen cargas iguales. ¿Cuántos electrones excedentes debe haber en cada esfera, si la magnitud de la fuerza de repulsión entre ellas es de 4.57×10^{-21} N?

21.7. Se dan cargas eléctricas positivas a dos esferas pequeñas de plástico. Cuando están separadas una distancia de 15.0 cm, la fuerza de repulsión entre ellas tiene una magnitud de 0.220 N. ¿Cuál es la carga en cada esfera, si *a*) las dos cargas son iguales, y *b*) si una esfera tiene cuatro veces la carga de la otra?

21.8. Dos esferas pequeñas de aluminio tienen, cada una, una masa de 0.0250 kg, y están separadas 80.0 cm. *a*) ¿Cuántos electrones contiene cada esfera? (La masa atómica del aluminio es de 26.982 g/mol, y su número atómico es de 13.) *b*) ¿Cuántos electrones tendrían que retirarse de una esfera y agregarse a la otra, para ocasionar una fuerza de atracción entre ellas con magnitud de 1.00×10^4 N (aproximadamente 1 tonelada)? Suponga que las esferas son cargas puntuales. *c*) ¿Qué fracción de todos los electrones en cada esfera representa esto?

21.9. Dos esferas muy pequeñas de 8.55 g, separadas una distancia de 15.0 cm entre sus centros, se cargan con números iguales de electrones en cada una de ellas. Si se ignoran todas las demás fuerzas, ¿cuántos electrones habría que agregar a cada esfera para que las dos aceleraran a 25.0g al ser liberadas? ¿En qué dirección acelerarían?

21.10. *a*) Si se supone que sólo la gravedad actúa sobre un electrón, ¿qué tan lejos tendría que estar el electrón de un protón, de modo que su aceleración fuera la misma que la de un objeto en caída libre en la superficie terrestre? *b*) Suponga que la Tierra estuviera hecha tan sólo de protones, pero tuviera el mismo tamaño y masa que en realidad tiene. ¿Cuál sería la aceleración de un electrón que se liberara en su superficie? ¿Es necesario considerar la atracción de la gravedad además de la fuerza eléctrica? ¿Por qué?

21.11. En un experimento en el espacio, se mantiene fijo un protón y se libera otro desde el reposo a una distancia de 2.50 mm. *a*) ¿Cuál es la aceleración inicial del protón después de liberarlo? *b*) Elabore diagramas cualitativos (¡sin números!) de aceleración-tiempo y velocidad-tiempo, para el movimiento del protón liberado.

21.12. Una carga negativa de -0.550 μC ejerce una fuerza hacia arriba de 0.200 N, sobre una carga desconocida que está a 0.300 m directamente abajo ella. *a*) ¿Cuál es la carga desconocida (magnitud y signo)? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza que la carga desconocida ejerce sobre la carga de -0.550 μC?

21.13. Tres cargas puntuales están en línea. La carga $q_3 = +5.00$ nC está en el origen. La carga $q_2 = -3.00$ nC se encuentra en $x = +4.00$ cm. La carga q_1 está en $x = +2.00$ cm. ¿Cuál es q_1 (magnitud y signo), si la fuerza neta sobre q_3 es igual a cero?

21.14. En el ejemplo 21.4, suponga que la carga puntual sobre el eje y en $y = -0.30$ m tiene una carga negativa de -2.0 μC, y la otra carga permanece igual. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre Q. ¿En qué difiere su respuesta de la respuesta del ejemplo 21.3? Explique las diferencias.

21.15. En el ejemplo 21.3, calcule la fuerza neta sobre la carga q_1.

21.16. En el ejemplo 21.4, ¿cuál es la fuerza neta (magnitud y dirección) sobre la carga q_1 que ejercen las otras dos cargas?

21.17. Tres cargas puntuales están alineadas a lo largo del eje x. La carga $q_1 = +3.00$ μC está en el origen, y la carga $q_2 = -5.00$ μC se encuentra en $x = 0.200$ m. La carga $q_3 = -8.00$ μC. ¿Dónde está situada q_3 si la fuerza neta sobre q_1 es de 7.00 N en la dirección negativa del eje x?

21.18. Repita el ejercicio 21.17 para $q_3 = +8.00$ μC.

21.19. Dos cargas puntuales se localizan sobre el eje y como sigue: la carga $q_1 = -1.50$ nC está en $y = -0.600$ m y la carga $q_2 = +3.20$ nC se halla en el origen ($y = 0$). ¿Cuál es la fuerza total (magnitud y dirección) ejercida por estas dos cargas sobre una tercera $q_3 = +5.00$ nC que se ubica en $y = -0.400$ m?

21.20. Dos cargas puntuales están situadas sobre el eje x del modo siguiente: la carga $q_1 = +4.00$ nC está en $x = 0.200$ m, y la carga $q_2 = +5.00$ nC está en $x = -0.300$ m. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza total ejercida por estas dos cargas, sobre una carga puntual negativa $q_3 = -6.00$ nC que se halla en el origen?

21.21. Una carga puntual positiva q está situada sobre la parte positiva del eje y en $y = a$, y una carga puntual negativa $-q$ está en la parte negativa del eje y en $y = -a$. Se coloca una carga puntual negativa $-Q$ en cierto punto sobre la parte positiva del eje x. *a*) En un diagrama de cuerpo libre, indique las fuerzas que actúan sobre la carga $-Q$. *b*) Encuentre las componentes x y y de la fuerza neta que ejercen las dos cargas q y $-q$ sobre $-Q$. (Su respuesta sólo debería incluir k, q, Q, a y la coordenada x de la tercera carga.) *c*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga $-Q$ cuando está en el origen ($x = 0$)? *d*) Haga la gráfica de la componente y de la fuerza neta sobre la carga $-Q$, en función de x para los valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

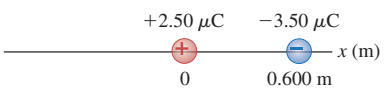
21.22. Dos cargas puntuales positivas q se colocan sobre el eje y en $y = a$ y en $y = -a$. Se coloca una carga puntual negativa $-Q$ en cierto punto de la parte positiva del eje x. *a*) En un diagrama de cuerpo libre, indi-

que las fuerzas que actúan sobre la carga $-Q$. *b*) Encuentre las componentes x y y de la fuerza neta que ejercen las dos cargas positivas sobre $-Q$. (Su respuesta sólo debería incluir k, q, Q, a y la coordenada x de la tercera carga.) *c*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga $-Q$ cuando está en el origen ($x = 0$)? *d*) Grafique la componente x de la fuerza neta sobre la carga $-Q$ en función de x para valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

21.23. Se colocan cuatro cargas eléctricas idénticas en las esquinas de un cuadrado cuyos lados miden L. *a*) En un diagrama de cuerpo libre, muestre todas las fuerzas que actúen sobre una de las cargas. *b*) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza total ejercida sobre una carga por las otras tres cargas.

21.24. Se colocan dos cargas, una de 2.50 μC y la otra de -3.50 μC, sobre el eje x, una en el origen y la otra en $x = 0.600$ m, como se ilustra en la figura 21.36. Encuentre la posición sobre el eje x donde la fuerza neta sobre una pequeña carga $+q$ debería de ser igual a cero.

Figura 21.36 Ejercicio 21.24.



Sección 21.4 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas

21.25. Se coloca un protón en un campo eléctrico uniforme de 2.75×10^3 N/C. Calcule: *a*) la magnitud de la fuerza eléctrica ejercida sobre el protón; *b*) la aceleración del protón; *c*) la rapidez del protón después de estar 1.00 μs en el campo, si se supone que parte del reposo.

21.26. Una partícula tiene carga de -3.00 nC. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico debido a esta partícula, en un punto que está 0.250 m directamente arriba de ella. *b*) ¿A qué distancia de esta partícula el campo eléctrico debe tener una magnitud de 12.0 N/C?

21.27. Un protón se mueve en forma horizontal hacia la derecha a 4.50×10^6 m/s. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico más débil que lleve al protón uniformemente al reposo en una distancia de 3.20 cm. *b*) ¿Cuánto tiempo le llevaría al protón detenerse una vez que entrara al campo eléctrico? *c*) ¿Cuál es el campo mínimo (magnitud y dirección) que sería necesario para detener un electrón en las condiciones del inciso *a*)?

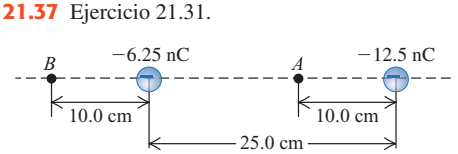
21.28. Un electrón parte del reposo en un campo eléctrico uniforme, acelera verticalmente hacia arriba y recorre 4.50 m en los primeros 3.00 μs después de que se libera. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico? *b*) ¿Se justifica que se desprecien los efectos de la gravedad? Explique su respuesta cuantitativamente.

21.29. *a*) ¿Cuál debe ser la carga (signo y magnitud) de una partícula de 1.45 g para que permanezca estacionaria, cuando se coloca en un campo eléctrico dirigido hacia abajo con magnitud de 650 N/C? *b*) ¿Cuál es la magnitud de un campo eléctrico donde la fuerza eléctrica sobre un protón tiene la misma magnitud que su peso?

21.30. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico de un núcleo de hierro a una distancia de 6.00×10^{-10} m de su núcleo? El número atómico del hierro es 26. Suponga que el núcleo puede tratarse como carga puntual. *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico de un protón a una distancia de 5.29×10^{-11} m del protón? (Éste es el radio de la órbita del electrón en el modelo de Bohr para el estado fundamental del átomo de hidrógeno.)

21.31. Dos cargas puntuales están separadas por 25.0 cm (figura 21.37). Encuentre el campo eléctrico neto que producen tales cargas en

Figura 21.37 Ejercicio 21.31.

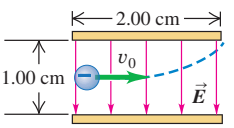


a) el punto A y *b*) en el punto B. *c*) ¿Cuáles serían la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica que produciría esta combinación de cargas sobre un protón situado en el punto A?

21.32. Campo eléctrico de la Tierra. La tierra tiene una carga eléctrica neta que origina un campo en los puntos cerca de su superficie, y que es igual a 150 N/C, dirigido hacia el centro del planeta. *a*) ¿Qué magnitud y signo de la carga tendría que adquirir un ser humano de 60 kg, para vencer su peso con la fuerza ejercida por el campo eléctrico terrestre? *b*) ¿Cuál sería la fuerza de repulsión entre dos personas, cada una con la carga calculada en el inciso *a*), separadas por una distancia de 100 m? ¿Es factible el uso del campo eléctrico de nuestro planeta como un medio para volar? ¿Por qué?

21.33. Se lanza un electrón con rapidez inicial $v_0 = 1.60 \times 10^6$ m/s hacia el interior de un campo uniforme entre las placas paralelas de la figura 21.38. Suponga que el campo entre las placas es uniforme y está dirigido verticalmente hacia abajo, y que el campo fuera de las placas es igual a cero. El electrón ingresa al campo en un punto equidistante de las dos placas. *a*) Si el electrón apenas libra la placa superior al salir del campo, encuentre la magnitud del campo eléctrico. *b*) Suponga que en la figura 21.38 el electrón es sustituido por un protón con la misma rapidez inicial v_0. ¿Golpearía el protón alguna de las placas? Si el protón no golpea ninguna de las placas, ¿cuáles serían la magnitud y la dirección de su desplazamiento vertical, a medida que sale de la región entre las placas? *c*) Compare las trayectorias que recorren el electrón y el protón, y explique las diferencias. *d*) Analice si es razonable ignorar los efectos de la gravedad en cada partícula.

Figura 21.38
Ejercicio 21.33.



21.34. La carga puntual $q_1 = -5.00$ nC se encuentra en el origen y la carga puntual $q_2 = +3.00$ nC está sobre el eje x en $x = 3.00$ cm. El punto P se halla sobre el eje y en $y = 4.00$ cm. *a*) Calcule los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en el punto P debido a las cargas q_1 y q_2. Exprese los resultados en términos de vectores unitarios (véase el ejemplo 21.6). *b*) Utilice los resultados del inciso *a*) para obtener el campo resultante en P, expresado con notación de vectores unitarios.

21.35. En el ejercicio 21.33, ¿cuál es la rapidez del electrón cuando sale del campo eléctrico?

21.36. *a*) Calcule la magnitud y la dirección (relativa al eje $+x$) del campo eléctrico del ejemplo 21.6. *b*) Una carga puntual de -2.5 nC está en el punto P de la figura 21.19. Encuentre la magnitud y la dirección de i) la fuerza que la carga de -8.0 nC situada en el origen ejerce sobre esta carga, y ii) la fuerza que esta carga ejerce sobre la carga de -8.0 nC que está en el origen.

21.37. *a*) Para el electrón de los ejemplos 21.7 y 21.8, compare su peso con la magnitud de la fuerza eléctrica sobre el electrón. En estos ejemplos, ¿es adecuado ignorar la fuerza gravitatoria sobre el electrón? Explique su respuesta. *b*) Se coloca una partícula con carga $+e$ en reposo entre las placas cargadas de la figura 21.20. ¿Cuál debe ser la masa de este objeto para que permanezca en reposo? Dé su respuesta en kilogramos y en múltiplos de la masa del electrón. *c*) ¿La respuesta del inciso *b*) depende de dónde se sitúe el objeto entre las placas? ¿Por qué?

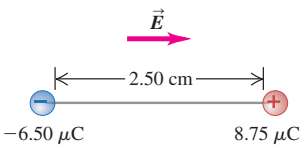
21.38. En la región entre dos placas planas paralelas con carga opuesta, existe un campo eléctrico. Se libera un protón desde el reposo en la superficie de la placa con carga positiva, y golpea la superficie de la placa opuesta, que está a una distancia de 1.60 cm de la primera, en un intervalo de tiempo de 1.50×10^{-6} s. *a*) Encuentre la magnitud del campo eléctrico. *b*) Calcule la rapidez del protón cuando golpea la placa con carga negativa.

21.39. Una carga puntual se encuentra en el origen. Si esta carga puntual se toma como punto de origen, ¿cuál es el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ en dirección de *a*) el punto del campo situado en $x = 0$, $y = -1.35$ m; *b*) el

punto del campo en $x = 12.0$ cm, $y = 12.0$ cm; *c*) el punto del campo en $x = -1.10$ m $y = 2.60$ m. Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

21.40. Una carga puntual de $+8.75\ \mu$C está adherida bajo una mesa horizontal sin fricción. Está unida a una carga puntual de $-6.50\ \mu$C con un alambre aislante de 2.50 cm. Un campo eléctrico uniforme de magnitud 1.85×10^8 N/C está dirigido en forma paralela al alambre, como se ilustra en la figura 21.39. *a*) Calcule la tensión en el alambre. *b*) ¿Cuál sería la tensión si las dos cargas fueran negativas?

Figura **21.39** Ejercicio 21.40.



21.41. *a*) Un electrón se mueve hacia el este en un campo eléctrico uniforme de 1.50 N/C, dirigido hacia el oeste. En el punto *A*, la velocidad del electrón es de 4.5×10^5 hacia el este. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando alcanza el punto *B*, 0.375 m al este del punto *A*? *b*) Un protón se mueve en el campo eléctrico uniforme del inciso *a*). En el punto *A*, la velocidad del protón es de 1.90×10^4 m/s al este. ¿Cuál es la rapidez del protón en el punto *B*?

21.42. Campo eléctrico en el núcleo. Los protones en el núcleo están separados alrededor de 10^{-15} m (1 fm). *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico producido por un protón que está a una distancia de 1.50 fm? *b*) ¿Cómo se compara la magnitud de este campo con la del campo del ejemplo 21.7?

Sección 21.5 Cálculos de campos eléctricos

21.43. Dos cargas puntuales positivas q están colocadas sobre el eje x, una en $x = a$ y la otra en $x = -a$. *a*) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en $x = 0$. *b*) Obtenga la expresión para el campo eléctrico en puntos sobre el eje x. Use los resultados para graficar la componente x del campo eléctrico en función de x, para valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

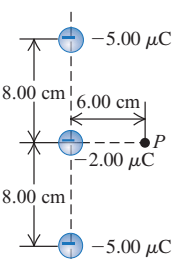
21.44. Dos partículas con cargas $q_1 = 0.500$ nC y $q_2 = 8.00$ nC están separadas por una distancia de 1.20 m. ¿En qué punto de la línea que conecta las dos cargas, el campo eléctrico total producido por ambas cargas es igual a cero?

21.45. Una carga puntual de $+2.00$ nC está en el origen, y una segunda carga puntual de -5.00 nC está en el eje x en $x = 0.800$ m. *a*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada uno de los puntos siguientes sobre el eje x: i) $x = 0.200$ m; ii) $x = 1.20$ m; iii) $x = -0.200$ m. *b*) Calcule la fuerza eléctrica neta que las dos cargas ejercerían sobre un electrón colocado en cada punto del inciso *a*).

21.46. Repita el ejercicio 21.44, pero ahora con $q_1 = -4.00$ nC.

21.47. Tres cargas puntuales negativas están sobre una línea, como se ilustra en la figura 21.40. Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce esta combinación de cargas en el punto *P*, que está a 6.00 cm de la carga de $-2.00\ \mu$C medida en forma perpendicular a la línea que conecta las tres cargas.

Figura **21.40** Ejercicio 21.47.



21.48. Una carga puntual positiva q se coloca en $x = a$, y una carga puntual negativa $-q$ se sitúa en $x = -a$. *a*) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en $x = 0$. *b*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en los puntos sobre el eje x. Use su resultado para graficar la componente x del campo eléctrico en función de x, para valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

21.49. En un sistema de coordenadas rectangulares, se coloca una carga puntual positiva $q = 6.00 \times 10^{-9}$ en el punto $x = +0.150$ m, $y = 0$ y otra carga puntual idéntica se sitúa en $x = -0.150$ m, $y = 0$. Encuentre las componentes x y y, la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los siguientes puntos: *a*) el origen; *b*) $x = 0.300$ m, $y = 0$; *c*) $x = 0.150$ m, $y = -0.400$ m; *d*) $x = 0$, $y = 0.200$ m.

21.50. Una carga puntual $q_1 = -4.00$ nC se encuentra en el punto $x = 0.600$ m, $y = 0.800$ m; mientras que una segunda carga $q_2 = +6.00$ nC está en el punto $x = 0.600$ m, $y = 0$. Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico neto en el origen debido a estas dos cargas puntuales.

21.51. Repita el ejercicio 21.49 para el caso en que la carga puntual en $x = +0.150$ m, $y = 0$ es positiva y la otra es negativa, cada una con magnitud de 6.00×10^{-9} C.

21.52. Un alambre delgado y muy largo tiene una carga de 1.50×10^{-10} C/m por unidad de longitud. ¿A qué distancia del alambre la magnitud del campo eléctrico es igual a 2.50 N/C?

21.53. Una carga eléctrica positiva está distribuida a lo largo del eje y con una carga por unidad de longitud de λ. *a*) Considere el caso en que la carga está distribuida sólo entre los puntos $y = a$ y $y = -a$. Para puntos sobre la parte positiva del eje x, haga la gráfica de la componente x del campo eléctrico en función de x para valores de x entre $x = a/2$ y $x = 4a$. *b*) En vez de lo anterior, considere el caso en que la carga está distribuida a lo largo de todo el eje y con la misma carga por unidad de longitud λ. Usando la misma gráfica del inciso *a*), grafique la componente x del campo eléctrico en función de x, para valores de x entre $x = a/2$ y $x = 4a$. Indique cuál gráfica se refiere a cada situación.

21.54. Un alambre de plástico, aislante y recto, mide 8.50 cm de longitud y tiene una densidad de carga de $+175$ nC/m, distribuidos uniformemente a lo largo de su longitud. Se encuentra sobre una mesa horizontal. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce este alambre en un punto que está 6.00 cm directamente arriba de su punto medio. *b*) Si el alambre ahora se dobla para formar un círculo que se tiende sobre la mesa, calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce en un punto que se encuentra 6.00 cm directamente arriba de su centro.

21.55. Un conductor en forma de anillo con radio $a = 2.50$ cm tiene una carga positiva total $Q = +0.125$ nC, distribuida uniformemente en toda su circunferencia, como se aprecia en la figura 21.24. El centro del anillo está en el origen de las coordenadas *O*. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el punto *P*, que está en el eje x en $x = 40.0$ cm? *b*) En el punto *P* del inciso anterior se coloca una carga puntual $q = -2.50\ \mu$C. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida *por* la carga q *sobre* el anillo?

21.56. Una carga de -6.50 nC está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una cara de un disco aislante con radio de 1.25 cm. *a*) Obtenga la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce este disco en el punto *P* sobre el eje del disco a una distancia de 2.00 cm de su centro. *b*) Suponga que toda la carga se colocara lejos del centro y se distribuyera de manera uniforme sobre el borde exterior del disco. Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto *P*. *c*) Si toda la carga se lleva al centro del disco, encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto *P*. *d*) ¿Por qué en el inciso *a*) el campo es más fuerte que en el inciso *b*)? ¿Por qué en el inciso *c*) el campo es el más fuerte de los tres?

21.57. Dos láminas planas, horizontales e infinitas, con carga están separadas una distancia d. La lámina inferior tiene carga negativa con densidad superficial de carga uniforme $-\sigma < 0$. La lámina superior tiene carga positiva con densidad superficial de carga uniforme $\sigma > 0$.

¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección, si el campo es diferente de cero) *a*) arriba de la lámina superior, *b*) debajo de la lámina inferior, *c*) entre las dos láminas?

Sección 21.6 Líneas de campo eléctrico

21.58. Una lámina infinita *A* tiene una densidad de carga uniforme y positiva, σ; en tanto que la lámina *B*, que está a la derecha de *A* y paralela a ésta, tiene una densidad de carga uniforme y negativa de -2σ. *a*) Dibuje las líneas de campo eléctrico para este par de láminas. Incluya la región entre las láminas y también las regiones a la izquierda de *A* y a la derecha de *B*. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que la lámina *B* tiene una densidad de carga de $+2\sigma$.

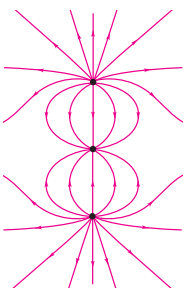
21.59. Suponga que la carga que se muestra en la figura 21.29a está fija en su posición. Después se coloca una partícula pequeña con carga positiva en cierto punto de la figura y se libera. ¿La trayectoria de la partícula sigue una línea de campo eléctrico? ¿Por qué? Suponga ahora que la partícula se sitúa en algún punto de la figura 21.29b y se libera (las cargas positiva y negativa que aparecen en la figura están fijas en su posición). ¿Esta trayectoria seguirá una línea de campo eléctrico? De nuevo, ¿por qué? Explique cualesquiera diferencias entre sus respuestas para las dos situaciones diferentes.

21.60. Dibuje las líneas de campo eléctrico para un disco de radio *R* con densidad superficial de carga positiva y uniforme σ. Para hacer su diagrama, utilice lo que sabe sobre el campo eléctrico cuando está muy cerca del disco y muy lejos de éste.

21.61. *a*) Dibuje las líneas de campo eléctrico para una línea de carga infinita. Le será de utilidad mostrar en un diagrama las líneas en un plano que contenga la línea de carga, y en otro las líneas de campo en un plano perpendicular a la línea de carga. *b*) Explique cómo muestra el diagrama que i) la magnitud *E* del campo eléctrico sólo depende de la distancia *r* a partir de la línea de carga, y ii) que *E* disminuye según $1/r$.

21.62. La figura 21.41 muestra algunas de las líneas de campo eléctrico debidas a tres cargas puntuales situadas a lo largo del eje vertical. Las tres cargas tienen la misma magnitud. *a*) ¿Cuáles son los signos de las tres cargas? Explique su razonamiento. *b*) ¿En cuál(es) punto(s) la magnitud del campo eléctrico es la más pequeña? Explique su razonamiento. Diga cómo los campos producidos por cada carga puntual individual se combinan para dar un campo neto pequeño en este(os) punto(s).

Figura **21.41** Ejercicio 21.62.



Sección 21.7 Dipolos eléctricos

21.63. Las cargas puntuales $q_1 = -4.5$ nC y $q_2 = +4.5$ nC están separadas 3.1 mm, y forman un dipolo eléctrico. *a*) Calcule el momento dipolar eléctrico (magnitud y dirección). *b*) Las cargas están en un campo eléctrico uniforme, cuya dirección forma un ángulo de 36.9° con la línea que une las cargas. ¿Cuál es la magnitud de este campo si el par de torsión que ejerce sobre el dipolo tiene una magnitud de $7.2 \times 10^{-9}\ \text{N} \cdot \text{m}$?

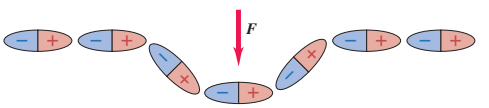
21.64. La molécula del amoniaco (NH_3) tiene un momento dipolar de $5.0 \times 10^{-30}\ \text{C} \cdot \text{m}$. Se colocan moléculas del amoniaco en fase gaseosa en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de 1.6×10^{6} N/C. *a*) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial eléctrica cuando el momento dipolar de una molécula cambia su orientación con respecto a $\vec{E}$ de paralela a perpendicular? *b*) ¿A qué temperatura absoluta *T* la energía cinética traslacional media, $\frac{3}{2}kT$, de una molécula es igual al cambio en energía potencial calculado en el inciso *a*)? (*Nota:* arriba de esta temperatura, la agitación térmica impide que los dipolos se alineen con el campo eléctrico.)

21.65. En el ejemplo 21.15, el resultado aproximado $E \cong p/2\pi\epsilon_0 y^3$ se obtuvo del campo eléctrico de un dipolo en puntos sobre el eje del dipolo. *a*) Vuelva a obtener este resultado obteniendo el denominador común de las fracciones en la expresión para E_y, como se describió en el ejemplo 21.15. *b*) Explique por qué el resultado aproximado también da la expresión aproximada correcta de E_y para $y < 0$.

21.66. El momento dipolar de la molécula de agua (H_2O) es $6.17 \times 10^{-30}\ \text{C} \cdot \text{m}$. Considere una molécula de agua localizada en el origen, cuyo momento dipolar $\vec{p}$ apunta en la dirección positiva del eje *x*. Un ion de cloro (Cl^-) de carga -1.60×10^{-19} C está ubicado en $x = 3.00 \times 10^{-9}$ m. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica que la molécula de agua ejerce sobre el ion de cloro. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión? Suponga que *x* es mucho mayor que la separación *d* entre las cargas en el dipolo, por lo que se puede usar la expresión aproximada para el campo eléctrico a lo largo del eje del dipolo que se obtuvo en el ejemplo 21.15.

21.67. Tensión superficial. La superficie de un líquido polar, como el agua, se puede considerar como una serie de dipolos encadenados en el arreglo estable donde los vectores del momento dipolar son paralelos a la superficie y todos apuntan en la misma dirección. Ahora suponga que algo presiona la superficie hacia adentro y desordena los dipolos, como se ilustra en la figura 21.42. *a*) Demuestre que los dos dipolos inclinados ejercen una fuerza neta hacia arriba sobre el dipolo entre ellos, por lo que se oponen a la fuerza externa dirigida hacia abajo. *b*) Demuestre que los dipolos se atraen entre sí, por lo que oponen resistencia a separarse. La fuerza entre los dipolos se opone a la penetración de la superficie del líquido y es un modelo sencillo de la tensión superficial (véase la sección 14.3 y la figura 14.15).

Figura **21.42** Ejercicio 21.67.



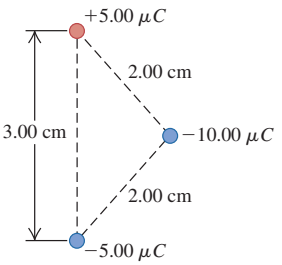
21.68. Considere el dipolo eléctrico del ejemplo 21.15. *a*) Obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico producido por el dipolo en un punto localizado en el eje *x* de la figura 21.34. ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico? *b*) ¿Cómo el campo eléctrico, en puntos que están sobre el eje *x*, depende de *x* cuando *x* es muy grande?

21.69. Par de torsión sobre un dipolo. Un dipolo eléctrico con momento dipolar $\vec{p}$ está en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. *a*) Encuentre las orientaciones del dipolo para el que el par de torsión sobre el dipolo es igual a cero. *b*) ¿Cuál de las orientaciones en el inciso *a*) es estable, y cuál es inestable? (*Sugerencia:* considere un pequeño desplazamiento fuera de la posición de equilibrio y analice lo que ocurre.) *c*) Demuestre que para la orientación estable del inciso *b*), el propio campo eléctrico del dipolo tiende a oponerse al campo externo.

21.70. Un dipolo que consiste en cargas $\pm e$ separadas 220 nm se coloca entre dos láminas muy largas (infinitas, en esencia) que tienen densidades de carga iguales pero opuestas de 125 μC/m^2. *a*) ¿Cuál es la energía potencial máxima que este dipolo puede tener debido a las láminas, y cómo debería orientarse en relación con las láminas para que adquiera ese valor? *b*) ¿Cuál es el par de torsión máximo que las láminas pueden ejercer sobre el dipolo, y cómo deberían orientarse con respecto a las láminas para que adquieran este valor? *c*) ¿Cuál es la fuerza neta que ejercen las dos láminas sobre el dipolo?

21.71. Tres cargas están en las esquinas de un triángulo isósceles, como se ilustra en la figura 21.43. Las cargas de $\pm 5.00\ \mu C$ forman un dipolo. *a*) Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que la carga de $-10.00\ \mu C$ ejerce sobre el dipolo. *b*) Para un eje perpendicular a la línea que une las cargas de $\pm 5.00\ \mu C$, en el punto medio de dicha línea, obtenga el par de torsión (magnitud y dirección) que la carga de $-10.00\ \mu C$ ejerce sobre el dipolo.

Figura **21.43** Ejercicio 21.71.



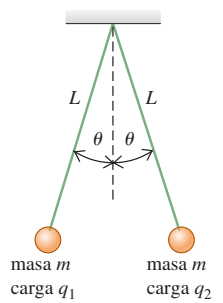
Problemas

21.72. Se coloca una carga $q = +5.00$ nC en el origen de un sistema de coordenadas *xy*, y una carga $q_2 = -2.00$ nC se sitúa sobre la parte positiva del eje *x*, en $x = 4.00$ cm. *a*) Si ahora se coloca una tercera carga $q_3 = +6.00$ nC en el punto $x = 4.00$ cm, $y = 3.00$ cm, determine las componentes *x* y *y* de la fuerza total ejercida sobre esta carga por las otras dos. *b*) Calcule la magnitud y la dirección de esta fuerza.

21.73. Se mantienen fijas dos cargas puntuales positivas sobre el eje *x* en $x = a$ y $x = -a$. Se coloca una tercera carga puntual, *q*, con masa *m*, sobre el eje *x*, fuera del origen en una coordenada *x* tal que $|x| \ll a$. Después se libera la carga *q*, que tiene libertad de movimiento a lo largo del eje *x*. *a*) Obtenga la frecuencia de oscilación de la carga *q*. (*Sugerencia:* repase la definición de movimiento armónico simple en la sección 13.2. Utilice la expansión binomial $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + \cdots$, válida para el caso en que $|z| < 1$.) *b*) Suponga ahora que la carga *q* se colocara sobre el eje *y* en una coordenada *y* tal que $|y| \ll a$, y luego se liberara. Si esta carga tuviera libertad para moverse a cualquier parte del plano *xy*, ¿qué pasaría con ella? Explique su respuesta.

21.74. Dos esferas idénticas con masa *m* cuelgan de cordones sintéticos con longitud *L*, como se indica en la figura 21.44. Cada esfera tiene la misma carga, por lo que $q_1 = q_2 = q$. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre las esferas, por lo que pueden considerase cargas puntuales. Demuestre que si el ángulo θ es pequeño, la separación de equilibrio *d* entre las esferas es $d = (q^2L/2\pi\epsilon_0 mg)^{1/3}$. (*Sugerencia:* si θ es pequeña, entonces $\theta \cong \operatorname{sen}\theta$.)

Figura **21.44** Problemas 21.74, 21.75 y 21.76.



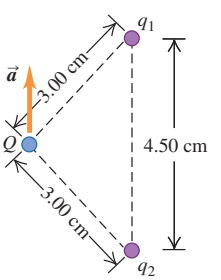
21.75. Dos esferas pequeñas con masa $m = 15.0$ cuelgan de cordones de seda con longitud $L = 1.20$ m desde un punto común (figura 21.44). Cuando se da a las esferas cantidades iguales de carga negativa, de modo que $q_1 = q_2 = q$, cada cordón cuelga con $\theta = 25.0°$ con respecto a la vertical. *a*) Elabore un diagrama que muestre las fuerzas sobre cada esfera. Trate las esferas como cargas puntuales. *b*) Encuentre la magnitud de *q*. *c*) Ahora se acortan ambas cuerdas a una longitud $L = 0.600$ m; en tanto que las cargas q_1 y q_2 permanecen iguales. ¿Qué nuevo ángulo formará cada cordón con la vertical? (*Sugerencia:* esta parte del problema se puede resolver numéricamente con valores para θ y ajustándolos hasta que se obtenga una respuesta consistente.)

21.76. Dos esferas idénticas están atadas a cordones sintéticos de longitud $L = 0.500$ m y cuelgan de un punto común (figura 21.44). Cada esfera tiene masa $m = 8.00$ g. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre ambas, por lo que pueden considerarse cargas puntuales. Se da carga positiva q_1 a una esfera, y a la otra carga positiva diferente q_2; esto hace que las esferas se separen, de manera que cuando están en equilibrio cada cordón forma un ángulo $\theta = 20.0°$ con la vertical. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada esfera cuando están en equilibrio, e indique todas las fuerzas que actúan sobre cada esfera. *b*) Determine la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre cada esfera, y determine la tensión en cada cordón. *c*) Con base en la información proporcionada, ¿qué puede decirse sobre las magnitudes de q_1 y q_2? Explique sus respuestas. *d*) Ahora se conecta un alambre pequeño entre las esferas, lo cual permite que se transfiera carga de una a otra, hasta que ambas esferas tengan la misma carga; entonces se quita el conductor. Ahora, cada cuerda forma un ángulo de 30.0° con la vertical. Determine las cargas originales. (*Sugerencia:* se conserva la carga total sobre el par de esferas.)

21.77. El cloruro de sodio (NaCl, sal de mesa común) está formado por iones de sodio positivos (Na^+) y iones de cloruro negativos (Cl^-). *a*) Si una carga puntual, con las mismas carga y masa que todos los iones de Na^+ en 0.100 moles de NaCl, está a 2.00 cm de una carga puntual con las mismas carga y masa que todos los iones de Cl^-, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de atracción entre esas dos cargas puntuales? *b*) Si la carga puntual positiva del inciso *a*) se mantiene en su lugar y la carga puntual negativa se libera del resto, ¿cuál será su aceleración inicial? (Véase el Apéndice D, para las masas atómicas.) *c*) ¿Parece razonable que los iones en el NaCl pudieran separarse de esta manera? ¿Por qué? (En realidad, cuando el cloruro de sodio se disuelve en agua, se separa en iones de Na^+ y Cl^-. Sin embargo, en esta situación hay fuerzas eléctricas adicionales ejercidas por las moléculas de agua sobre los iones.)

21.78. Dos cargas puntuales q_1 y q_2 se colocan a una distancia de 4.50 m entre sí. Otra carga puntual $Q = -1.75\ \mu C$ con masa de 5.00 g se sitúa inicialmente a 3.00 cm de cada una de estas cargas (figura 21.45) y se libera del resto. Usted observa que la aceleración inicial de *Q* es de 324 m/s² hacia arriba, paralela a la línea que une las dos cargas puntuales. Encuentre q_1 y q_2.

Figura **21.45** Problema 21.78.



21.79. Se colocan tres cargas puntuales idénticas *q* en cada una de tres esquinas de un cuadrado de lado *L*. Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre una carga puntual de $-3q$ que se sitúa *a*) en el centro del cuadrado, y *b*) en la esquina vacía del cuadrado. En cada caso, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas ejercidas sobre la carga de $-3q$ por cada una de las otras tres cargas.

21.80. Se colocan tres cargas puntuales sobre el eje *y*: una carga *q* en $y = a$, una carga $-2q$ en el origen, y una carga *q* en $y = -a$. Este arreglo se denomina cuadrupolo eléctrico. *a*) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos sobre la parte positiva del eje *x*. *b*) Use la expansión binomial para encontrar una expresión aproximada para el campo eléctrico, válida para $x \gg a$. Compare este comportamiento con el del campo eléctrico de una carga puntual y con el del campo eléctrico de un dipolo.

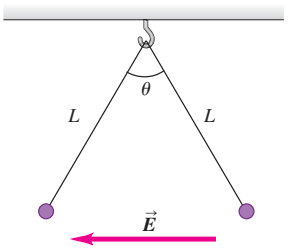
21.81. Intensidad de la fuerza eléctrica. Imagine dos bolsas de 1.0 g de protones, una en el Polo Norte de la Tierra y la otra en el Polo Sur. *a*) ¿Cuántos protones hay en cada bolsa? *b*) Calcule la atracción gravitatoria y la repulsión eléctrica que ejerce cada bolsa sobre la otra. *c*) ¿Las fuerzas del inciso *b*) son lo suficientemente grandes para que las percibiera usted, si cargara una de las bolsas?

21.82. Fuerza eléctrica dentro del núcleo. Las dimensiones normales de los núcleos atómicos son del orden de 10^{-15} m (1 fm). *a*) Si dos protones en un núcleo están separados por 2.0 fm, encuentre la magnitud de la fuerza eléctrica que cada uno ejerce sobre el otro. Exprese la respuesta en newtons y en libras. ¿Esta fuerza sería lo suficientemente grande como para que la sintiera un ser humano? *b*) Como los protones se repelen entre sí con mucha intensidad, ¿por qué no salen disparados del núcleo?

21.83. Si los átomos no fueran neutros . . . Puesto que las cargas en el electrón y el protón tienen el mismo valor absoluto, los átomos son eléctricamente neutros. Suponga que esto no fuera muy cierto, y que el valor absoluto de la carga del electrón fuera 0.00100% menor que la carga del protón. *a*) Estime cuál sería la carga neta de este libro en tales circunstancias. Haga cualesquiera suposiciones que crea usted que están justificadas, pero diga con claridad cuáles son. (*Sugerencia:* la mayoría de átomos en este libro tienen números iguales de electrones, protones y neutrones.) *b*) ¿Cuál sería la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos libros colocados a 5.0 m uno del otro? ¿Esta fuerza sería de atracción o de repulsión? Estime cuál sería la aceleración de cada libro, si estuvieran separados por una distancia de 5.0 m y no hubiera fuerzas eléctricas sobre ellos. *c*) Analice cómo el hecho de que la materia ordinaria sea estable demuestra que los valores absolutos de las cargas del electrón y protón deben ser idénticas con un grado *muy* alto de exactitud.

21.84. Dos esferas diminutas de masa m tienen cargas iguales pero opuestas de magnitud q. Se atan al mismo gancho del techo con cuerdas ligeras de longitud L. Cuando se activa un campo eléctrico horizontal y uniforme E, las esferas cuelgan con un ángulo θ entre las cuerdas (figura 21.46). *a*) ¿Cuál esfera (derecha o izquierda) es positiva, y cuál es negativa? *b*) Encuentre el ángulo θ entre las cuerdas en términos de E, q, m y g. *c*) A medida que el campo eléctrico incrementa su intensidad en forma gradual, ¿cuál es el resultado del inciso *b*) para el ángulo θ más grande posible?

Figura **21.46** Problema 21.84.



21.85. Dos esferas de cobre pequeñas tienen un radio de 1.00 mm cada una. *a*) ¿Cuántos átomos contiene cada esfera? *b*) Suponga que cada átomo de cobre contiene 29 protones y 29 electrones. Sabemos que los electrones y los protones tienen cargas de exactamente la misma magnitud, pero estudiemos el efecto de diferencias pequeñas (véase también el problema 21.83). Si la carga de un protón es $+e$ y la magnitud de la carga de un electrón fuera 0.100% más pequeña, ¿cuál sería la carga neta de cada esfera y qué fuerza ejercería una esfera sobre la otra, si estuvieran separadas 1.00 m?

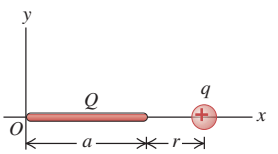
21.86. Operación de una impresora de inyección de tinta. En una impresora de inyección de tinta, las letras se forman rociando tinta en el papel mediante una boquilla en movimiento rápido. Las gotas de tinta, que tienen una masa de 1.4×10^{-8} g cada una, salen de la boquilla y viajan hacia el papel a 20 m/s, pasando a través de una unidad de carga que da a cada gota una carga q positiva al quitarle algunos de sus electrones. Las gotas pasan después entre placas deflectoras paralelas de 2.0 cm de largo, donde hay un campo eléctrico vertical y uniforme con magnitud de 8.0×10^4 N/C. Si una gota se debe desviar 0.30 mm en el momento que alcance el extremo de las placas deflectoras, ¿qué magnitud de carga se tiene que dar a la gota?

21.87. Un protón se proyecta en un campo eléctrico uniforme que apunta verticalmente hacia arriba y tiene magnitud E. La velocidad inicial del protón tiene una magnitud v_0 y está dirigida con un ángulo α por debajo de la horizontal. *a*) Encuentre la distancia máxima $h_{máx}$ que el protón desciende verticalmente por debajo de su elevación inicial. Ignore las fuerzas gravitatorias. *b*) ¿Después de qué distancia horizontal d el protón regresa a su elevación original? *c*) Haga un diagrama de la trayectoria del protón. *d*) Encuentre los valores numéricos de $h_{máx}$ y d si $E = 500$ N/C, $v_0 = 4.00 \times 10^5$ m/s y $\alpha = 30.0°$.

21.88. Una carga puntual negativa $q_1 = -4.00$ nC está en el eje x en $x = 0.60$ m. Una segunda carga puntual q_2 está sobre el eje x en $x = -1.20$ m. ¿Cuáles deben ser el signo y la magnitud de q_2 para que el campo eléctrico neto en el origen sea de *a*) 50.0 N/C en la dirección $+x$, y de *b*) 50.0 N/C en la dirección $-x$?

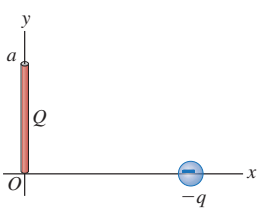
21.89. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje x, de $x = 0$ a $x = a$. Una carga puntual positiva q se localiza en la parte positiva del eje x, en $x = a + r$, una distancia r a la derecha del final de Q (figura 21.47). *a*) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre el eje x positivo, donde $x > a$. *b*) Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga Q ejerce sobre q. *c*) Demuestre que si $r \gg a$, la magnitud de la fuerza en el inciso *b*) es aproximadamente $Qq/4\pi\epsilon_0 r^2$. Explique cómo se obtiene este resultado.

Figura **21.47** Problema 21.89.



21.90. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje y positivo entre $y = 0$ y $y = a$. Una carga puntual negativa $-q$ se encuentra sobre la parte positiva del eje x, a una distancia x del origen (figura 21.48). *a*) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre la parte positiva del eje x. *b*) Calcule las componentes x y y de la fuerza que la distribución de carga Q ejerce sobre q. *c*) Demuestre que si $x \gg a$, $F_x \cong -Qq/4\pi\epsilon_0 x^2$ y $F_y \cong +Qqa/8\pi\epsilon_0 x^3$. Explique por qué se obtiene este resultado.

Figura **21.48** Problema 21.90.



21.91. Una línea cargada como la que aparece en la figura 21.25 se extiende desde $y = 2.50$ cm hasta $y = -2.50$ cm. La carga total distribuida uniformemente en la línea es -9.00 nC. *a*) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje x en $x = 10.0$ cm. *b*) ¿La magnitud del campo eléctrico que usted calculó en el inciso anterior es mayor o menor, que el campo eléctrico a 10.0 cm de una carga puntual que tiene la misma carga total en esa línea finita de carga? En términos de la aproximación usada para obtener $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ para una carga puntual de la ecuación (21.9), explique por qué sucede esto. *c*) ¿A qué distancia x el resultado para la línea finita de carga difiere en 1.0% del de la carga puntual?

21.92. Un universo paralelo. Imagine un universo paralelo donde la fuerza eléctrica tiene las mismas propiedades que en el nuestro pero no hay gravedad. En este Universo paralelo el Sol tiene una carga Q, la Tierra tiene una carga $-Q$, y la atracción eléctrica entre ellos mantiene a nuestro planeta en órbita. La Tierra en el Universo paralelo tiene la misma masa, el mismo radio orbital, y el mismo periodo orbital que en nuestro Universo. Calcule el valor de Q. (Consulte el apéndice F, según lo necesite.)

21.93. Un disco con carga uniforme como el de la figura 21.26 tiene un radio de 2.50 cm y una carga total de 4.0×10^{-12} C. *a*) Obtenga el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje x en $x = 20.0$ cm. *b*) Demuestre que para $x \gg R$, la ecuación (21.11) se convierte en $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$, donde Q es la carga total en el disco. *c*) ¿La magnitud del campo eléctrico que usted obtuvo en el inciso *a*) es mayor o menor, que la magnitud del campo eléctrico que está a 20.0 cm de una carga puntual que tiene la misma carga total que este disco? En términos de

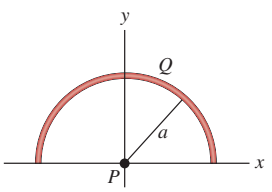
la aproximación usada en el inciso *b*) para obtener $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ para una carga puntual de la ecuación (21.11), explique por qué ocurre esto. *d*) ¿Cuál es el porcentaje de diferencia entre los campos eléctricos producidos por el disco finito y por una carga puntual con la misma carga en $x = 20.0$ cm y en $x = 10.0$ cm?

21.94. *a*) Sea $f(x)$ una función par de x, de modo que $f(x) = f(-x)$. Demuestre que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$. (*Sugerencia:* escriba la integral desde $-a$ hasta a como la suma de la integral desde $-a$ hasta 0, y la integral desde $-a$ hasta 0. En la primera integral, haga el cambio de variable $x' = -x$.) *b*) Sea $g(x)$ una función impar de x de modo que $g(x) = -g(-x)$. Use el método dado en la sugerencia para el inciso *a*), con la finalidad de demostrar que $\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$. *c*) Utilice el resultado del inciso *b*) para demostrar por qué E_y en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) es igual a cero.

21.95. Una carga positiva $+Q$ está distribuida uniformemente a lo largo del eje $+x$, de $x = 0$ a $x = a$. Una carga negativa $-Q$ está distribuida de modo también uniforme a lo largo del eje $-x$, de $x = 0$ a $x = -a$. *a*) Una carga puntual positiva q está sobre el eje y positivo, a una distancia y del origen. Encuentre la fuerza (magnitud y dirección) que las distribuciones de carga positiva y negativa ejercen juntas sobre q. Demuestre que esta fuerza es proporcional a y^{-3} para $y \gg a$. *b*) Suponga que la carga puntual positiva q está sobre el eje x positivo, a una distancia $x > a$ del origen. Encuentre la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga ejerce sobre q. Demuestre que esta fuerza es proporcional a x^{-3} para $x \gg a$.

21.96. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un semicírculo de radio a (figura 21.49). Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el centro de curvatura P.

Figura **21.49** Problema 21.96.

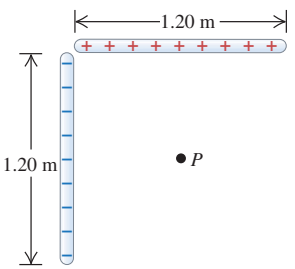


21.97. La carga negativa $-Q$ está distribuida uniformemente alrededor de un cuarto de círculo de radio a que se encuentra en el primer cuadrante, con el centro de curvatura en el origen. Calcule las componentes x y y del campo eléctrico neto en el origen.

21.98. Una esfera pequeña con masa m tiene una carga positiva q y está atada a un extremo de una cuerda sintética de longitud L. El otro extremo de la cuerda está atado a una lámina aislante, vertical y larga, que tiene una densidad superficial de carga positiva σ. Demuestre que cuando la esfera está en equilibrio, la cuerda forma un ángulo igual a $\arctan\left(q\sigma/2mg\epsilon_0\right)$ con la lámina vertical.

21.99. Dos alambres no conductores de 1.20 m forman un ángulo recto. Un segmento tiene $+2.50$ μC de carga, distribuida de modo uniforme a lo largo de su longitud; mientras que el otro segmento tiene -2.50 μC de carga, distribuida de modo uniforme a lo largo de su longitud, como se ilustra en la figura 21.50. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que producen estos alambres en el punto P, que está a 60.0 cm de cada alambre. *b*) Si un electrón se libera en P, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza neta que ejercen estos alambres sobre él?

Figura **21.50** Problema 21.99.



21.100. Dos láminas paralelas muy grandes están separadas 5.00 cm. La lámina A tiene una densidad superficial de carga uniforme de -9.50 μC/m^2; y la lámina B, que está a la derecha de A, tiene una carga uniforme de -11.6 μC/m^2. Suponga que las láminas son lo suficientemente grandes como para considerarse infinitas. Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico neto que las láminas producen en un punto *a*) 4.00 cm a la derecha de la lámina A; *b*) 4.00 cm a la izquierda de la lámina A; *c*) 4.00 a la derecha de la lámina B.

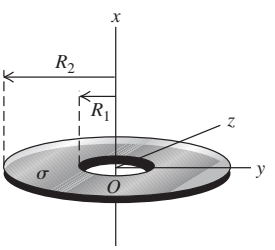
21.101. Repita el problema 21.100 para el caso en que la lámina B sea positiva.

21.102. Dos láminas horizontales muy largas están separadas 4.25 cm y tienen densidades superficiales de carga uniforme, iguales pero de signo contrario, de magnitud σ. Usted desea usar las láminas para mantener estacionaria en la región entre ellas una gotita de aceite con masa de 324 μg, que tiene cinco electrones excedentes. Suponga que la gotita está en el vacío. *a*) ¿Cuál debería ser la dirección del campo eléctrico entre las placas, y *b*) cuál debería ser el valor de σ?

21.103. Una lámina infinita con carga positiva por unidad de área σ está en el plano xy. Una segunda lámina infinita con carga negativa por unidad de área $-\sigma$ está en el plano yz. Encuentre el campo eléctrico neto en todos los puntos que no estén en ninguno de esos planos. Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

21.104. Un disco delgado con un agujero circular en el centro, llamado *corona circular*, tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2 (figura 21.51). El disco tiene una densidad superficial de carga uniforme y positiva σ en su superficie. *a*) Determine la carga eléctrica total en la corona circular. *b*) La corona circular se encuentra en el plano yz, con su centro en el origen. Para un punto arbitrario en el eje x (el eje de la corona circular), encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$. Considere puntos arriba y abajo de la corona circular en la figura 21.51. *c*) Demuestre que en puntos sobre el eje x que estén suficientemente cerca del origen, la magnitud del campo eléctrico es aproximadamente proporcional a la distancia entre el centro de la corona circular y el punto. ¿Qué tan cerca es "suficientemente cerca"? *d*) Una partícula puntual con masa m y carga negativa $-q$ tiene libertad de movimiento a lo largo del eje x (pero no puede apartarse del eje). Originalmente, la partícula está en reposo en $x = 0.01R_1$ y luego se libera. Encuentre la frecuencia de oscilación de la partícula. (*Sugerencia:* repase la sección 13.2. La corona circular permanece estacionaria.)

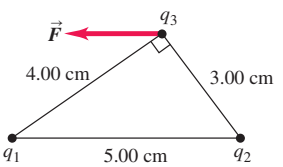
Figura **21.51** Problema 21.104.



Problemas de desafío

21.105. Tres cargas se colocan como se ilustra en la figura 21.52. La magnitud de q_1 es 2.00 μC, pero no se conocen su signo ni el valor de la carga q_2. La carga q_3 es de $+4.00$ μC, y la fuerza neta $\vec{F}$ sobre q_3 está por completo en la dirección negativa del eje x. *a*) Considere los diferentes signos posibles de q_1 y que hay cuatro posibles diagramas de fuerza que representan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que q_1 y q_2 ejercen sobre q_3. Dibuje esas cuatro configuraciones de fuerza posibles. *b*) Con el empleo de los diagramas del inciso *a*) y la dirección de $\vec{F}$, deduzca los signos de las cargas q_1 y q_2. *c*) Calcule la magnitud de q_2. *d*) Determine F, la magnitud de la fuerza neta sobre q_3.

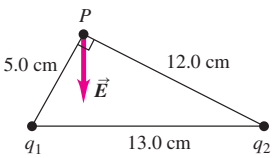
Figura **21.52** Problema de desafío 21.105.



21.106. Dos cargas se colocan como se muestra en la figura 21.53. La magnitud de q_1 es 3.00 μC, pero se desconocen su signo y el valor de la carga q_2. La dirección del campo eléctrico neto $\vec{E}$ en el punto P está

por completo en la dirección negativa del eje y. *a*) Considerando los posibles signos diferentes de q_1 y q_2, hay cuatro posibles diagramas que podrían representar los campos eléctricos $\vec{\boldsymbol{E}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ producidos por q_1 y q_2. Dibuje las cuatro posibles configuraciones de campo eléctrico. *b*) Con el uso de los diagramas del inciso *a*) y la dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}$, deduzca los signos de q_1 y q_2. *c*) Determine la magnitud de $\vec{\boldsymbol{E}}$.

Figura **21.53** Problema de desafío 21.106.



21.107. Dos varillas delgadas de longitud L están a lo largo del eje x, una entre $x = a/2$ y $x = a/2 + L$, y la otra entre $x = -a/2$ y $x = -a/2 - L$. Cada varilla tiene carga positiva Q distribuida uniformemente en toda su longitud. *a*) Calcule el campo eléctrico producido por la segunda varilla en puntos a lo largo del eje x positivo. *b*) Demuestre que la magnitud de la fuerza que ejerce una varilla sobre la otra es

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\ln\left[\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}\right]$$

c) Demuestre que si $a \gg L$, la magnitud de esta fuerza se reduce a $F = Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. (*Sugerencia:* use la expansión $\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \cdots$, válida para $|z| \ll 1$. Considere *todas* las expansiones al menos hasta el orden L^2/a^2.) Interprete este resultado.

22 LEY DE GAUSS

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo determinar la cantidad de carga dentro de una superficie cerrada examinando el campo eléctrico sobre la superficie.
- Cuál es el significado de flujo eléctrico y cómo se calcula.
- Cómo la ley de Gauss relaciona al flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga encerrada por la superficie.
- Cómo usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico debido a una distribución simétrica de la carga.
- Dónde se localiza la carga en un conductor cargado.

? Esta niña adquiere una carga eléctrica al tocar la esfera metálica con carga. Los cabellos con carga en su cabeza se repelen y se levantan. Si la niña estuviera *dentro* de una esfera de metal grande y con carga, ¿sus cabellos se levantarían?

Con frecuencia, al efectuar un trabajo existe un modo fácil y otro difícil; el modo fácil tal vez sólo requiera el empleo de las herramientas correctas. En física las *propiedades de simetría* de los sistemas constituyen una herramienta importante para simplificar los problemas. Muchos sistemas físicos tienen simetría; por ejemplo, un cuerpo cilíndrico no se ve distinto después de hacerlo girar sobre su eje, y una esfera de metal con carga se ve igual una vez que se ha hecho girar alrededor de cualquier eje que pase por su centro.

La ley de Gauss es parte de la clave para utilizar consideraciones de simetría que simplifiquen los cálculos del campo eléctrico. Por ejemplo, el campo de una distribución de carga en una línea recta o en una hoja plana, que se obtuvo en la sección 21.5 con algunas integrales un tanto difíciles, se obtiene en unos cuantos renglones con ayuda de la ley de Gauss. Sin embargo, la ley de Gauss es algo más que un método para hacer ciertos cálculos con facilidad. En realidad es un enunciado fundamental acerca de la relación que hay entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos. Entre otras cosas, la ley de Gauss ayuda a entender cómo se distribuye la carga en los cuerpos conductores.

La ley de Gauss se trata de lo siguiente. Dada cualquier distribución general de carga, se rodea con una superficie imaginaria que la encierre y luego se observa el campo eléctrico en distintos puntos de esa superficie imaginaria. La ley de Gauss es una relación entre el campo en *todos* los puntos de la superficie y la carga total que ésta encierra. Tal vez esto suene como una forma indirecta de expresar los fenómenos, pero es una relación sumamente útil. Más allá de su empleo como herramienta de cálculo, la ley de Gauss ayuda a tener una comprensión más profunda de los campos eléctricos. En varios de los siguientes capítulos recurriremos continuamente a esta comprensión conforme avancemos en el estudio del electromagnetismo.

22.1 Carga y flujo eléctrico

En el capítulo 21 se planteó la pregunta, "Dada una distribución de carga, ¿cuál es el campo eléctrico que produce esa distribución en un punto *P*?". Vimos que la respuesta podía encontrarse si se representaba la distribución como un conjunto de cargas puntuales, cada una de las cuales producía un campo eléctrico $\vec{E}$ dado por la ecuación

En esta sección el análisis de la ley de Gauss se basa e inspira en las ideas innovadoras de Ruth W. Chabay y Bruce A. Sherwood, en su obra *Electric and Magnetic Interactions* (John Wiley & Sons, 1994).

(21.7). Así, el campo total en P es la suma vectorial de los campos debidos a todas las cargas puntuales.

Pero existe una relación alternativa entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos. Para descubrir esta relación, planteemos la pregunta del capítulo 21 a la inversa: "si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué podemos determinar acerca de la distribución de carga en esa región?"

He aquí un ejemplo. Considere la caja que se ilustra en la figura 22.1a, que puede contener o no una carga eléctrica. Imagine que la caja está construida con un material que no tiene efecto en ningún campo eléctrico; es como los conceptos de la cuerda sin masa y el plano inclinado libre de fricción. Mejor aún, dejemos que la caja represente una superficie *imaginaria* que puede encerrar o no cierta carga. Llamaremos a la caja una **superficie cerrada**, ya que encierra por completo un volumen. ¿Cómo determinar cuánta carga eléctrica (si es que la hay) se encuentra dentro de la caja?

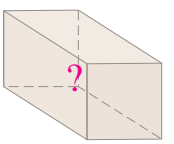
Como sabemos que una distribución de carga produce un campo eléctrico y que éste ejerce una fuerza sobre una carga de prueba, se mueve una carga de prueba q_0 en torno a las proximidades de la caja. Con la medición de la fuerza $\vec{F}$ experimentada por la carga de prueba en diferentes posiciones, se elabora un mapa tridimensional del campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ fuera de la caja. En el caso que se ilustra en la figura 22.1b, el mapa resulta ser el mismo que el del campo eléctrico producido por una carga puntual positiva (figura 21.29a). A partir de los detalles del mapa es posible determinar el valor exacto de la carga puntual dentro de la caja.

Para determinar el contenido de la caja, en realidad sólo se necesita medir $\vec{E}$ en la *superficie* de la caja. En la figura 22.2a hay una sola carga puntual positiva en el interior de la caja, y en la figura 22.2b hay dos de tales cargas. Los patrones de campo en las superficies de las cajas son diferentes en sus detalles, pero en ambos casos el campo eléctrico apunta hacia fuera de la caja. Las figuras 22.2c y 22.2d ilustran casos con una y dos cargas puntuales negativas, respectivamente, dentro de la caja. Una vez más, los detalles de $\vec{E}$ sobre la superficie de la caja son distintos, pero en los dos casos el campo apunta hacia la caja.

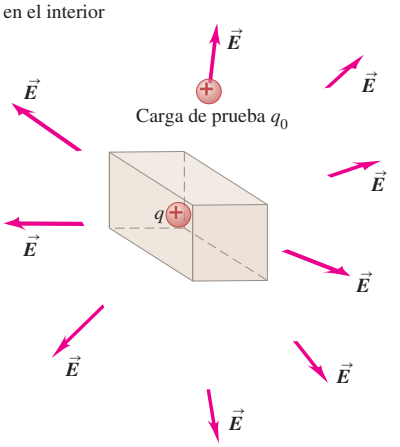
Activ Online Physics
11.7 Flujo eléctrico

22.1 ¿Cómo se podría medir la carga dentro de una caja sin abrirla?

a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga

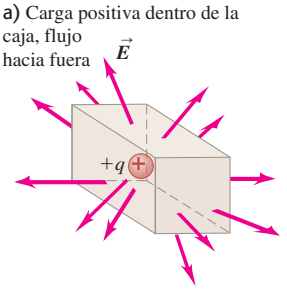


b) Uso de una carga de prueba fuera de la caja para determinar la cantidad de carga que hay en el interior

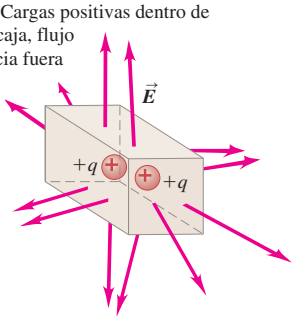


22.2 El campo eléctrico sobre la superficie de las cajas contiene a) una sola carga puntual positiva, b) dos cargas puntuales positivas, c) una sola carga puntual negativa, o d) dos cargas puntuales negativas.

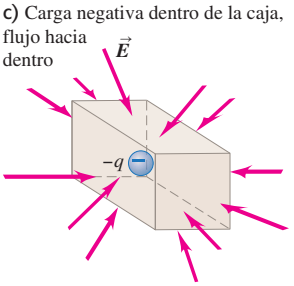
a) Carga positiva dentro de la caja, flujo hacia fuera



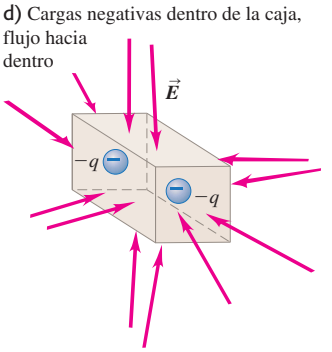
b) Cargas positivas dentro de la caja, flujo hacia fuera



c) Carga negativa dentro de la caja, flujo hacia dentro



d) Cargas negativas dentro de la caja, flujo hacia dentro



El flujo eléctrico y la carga encerrada

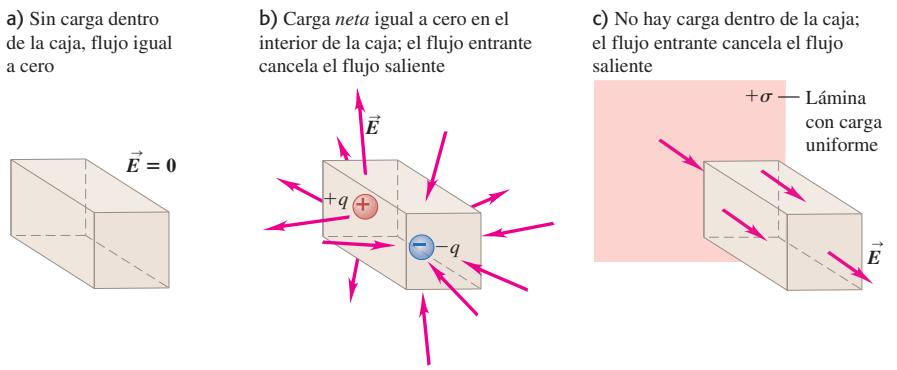
En la sección 21.4 se mencionó la analogía entre los vectores de campo eléctrico y los vectores de velocidad de un fluido en movimiento. Esta analogía resulta útil aun cuando los campos eléctricos no "fluyen" en realidad. Empleando esta analogía, en las figuras 22.2a y 22.2b, en las que los vectores de campo eléctrico apuntan hacia fuera de la superficie, decimos que existe un **flujo eléctrico** saliente. (La palabra "flujo" proviene de un término en latín que significa "fluido".) En las figuras 22.2c y 22.2d, los vectores $\vec{E}$ se dirigen hacia la superficie, y el flujo eléctrico es *entrante*.

La figura 22.2 sugiere una relación sencilla: la carga positiva dentro de la caja corresponde a un flujo eléctrico saliente a través de la superficie de la caja, y la carga negativa en el interior corresponde a un flujo eléctrico entrante. ¿Qué pasa si la carga dentro de la caja es *cero*? En la figura 22.3a la caja está vacía y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo lugar, por lo que no hay flujo eléctrico hacia el interior o exterior de la caja. En la figura 22.3b, dentro de la caja hay una carga positiva y otra negativa de la misma magnitud, por lo que la carga *neta* en el interior es igual a cero. Hay un campo eléctrico, pero "fluye hacia dentro" de la caja en la mitad de su superficie y "fluye hacia fuera" de la caja en la otra mitad. Por lo tanto, no hay flujo eléctrico *neto* hacia dentro o hacia fuera de la caja.

En la figura 22.3c, la caja de nuevo está vacía. Sin embargo, hay una carga presente *fuera* de la caja, que se ha colocado con uno de sus extremos paralelos a una lámina infinita con carga uniforme que produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina (como se vio en el ejemplo 21.12 de la sección 21.5). En un extremo de la caja, $\vec{E}$ apunta hacia esta última, y en el extremo opuesto $\vec{E}$ apunta hacia fuera de la caja; y en los lados, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie, por lo que no apunta hacia dentro ni hacia fuera de la caja. Como sucede en la figura 22.3b, el flujo eléctrico hacia el interior en una parte de la caja compensa con exactitud al flujo eléctrico que va hacia el exterior en la otra parte. De manera que en todos los casos que se ilustran en la figura 22.3, no hay un flujo eléctrico *neto* a través de la superficie de la caja, y ninguna carga *neta* está encerrada en ella.

Las figuras 22.2 y 22.3 ponen de manifiesto una vinculación entre el *signo* (positivo, negativo o cero) de la carga *neta* contenida dentro de una superficie cerrada y el sentido (saliente, entrante o ninguno) del flujo eléctrico neto a través de la superficie. Asimismo, existe una conexión entre la *magnitud* de la carga neta dentro de la superficie cerrada y la *intensidad* del "flujo" neto de $\vec{E}$ sobre la superficie. Tanto en la figura 22.4a como en la 22.4b, hay una sola carga puntual en el interior de la caja, pero en la figura 22.4b la magnitud de la carga es el doble de grande, por lo que $\vec{E}$ tiene en todo lugar el doble de magnitud que en la figura 22.4a. Si tenemos en mente la analogía con el flujo de fluidos, esto significa que el flujo eléctrico saliente neto también es dos veces mayor en la figura 22.4b que en la 22.4a. Esto sugiere que el flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja es *directamente proporcional* a la magnitud de la carga neta encerrada en la caja.

22.3 Tres casos en los que hay una carga *neta* de cero en el interior de la caja, y no hay flujo eléctrico a través de la superficie de ésta. a) Caja vacía con $\vec{E} = \mathbf{0}$. b) Caja que contiene una carga puntual positiva y una negativa de igual magnitud. c) Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme.



Esta conclusión es independiente del tamaño de la caja. En la figura 22.4c la carga puntual $+q$ está encerrada por una caja con dimensiones lineales que duplican las de la caja de la figura 22.4a. La magnitud del campo eléctrico de una carga puntual disminuye con la distancia de acuerdo con $1/r^2$, de manera que la magnitud media de $\vec{E}$ en cada cara de la caja grande en la figura 22.4c es justo $\frac{1}{4}$ de la magnitud media en la cara correspondiente en la figura 22.4a. Pero cada cara de la caja grande tiene exactamente el cuádruple del área de la cara correspondiente de la caja pequeña. Por lo tanto, el flujo eléctrico saliente de la caja es *igual* para las dos cajas si el flujo eléctrico se *define* como sigue: con respecto a cada cara de la caja, hay que calcular el producto de la componente perpendicular media de $\vec{E}$ por el área de esa cara; luego se suman los resultados de todas las caras de la caja. Con esta definición, el flujo eléctrico neto debido a una sola carga puntual dentro de la caja es independiente del tamaño de ésta y sólo depende de la carga neta en el interior.

Se ha visto que existe una relación entre la cantidad neta de carga dentro de una superficie cerrada y el flujo eléctrico a través de esa superficie. Para los casos especiales de una superficie cerrada en forma de caja rectangular y distribuciones de carga constituidas por cargas puntuales o láminas infinitas con carga, se tiene lo siguiente:

1. El hecho de que el flujo neto sea hacia el exterior o hacia el interior de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas *afuera* de la superficie no provocan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad neta de carga contenida dentro de la superficie, pero es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

Estas observaciones son el planteamiento cualitativo de la *ley de Gauss*.

¿Son válidas estas observaciones para otras clases de distribuciones de carga y para superficies cerradas de forma arbitraria? Se demostrará que la respuesta a estas preguntas es *sí*. Pero para explicar por qué esto es así, se necesita contar con un enunciado matemático preciso de lo que significa el flujo eléctrico, lo cual se desarrollará en la siguiente sección.

Evalúe su comprensión de la sección 22.1 Si todas las dimensiones de la caja de la figura 22.2a se incrementaran en un factor de 3, ¿qué efecto tendría este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja? i) El flujo sería $3^2 = 9$ veces mayor; ii) el flujo sería 3 veces más grande; iii) el flujo permanecería sin cambio; iv) el flujo sería de $(\frac{1}{3})$; v) el flujo sería $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$; vi) no hay información suficiente para decidir.

22.2 Cálculo del flujo eléctrico

En la sección anterior presentamos el concepto de *flujo eléctrico*. Cualitativamente, el flujo eléctrico a través de una superficie es la descripción de si el campo eléctrico $\vec{E}$ apunta hacia la superficie o en sentido contrario. Esto se utilizó para formular un enunciado cualitativo de la ley de Gauss: el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie. Para aprovechar por completo esta ley, se necesita saber cómo *calcular* el flujo eléctrico. Para ello, se empleará de nuevo la analogía entre un campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo de los vectores de velocidad $\vec{v}$ en un fluido en movimiento. (De nuevo, recuerde que esto sólo es una analogía; un campo eléctrico *no* es un flujo.)

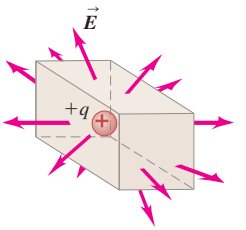
Flujo: Analogía del fluido en movimiento

La figura 22.5 ilustra un fluido en movimiento estable de izquierda a derecha. Examinemos la tasa de flujo volumétrico dV/dt (digamos, en metros cúbicos por segundo) a través del alambre rectangular de área A. Cuando el área es perpendicular a la velocidad de flujo $\vec{v}$ (figura 22.5a) y la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos del fluido, la tasa de flujo volumétrico dV/dt es el área A multiplicada por la velocidad del flujo v:

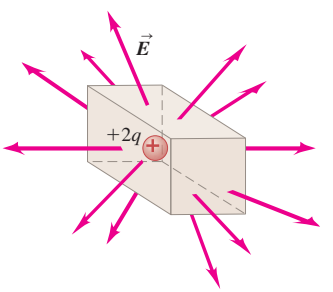
$$\frac{dV}{dt} = vA$$

22.4 a) Caja que encierra una carga puntual positiva $+q$. b) La duplicación de la carga ocasiona que la magnitud de $\vec{E}$ se duplique, lo que también duplica el flujo eléctrico a través de la superficie. *c*) Si la carga permanece igual, pero las dimensiones de la caja se duplican, el flujo permanece sin cambio. La magnitud de $\vec{E}$ sobre la superficie disminuye en un factor de $\frac{1}{4}$, pero el área a través de la que "fluye" $\vec{E}$ aumenta en un factor de 4.

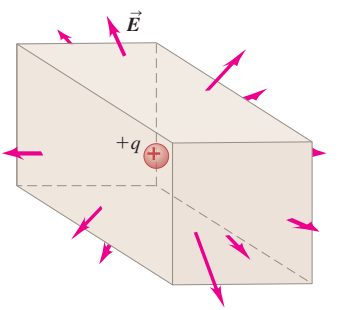
a) La caja contiene una carga



b) Al duplicarse la carga se duplica el flujo.

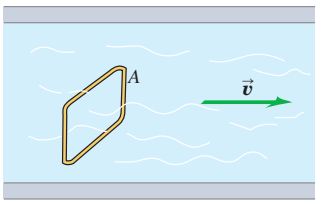


c) Al duplicarse de las dimensiones de la caja *no cambia* el flujo.

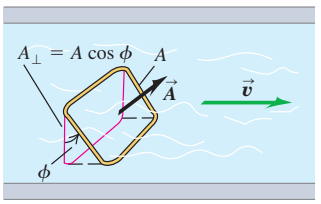


22.5 La tasa de flujo volumétrico del fluido a través del alambre rectangular **a)** es vA cuando el área del rectángulo es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}}$, y **b)** cuando el rectángulo está inclinado un ángulo ϕ la tasa es $vA\cos\phi$.

a) Alambre rectangular en un fluido



b) El alambre rectangular está inclinado un ángulo ϕ



Cuando el rectángulo se encuentra inclinado un ángulo ϕ (figura 22.5b) de manera que su cara no es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}}$, el área que se toma en cuenta es la de la silueta que se genera al mirar en la dirección de $\vec{\boldsymbol{v}}$. Esta área, que se indica en color rojo y se denota con $A_\perp$ en la figura 22.5b, es la *proyección* del área A sobre una superficie perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}}$. Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que en el original, pero los otros dos disminuyen en un factor de $\cos\phi$, por lo que el área proyectada $A_\perp$ es igual a $A\cos\phi$. Así, la tasa de flujo volumétrico a través de A es

$$\frac{dV}{dt} = vA\cos\phi$$

Si $\phi = 90°$, $dV/dt = 0$; el alambre rectangular presenta su borde al flujo, por lo que ningún fluido pasa a través suyo.

Asimismo, $v\cos\phi$ es la componente del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ perpendicular al plano del área A. Si se llama $v_\perp$, a esta componente, la tasa de flujo volumétrico queda así:

$$\frac{dV}{dt} = v_\perp A$$

Es posible expresar la tasa de flujo volumétrico de manera más compacta mediante el concepto de *vector de área* $\vec{\boldsymbol{A}}$, una cantidad vectorial con magnitud A y dirección perpendicular al plano del área que se describe. El vector de área $\vec{\boldsymbol{A}}$ describe tanto el tamaño de un área como su orientación en el espacio. En términos de $\vec{\boldsymbol{A}}$, podemos escribir la tasa de flujo volumétrico a través del rectángulo en la figura 22.5b como el producto escalar:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$$

Flujo de un campo eléctrico uniforme

Utilizando la analogía entre el campo eléctrico y el flujo en movimiento se definirá ahora el flujo eléctrico de la misma forma en que se acaba de definir la tasa de flujo volumétrico de un fluido; simplemente se sustituye la velocidad del fluido $\vec{\boldsymbol{v}}$ por el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$. El símbolo que se usa para el flujo eléctrico es Φ_E (la letra griega mayúscula *fi*; el subíndice E es para recordar que se trata de flujo *eléctrico*). En primer lugar, considere un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ (figura 22.6a). Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo E por el área A:

$$\Phi_E = EA$$

En términos aproximados, se puede imaginar Φ_E como las líneas de campo que pasan a través de A. El incremento del área significa que más líneas de $\vec{\boldsymbol{E}}$ cruzan el área, lo que aumenta el flujo; un campo más intenso significa mayor densidad de líneas de $\vec{\boldsymbol{E}}$, por lo que hay más líneas que pasan por unidad de área, lo que también incrementa el flujo.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{\boldsymbol{E}}$, entonces son menos las líneas de campo que la atraviesan. En este caso, el área que se toma en cuenta es la silueta que se observa al mirar en dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}$. Ésta es el área $A_\perp$ en la figura 22.6b, y es igual a $A\cos\phi$ (compárela con la figura 22.5b). Nuestra definición de flujo eléctrico para un campo eléctrico uniforme se generaliza a

$$\Phi_E = EA\cos\phi \quad \text{(flujo eléctrico para } \vec{\boldsymbol{E}} \text{ uniforme, superficie plana)} \quad (22.1)$$

Como $E\cos\phi$ es la componente de $\vec{\boldsymbol{E}}$ perpendicular al área, la ecuación (22.1) se expresa como

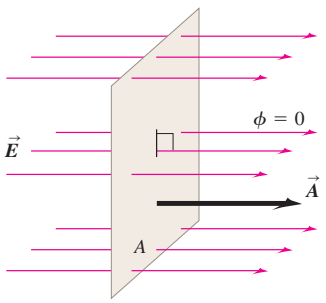
$$\Phi_E = E_\perp A \quad \text{(flujo eléctrico para } \vec{\boldsymbol{E}} \text{ uniforme, superficie plana)} \quad (22.2)$$

En términos del vector de área $\vec{\boldsymbol{A}}$ perpendicular al área, el flujo eléctrico se expresa como el producto escalar de $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{A}}$:

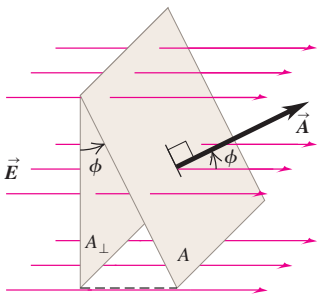
$$\Phi_E = \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{A}} \quad \text{(flujo eléctrico para } \vec{\boldsymbol{E}} \text{ uniforme, superficie plana)} \quad (22.3)$$

22.6 Una superficie plana en un campo eléctrico uniforme. El flujo eléctrico Φ_E a través de la superficie es igual al producto escalar del campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector de área $\vec{A}$.

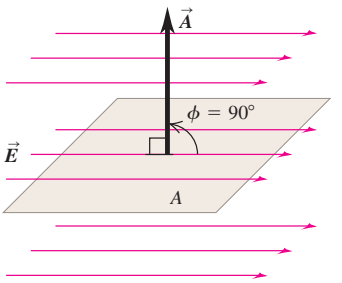
a) La superficie está de frente al campo eléctrico:
- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son paralelos (ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



b) La superficie está inclinada un ángulo ϕ respecto de la orientación de frente:
- El ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es ϕ.
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos\phi$.



c) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico:
- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90° = 0$.



Las ecuaciones (22.1), (22.2) y (22.3) expresan el flujo eléctrico para una superficie *plana* y un campo eléctrico *uniforme* de maneras diferentes pero equivalentes. La unidad del SI para el flujo eléctrico es $1\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Observe que si el área está de perfil respecto del campo, $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares y el flujo es igual a cero (figura 22.6c).

La dirección de un vector de área se puede representar con $\vec{A}$ empleando un *vector unitario* $\hat{\boldsymbol{n}}$ perpendicular al área; $\hat{\boldsymbol{n}}$ significa "normal". De esta forma,

$$\vec{A} = A\hat{n} \tag{22.4}$$

Una superficie tiene dos lados, por lo que hay dos direcciones posibles para $\hat{\boldsymbol{n}}$ y $\vec{A}$. Siempre se debe especificar cuál es la dirección elegida. En la sección 22.1 se relacionó la carga dentro de una superficie *cerrada* con el flujo eléctrico a través de ella. Con una superficie cerrada siempre se elegirá la dirección de $\hat{\boldsymbol{n}}$ como la que se dirige *hacia el exterior*, y se hablará del flujo *hacia fuera* de una superficie cerrada. Así, lo que en la sección 22.1 se llamó "flujo eléctrico hacia fuera" corresponde a un valor positivo de Φ_E, y lo que se denominó "flujo eléctrico hacia dentro" corresponde a un valor negativo de Φ_E.

Flujo de un campo eléctrico no uniforme

¿Qué pasa si el campo eléctrico $\vec{E}$ no es uniforme, sino que varía de un punto a otro del área A? O, ¿qué ocurre si A es parte de una superficie curva? Aquí se divide A en muchos elementos pequeños dA, cada uno de los cuales tiene un vector unitario $\hat{\boldsymbol{n}}$ perpendicular a él, y un vector de área $d\vec{A} = \hat{\boldsymbol{n}}\, dA$. El flujo eléctrico se calcula a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E\cos\phi\, dA = \int E_\perp\, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(definición general del flujo eléctrico)} \tag{22.5}$$

Esta integral se llama **integral de superficie** de la componente $E_\perp$ en el área, o integral de superficie de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. Las diversas formas de la integral expresan el mismo concepto en términos diferentes. En problemas específicos, una forma resulta en ocasiones más conveniente que otra. El ejemplo 22.3 al final de esta sección ilustra el uso de la ecuación (22.5).

En la ecuación (22.5) el flujo eléctrico $\int E_\perp\, dA$ es igual al valor *medio* de la componente perpendicular del campo eléctrico, multiplicado por el área de la superficie. Ésta es la misma definición del flujo eléctrico a que se llegó en la sección 22.1, ahora expresada en una forma más matemática. En la siguiente sección se verá la vinculación entre el flujo eléctrico total a través de *cualquier* superficie cerrada, sin importar su forma, y la cantidad de carga encerrada dentro de la superficie.

Ejemplo 22.1 Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco con radio de 0.10 m se orienta con su vector unitario normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ con un ángulo de 30° respecto de un campo eléctrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ con magnitud de 2.0×10^3 N/C (figura 22.7). (Como ésta no es una superficie cerrada, no tiene un "interior" ni un "exterior"; por eso se tiene que especificar la dirección de $\hat{\boldsymbol{n}}$ en la figura.) *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? *b*) ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que su normal fuera perpendicular a $\vec{\boldsymbol{E}}$? *c*) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si su normal fuera paralela a $\vec{\boldsymbol{E}}$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema es sobre una superficie plana en un campo eléctrico uniforme, por lo que se aplican las ideas de esta sección.

PLANTEAR: La orientación del disco es como la del rectángulo en la figura 22.6b. El flujo eléctrico se calcula con la ecuación (22.1).

EJECUTAR: *a*) El área es $A = \pi(0.10\ \text{m})^2 = 0.0314\ \text{m}^2$, y el ángulo entre $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{A}} = A\hat{\boldsymbol{n}}$ es $\phi = 30°$, por lo que

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0 \times 10^3\ \text{N/C})(0.0314\ \text{m}^2)(\cos 30°)$$
$$= 54\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

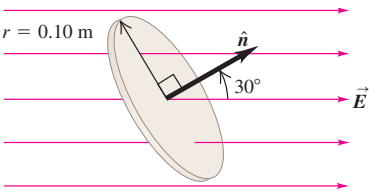
b) Ahora, la normal al disco es perpendicular a $\vec{\boldsymbol{E}}$, de manera que $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ y $\Phi_E = 0$. A través del disco no hay flujo.

c) La normal al disco es paralela a $\vec{\boldsymbol{E}}$, por lo que $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$, y el flujo tiene su valor máximo posible. De la ecuación 22.1, se tiene que

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0 \times 10^3\ \text{N/C})(0.0314\ \text{m}^2)(1)$$
$$= 63\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

EVALUAR: Como comprobación de nuestros resultados, observe que la respuesta del inciso *a*) es un valor menor que la del inciso *c*). ¿Así debería ser?

22.7 El flujo eléctrico Φ_E a través de un disco depende del ángulo entre su normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ y el campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$.



Ejemplo 22.2 Flujo eléctrico a través de un cubo

Un cubo de arista L está situado en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$. Determine el flujo eléctrico que pasa a través de cada cara del cubo y el flujo total a través de éste cuando *a*) el cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo $\vec{\boldsymbol{E}}$, como se ilustra en la figura 22.8; y *b*) cuando el cubo se gira un ángulo θ, como en la figura 22.8b.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se va a determinar el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo y el flujo total (la suma de los flujos que pasan por las seis caras).

PLANTEAR: Como $\vec{\boldsymbol{E}}$ es uniforme y cada una de las seis caras del cubo es una superficie plana, se encuentra el flujo que cruza cada cara con las ecuaciones (22.3) y (22.4). Después se calcula el flujo total a través del cubo sumando los seis flujos individuales.

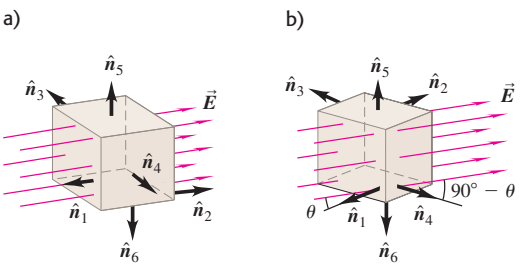
EJECUTAR: *a*) En la figura se ilustran los vectores unitarios para cada cara ($\hat{\boldsymbol{n}}_1$ a $\hat{\boldsymbol{n}}_6$); la dirección de cada vector unitario es *hacia fuera* desde la superficie cerrada del cubo. El ángulo entre $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_1$ es de 180°; el ángulo entre $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\hat{\boldsymbol{n}}_2$ es de 0°; y el ángulo entre $\vec{\boldsymbol{E}}$ y cada uno de los otros cuatro vectores unitarios es de 90°. Cada cara del cubo tiene un área de L^2, por lo que los flujos a través de cada una de las caras son los siguientes:

$$\Phi_{E1} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 A = EL^2\cos 180° = -EL^2$$
$$\Phi_{E2} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 A = EL^2\cos 0° = +EL^2$$
$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

El flujo es negativo en la cara 1, donde $\vec{\boldsymbol{E}}$ está dirigido hacia el cubo, y positivo en la cara 2, en la que $\vec{\boldsymbol{E}}$ se dirige hacia fuera del cubo. El flujo *total* a través del cubo es la suma de los flujos a través de las seis caras:

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$$
$$= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

22.8 Flujo eléctrico de un campo uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ a través de una caja cúbica con arista L en dos orientaciones.



b) Los flujos a través de las caras 1 y 3 son negativos, ya que $\vec{\boldsymbol{E}}$ está dirigido hacia esas caras; el campo se dirige hacia fuera de las caras 2 y 4, por lo que los flujos a través de esas caras son positivos. Se tiene que

$$\Phi_{E1} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_1 A = EL^2\cos(180° - \theta) = -EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E2} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_2 A = +EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E3} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_3 A = EL^2\cos(90° + \theta) = -EL^2\,\text{sen}\,\theta$$
$$\Phi_{E4} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_4 A = EL^2\cos(90° - \theta) = +EL^2\,\text{sen}\,\theta$$
$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

El flujo total $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ a través de la superficie del cubo es, de nuevo, igual a cero.

EVALUAR: No sorprende que el flujo total sea igual a cero para ambas orientaciones. Se llegó a la misma conclusión que en el análisis de la figura 22.3c en la sección 22.1. Ahí se observó que había un flujo neto de cero de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cerrada que no contenía carga eléctrica.

Ejemplo 22.3 Flujo eléctrico a través de una esfera

Una carga puntual positiva $q = 3.0\ \mu C$ está rodeada por una esfera centrada en la carga y cuyo radio mide 0.20 m (figura 22.9). Determine el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme, por lo que se debe usar la definición general de flujo eléctrico.

PLANTEAR: Se usa la ecuación (22.5) para calcular el flujo eléctrico (la variable que se busca). Como la esfera está centrada en la carga puntual, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera, $\vec{E}$ está dirigido hacia el exterior en forma perpendicular a la superficie. La dirección positiva tanto para $\hat{n}$ como para $E_\perp$ es hacia el exterior, por lo que $E_\perp = E$ y el flujo a través del elemento de superficie dA es $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E\,dA$. Esto simplifica en gran medida la integral en la ecuación (22.5).

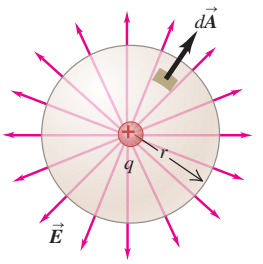
EJECUTAR: En cualquier punto de la esfera, la magnitud de $\vec{E}$ es

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{3.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{(0.20\ \text{m})^2}$$
$$= 6.75 \times 10^5\ \text{N/C}$$

Puesto que E es igual en todos los puntos, se puede sacar de la integral $\Phi_E = \int E\,dA$ de la ecuación (22.5); lo que resta es la integral $\int dA$, que es el área total $A = 4\pi r^2$ de la superficie esférica. Así, el flujo total que sale de la esfera es

$$\Phi_E = EA = (6.75 \times 10^5\ \text{N/C})(4\pi)(0.20\ \text{m})^2$$
$$= 3.4 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

22.9 Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.



EVALUAR: Observe que se dividió entre $r^2 = (0.20\ \text{m})^2$ para encontrar el valor de E, y luego se multiplicó por $r^2 = (0.20\ \text{m})^2$ para encontrar Φ_E; así, el radio r de la esfera se cancela en el resultado de Φ_E. Se habría obtenido el mismo flujo con una esfera de 2.0 m o incluso de 200 m de radio. En esencia, se llegó a la misma conclusión del análisis de la figura 22.4 en la sección 22.1, donde se consideraron superficies rectangulares cerradas de dos tamaños distintos que encerraban una carga puntual. Ahí se encontró que el flujo de $\vec{E}$ era independiente del tamaño de la superficie; se obtiene el mismo resultado para una superficie esférica. En realidad, el flujo a través de *cualquier* superficie que encierre una sola carga puntual es independiente de la forma o el tamaño de la superficie, como se verá un poco más adelante.

Evalúe su comprensión de la sección 22.2 Ordene las siguientes superficies del flujo más positivo al más negativo. i) Una superficie rectangular plana con vector de área $\vec{A} = (6.0\ \text{m}^2)\hat{\imath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; ii) una superficie circular plana con vector de área $\vec{A} = (3.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} + (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; iii) una superficie cuadrada plana con vector de área $\vec{A} = (3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; iv) una superficie oval plana con vector de área $\vec{A} = (3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} - (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$.

22.3 Ley de Gauss

La **ley de Gauss** es una alternativa a la ley de Coulomb. Aunque equivale por completo a la ley de Coulomb, la ley de Gauss ofrece una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. La formuló Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Muchas áreas de las matemáticas llevan la marca de su influencia; Gauss también realizó contribuciones igualmente significativas en la física teórica (figura 22.10).

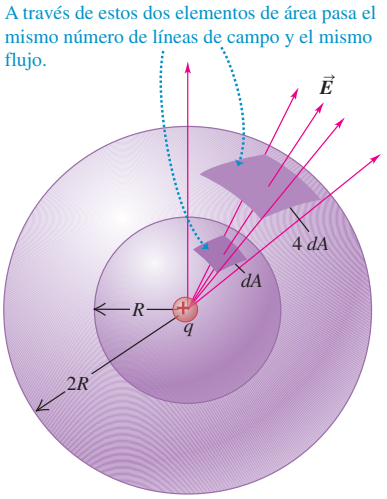
22.10 Carl Friedrich Gauss ayudó a desarrollar varias ramas de las matemáticas, incluidos la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. Una de sus invenciones es la "curva de campana" de la estadística. Gauss también realizó investigaciones de vanguardia sobre el magnetismo de la Tierra y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.

Carga puntual dentro de una superficie esférica

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie. En la sección 22.1 se planteó esta relación de manera cuantitativa para ciertos casos especiales; ahora se desarrollará en forma más rigurosa. Se comenzará con el campo de una sola carga puntual positiva q. Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia fuera en todas direcciones por igual. Colocamos esta carga en el centro de una superficie esférica imaginaria con radio R. La magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

22.11 Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$. La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2, por lo que el elemento de área sobre la esfera más grande es 4 dA.



En cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es perpendicular a ésta, y su magnitud es la misma en todos los puntos, como se ilustra en el ejemplo 22.3 (sección 22.2). El flujo eléctrico total es el producto de la magnitud del campo E por el área total $A = 4\pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{22.6}$$

El flujo es independiente del radio R de la esfera; sólo depende de la carga q encerrada por la esfera.

Este resultado también se puede interpretar en términos de las líneas de campo. La figura 22.11 muestra dos esferas de radios R y $2R$ centradas en la carga puntual q. Cada línea de campo que pasa a través de la esfera más pequeña también cruza la esfera más grande, por lo que el flujo total a través de cada esfera es el mismo.

Lo que se cumple para toda la esfera también se cumple para cualquier región de su superficie. En la figura 22.11, sobre la esfera de radio R, está resaltada un área dA que se proyecta sobre la esfera de radio $2R$ con líneas que van del centro y que pasan por puntos sobre la frontera de dA. El área proyectada sobre la esfera mayor es evidentemente 4 dA. Pero como el campo eléctrico debido a una carga puntual es inversamente proporcional a r^2, la magnitud del campo sobre la esfera de radio $2R$ es $\frac{1}{4}$ de la magnitud sobre la esfera de radio R. Así, el flujo eléctrico es el mismo para las dos áreas e independiente del radio de la esfera.

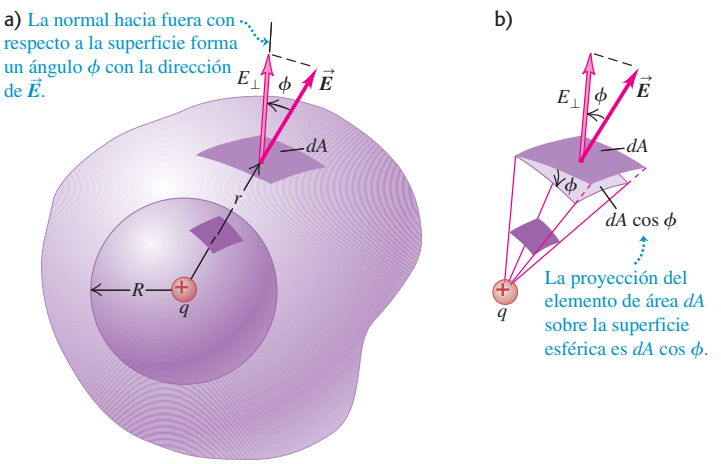
Carga puntual dentro de una superficie no esférica

Esa técnica de proyección demuestra cómo generalizar el análisis a superficies no esféricas. En la figura 22.12a aparece una esfera de radio R circundada por una superficie de forma irregular, en vez de por una segunda esfera. Considere un pequeño elemento de área dA sobre la superficie irregular; se observa que esta área es *mayor* que el elemento correspondiente sobre una superficie esférica a la misma distancia de q. Si una normal a dA forma un ángulo ϕ con una línea radial que sale de q, dos lados del área proyectada sobre la superficie esférica se ven disminuidos en un factor cos ϕ (figura 22.12b). Los otros dos lados permanecen sin cambio. De esta forma, el flujo eléctrico a través del elemento de superficie esférica es igual al flujo $E\,dA\cos\phi$ a través del correspondiente elemento de superficie irregular.

Se puede dividir toda la superficie irregular en elementos dA, calcular para cada uno de ellos el flujo eléctrico $E\,dA\cos\phi$, y sumar los resultados por integración, como en la ecuación (22.5). Cada uno de los elementos de área se proyecta sobre un elemento de superficie esférica correspondiente. Así, el flujo eléctrico *total* que atraviesa la superficie irregular, dado por cualquiera de las formas que adopta la ecuación (22.5), debe ser el mismo que el flujo total a través de una esfera, el cual es igual a q/ϵ_0 de acuerdo con la ecuación (22.6). Por lo tanto, para la superficie irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{22.7}$$

22.12 Cálculo del flujo eléctrico que pasa a través de una superficie no esférica.



La ecuación (22.7) se cumple para una superficie de *cualquier* forma o tamaño, siempre y cuando sea una superficie *cerrada* que contenga la carga q. El círculo en el signo de la integral recuerda que la integral siempre se toma sobre una superficie *cerrada*.

Los elementos de área $d\vec{A}$ y los vectores unitarios $\hat{n}$ correspondientes siempre apuntan hacia *fuera del* volumen encerrado por la superficie. El flujo eléctrico es positivo en aquellas áreas en las que el campo eléctrico apunta hacia fuera de la superficie y negativo donde apunta hacia dentro. Además, $E_\perp$ es positivo en los puntos en que $\vec{E}$ apunta hacia el exterior de la superficie y negativo en los que $\vec{E}$ apunta hacia el interior de ésta.

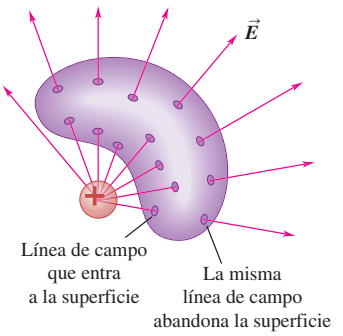
Si la carga puntual en la figura 22.12 es negativa, el campo $\vec{E}$ está dirigido en forma radial *hacia dentro*; en ese caso, el ángulo ϕ es mayor de 90°, su coseno es negativo y la integral en la ecuación (22.7) es negativa. Pero como q también es negativa, la ecuación (22.7) se cumple.

Para una superficie cerrada que *no* encierre carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Éste es el enunciado matemático que indica que cuando una región no contiene carga, cualquier línea de campo producida por una carga *afuera* de la región y que entran por un lado han de salir por el otro. (En la sección 22.1 se llegó a la misma conclusión al considerar el caso especial de una caja rectangular en un campo uniforme.) La figura 22.13 ilustra este punto. *Las líneas de campo eléctrico comienzan o terminan dentro de una región del espacio sólo cuando en esa región existe carga.*

22.13 Carga puntual *afuera* de una superficie cerrada que no encierra ninguna carga. Si una línea de campo eléctrico proveniente de la carga externa entra por un punto de la superficie, debe salir por otro.



Forma general de la ley de Gauss

Ahora viene el paso final en la obtención de la forma general de la ley de Gauss. Suponga que la superficie encierra no sólo una carga puntual q, sino varias cargas, q_1, q_2, q_3, … . El campo eléctrico total (resultante) $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga *total* encerrada por la superficie $Q_{\text{enc}} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$. Sea también $\vec{E}$ el campo *total* en la posición del elemento de área de la superficie $d\vec{A}$, y sea $E_\perp$ su componente perpendicular al plano de ese elemento (es decir, paralelo a $d\vec{A}$). Luego, se puede escribir una ecuación como la (22.7) para cada carga y su campo correspondiente y luego sumar los resultados. Al hacerlo se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss)} \tag{22.8}$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0.

CUIDADO **Las superficies gaussianas son imaginarias** Recuerde que la superficie cerrada a que se refiere la ley de Gauss es *imaginaria*; no es necesario que haya un objeto material en la posición de la superficie. A menudo se hace referencia a la superficie cerrada que se menciona en la ley de Gauss como **superficie gaussiana**.

Utilizando la definición de Q_{enc} y las distintas maneras de expresar el flujo eléctrico que da la ecuación (22.5), la ley de Gauss se plantea en las siguientes formas equivalentes:

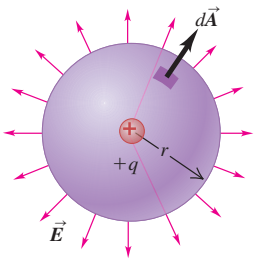
$$\Phi_E = \oint E\cos\phi\, dA = \oint E_\perp\, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(diversas formas de la ley de Gauss)} \tag{22.9}$$

Igual que en la ecuación (22.5), las diversas formas de la integral expresan el mismo concepto, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana, con distintos términos. En ocasiones conviene más una forma que otra.

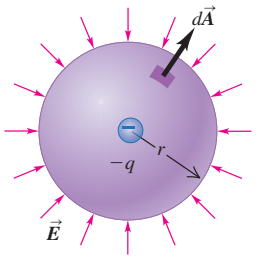
Como ejemplo, en la figura 22.14a se muestra una superficie gaussiana de radio r alrededor de una carga puntual positiva $+q$. El campo eléctrico apunta hacia fuera de la superficie gaussiana, por lo que en cada punto de la superficie, $\vec{E}$ está en la misma

22.14 Superficies gaussianas esféricas alrededor de a) una carga puntual positiva y b) una carga puntual negativa.

a) Superficie gaussiana alrededor de una carga positiva: flujo positivo (saliente)



b) Superficie gaussiana alrededor de una carga negativa: flujo negativo (entrante)



dirección que $d\vec{A}$, $\phi = 0$, y $E_\perp$ es igual a la magnitud del campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Como E es igual en todos los puntos de la superficie, es válido sacarlo de la integral en la ecuación (22.9), de manera que la integral que queda es $\int dA = A = 4\pi r^2$, que es el área de la esfera. Así, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \, 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga Q_{enc} encerrada sólo es la carga $+q$, lo que concuerda con la ley de Gauss. Si la superficie gaussiana encerrara una carga puntual *negativa*, como en la figura 22.14b, entonces $\vec{E}$ apuntaría *hacia el interior* de la superficie en cada punto en la dirección opuesta a $d\vec{A}$. Así, $\phi = 180°$ y $E_\perp$ es igual al negativo de la magnitud del campo: $E_\perp = -E = -|-q|/4\pi\epsilon_0 r^2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$. De esta forma, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Esto de nuevo concuerda con la ley de Gauss porque la carga encerrada en la figura 22.14b es $Q_{\text{enc}} = -q$.

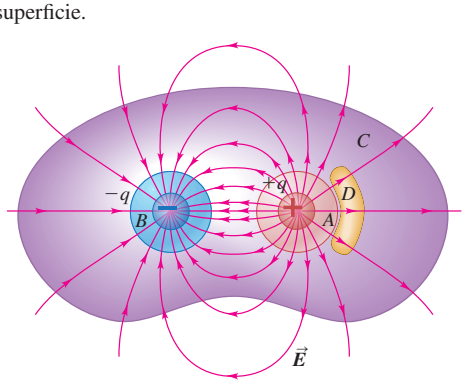
En las ecuaciones (22.8) y (22.9), Q_{enc} siempre es la suma algebraica de todas las cargas positivas y negativas encerradas por la superficie gaussiana, y $\vec{E}$ es el campo *total* en cada punto de la superficie. Note también que, en general, este campo es causado parcialmente por cargas dentro de la superficie y parcialmente por cargas afuera de ésta. Pero como muestra la figura 22.13, las cargas en el exterior *no* contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie. Por lo tanto, las ecuaciones (22.8) y (22.9) son correctas aun cuando haya cargas afuera de la superficie que contribuyan al campo eléctrico en esta última. Cuando $Q_{\text{enc}} = 0$, el flujo total a través de la superficie gaussiana debe ser igual a cero, aunque ciertas áreas tengan flujo positivo y otras flujo negativo (véase la figura 22.3b).

La ley de Gauss es la respuesta definitiva a la pregunta que se planteó al inicio de la sección 22.1: "si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué podemos determinar acerca de la distribución de carga en esa región?" La ley de Gauss ofrece una relación entre el campo eléctrico en una superficie cerrada y la distribución de carga dentro de esa superficie. Pero en ciertos casos la ley de Gauss puede usarse para responder la pregunta opuesta: "si se conoce la distribución de carga, ¿qué se concluye acerca del campo eléctrico que esa distribución genera?" Tal vez parezca que la ley de Gauss es una manera poco atractiva de contestar esta pregunta, ya que resolver la integral en la ecuación (22.8) quizá parezca una tarea intimidante. En ocasiones sí lo es, pero en otras es sorprendentemente fácil. A continuación se presenta un ejemplo que *no* implica integración; en la siguiente sección se verán varios ejemplos más.

Ejemplo conceptual 22.4 Flujo eléctrico y carga encerrada

La figura 22.15 muestra el campo producido por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ de igual magnitud y signos opuestos (un dipolo eléctrico). Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies cerradas, A, B, C y D.

22.15 El número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada es proporcional a la carga total contenida por la superficie.



SOLUCIÓN

La definición de flujo eléctrico dada en la ecuación (22.5) implica una integral de superficie, por lo que quizá parezca que se necesita resolver una integral. Pero la ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dividida entre ϵ_0. Por inspección de la figura 22.15, la superficie A (en color rojo) encierra la carga positiva, por lo que $Q_{\text{enc}} = +q$; la superficie B (en azul) contiene la carga negativa, de manera que $Q_{\text{enc}} = -q$; la superficie C (en púrpura) encierra las *dos* cargas, y tiene $Q_{\text{enc}} = +q + (-q) = 0$; y la superficie D (en amarillo), no encierra cargas y también tiene $Q_{\text{enc}} = 0$. De

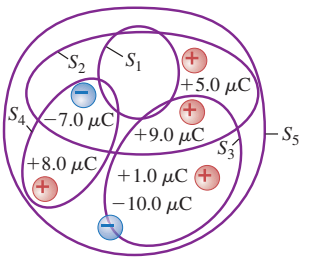
manera que sin resolver ninguna integral podemos concluir que los flujos totales para las diversas superficies son $\Phi_E = +q/\epsilon_0$ para la superficie A, $\Phi_E = -q/\epsilon_0$ para la B y $\Phi_E = 0$ tanto para la superficie C como la D.

Estos resultados dependen sólo de las cargas encerradas dentro de cada superficie gaussiana, no de las formas específicas de las superficies. Por ejemplo, compare la superficie C con la superficie rectangular que se muestra en la figura 22.3b, que también encierra las dos cargas en un dipolo eléctrico. En ese caso también se concluyó que el flujo neto de $\vec{E}$ era igual a cero; el flujo hacia el interior en una parte de la superficie compensaba con exactitud el flujo hacia fuera en el resto de la superficie.

Al examinar las líneas del campo eléctrico se obtienen conclusiones similares. La superficie A encierra sólo la carga positiva; en la figura 22.15 hay dibujadas 18 líneas que cruzan A en dirección saliente. La superficie B sólo contiene la carga negativa; está atravesada por las mismas 18 líneas, pero en dirección entrante. La superficie C encierra *las dos* cargas. Se interseca con líneas en 16 puntos; en 8 intersecciones las líneas van hacia el exterior, y en otras 8 hacia el interior. El número *neto* de líneas que cruzan en dirección saliente es cero, y la carga neta dentro de la superficie también es igual a cero. La superficie D se interseca en 6 puntos, en 3 de los cuales las líneas van hacia fuera y en otros 3 hacia dentro. El número neto de líneas que cruzan hacia el exterior y la carga total encerrada son iguales a cero. Hay puntos sobre las superficies en los que $\vec{E}$ no es perpendicular a la superficie, pero esto no afecta el conteo de las líneas de campo.

Evalúe su comprensión de la sección 22.3 En la figura 22.16 se ilustran seis cargas puntuales que están en el mismo plano. Hay cinco superficies gaussianas —S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5— que encierran, cada una, parte de este plano, y la figura 22.16 presenta la intersección de cada superficie con el plano. Clasifique las cinco superficies en orden del flujo eléctrico que pasa a través de ellas, del más positivo al más negativo.

22.16 Cinco superficies gaussianas y seis cargas puntuales.



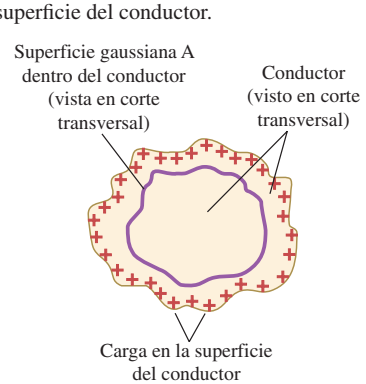
22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es válida para *cualquier* distribución de cargas y *cualquier* superficie cerrada. La ley de Gauss se puede utilizar de dos maneras. Si se conoce la distribución de la carga y si ésta tiene simetría suficiente que permita evaluar la integral en la ley de Gauss, se puede obtener el campo. O si se conoce el campo, es posible usar la ley de Gauss para encontrar la distribución de carga, como las cargas en superficies conductoras.

En esta sección se presentan ejemplos de ambas clases de aplicaciones. Cuando los estudie, observe el papel que desempeñan las propiedades de la simetría de cada sistema. Se empleará la ley de Gauss para calcular los campos eléctricos ocasionados por varias distribuciones de carga sencillas; los resultados se presentan en forma de tabla en el resumen del capítulo.

En problemas prácticos es frecuente encontrar situaciones en las que se desea conocer el campo eléctrico causado por una distribución de carga en un conductor. Estos cálculos se facilitan por el siguiente hecho notable: *cuando en un conductor sólido se coloca un exceso de carga que se encuentra en reposo, se encuentra en su totalidad en la superficie, no en el interior del material.* (Con el término *exceso* se quiere decir cargas distintas de los iones y electrones libres que constituyen el conductor neutral.) La demostración es la siguiente. Se sabe, de la sección 21.4, que en una situación electrostática (con todas las cargas en reposo) el campo eléctrico $\vec{E}$ en cada punto en el interior de un material conductor es igual a cero. Si $\vec{E}$ *no* fuera cero, las cargas en exceso se moverían. Suponga que se construye una superficie gaussiana dentro del conductor, como la superficie A en la figura 22.17. Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cualquier lugar de la superficie, la ley de Gauss requiere que la carga neta dentro de la superficie sea igual a cero. Ahora imagine que se comprime la superficie como un globo que se desinfla hasta que encierre una región tan pequeña que se pueda considerar un punto P; la carga en ese punto debe ser igual a cero. Esto se puede hacer en cualquier parte dentro del conductor, *por lo que no puede haber carga en exceso en ningún punto dentro de un conductor sólido; toda carga excedente debe encontrarse en la superficie del conductor.* (Este resultado es para un conductor *sólido*. En la siguiente sección se estudiará lo que sucede si el conductor tiene cavidades en su interior.) En los ejemplos que siguen se utilizará con frecuencia este hecho.

22.17 En condiciones electrostáticas (las cargas no están en movimiento), cualquier carga en exceso en un conductor sólido se encuentra por completo en la superficie del conductor.



Estrategia para resolver problemas 22.1 Ley de Gauss

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Gauss tiene su máxima utilidad en situaciones en que la distribución de carga tiene simetría esférica o cilíndrica, o está distribuida de manera uniforme en un plano. En estos casos se determina la dirección de $\vec{E}$ a partir de la simetría de la distribución de la carga. Si se conoce la distribución de carga, se puede usar la ley de Gauss para obtener la magnitud de $\vec{E}$. En forma alternativa, si se conoce el campo, se emplea la ley de Gauss para determinar los detalles de la distribución de carga. En cualquier caso, el análisis comienza con la pregunta: ¿Cuál es la simetría?

PLANTEAR *el problema* mediante los siguientes pasos:

1. Seleccione la superficie que se usará en la ley de Gauss. Es frecuente llamarla *superficie gaussiana*. Si se busca determinar el campo en un punto particular, entonces ese punto debe localizarse en la superficie gaussiana.
2. La superficie gaussiana no tiene que ser una superficie física real, como la de un cuerpo sólido. Es frecuente que la superficie apropiada sea una superficie geométrica imaginaria; puede estar en el espacio vacío, contenida en un cuerpo sólido, o ambas cosas.
3. Por lo general es posible evaluar la integral en la ley de Gauss (sin emplear una computadora) sólo si la superficie gaussiana y la distribución de carga tienen alguna propiedad de simetría. Si la distribución de carga tiene simetría cilíndrica o esférica, elija un cilindro coaxial o una esfera concéntrica como la superficie gaussiana, respectivamente.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Resuelva la integral en la ecuación (22.9), lo que quizá parezca un trabajo intimidante, pero la simetría de la distribución de la carga y la selección cuidadosa de una superficie gaussiana facilitan la tarea.
2. Con frecuencia puede considerarse la superficie gaussiana cerrada como constituida por varias superficies separadas, tales como los lados y extremos de un cilindro. La integral $\oint E_\perp \, dA$ sobre toda la superficie cerrada siempre es igual a la suma de las integrales sobre todas las superficies separadas. Algunas de esas integrales pueden ser igual a cero, como las que se describen más adelante en los puntos 4 y 5.
3. Si $\vec{E}$ es *perpendicular* (normal) en cada punto de la superficie con área A, si apunta *hacia fuera* desde interior de la superficie, y si también tiene la misma *magnitud* en todos los puntos de la superficie, entonces $E_\perp = E =$ constante y $\int E_\perp \, dA$ sobre la superficie es igual a EA. Si en vez de ello, $\vec{E}$ es perpendicular y apunta *hacia dentro*, entonces $E_\perp = -E$ y $\int E_\perp \, dA = -EA$.
4. Si $\vec{E}$ es *tangente* a la superficie en cada punto, entonces $E_\perp = 0$ y la integral sobre la superficie es igual a cero.
5. Si $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cada punto de la superficie, la integral es cero.
6. En la integral $\oint E_\perp \, dA$, $E_\perp$ siempre es la componente perpendicular del campo eléctrico *total* en cada punto de la superficie gaussiana cerrada. En general, este campo puede deberse parcialmente a cargas dentro de la superficie y parcialmente a cargas afuera de ella. Aun cuando *no* hubiera carga dentro de la superficie, el campo en puntos de la superficie gaussiana no necesariamente es igual a cero. Sin embargo, en ese caso, la *integral* sobre la superficie gaussiana —es decir, el flujo eléctrico total a través de la superficie— es siempre igual a cero.
7. Una vez evaluada la integral, en la ecuación (22.9) se despeja la variable que se busca.

EVALUAR *la respuesta:* Es frecuente que el resultado sea una *función* que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico según la posición. Hay que estudiar esta función con ojo crítico para ver si tiene sentido.

Ejemplo 22.5 Campo de una esfera conductora con carga

Se coloca una carga positiva q en una esfera conductora sólida de radio R (figura 22.18). Determine $\vec{E}$ en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.

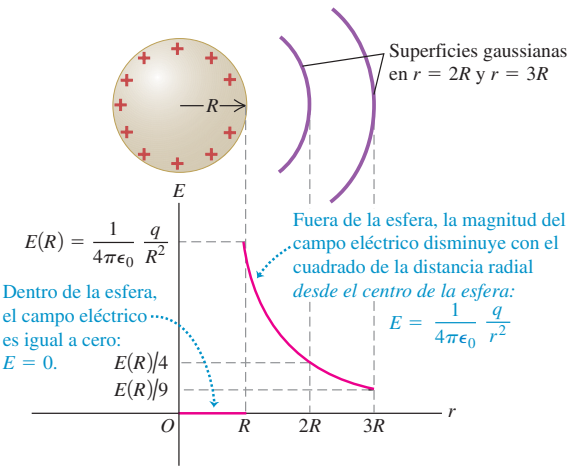
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como se vio en esta sección, toda la carga debe encontrarse en la superficie de la esfera. El sistema tiene simetría esférica.

PLANTEAR: Para aprovechar la simetría, se toma la superficie gaussiana como una esfera imaginaria de radio r con centro en el conductor. Para calcular el campo afuera del conductor, se toma r de forma que sea mayor que el radio R del conductor; para obtener el campo en el interior, se toma r menor que R. En cualquier caso, el punto en que se desea calcular $\vec{E}$ queda sobre la superficie gaussiana.

EJECUTAR: El papel de la simetría merece atención especial antes de hacer cualquier cálculo. Decir que el sistema tiene simetría esférica significa que si se hace girar con cualquier ángulo alrededor de cualquier eje que pase por el centro, después de la rotación, el sistema es indistinguible del original antes del giro. La carga es libre de moverse en el conductor y no hay nada en este último que la haga tender

22.18 Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva q. Fuera de la esfera, el campo es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.



a concentrarse más en ciertas regiones que en otras. Por lo tanto, se concluye que la carga está distribuida de manera *uniforme* sobre la superficie.

La simetría también muestra que la dirección del campo eléctrico debe ser *radial*, como se ilustra en la figura 22.18. Si el sistema se gira otra vez, la disposición del campo debe ser idéntica al original. Si el campo tuviera una componente en algún punto que fuera perpendicular a la dirección radial, esa componente tendría que ser distinta después de hacer al menos algunas rotaciones. Entonces, no puede haber tal componente y el campo debe ser radial. Por la misma razón, la magnitud E del campo sólo puede depender de la distancia r desde el centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos de una superficie esférica concéntrica respecto de la esfera conductora.

La elección de una esfera como superficie gaussiana aprovecha estas propiedades de simetría. En primer lugar se considera el campo fuera del conductor, por lo que se elige $r > R$. Todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q. El área de la superficie gaussiana es $4\pi r^2$; $\vec{E}$ es uniforme sobre la superficie y perpendicular a cada uno de sus puntos. Por lo anterior, la integral del flujo $\oint E_\perp \, dA$ en la superficie gaussiana es $E(4\pi r^2)$ y la ecuación (22.8) da:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(fuera de una esfera conductora con carga)}$$

Esta expresión del campo en cualquier punto *afuera* de la esfera ($r > R$) es la misma para una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al que habría si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

(en la superficie de una esfera conductora con carga)

CUIDADO **El flujo es positivo o negativo** Recuerde que se eligió que la carga q fuera *positiva*. Si fuera negativa, el campo eléctrico estaría dirigido radialmente *hacia el interior* y no hacia el exterior, y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana sería negativo. Las magnitudes del campo eléctrico en el exterior y en la superficie de la esfera están dadas por las mismas expresiones mencionadas, excepto que q denota la *magnitud* (valor absoluto) de la carga.

Para calcular $\vec{E}$ dentro del conductor, se usa una superficie gaussiana esférica con radio $r < R$. De nuevo, la simetría esférica dice que $E(4\pi r^2) = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$. Pero como toda la carga está en la superficie del conductor, la superficie gaussiana (que está por completo dentro del conductor) no encierra *ninguna* carga, por lo que $Q_{\text{enc}} = 0$, y el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero.

EVALUAR: Ya se sabe que dentro del conductor $\vec{E} = \mathbf{0}$, como debe ser en el interior de un conductor sólido cuando las cargas se encuentran en reposo. En la figura 22.18 se ilustra E como función de la distancia r desde el centro de la esfera. Observe que en el límite, cuando $R \to 0$, la esfera se convierte en una carga puntual; así que sólo hay un "exterior," y el campo está dado en cualquier parte por $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Así, se ha deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. (En la sección 22.3 se dedujo la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb, lo que completa la demostración de su equivalencia lógica.)

Este método también es aplicable a un conductor con forma de *cascarón* esférico (un conductor esférico con un hueco concéntrico en el centro) si dentro del agujero no hay carga. Se usa una superficie gaussiana esférica con radio r menor que el radio del hueco. Si en el interior del hueco *hubiera* un campo, tendría que ser radial y con simetría esférica, como antes, por lo que $E = Q_{\text{enc}}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Pero ahora no hay carga encerrada, de manera que en el interior del hueco $Q_{\text{enc}} = 0$ y $E = 0$.

¿Puede utilizar esta misma técnica para encontrar el campo eléctrico en el espacio que hay entre una esfera con carga y una esfera concéntrica y hueca que la rodee?

Ejemplo 22.6 Campo de una carga lineal

Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado de longitud infinita. La carga por unidad de longitud es λ (se supone positiva). Se trata de encontrar el campo eléctrico. (Ésta es una representación aproximada del campo de un alambre *finito* con carga uniforme, siempre y cuando la distancia del punto del campo al alambre sea mucho menor que la longitud del alambre.)

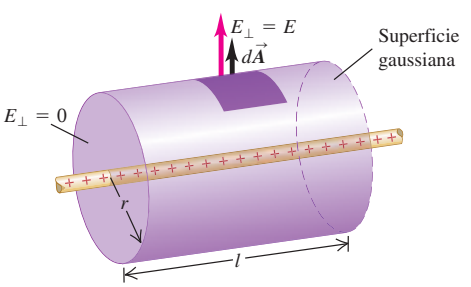
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El sistema tiene simetría *cilíndrica*. El campo debe apuntar hacia fuera de las cargas positivas. Para determinar la dirección de $\vec{E}$ con más precisión, así como demostrar el modo en que su magnitud depende de la posición, se usa la simetría, como se hizo en el ejemplo 22.5.

PLANTEAR: La simetría cilíndrica significa que el sistema puede girarse cualquier ángulo alrededor de su eje y desplazarse cualquier distancia a lo largo del eje; en cada caso el sistema resultante es indistinguible del original. Por lo tanto, $\vec{E}$ no cambia en ningún punto cuando se efectúa cualquiera de estas operaciones. El campo no puede tener ninguna componente paralela al conductor; si la tuviera habría que explicar por qué las líneas del campo que comienzan en el alambre apuntan en una dirección paralela al alambre y no en la otra. Asimismo, el campo no puede tener ninguna componente tangente a un círculo en un plano perpendicular al alambre con su centro en el alambre. Si así fuera, sería necesario explicar por qué la componente señala en una dirección alrededor del conductor y no en la otra. Todo lo que queda es una componente radial hacia fuera del conductor en cada punto. Por lo tanto, las líneas de campo afuera de un alambre infinito con carga uniforme son *radiales* y se localizan en planos perpendiculares al alambre. La *magnitud* del campo sólo depende de la distancia radial desde el alambre.

Estas propiedades de simetría sugieren que, como superficie gaussiana, se utiliza un *cilindro* con radio arbitrario r y longitud arbitraria l, con sus extremos perpendiculares al conductor (figura 22.19).

22.19 Se emplea una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para encontrar el campo eléctrico fuera de un conductor cargado de longitud infinita.



continúa

EJECUTAR: Se descompone la integral de superficie para el flujo Φ_E en una integral sobre cada extremo plano y otra sobre las paredes laterales curvas. A través de los extremos no hay flujo, ya que $\vec{E}$ se encuentra en el plano de la superficie y $E_\perp = 0$. Para calcular el flujo a través de las paredes laterales, hay que observar que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en cada punto, por lo que $E = E_\perp$; por simetría, E tiene el mismo valor en cualquier lugar de las paredes. El área de las paredes laterales es $2\pi rl$. (Para hacer un cilindro de papel de radio r y altura l, se necesita un rectángulo de papel de ancho $2\pi r$, altura l y área $2\pi rl$.) De ahí que el flujo total Φ_E a través de todo el cilindro sea igual a la suma del flujo a través de las paredes laterales, que es $(E)(2\pi rl)$, y el flujo a través de los dos extremos es de cero. Por último, se necesita la carga total encerrada, que es la carga por unidad de longitud multiplicada por la longitud del alambre dentro de la superficie gaussiana, o $Q_{\text{enc}} = \lambda l$. De acuerdo con la ley de Gauss, la ecuación (22.8) es

$$\Phi_E = (E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad \text{(campo de una línea infinita de carga)}$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) por medios mucho más laboriosos.

Se ha supuesto que λ es *positiva*. Si fuera *negativa*, $\vec{E}$ estaría dirigido radialmente hacia el interior, en dirección de la línea de carga, y en la expresión anterior de la magnitud del campo E se debería interpretar λ como la *magnitud* (valor absoluto) de la carga por unidad de longitud.

EVALUAR: Observe que aunque *toda* la carga en el conductor contribuye al campo, al aplicar la ley de Gauss sólo se considera la parte de la carga total que está dentro de la superficie gaussiana. Esto tal vez parezca extraño; parece como si se hubiera obtenido la respuesta correcta ignorando parte de la carga y que el campo de un alambre *corto* de longitud l fuera el mismo que el de otro muy largo. Pero al considerar la *simetría* del problema *sí* se incluye toda la carga en el conductor. Si el alambre es corto, no habría simetría respecto al eje, y el campo no sería de magnitud uniforme en la superficie gaussiana. En ese caso, la ley de Gauss deja de ser útil y *no podría* usarse para calcular el campo; el problema se manejaría mejor con la técnica de integración empleada en el ejemplo 21.11.

Se puede utilizar una superficie gaussiana como la de la figura 22.19 para demostrar que el campo en puntos situados fuera de un cilindro largo con carga uniforme es el mismo que si toda la carga se concentrara en una línea a lo largo de su eje. También se puede calcular el campo eléctrico en el espacio entre un cilindro con carga y otro cilindro coaxial hueco conductor que lo rodee. Estos cálculos se dejan para el lector (véanse los problemas 22.37 y 22.40).

Ejemplo 22.7 Campo de una lámina plana infinita cargada

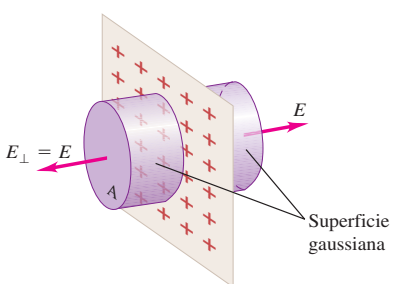
Encuentre el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, en la que hay una carga uniforme positiva por unidad de área σ.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo debe apuntar hacia fuera de la lámina con carga positiva. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.6, antes de hacer los cálculos se emplea la simetría (en este caso, simetría *plana*) para obtener más datos sobre la dirección de $\vec{E}$ y su dependencia de la posición.

PLANTEAR: La simetría plana significa que la distribución de carga no cambia si hay un movimiento en cualquier dirección paralela a la lámina, de lo que se concluye que $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina. La simetría también dice que el campo debe tener la misma magnitud E a cualquier distancia dada en cualquier lado de la lámina. Para aprovechar estas propiedades de la simetría se usa un cilindro como superficie gaussiana, con su eje perpendicular a la lámina de carga, con extremos de área A (figura 22.20).

22.20 Superficie gaussiana cilíndrica que se utiliza para encontrar el campo de una lámina plana infinita cargada.



EJECUTAR: La lámina con carga pasa a través de la mitad de la longitud del cilindro, por lo que los extremos del cilindro son equidistantes con respecto a la lámina. En cada extremo del cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y $E_\perp$ es igual a E; de ahí que el flujo a través de cada extremo sea $+EA$.

Como $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina con carga, es paralelo a las *paredes* laterales curvas del cilindro, por lo que $E_\perp$ es igual a cero en las paredes y no hay flujo que las atraviese. Así, la integral de flujo total en la ley de Gauss es $2EA$ (EA de cada extremo y cero de las paredes laterales). La carga neta dentro de la superficie gaussiana es la carga por unidad de área multiplicada por el área de lámina encerrada por la superficie, o $Q_{\text{enc}} = \sigma A$. De ahí que la ley de Gauss, ecuación (22.8), dé

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{(campo de una lámina infinita cargada)}$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.12 (sección 21.5) con cálculos mucho más complejos. El campo es uniforme y está dirigido perpendicularmente al plano de la lámina. Su magnitud es *independiente* de la distancia a la lámina, por lo que las líneas de campo son rectas y paralelas entre sí, pero perpendiculares a la lámina.

Si la densidad de carga es negativa, $\vec{E}$ está dirigido *hacia* la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana en la figura 22.20 es negativo y σ en la expresión $E = \sigma/2\epsilon_0$ denota la magnitud (valor absoluto) de la densidad de carga.

EVALUAR: La suposición de que la lámina tiene tamaño infinito es una idealización; nada en la naturaleza es infinitamente grande. Pero el resultado $E = \sigma/2\epsilon_0$ es una buena aproximación para puntos que estén cerca de la lámina (en comparación con las dimensiones de ésta) y no demasiado cerca de los bordes. En tales puntos, el campo es casi uniforme y perpendicular al plano.

Ejemplo 22.8 Campo entre láminas conductoras paralelas y con cargas opuestas

Dos placas conductoras paralelas, grandes y planas tienen cargas de igual magnitud pero con signo contrario; la carga por unidad de área es $+\sigma$ para una y $-\sigma$ para la otra. Determine el campo eléctrico en la región entre las placas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo entre las placas y alrededor de éstas es aproximadamente el que se ilustra en la figura 22.21a. Puesto que las cargas opuestas se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en las caras opuestas (interiores) de las placas. Una pequeña cantidad de carga reside en las superficies *exteriores* de las placas, y en sus extremos hay alguna dispersión del campo. Pero si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que las separa, la cantidad de carga en las superficies exteriores se vuelve despreciable por pequeña, y la dispersión se ignora excepto cerca de los extremos. En este caso se puede suponer que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como se ilustra en la figura 22.21b, y que las cargas están distribuidas de manera uniforme en las superficies opuestas.

PLANTEAR: Para aprovechar esta simetría se emplean las superficies gaussianas sombreadas S_1, S_2, S_3 y S_4, que son cilindros con extremos de área A como el que se ilustra en perspectiva en la figura 22.20, y en vista lateral en la figura 22.21b. Un extremo de cada superficie está dentro de las placas conductoras.

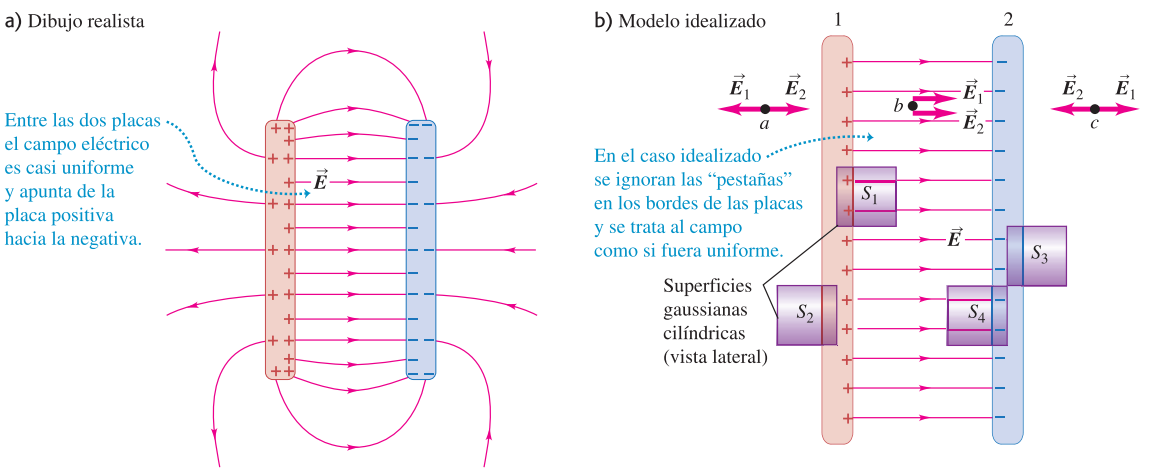
EJECUTAR: Para la superficie S_1, el extremo izquierdo está dentro de la placa 1 (la positiva). Como en condiciones electrostáticas el campo dentro de cualquier sólido conductor es igual a cero, no hay flujo eléctrico a través de ese extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular al extremo derecho, por lo que en ese extremo, $E_\perp$ es igual a E y el flujo es EA; éste es positivo porque $\vec{E}$ está dirigido fuera de la superficie gaussiana. A través de las paredes laterales del cilindro no hay flujo, pues son paralelas a $\vec{E}$. Así que el flujo total en la ley de Gauss es EA. La carga neta encerrada por el cilindro es σA, por lo que la ecuación (22.8) da

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{(campo entre placas conductoras con cargas opuestas)}$$

El campo es uniforme y perpendicular a las placas, y su magnitud es independiente de la distancia desde cualquiera de las placas. Éste es el mismo resultado que se obtiene al usar la superficie gaussiana S_4; además, las superficies S_2 y S_3 pueden utilizarse para demostrar que $E = 0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2. Se invita al lector a efectuar los cálculos respectivos (véase el ejercicio 22.27).

EVALUAR: Utilizando el principio de superposición de campos eléctricos se obtienen los mismos resultados en el ejemplo 21.13 (sección 21.5). Los campos que se deben a las dos láminas de carga (una en cada placa) son $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$; del ejemplo 22.7, ambas placas tienen magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico total (resultante) en cualquier punto es la suma vectorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En los puntos a y c en la figura 22.21b, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen direcciones opuestas y su resultante es igual a cero. Esto también se cumple en cada punto dentro del material de cada placa, lo que es congruente con el requerimiento de que con cargas en reposo no puede haber un campo dentro de un conductor sólido. En cualquier punto b entre las placas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección; su resultante tiene magnitud $E = \sigma/\epsilon_0$, como se encontró antes utilizando la ley de Gauss.

22.21 Campo eléctrico entre placas paralelas con cargas opuestas.



Ejemplo 22.9 Campo de una esfera con carga uniforme

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme *en todo el volumen* de una esfera *aislante* con radio R. Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto P a una distancia r del centro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como se vio en el ejemplo 22.5, el sistema tiene simetría esférica, por lo que se pueden usar las conclusiones de ese ejemplo acerca de la dirección y la magnitud de $\vec{E}$.

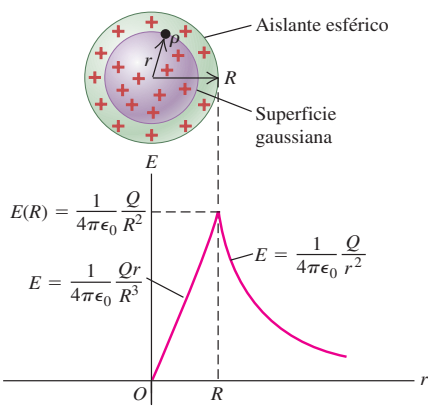
PLANTEAR: Para emplear la simetría se elige como superficie gaussiana una esfera con radio r, concéntrica con la distribución de la carga.

EJECUTAR: Por simetría, la magnitud E del campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana, y la dirección de $\vec{E}$ es radial en cada uno de ellos, por lo que $E_\perp = E$. Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de E por el área total de la superficie $A = 4\pi r^2$, es decir, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

La cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana depende del radio r. Primero se calcula la magnitud del campo *dentro* de la esfera con carga de radio R; la magnitud E se evalúa en el radio de la superficie gaussiana, por lo que se elige $r < R$. La densidad volumétrica de carga ρ es la carga Q dividida entre el volumen de la esfera con carga de radio R:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

22.22 Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante con carga uniforme. Compare esto con el campo de una esfera conductora (figura 22.18).



El volumen V_{enc} encerrado por la superficie gaussiana es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que la carga total Q_{enc} contenida por la superficie es

$$Q_{\text{enc}} = \rho V_{\text{enc}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Con lo que la ley de Gauss, ecuación (22.8), se convierte en

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{o bien,}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \qquad \text{(campo dentro de una esfera con carga uniforme)}$$

La magnitud del campo es proporcional a la distancia r que hay entre el punto del campo y el centro de la esfera. En el centro ($r = 0$), $E = 0$.

Para calcular la magnitud del campo *fuera* de la esfera con carga se utiliza una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$. Esta superficie encierra la totalidad de la esfera con carga, por lo que $Q_{\text{enc}} = Q$, y la ley de Gauss da

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o bien,}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{(campo dentro de una esfera con carga uniforme)}$$

Para *cualquier* cuerpo esférico simétrico con carga, el campo eléctrico en su exterior es el mismo que si todo el cuerpo estuviera concentrado en el centro. (En el ejemplo 22.5 se hizo esta misma observación.)

La figura 22.22 presenta una gráfica de E como función de r para este problema. Para $r < R$, E es directamente proporcional a r, y para $r > R$, E varía según $1/r^2$. Si la carga es negativa y no positiva, $\vec{E}$ va radialmente *hacia dentro* y Q se interpreta como la magnitud (valor absoluto) de la carga.

EVALUAR: Observe que si se establece que $r = R$ en cualquiera de las dos expresiones para E (adentro o afuera de la esfera), se obtiene el mismo resultado $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ para la magnitud del campo en la superficie de la esfera. Esto se debe a que la magnitud E es una función *continua* de r. En contraste, para la esfera conductora con carga del ejemplo 22.5, la magnitud del campo eléctrico es *discontinua* en $r = R$ (salta de $E = 0$ apenas dentro de la esfera a $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ justo afuera de la esfera). En general, el campo eléctrico $\vec{E}$ es discontinuo en su magnitud, dirección o ambas en cualquier lugar en el que haya una *lámina* de carga, como en la superficie de una esfera conductora con carga (ejemplo 22.5), en la superficie de una lámina infinita con carga (ejemplo 22.7) o en la superficie de una placa conductora con carga (ejemplo 22.8).

La técnica general utilizada en este ejemplo se aplica a *cualquier* distribución de carga con simetría esférica, ya sea uniforme o no. Tales distribuciones de carga ocurren dentro de muchos átomos y núcleos atómicos, por lo que la ley de Gauss es una herramienta útil en la física atómica y nuclear.

Ejemplo 22.10 Campo de una esfera hueca con carga

Una esfera hueca de pared delgada y radio de 0.250 m tiene una cantidad desconocida de carga distribuida de manera uniforme en su superficie. A una distancia de 0.300 m desde el centro de la esfera, el campo eléctrico apunta directamente hacia el centro de la esfera y su magnitud es de 1.80×10^2 N/C. ¿Cuánta carga hay en la esfera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La distribución de carga tiene simetría esférica. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.9, se deduce que el campo eléctrico es radial en todo lugar, y su magnitud es función sólo de la distancia radial r desde el centro de la esfera.

PLANTEAR: Se utiliza otra vez una superficie esférica gaussiana concéntrica con la distribución de carga y que pase por el punto de interés en $r = 0.300$ m.

EJECUTAR: La distribución de carga es igual que si la carga estuviera sobre la superficie de una esfera conductora de 0.250 m de radio. Por ello es posible usar los resultados del ejemplo 22.5. Una diferencia clave con ese ejemplo es que como aquí el campo eléctrico está dirigido hacia la esfera, la carga debe ser *negativa*. Además, como el campo eléctrico se dirige hacia la superficie gaussiana, $E_\perp = -E$ y el flujo es $\oint E_\perp \, dA = -E(4\pi r^2)$.

Según la ley de Gauss, el flujo es igual a la carga q en la esfera (toda ella encerrada por la superficie de Gauss) dividida entre ϵ_0. Al despejar q se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} q &= -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1.80 \times 10^2 \text{ N/C})(4\pi) \\ &\quad \times (8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.300 \text{ m})^2 \\ &= -8.01 \times 10^{-10} \text{ C} = -0.801 \text{ nC} \end{aligned}$$

EVALUAR: Para determinar la carga se tiene que conocer el campo eléctrico en *todos* los puntos de la superficie gaussiana con la finalidad de poder calcular la integral de flujo. Aquí esto fue posible porque la distribución de carga es muy simétrica. Sin embargo, si la distribución de carga fuera irregular o asimétrica, la ley de Gauss no resultaría muy útil para calcular la distribución de carga a partir del campo o viceversa.

Evalúe su comprensión de la sección 22.4 Se coloca una cantidad conocida de carga Q en el conductor de forma irregular que se ilustra en la figura 22.17. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿es posible emplear la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria fuera del conductor?

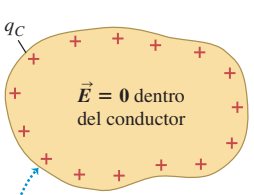
22.5 Cargas en conductores

Hemos aprendido que una situación electrostática (en la que no hay movimiento neto de la carga), el campo eléctrico en cada punto dentro de un conductor es igual a cero, y que el exceso de carga en un conductor sólido se localiza por completo en su superficie (figura 22.23a). Pero, ¿qué pasa si en el conductor hay una *cavidad* (figura 22.23b)? Si no hay carga dentro de la cavidad se puede utilizar una superficie gaussiana como A (que está por completo dentro del material del conductor) para demostrar que la carga *neta* en la *superficie de la cavidad* debe ser igual a cero, ya que $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo lugar de la superficie gaussiana. De hecho, en esta situación se puede probar que no hay ninguna carga *en ninguna parte* de la superficie de la cavidad. La demostración detallada de este enunciado se dejará para el capítulo 23.

Suponga que se coloca un cuerpo pequeño con carga q dentro de una cavidad en el interior de un conductor (figura 22.23c). El conductor está descargado y aislado de la carga q. Otra vez, $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de la superficie A, por lo que según la ley de Gauss la carga *total* dentro de esta superficie debe ser igual a cero. Por lo tanto, debe haber una carga $-q$ distribuida sobre la superficie de la cavidad, enviada ahí por la carga q en el interior de la cavidad. La carga *total* en el conductor debe ser igual a cero, por lo que debe haber una carga $+q$ ya sea en su superficie exterior o dentro del material. Pero en la sección 22.4 se demostró que en una situación electrostática no puede haber ninguna carga excedente dentro del material de un conductor. Así, se concluye que la carga $+q$ debe estar en la superficie externa. Con el mismo razonamiento, si el conductor tuviera originalmente una carga q_C, entonces la carga total en la superficie exterior debe ser $q_C + q$ después de que se insertó la carga q en la cavidad.

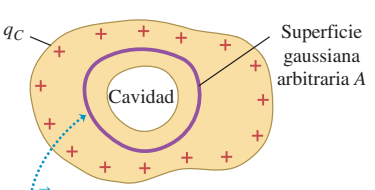
22.23 Cálculo del campo eléctrico dentro de un conductor con carga.

a) Conductor sólido con carga q_C



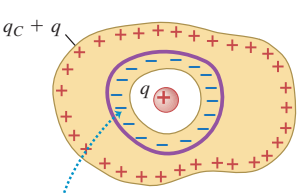
La carga q_C reside por completo en la superficie del conductor. La situación es electrostática, por lo que $\vec{E} = \mathbf{0}$ dentro del conductor.

b) El mismo conductor con una cavidad interna



Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos dentro del conductor, el campo eléctrico debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana.

c) Se coloca en la cavidad una carga aislada q



Para que $\vec{E}$ sea igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, la superficie de la cavidad debe tener una carga total de $-q$.

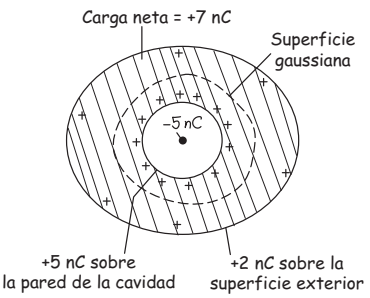
Ejemplo conceptual 22.11 Conductor con una cavidad

Un conductor sólido con una cavidad tiene una carga total de +7 nC. Dentro de la cavidad, aislada del conductor, hay una carga puntual de −5 nC. ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

SOLUCIÓN

La figura 22.24 ilustra la situación. Si la carga en la cavidad es $q = -5$nC, la carga en la superficie de la cavidad interna debe ser $-q = -(-5\text{ nC}) = +5$ nC. El conductor lleva una carga *total* de +7 nC, ninguno de los cuales se encuentra en el interior del material. Si en la superficie interna de la cavidad hay +5 nC, entonces en la superficie externa del conductor debe haber (+7 nC) − (+5 nC) = +2 nC.

22.24 Ilustración del problema. Dentro de la masa del conductor hay un campo eléctrico igual a cero y, por lo tanto, un flujo de cero a través de la superficie gaussiana, por lo que la carga sobre la pared de la cavidad debe ser la opuesta de la carga puntual.

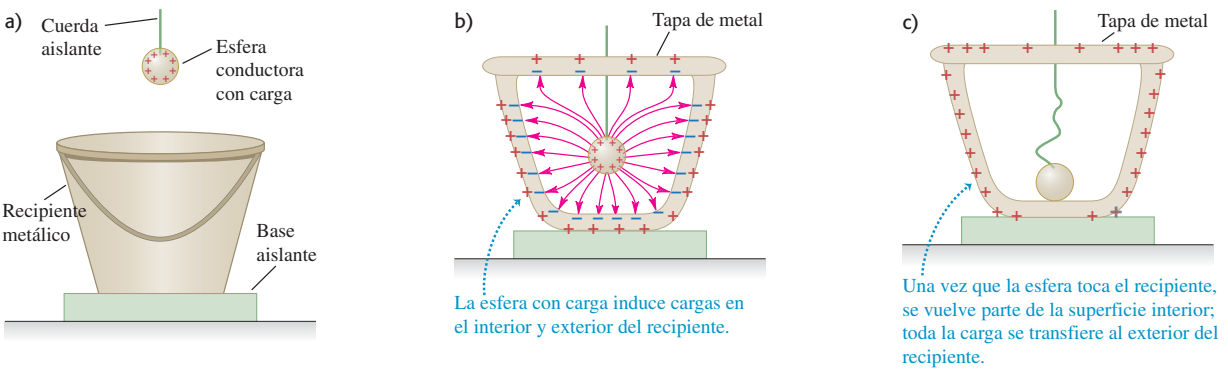


Prueba experimental de la ley de Gauss

Ahora se mostrará un experimento histórico, que se ilustra en la figura 22.25. Se monta un recipiente conductor, como una olla de metal con tapa, sobre una base aislante. Al principio el recipiente no tiene carga. Después se cuelga una esfera metálica con carga de un cordel aislante (figura 22.25a), se hace descender hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa (figura 22.25b). Se inducen cargas sobre las paredes del recipiente, como se ilustra. Luego se deja que la esfera *toque* la pared interior (figura 22.25c). La superficie de la esfera se convierte, en efecto, en parte de la superficie de la cavidad. La situación es ahora la misma que la de la figura 22.23b; si la ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero. Es decir, la esfera debe perder toda su carga. Por último, se extrae la esfera para constatar que en verdad ha perdido toda su carga.

Este experimento lo realizó en el siglo XIX el científico inglés Michael Faraday empleando una hielera de metal con tapa, y se conoce como el **experimento de la hielera de Faraday**. (Experimentos similares se llevaron a cabo en el siglo XVIII por parte de Benjamín Franklin en Estados Unidos y Joseph Priestley en Inglaterra, aunque con mucha menor precisión.) El resultado confirma la validez de la ley de Gauss y, por lo tanto, de la ley de Coulomb. El resultado de Faraday fue significativo porque el método experimental de Coulomb, quien usaba una balanza de torsión y dividía las cargas, no era muy preciso; es muy difícil confirmar con gran precisión la dependencia que tiene la fuerza electrostática del término $1/r^2$ con mediciones directas de la fuerza. En contraste, experimentos como el de Faraday prueban la validez de la ley de Gauss y, por consiguiente, de la ley de Coulomb de un modo mucho más preciso.

22.25 a) Esfera conductora con carga suspendida de un cordel aislante afuera de un recipiente conductor apoyado en una base aislante. b) Se hace descender la esfera hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa. c) La esfera toca la superficie interior del recipiente.



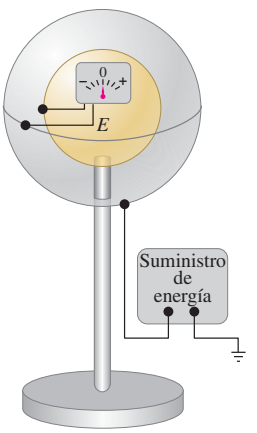
En la figura 22.26 se presenta una versión moderna del experimento de Faraday. Los detalles de la parte del dibujo que dice "Suministro de energía" no son importantes; su función es poner y quitar carga en la esfera exterior, según se desee. El dibujo en el interior con un medidor es un *electrómetro* sensible, un instrumento que detecta el movimiento de cantidades extremadamente pequeñas de cargas entre las esferas exterior e interior. Si la ley de Gauss es correcta, nunca puede haber ninguna carga en la superficie interior de la esfera externa. Si así ocurriera, no debería haber flujo de carga entre las esferas cuando la esfera externa se cargara y descargara. El hecho real es que no se observa ningún flujo, lo que constituye una confirmación muy sensible de las leyes de Gauss y de Coulomb. La precisión del experimento está limitada sobre todo por el electrómetro, que puede ser asombrosamente sensible. Los experimentos han demostrado que el exponente 2 en el término $1/r^2$ de la ley de Coulomb no difiere de 2, precisamente, en más de 10^{-16}. Así que no hay razón para sospechar que no es otro que 2, con exactitud.

El mismo principio que subyace en el experimento de la hielera de Faraday es el que se utiliza en el *generador electrostático de Van de Graaff* (figura 22.27). La esfera conductora con carga de la figura 22.26 se remplaza por una banda con carga que lleva carga de manera continua al interior de un casco conductor, sólo para que sea transportada a la superficie externa del casco. Como resultado, la carga en el casco y el campo eléctrico que lo rodea se hacen muy grandes con mucha rapidez. El generador Van de Graaff se utiliza como acelerador de partículas con carga y para demostraciones de física.

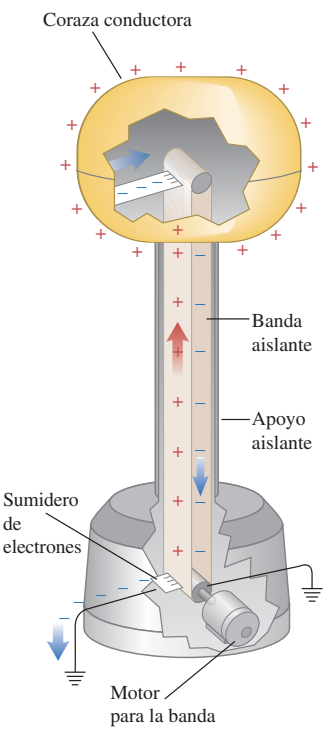
Este principio también forma la base del *blindaje electrostático*. Imagine que se tiene un instrumento electrónico muy sensible que deseamos proteger de los campos eléctricos dispersos que pudieran originar lecturas erróneas. Se rodea al instrumento con una caja conductora, o se recubren las paredes, piso y techo de la habitación con un material conductor como lámina de cobre. El campo eléctrico exterior redistribuye los electrones libres en el conductor, lo que deja en ciertas regiones de la superficie

?

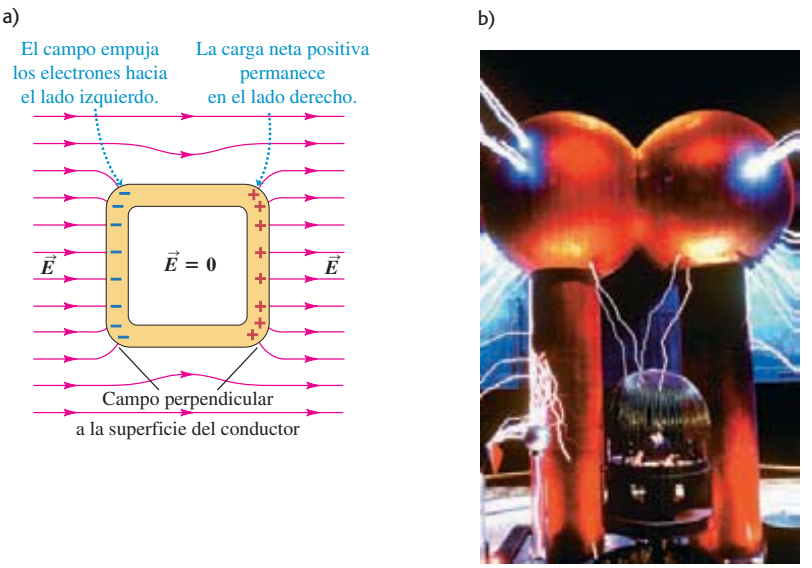
22.26 La coraza esférica se carga y descarga en forma alternada con la fuente de energía. Si hubiera algún flujo de carga entre las esferas interna y externa, sería detectado por el electrómetro dentro de la coraza interior.



22.27 Corte transversal de las partes esenciales de un generador electrostático Van de Graaff. El sumidero de electrones en la parte inferior los retira de la banda, lo que da a ésta una carga positiva; en la parte superior, la banda atrae electrones de la coraza conductora y le imparte una carga positiva.



22.28 a) Caja conductora (jaula de Faraday) inmersa en un campo eléctrico uniforme. El campo de las cargas inducidas sobre la caja se combina con el campo uniforme para dar un campo total igual a cero dentro de la caja. b) El aislamiento electrostático protege de las descargas eléctricas peligrosas.

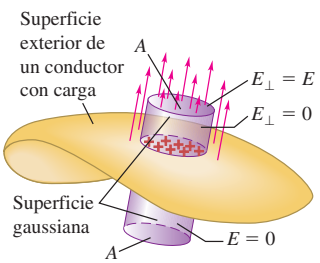


exterior una carga neta positiva, y negativa en otras (figura 22.28). Esta distribución de la carga ocasiona un campo eléctrico adicional de manera que el campo *total* en cada punto dentro de la caja sea igual a cero, como afirma la ley de Gauss. La distribución de la carga en la caja también altera las formas de las líneas del campo cerca de la caja, como se observa en la figura. Con frecuencia este arreglo se conoce como la *jaula de Faraday*. La misma física dice que uno de los lugares más seguros en que se puede estar durante una tormenta eléctrica es en el interior de un automóvil; si un relámpago azotara el vehículo, la carga tendería a permanecer en la carrocería de metal, y en el compartimiento de pasajeros habría poco o ningún campo eléctrico.

Campo en la superficie de un conductor

Por último, observe que hay una relación directa entre el campo $\vec{E}$ en un punto justo afuera de cualquier conductor y la densidad superficial de carga σ en ese punto. En general, σ varía de un punto a otro de la superficie. En el capítulo 23 se mostrará que en un punto así, la dirección de $\vec{E}$ siempre es *perpendicular* a la superficie (véase la figura 22.28a).

22.29 El campo inmediatamente afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular $E_\perp$ es igual a σ/ϵ_0.



Para encontrar una relación entre σ en cualquier punto de la superficie y la componente perpendicular del campo eléctrico en ese punto se construye una superficie gaussiana en forma de pequeño cilindro (figura 22.29). La cara de uno de los extremos, con área A, queda dentro del conductor y la otra queda justo afuera. El campo eléctrico es igual a cero en todos los puntos dentro del conductor. Fuera de éste, la componente de $\vec{E}$ perpendicular a las paredes laterales del cilindro es igual a cero, y sobre la cara de los extremos la componente perpendicular es igual a $E_\perp$. (Si σ es positiva, el campo eléctrico apunta hacia fuera del conductor y $E_\perp$ es positiva; si σ es negativa, el campo eléctrico apunta hacia el interior y $E_\perp$ es negativa.) Así, el flujo total a través de la superficie es $E_\perp A$. La carga encerrada dentro de la superficie gaussiana es σA, por lo que a partir de la ley de Gauss,

$$E_\perp A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \text{(campo en la superficie de un conductor)} \qquad (22.10)$$

Esto se puede comprobar con los resultados obtenidos para superficies esféricas, cilíndricas y planas.

En el ejemplo 22.8 se demostró que la magnitud del campo entre dos placas conductoras infinitas con cargas opuestas también es igual a σ/ϵ_0. En este caso, la magnitud del campo es la misma en *todas* las distancias a partir de las placas, pero en todos los demás casos disminuye conforme aumenta la distancia a la superficie.

Ejemplo conceptual 22.12 Campo en la superficie de una esfera conductora

Compruebe la ecuación (22.10) para una esfera conductora de radio R y carga total q.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) se demostró que el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

La densidad superficial de carga es uniforme e igual a q dividida entre el área superficial de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Al comparar estas dos expresiones se observa que $E = \sigma/\epsilon_0$, como se plantea en la ecuación (22.10).

Ejemplo 22.13 Campo eléctrico de la Tierra

La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie puede medirse con instrumentos electrónicos sensibles; su valor medio es de alrededor de 150 N/C, dirigido hacia el centro de la Tierra. *a)* ¿Cuál es la densidad superficial de carga correspondiente? *b)* ¿Cuál es la carga superficial *total* de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se da la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la Tierra conductora, y se pide calcular la densidad superficial de carga en toda la superficie terrestre.

PLANTEAR: Dado el campo eléctrico perpendicular, se determina la densidad superficial de carga σ con la ecuación (22.10). La carga superficial total en la Tierra es el producto de σ por el área de la superficie terrestre.

EJECUTAR: *a)* De la dirección del campo se sabe que σ es negativa (lo que corresponde a $\vec{E}$ dirigido *hacia* la superficie, por lo que $E_\perp$ es negativa). De la ecuación (22.10),

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_\perp = (8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2})(-150\,\mathrm{N/C}) \\ &= -1.33 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2} = -1.33\,\mathrm{nC/m^2}\end{aligned}$$

b) El área de la superficie de la Tierra es $4\pi R_E^2$, donde $R_E = 6.38 \times 10^6$ m es el radio terrestre (véase el apéndice F). La carga total Q es el producto $4\pi R_E^2\sigma$, o

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi(6.38 \times 10^6\,\mathrm{m})^2(-1.33 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}) \\ &= -6.8 \times 10^5\,\mathrm{C} = -680\,\mathrm{kC}\end{aligned}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *b)* se puede comprobar con el que se obtuvo en el ejemplo 22.5. Al despejar Q, se encuentra que

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi\epsilon_0 R^2 E_\perp \\ &= \frac{1}{9.0 \times 10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}}(6.38 \times 10^6\,\mathrm{m})^2(-150\,\mathrm{N/C}) \\ &= -6.8 \times 10^5\,\mathrm{C}\end{aligned}$$

Un electrón tiene una carga de -1.60×10^{-19} C. Este excedente de carga eléctrica negativa corresponde a la existencia de $(-6.8 \times 10^5\,\mathrm{C})/(-1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}) = 4.2 \times 10^{24}$ electrones excedentes en la Tierra, o cerca de 7 moles de electrones en exceso. Esto se compensa con una *deficiencia* igual de electrones en la atmósfera superior de nuestro planeta, por lo que la combinación de la Tierra con su atmósfera es eléctricamente neutra.

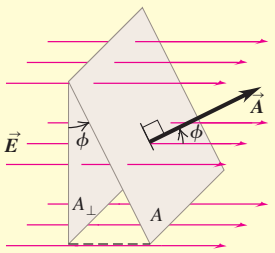
Evalúe su comprensión de la sección 22.5 Una esfera conductora hueca carece de carga neta. En el centro de la cavidad esférica dentro de la esfera hay una carga puntual positiva q. Se conecta un alambre conductor entre el exterior de la esfera y el terreno. ¿Se medirá un campo eléctrico fuera de la esfera?

CAPÍTULO 22 RESUMEN

Flujo eléctrico: El flujo eléctrico es una medida del "flujo" del campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de $\vec{E}$, integrada sobre una superficie. (Véanse los ejemplos 22.1 a 22.3.)

$$\Phi_E = \int E\cos\phi\, dA$$

$$= \int E_\perp\, dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} \qquad (22.5)$$



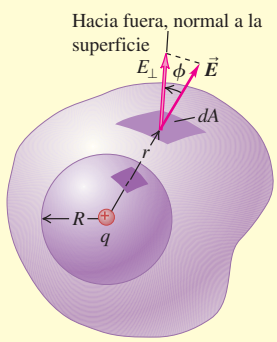
Ley de Gauss: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se escribe como la integral de superficie de la componente de $\vec{E}$, que es normal a la superficie, es igual a una constante por la carga total Q_{enc} encerrada por la superficie. La ley de Gauss es un equivalente lógico de la ley de Coulomb, pero su uso simplifica mucho los problemas con un alto grado de simetría. (Véanse los ejemplos 22.4 a 22.10.)

Cuando se coloca carga en exceso en un conductor en reposo, ésta permanece toda en la superficie, y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos del material del conductor. (Véanse los ejemplos 22.11 a 22.13.)

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi\, dA$$

$$= \oint E_\perp\, dA = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad (22.8),\ (22.9)$$



Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga: En la siguiente tabla se listan los campos eléctricos generados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q, Q, λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

Distribución de la carga	Punto en el campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Una sola carga puntual	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R, carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R, carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$
Placa infinita cargada con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Términos clave

superficie cerrada, *751*
flujo eléctrico, *752*
integral de superficie, *755*
ley de Gauss, *757*
superficie gaussiana, *759*
experimento de la hielera de Faraday, *768*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

No. El campo eléctrico dentro de una cavidad interior de un conductor es igual a cero, por lo que no hay ningún efecto eléctrico en la niña. (Véase la sección 22.5.)

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

22.1 Respuesta: iii) Cada elemento de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$, por lo que el campo eléctrico será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ de la intensidad. Pero el área de la caja se incrementará en un factor de $3^2 = 9$. De ahí que el flujo eléctrico será multiplicado por un factor de $(\frac{1}{9})(9) = 1$. En otras palabras, el flujo no cambiará.

22.2 Respuestas: iv), ii), i), iii) En cada caso, el campo eléctrico es uniforme, por lo que el flujo es $\Phi_E = \vec{E}\cdot\vec{A}$. Se usan las relaciones para los productos escalares de vectores unitarios: $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = 1$, $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$. En el caso i) se tiene $\Phi_E = (4.0\ \text{N/C})(6.0\ \text{m}^2)\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 0$ (el campo eléctrico y el vector de área son perpendiculares, por lo que hay un flujo nulo). En el caso ii) se tiene $\Phi_E[(4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} + (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}]\cdot(3.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath} = (2.0\ \text{N/C})\cdot(3.0\ \text{m}^2) = 6.0\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$. De manera similar, en el caso iii) se tiene $\Phi_E = [(4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}]\cdot[(3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}] = (4.0\ \text{N/C})(3.0\ \text{m}^2) - (2.0\ \text{N/C})(7.0\ \text{m}^2) = -2\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$, y en el caso iv) se tiene $\Phi_E = [(4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}]\cdot[(3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} - (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}] = (4.0\ \text{N/C})(3.0\ \text{m}^2) + (2.0\ \text{N/C})\cdot(7.0\ \text{m}^2) = 26\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$.

22.3 Respuestas: S_2, S_5, S_4; S_1 y S_3 (empate) La ley de Gauss afirma que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie, por lo que ordenar estas superficies según sus flujos es lo mismo que hacerlo según la cantidad de carga que encierran. La superficie S_1 no encierra carga, la superficie S_2 encierra $9.0\ \mu\text{C} + 5.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) = 7.0\ \mu\text{C}$, la superficie S_3 encierra $9.0\ \mu\text{C} + 1.0\ \mu\text{C} + (-10.0\ \mu\text{C}) = 0$, la superficie S_4 encierra $8.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) = 1.0\ \mu\text{C}$, y la superficie S_5 encierra $8.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) + (-10.0\ \mu\text{C}) + (1.0\ \mu\text{C}) + (9.0\ \mu\text{C}) + (5.0\ \mu\text{C}) = 6.0\ \mu\text{C}$.

22.4 Respuesta: no Tal vez usted estuviera tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuera una versión grande del conductor, con la misma forma y colocada de manera que lo encerrara por completo. Si bien se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (según la ley de Gauss, es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no necesita ser perpendicular a la superficie y tampoco es necesario que la magnitud del campo sea la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible realizar la integral de flujo $\oint E_\perp\, dA$, por lo que no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss es útil para obtener el campo eléctrico sólo cuando la distribución de la carga es *muy* simétrica.

22.5 Respuesta: no Antes de conectar el alambre con la esfera, la presencia de la carga puntual induciría una carga $-q$ en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie exterior (la carga neta en la esfera es igual a cero). Habrá un campo eléctrico fuera de la esfera que se debe a la carga en la superficie exterior. Sin embargo, una vez que el alambre conductor toque la esfera, los electrones fluirán de la tierra a la superficie exterior de la esfera para neutralizar la carga ahí presente (véase la figura 21.7c). Como resultado, la esfera no tendrá carga en su superficie externa, ni tampoco campo eléctrico en el exterior.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P22.1. Un globo de caucho tiene en su interior una carga puntual. ¿El flujo eléctrico a través del globo depende de si está inflado por completo o no? Explique su razonamiento.

P22.2. Suponga que en la figura 22.15 las dos cargas son positivas. ¿Cuáles serían los flujos a través de cada una de las cuatro superficies del ejemplo?

P22.3. En la figura 22.15, suponga que se coloca una tercera carga puntual fuera de la superficie gaussiana de color púrpura *C*. ¿Afectaría esto el flujo eléctrico a través de cualquiera de las superficies *A*, *B*, *C* o *D* en la figura? ¿Por qué?

P22.4. Cierta región del espacio limitada por una superficie imaginaria cerrada no contiene carga. ¿El campo eléctrico siempre es igual a cero en todos los puntos de la superficie? Si no es así, ¿en qué circunstancias sería cero en la superficie?

P22.5. Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual q. Si la carga puntual se desplaza del centro de la esfera a un punto alejado de ahí, ¿cambia el campo eléctrico en un punto de la superficie? ¿Cambia el flujo total a través de la superficie gaussiana? Explique su respuesta.

P22.6. Usted encuentra una caja cerrada ante su puerta. Sospecha que contiene varias esferas de metal con carga y empacadas en un material aislante. ¿Cómo podría determinar la carga neta total dentro de la caja sin abrirla? ¿O no es posible hacer eso?

P22.7. Durante el flujo de una corriente eléctrica en un alambre conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse a lo largo del alambre, en forma parecida a como el agua fluye por un tubo. ¿Esperaría encontrar un campo eléctrico fuera de un alambre que condujera ese flujo tan estable de electrones? Explique su respuesta.

P22.8. Si el campo eléctrico de una carga puntual fuera proporcional a $1/r^3$ en vez de $1/r^2$, ¿seguiría siendo válida la ley de Gauss? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* considere una superficie gaussiana esférica centrada en una sola carga puntual.)

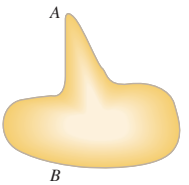
P22.9. Suponga que el disco del ejemplo 22.1 (sección 22.2), en vez de tener su vector normal orientado a sólo dos o tres ángulos particulares con respecto al campo eléctrico, comenzara a girar continuamente de manera que su vector normal primero fuera paralelo al campo, luego perpendicular y después opuesto a él, y así sucesivamente. Construya una gráfica del flujo eléctrico resultante contra el tiempo, para una rotación completa de 360°.

P22.10. En un conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse por todo el volumen del conductor. ¿Contradice esto el enunciado de que cualquier carga en exceso en un conductor sólido debe permanecer en su superficie? ¿Por qué?

P22.11. Usted carga el generador Van de Graaff que se muestra en la figura 22.27, y luego le acerca una esfera conductora hueca idéntica, pero sin carga y sin dejar que las dos esferas se toquen. Elabore un diagrama de la distribución de cargas en la segunda esfera. ¿Cuál es el flujo neto a través de la segunda esfera? ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la segunda esfera?

P22.12. La magnitud de $\vec{E}$ en la superficie de un sólido conductor de forma irregular debe ser máxima en las regiones en las que hay formas agudas, como el punto A de la figura 22.30, y debe ser mínima en las regiones planas, como el punto B de la misma figura. Explique por qué debe ser así considerando la manera en que las líneas de campo eléctrico deben acomodarse cerca de una superficie conductora. ¿Cómo cambia la densidad superficial de carga en los puntos A y B? Explique su respuesta.

Figura **22.30** Pregunta P22.12.



P22.13. Un pararrayos es una varilla de cobre redondeada que se monta en la parte alta de los edificios y va soldada a un cable grueso, también de cobre, que llega al suelo. Los pararrayos se utilizan para proteger casas y graneros de los relámpagos; la corriente de los relámpagos corre por el cable y no por el edificio. ¿Por qué? ¿Por qué el extremo de la varilla debe estar redondeado? (*Sugerencia:* la respuesta a la pregunta para análisis P22.12 le resultará de ayuda.)

P22.14. Un conductor sólido tiene una cavidad en su interior. ¿Afectaría la presencia de una carga puntual dentro de la cavidad al campo eléctrico fuera del conductor? ¿Por qué? ¿La presencia de una carga puntual fuera del conductor afectaría el campo eléctrico en el interior de la cavidad? De nuevo, ¿por qué?

P22.15. Explique el siguiente enunciado: "en una situación estática el campo eléctrico en la superficie de un conductor podría no tener ninguna componente paralela a la superficie, ya que esto violaría la condición de que las cargas en la superficie están en reposo". ¿Este mismo enunciado sería válido para el campo eléctrico en la superficie de un *aislante*? Explique su respuesta y la razón de cualesquiera diferencias entre los casos de un conductor y un aislante.

P22.16. Una esfera sólida de cobre tiene una carga neta positiva distribuida de manera uniforme sobre la superficie de la esfera; el campo eléctrico en el interior de la esfera es igual a cero. Después, una carga puntual negativa fuera de la esfera se acerca a la superficie de la esfera. ¿Toda la carga neta en la esfera seguirá en la superficie? De ser así, ¿se distribuiría de manera uniforme? Y si no fuera uniforme, ¿cómo se distribuiría? ¿El campo eléctrico dentro de la esfera seguiría siendo igual a cero? Explique su respuesta para cada caso.

P22.17. Algunos aviones modernos están hechos principalmente de materiales compuestos que no conducen la electricidad. La U.S. Federal Aviation Administration requiere que tales aviones tengan conductores bajo sus superficies para que los protejan cuando vuelen en medio de tormentas. Explique la física que sustenta este requerimiento.

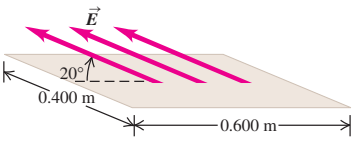
Ejercicios

Sección 22.2 Cálculo del flujo eléctrico

22.1. Una delgada hoja de papel tiene un área de 0.250 m^2 y está orientada de tal modo que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme de magnitud 14 N/C. *a*) Calcule la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja. *b*) ¿La respuesta al inciso *a*) depende de la forma de la hoja? ¿Por qué? *c*) Para qué ángulo ϕ entre la normal a la hoja y el campo eléctrico, la magnitud del flujo a través de la hoja es: i) máxima y ii) mínima? Explique sus respuestas.

22.2. Una lámina plana tiene forma rectangular con lados de longitud 0.400 m y 0.600 m. La lámina está inmersa en un campo eléctrico uniforme de magnitud 75.0 N/C dirigido a 20° con respecto al plano de la lámina (figura 22.31). Encuentre la magnitud del flujo eléctrico a través de la lámina.

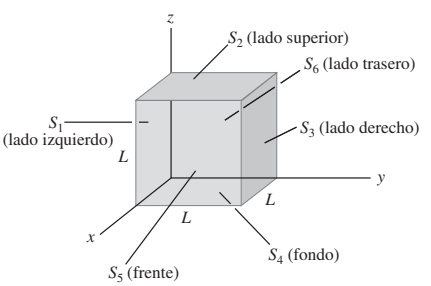
Figura **22.31** Ejercicio 22.2.



22.3. Se mide un campo eléctrico de 1.25×10^6 N/C a una distancia de 0.150 m de una carga puntual. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una esfera a esas distancia de la carga? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

22.4. Un cubo tiene lados con longitud $L = 0.300$ m. Se coloca con una esquina en el origen, como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico no es uniforme, pero está dado por $\vec{E} = (-5.00\ \text{N/C} \cdot \text{m})x\hat{\imath} + (3.00\ \text{N/C} \cdot \text{m})z\hat{k}$. *a*) Calcule el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. *b*) Determine cuál es la carga eléctrica total dentro del cubo.

Figura **22.32** Ejercicios 22.4 y 22.6; Problema 22.32.



22.5. Una superficie hemisférica con radio r en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ tiene su eje alineado en forma paralela con la dirección del campo. Calcule el flujo a través de la superficie.

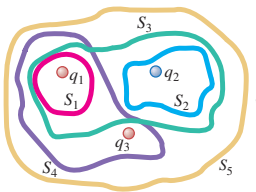
22.6. El cubo de la figura 22.32 tiene lados con longitud $L = 10.0$ cm. El campo eléctrico es uniforme, tiene magnitud $E = 4.00 \times 10^3$ N/C y es paralelo al plano xy con un ángulo de 36.9° medido a partir del eje $+x$ hacia el eje $+y$. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de todas las caras del cubo?

22.7. En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) se demostró que el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga es perpendicular a ésta y su magnitud es $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Considere un cilindro imaginario con radio $r = 0.250$ m y longitud $l = 0.400$ m que tiene una línea infinita de carga positiva que va a lo largo de su eje. La carga por unidad de longitud en la línea es $\lambda = 6.00\ \mu$C/m. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cilindro debido a esta línea infinita de carga? *b*) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su radio se incrementa a $r = 0.500$ m? *c*) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su longitud aumenta a $l = 0.800$ m?

Sección 22.3 Ley de Gauss

22.8. Las tres esferas pequeñas que se muestran en la figura 22.33 tienen cargas $q_1 = 4.00$ nC, $q_2 = -7.80$ nC y $q_3 = 2.40$ nC. Calcule el flujo eléctrico neto a través de cada una de las siguientes superficies cerradas que se ilustran en sección transversal en la figura: *a*) S_1; *b*) S_2; *c*) S_3; *d*) S_4; *e*) S_5. *f*) Las respuestas para los incisos *a*) a *e*), ¿dependen de la manera en que está distribuida la carga en cada esfera pequeña? ¿Por qué?

Figura **22.33** Ejercicio 22.8.



Superficie	Encierra a
S_1	q_1
S_2	q_2
S_3	q_1 y q_2
S_4	q_1 y q_3
S_5	q_1 y q_2 y q_3

22.9. Se rocía una capa muy delgada y uniforme de pintura con carga sobre la superficie de una esfera de plástico cuyo diámetro es de 12.0 cm, para dar una carga de $-15.0\ \mu$C. Encuentre el campo eléctrico *a*) apenas dentro de la capa de pintura; *b*) inmediatamente afuera de la capa de pintura; *c*) 5.00 cm afuera de la superficie de la capa de pintura.

22.10. Una carga puntual $q_1 = 4.00$ nC se localiza sobre el eje x en $x = 2.00$ m, y una segunda carga puntual $q_2 = -6.00$ nC está en el eje y en $y = 1.00$ m. ¿Cuál es el flujo eléctrico total debido a estas dos cargas a través de una superficie esférica con centro en el origen y con radio de *a*) 0.500 m, *b*) 1.50 m, *c*) 2.50 m?

22.11. En cierta región del espacio, el campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme. *a*) Use la ley de Gauss para demostrar que esa región debe ser eléctricamente neutra; es decir, la densidad volumétrica de carga ρ debe ser igual a cero. *b*) Lo contrario, ¿es verdadero? Es decir, en una región del espacio donde no hay carga, ¿$\vec{E}$ debe ser uniforme? Explique su respuesta.

22.12. *a*) En cierta región del espacio, la densidad volumétrica de carga ρ tiene un valor positivo uniforme. En esa región, ¿$\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique su respuesta. *b*) Suponga que en esa región de ρ positiva y uniforme hay una "burbuja" dentro de la cual $\rho = 0$. En el interior de la burbuja, ¿$\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique.

22.13. Una carga puntual de 9.60 μC está en el centro de un cubo con lados cuya longitud mide 0.500 m. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una de las seis caras del cubo? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso *a*) si los lados midieran 0.250 m? Dé una explicación.

22.14. Campos eléctricos en un átomo. Los núcleos de los átomos grandes, como el del uranio, con 92 protones, se modelan como esferas simétricas de carga. El radio del núcleo de uranio mide aproximadamente 7.4×10^{-15} m. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico que produce este núcleo justo afuera de su superficie? *b*) ¿Qué magnitud de campo eléctrico produce a la distancia de los electrones, que es alrededor de 1.0×10^{-10} m? *c*) Los electrones se modelan como si formaran una capa uniforme de carga negativa. ¿Qué campo eléctrico producen en el sitio en que se ubica el núcleo?

22.15. Una carga puntual de $+5.00\ \mu$C se localiza en el eje x en $x = 4.00$ m, cerca de una superficie esférica de radio 3.00 m con centro en el origen. *a*) Calcule la magnitud del campo eléctrico en $x = 3.00$ m. *b*) Determine la magnitud del campo eléctrico en $x = -3.00$ m. *c*) De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo neto a través de la esfera es igual a cero porque no contiene carga. Pero el campo debido a la carga exterior es mucho más fuerte en el lado cercano a la esfera (por ejemplo, en $x = 3.00$ m) que en el lado alejado (en $x = -3.00$ m). Entonces, ¿cómo puede ser igual el flujo hacia la esfera (en el lado cercano) que el flujo hacia fuera de ella (en el lado lejano)? Dé una explicación; un diagrama será de utilidad.

Sección 22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss y Sección 22.5 Cargas en conductores

22.16. Una esfera metálica sólida con radio de 0.450 m tiene una carga neta de 0.250 nC. Determine la magnitud del campo eléctrico *a*) en un punto a 0.100 m fuera de la superficie, y *b*) en un punto dentro de la esfera, a 0.100 m bajo la superficie.

22.17. En un día húmedo, basta un campo eléctrico de 2.00×10^4 N/C para producir chispas de una pulgada de largo. Suponga que en su clase de física un generador Van de Graaff (véase la figura 22.27), con una esfera de radio de 15.0 cm, está produciendo chispas de 6 pulgadas de largo. *a*) Use la ley de Gauss para calcular la cantidad de carga almacenada en la superficie de la esfera antes de que usted, con valentía, la descargue con su mano. *b*) Suponga que toda la carga se localiza en el centro de la esfera, y utilice la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico en la superficie de la esfera.

22.18. Algunos astrónomos han sugerido que Marte tiene un campo eléctrico parecido al de la Tierra y que se produce un flujo eléctrico neto de $3.63 \times 10^{16}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ en la superficie de Marte. Calcule *a*) la carga eléctrica total sobre el planeta; *b*) el campo eléctrico en la superficie del planeta (consulte los datos astronómicos en la tercera de forros); *c*) la densidad de carga en Marte si se supone que toda la carga se distribuye de manera uniforme en su superficie.

22.19. ¿Cuántos electrones excedentes deben agregarse a un conductor esférico aislado de 32.0 cm de diámetro para producir un campo eléctrico de 1150 N/C apenas fuera de su superficie?

22.20. El campo eléctrico a 0.400 m de una línea uniforme y muy larga de carga es de 840 N/C. ¿Cuánta carga está contenida en una sección de 2.00 cm de la línea?

22.21. Una línea uniforme y muy larga de carga tiene 4.80 μC/m por unidad de longitud y se ubica a lo largo del eje x. Una segunda línea uniforme de carga tiene una carga por unidad de longitud de $-2.40\ \mu$C/m y está situada paralela al eje x en $y = 0.400$ m. ¿Cuál es el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) en los siguientes puntos sobre el eje y: *a*) $y = 0.200$ m y *b*) $y = 0.600$ m?

22.22. *a*) A una distancia de 0.200 cm del centro de una esfera conductora con carga y radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del centro de la esfera? *b*) A una distancia de 0.200 cm del eje de un cilindro conductor muy largo con radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del eje del cilindro? *c*) A una distancia de 0.200 cm de una lámina grande con carga uniforme, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 1.20 cm de la lámina?

22.23. Una esfera hueca, conductora, con radio exterior de 0.250 m y radio interior de 0.200 m tiene una densidad superficial de carga de $+6.37 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2$. Se introduce una carga de $-0.500\ \mu$C en la cavidad interna de la esfera. *a*) ¿Cuál es la nueva densidad de carga apenas afuera de la esfera? *b*) Calcule la intensidad del campo eléctrico justo fuera de la esfera. *c*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie esférica apenas dentro de la superficie interior de la esfera?

22.24. Una carga puntual de $-2.00\ \mu$C se localiza en el centro de una cavidad esférica de radio 6.50 cm dentro de un sólido aislante con carga. La densidad de carga en el sólido es de $\rho = 7.35 \times 10^{-4}\ \text{C/m}^3$. Calcule el campo eléctrico dentro del sólido a una distancia de 9.50 cm del centro de la cavidad.

22.25. El campo eléctrico a una distancia de 0.145 m de la superficie de una esfera sólida aislante con radio de 0.355 m, es de 1750 N/C. *a*) Suponiendo que la carga de la esfera se distribuye con uniformidad, ¿cuál es la densidad de carga en su interior? *b*) Calcule el campo eléctrico dentro de la esfera a una distancia de 0.200 m del centro.

22.26. Un conductor con una cavidad interna, como el que se ilustra en la figura 22.23c, tiene una carga total de $+5.00$ nC. La carga dentro de la cavidad, aislada del conductor, es de -6.00 nC. ¿Cuánta carga hay en *a*) la superficie interior del conductor, y *b*) la superficie exterior del conductor?

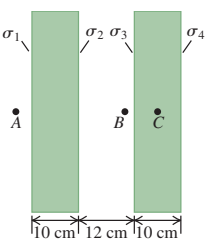
22.27. Aplique la ley de Gauss a las superficies gaussianas S_2, S_3 y S_4 en la figura 22.21b, para calcular el campo eléctrico entre las placas y fuera de ellas.

22.28. Una lámina aislante y cuadrada con lado de 80.0 cm se encuentra en posición horizontal. La lámina tiene una carga de 7.50 nC distribuida de manera uniforme sobre su superficie. *a*) Calcule el campo eléctrico en un punto localizado a 0.100 nm sobre el centro de la lámina. *b*) Estime el campo eléctrico en un punto a 100 m sobre el centro de la lámina. *c*) ¿Serían diferentes las respuestas para los incisos *a*) y *b*) si la lámina estuviera hecha de un material conductor? ¿Por qué?

22.29. Un conductor cilíndrico de longitud infinita tiene un radio R y densidad superficial de carga uniforme σ. *a*) En términos de σ y R, ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ para el cilindro? *b*) En términos de σ, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico producido por el cilindro con carga a una distancia $r > R$ de su eje? *c*) Exprese el resultado del inciso *b*) en términos de λ y demuestre que el campo eléctrico fuera del cilindro es el mismo que si toda la carga estuviera sobre el eje. Compare su resultado con el que se obtuvo para una línea de carga en el ejemplo 22.6 (sección 22.4).

22.30. Dos láminas de plástico no conductoras, muy grandes, cada una con espesor de 10.0 cm, tienen densidades de carga uniforme σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 en sus superficies, como se ilustra en la figura 22.34. Estas densidades de carga superficial tienen los valores $\sigma_1 = -6.00\ \mu\text{C/m}^2$, $\sigma_2 = +5.00\ \mu\text{C/m}^2$, $\sigma_3 = +2.00\ \mu\text{C/m}^2$ y $\sigma_4 = +4.00\ \mu\text{C/m}^2$. Use la ley de Gauss para encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos siguientes, lejos de los bordes de las láminas: *a*) punto A, a 5.00 cm de la cara izquierda de la lámina de la izquierda; *b*) punto B, a 1.25 cm de la superficie interior de la lámina de la derecha; *c*) punto C, a la mitad de la lámina de la derecha.

Figura 22.34
Ejercicio 22.30.



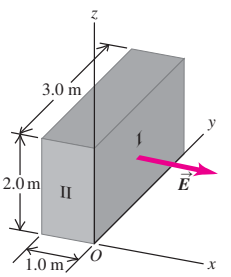
22.31. Una carga negativa $-Q$ se localiza dentro de la cavidad de un sólido metálico hueco. El exterior del sólido tiene contacto con la tierra por medio de la conexión de un alambre conductor. *a*) ¿Hay alguna carga excedente inducida sobre la superficie interior de la pieza de metal? Si así fuera, determine su signo y magnitud. *b*) ¿Hay algún exceso de carga sobre el exterior del elemento de metal? ¿Por qué? *c*) ¿Hay algún campo eléctrico en la cavidad? Explique. *d*) ¿Hay algún campo eléctrico dentro del metal? Explique por qué. *e*) Alguien situado fuera del sólido mediría un campo eléctrico debido a la carga $-Q$. ¿Es razonable decir que el conductor a tierra tiene *aislada* la región de los efectos de la carga $-Q$? En principio, ¿podría hacerse lo mismo para la gravedad? ¿Por qué?

Problemas

22.32. Un cubo tiene lados de longitud L. Está situado con una arista en el origen, como se ilustra en la figura 22.32. El campo eléctrico es uniforme y está dado por $\vec{E} = -B\hat{\imath} + C\hat{\jmath} - D\hat{k}$, donde B, C y D son constantes positivas. *a*) Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras de los cubos S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. *b*) Calcule el flujo eléctrico a través de todo el cubo.

22.33. El campo eléctrico $\vec{E}$ en la figura 22.35 es paralelo en todo lugar al eje x, por lo que las componentes E_y y E_z son iguales a cero. La componente x del campo E_x depende de x, pero no de y ni de z. En los puntos del plano yz (donde $x = 0$), $E_x = 125$ N/C. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie I en la figura 22.35? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie II? *c*) El volumen que se ilustra en la figura es una pequeña sección de un bloque muy grande aislante de 1.0 m de espesor. Si dentro de ese volumen hay una carga total de -24.0 nC, ¿cuáles son la magnitud y dirección de $\vec{E}$ en la cara opuesta a la superficie I? *d*) El campo eléctrico, ¿es producido sólo por cargas dentro del bloque, o también se debe a cargas fuera del bloque? ¿Cómo saberlo?

Figura 22.35
Problema 22.33.



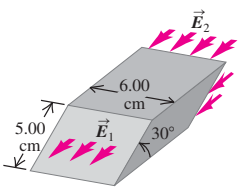
22.34. Una superficie cuadrada y plana, con lados de longitud L, está descrita por las ecuaciones

$$x = L \qquad (0 \le y \le L, 0 \le z \le L)$$

a) Dibuje este cuadrado y muestre los ejes x, y y z. *b*) Calcule el flujo eléctrico a través del cuadrado debido a una carga puntual positiva q localizada en el origen ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). (*Sugerencia:* piense que el cuadrado forma parte de un cubo con centro en el origen.)

22.35. El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en toda la cara de un paralelepípedo es uniforme y se dirige hacia fuera de la cara. En la cara opuesta, el campo eléctrico $\vec{E}_2$ también es uniforme en toda ella y se dirige hacia esa cara (figura 22.36). Las dos caras en cuestión están inclinadas 30.0° con respecto de la horizontal, en tanto que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son horizontales; $\vec{E}_1$ tiene una magnitud de 2.50×10^4 N/C, y $\vec{E}_2$ tiene una magnitud de 7.00×10^4 N/C. *a*) Suponiendo que ninguna otra línea de campo eléctrico cruza las superficies del paralelepípedo, determine la carga neta contenida dentro. *b*) ¿El campo eléctrico sólo es producido por las cargas en el interior del paralelepípedo o también se debe a las que están fuera de éste? ¿Cómo podría saberse?

Figura 22.36
Problema 22.35.



22.36. Una línea larga tiene una densidad lineal de carga uniforme de $+50.0\ \mu$C/m que corre paralela y a 10.0 cm de la superficie de una lámina de plástico plana y grande que tiene una densidad superficial de carga uniforme de $-100\ \mu\text{C/m}^2$ en un lado. Encuentre la ubicación de todos los puntos en los que una partícula α no recibiría ninguna fuerza debido a este arreglo de objetos con carga.

22.37. Cable coaxial. Un cable coaxial largo consiste en un conductor cilíndrico interior con radio a, y un cilindro exterior con radio interior b y radio exterior c. El cilindro exterior está montado en apoyos aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene carga positiva uniforme por unidad de longitud λ. Calcule el campo eléctrico *a*) en cualquier punto entre los cilindros a una distancia r del eje, y *b*) en cualquier punto fuera del cilindro exterior. *c*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de la distancia r desde el eje del cable, de $r = 0$ a $r = 2c$. *d*) Determine la carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro exterior.

22.38. Un tubo conductor muy largo (un cilindro hueco) tiene radio interior a y radio exterior b. Conduce una carga por unidad de longitud $+\alpha$, donde α es una constante positiva con unidades de C/m. Sobre el

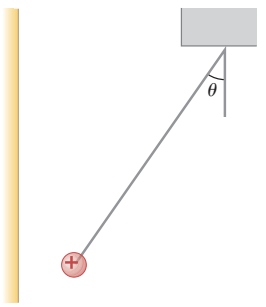
eje del tubo se encuentra una línea de carga, con carga por unidad de longitud de $+\alpha$. *a*) Calcule el campo eléctrico en términos de α y la distancia r desde el eje del tubo para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $r > b$. Muestre en una gráfica los resultados de E como función de r. *b*) ¿Cuál es la carga por unidad de longitud sobre i) la superficie interior del tubo, y ii) la superficie exterior del tubo?

22.39. Repita el problema 22.38, sólo que ahora el tubo conductor tiene una carga por unidad de longitud de $-\alpha$. Igual que en el problema 22.38, la línea de carga tiene $+\alpha$ como carga por unidad de longitud.

22.40. Un cilindro sólido y muy largo, con radio R, tiene carga positiva distribuida de manera uniforme, con carga por unidad de volumen de ρ. *a*) Obtenga la expresión para el campo eléctrico dentro del volumen a una distancia r del eje del cilindro en términos de la densidad de carga ρ. *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto afuera del volumen en términos de la carga por unidad de longitud λ en el cilindro? *c*) Compare las respuestas a los incisos *a*) y *b*) para $r = R$. *d*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r, de $r = 0$ a $r = 3R$.

22.41. Una esfera pequeña con masa de 0.002 g tiene una carga de 5.00×10^{-8} C y cuelga de un cordel cerca de una lámina muy grande, conductora y con carga positiva, como se ilustra en la figura 22.37. La densidad de carga en la lámina es de 2.50×10^{-9} C/m^2. Encuentre el ángulo que forma el cordel.

Figura **22.37**
Problema 22.41.

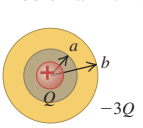


22.42. Esfera dentro de otra esfera. Una esfera sólida conductora tiene una carga q y radio a. Se encuentra dentro de una esfera hueca concéntrica, con radio interior b y radio exterior c. La esfera hueca no tiene carga neta. *a*) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro para las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$. *b*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r, de $r = 0$ a $r = 2c$. *c*) ¿Cuál es la carga en la superficie interior de la esfera hueca? *d*) ¿Y en la superficie exterior? *e*) Represente la carga de la esfera pequeña mediante cuatro signos positivos. Elabore un diagrama de las líneas de campo del sistema dentro de un volumen esférico de radio $2c$.

22.43. Una esfera sólida conductora con radio R que tiene carga positiva Q es concéntrica con una coraza aislante muy delgada de radio $2R$ que también tiene una carga Q. La carga Q está distribuida de manera uniforme en la coraza aislante. *a*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. *b*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r.

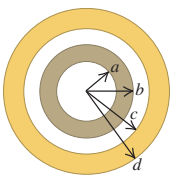
22.44. Una coraza esférica conductora, con radio interior a y radio exterior b, tiene una carga puntual positiva Q localizada en su centro. La carga total en la coraza es $-3Q$, y está aislada de su ambiente (figura 22.38). *a*) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico, en términos de la distancia r desde el centro, para las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. *b*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie interior de la coraza conductora? *c*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie exterior de la coraza conductora? *d*) Elabore un diagrama de las líneas de campo y la localización de todas las cargas. *e*) Grafique la magnitud del campo eléctrico como función de r.

Figura **22.38**
Problema 22.44.



22.45. Corazas esféricas concéntricas. Una coraza esférica conductora pequeña con radio interior a y radio exterior b es concéntrica respecto a otra coraza conductora esférica más grande cuyo radio interior es c y radio exterior d (figura 22.39). La coraza interior tiene una carga total $+2q$, y la exterior tiene carga de $+4q$. *a*) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de q y la distancia r a partir del centro común de las dos corazas para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $b < r < c$; iv) $c < r < d$; v) $r > d$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r. *b*) ¿Cuál es la carga total en i) la superficie interior de la coraza pequeña; ii) la superficie exterior de la coraza pequeña; iii) la superficie interior de la coraza grande; iv) la superficie exterior de la coraza grande?

Figura **22.39**
Problema 22.45.



22.46. Repita el problema 22.45, pero ahora considere que la coraza exterior tiene carga $-2q$. Como en el problema 22.45, la coraza interior tiene carga $+2q$.

22.47. Repita el problema 22.45, pero ahora considere que la coraza externa tiene carga $-4q$. Igual que en el problema 22.45, la coraza interior tiene carga $+2q$.

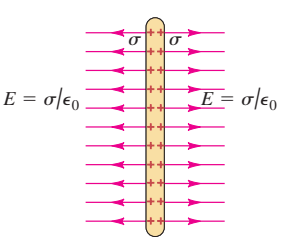
22.48. Una esfera conductora sólida con radio R tiene una carga total positiva Q. La esfera está rodeada por una coraza aislante con radio interior R y radio exterior $2R$. La coraza aislante tiene una densidad de carga uniforme ρ. *a*) Encuentre el valor de ρ de manera que la carga neta de todo el sistema sea igual a cero. *b*) Si ρ tiene el valor obtenido en el inciso *a*), calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. Presente sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r. *c*) Como regla general, el campo eléctrico es discontinuo sólo en lugares en que hay una lámina delgada de carga. Explique el modo en que concuerdan con esta regla sus resultados para el inciso *b*).

22.49. Sobre la superficie de una coraza esférica aislante de radio R, está distribuida con uniformidad una carga negativa $-Q$. Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que ejerce la coraza sobre una carga puntual positiva q ubicada a una distancia *a*) $r > R$ del centro de la coraza (fuera de la coraza), y *b*) $r < R$ del centro de la coraza (dentro de la coraza).

22.50. *a*) ¿Cuántos electrones en exceso deben distribuirse de manera uniforme dentro del volumen de una esfera de plástico aislada de 30.0 cm de diámetro, para producir un campo eléctrico de 1150 N/C justo afuera de la superficie? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto que está 10.0 cm fuera de la superficie de la esfera.

22.51. Una placa conductora grande y aislada (figura 22.40) tiene una carga por unidad de área σ sobre su superficie. Como la placa es conductora, el campo eléctrico en su superficie es perpendicular a la superficie y su magnitud es $E = \sigma/\epsilon_0$. *a*) En el ejemplo 22.7 (sección 22.4) se demostró que el campo generado por una lámina grande, con carga uniforme y con carga por unidad de área σ tiene una magnitud de $E = \sigma/2\epsilon_0$, exactamente la *mitad* de una placa conductora con carga. ¿Por qué hay esta diferencia? *b*) Recuerde que la distribución de carga en la placa conductora es como si hubiera dos láminas de carga (una en cada superficie), cada una con carga por unidad de área de σ ; use el resultado del ejemplo 22.7 y el principio de superposición para demostrar que $E = 0$ dentro de la placa, y que $E = \sigma/\epsilon_0$ fuera de la placa.

Figura **22.40** Problema 22.51.

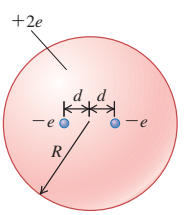


22.52. Modelo atómico de Thomson. En los primeros años del siglo XX, un modelo líder de la estructura del átomo era el del físico inglés J. J. Thomson (el descubridor del electrón). En el modelo de Thomson, un átomo consistía en una esfera de material con carga positiva en el que estaban inmersos electrones con carga negativa, como

chispas de chocolate en una bola de masa de galleta. Tome en cuenta que un átomo así consistía en un electrón con masa m y carga $-e$, que puede considerarse una carga puntual, y una esfera con carga uniforme de carga $+e$ y radio R. *a*) Explique por qué la posición de equilibrio del electrón está en el centro del núcleo. *b*) En el modelo de Thomson se suponía que el material positivo ofrecía poca o ninguna resistencia al movimiento del electrón. Si el electrón se aparta del equilibro una distancia menor que R, demuestre que el movimiento resultante del electrón sería armónico simple, y calcule su frecuencia de oscilación. (*Sugerencia:* repase la definición del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Si puede demostrarse que la fuerza neta sobre el electrón es de esta forma, entonces se infiere que el movimiento es armónico simple. A la inversa, si la fuerza neta sobre el electrón no tiene esta forma, el movimiento no es armónico simple. *c*) En la época de Thomson se sabía que los átomos excitados emitían ondas de luz sólo de ciertas frecuencias. En su modelo, la frecuencia de la luz emitida es la misma que la frecuencia de oscilación del electrón o electrones en el átomo. En el modelo de Thomson, ¿cuál tendría que ser el radio de un átomo para que produjera luz roja de frecuencia 4.57×10^{14} Hz? Compare su respuesta con los radios de átomos reales, que son del orden de 10^{-10} m (consulte el apéndice F para datos sobre el electrón). *d*) Si el electrón se desplazara del equilibrio una distancia mayor que R, ¿oscilaría? ¿Este movimiento sería armónico simple? Explique su razonamiento. (*Nota histórica:* en 1910 se descubrió el núcleo atómico, lo que probó que el modelo de Thomson era incorrecto. La carga positiva de un átomo no estaba distribuida en su volumen, como suponía Thomson, sino que se concentraba en el diminuto núcleo de radio de 10^{-14} a 10^{-15} m.)

22.53. Modelo atómico de Thomson (continúa). Utilizando el modelo de Thomson (actualmente caduco) que se describió en el problema 22.52, considere un átomo que consiste en dos electrones, cada uno con carga $-e$, inmersos en una esfera de carga $+2e$ y radio R. En el equilibrio, cada electrón está a una distancia d del centro del átomo (figura 22.41). Calcule la distancia d en términos de las demás propiedades del átomo.

Figura 22.41
Problema 22.53.



22.54. Bloque con carga uniforme. Un bloque de material aislante tiene un espesor $2d$ y está orientado de forma que sus caras quedan paralelas al plano yz y dado por los planos $x = d$ y $x = -d$. Las dimensiones y y z del bloque son muy grandes en comparación con d y pueden considerarse esencialmente infinitas. El bloque tiene una densidad de carga positiva uniforme ρ. a) Explique por qué el campo eléctrico debido al bloque es igual a cero en el centro del bloque ($x = 0$). *b*) Con base en la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico debido al bloque (magnitud y dirección) en todos los puntos del espacio.

22.55. Bloque con carga no uniforme. Repita el problema 22.54, pero ahora la densidad de carga del bloque está dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, donde ρ_0 es una constante positiva.

22.56. ¿Las fuerzas eléctricas solas dan un equilibrio estable? En el capítulo 21 se dieron varios ejemplos de cálculo de la fuerza que ejercían varias cargas puntuales del ambiente sobre una carga puntual en las cercanías. *a*) Considere una carga puntual positiva $+q$. Dé un ejemplo de cómo se colocarían otras dos cargas puntuales de su elección, de manera que la fuerza neta sobre la carga $+q$ fuera igual a cero. *b*) Si la fuerza neta sobre la carga $+q$ es igual a cero, entonces esa carga está en equilibrio. El equilibrio será *estable* si cuando la carga $+q$ se desplaza suavemente en *cualquier* dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza neta sobre la carga la regresa a la posición de equilibrio. Para que éste sea el caso, ¿cuál debe ser la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a las otras cargas en puntos que rodean la posición de equilibrio de $+q$? *c*) Imagine que la carga $+q$ se mueve muy lejos, y que hay una pequeña superficie gaussiana con centro en la posición en que $+q$ estaba en equilibrio. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie, demuestre que es *imposible* satisfacer la condición para la estabilidad descrita en el inciso *b*). En otras palabras, una carga $+q$ no puede mantenerse en equilibrio estable sólo con fuerzas electrostáticas. Este resultado se conoce como *teorema de Earnshaw*. *d*) Los incisos *a*) a *c*) se refieren al equilibrio de una carga puntual positiva $+q$. Demuestre que el teorema de Earnshaw también se aplica a una carga puntual negativa $-q$.

22.57. Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene la densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0\,(1 - r/R) \quad \text{para } r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para } r \ge R$$

donde $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ es una constante positiva. *a*) Demuestre que la carga total contenida en la distribución de carga es Q. *b*) Demuestre que el campo eléctrico en la región $r \ge R$ es idéntico al que produce una carga puntual Q en $r = 0$. *c*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \le R$. *d*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r. *e*) Encuentre el valor de r para el que el campo eléctrico es máximo, y calcule el valor de ese campo máximo.

22.58. Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0\,(1 - 4r/3R) \quad \text{para } r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{para } r \ge R$$

donde ρ_0 es una constante positiva. *a*) Encuentre la carga total contenida en la distribución de carga. *b*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \ge R$. *c*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \le R$. *d*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r. *e*) Calcule el valor de r en el que el campo eléctrico es máximo, y obtenga el valor de este campo máximo.

22.59. La ley de Gauss de la gravitación. La fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales separadas por una distancia r es proporcional a $1/r^2$, igual que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales. A causa de esta similitud entre las interacciones gravitatorias y eléctricas, también hay una ley de Gauss para la gravitación. *a*) Sea $\vec{g}$ la aceleración debida a la gravedad ocasionada por una masa puntual m en la región, de manera que $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$. Considere una superficie gaussiana esférica con radio r centrada en esa masa puntual, y demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de esta superficie está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm$$

b) Con los mismos pasos lógicos que se siguieron en la sección 22.3 con la finalidad de obtener la ley de Gauss para el campo eléctrico, demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de *cualquier* superficie cerrada está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{\text{enc}}$$

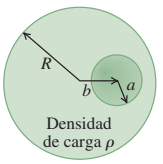
donde M_{enc} es la masa total encerrada por la superficie cerrada.

22.60. Aplicación de la ley de Gauss de la gravitación. Con base en la ley de Gauss para la gravitación [obtenida en el inciso *b*) del problema 22.59], demuestre que los siguientes enunciados son verdaderos: *a*) Para cualquier distribución de masa con simetría esférica con masa total M, la aceleración debida a la gravedad fuera de la distribución es la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro. (*Sugerencia:* véase el ejemplo 22.5 en la sección 22.4.) *b*) En cualquier punto dentro de una coraza de masa simétricamente esférica, la aceleración debida a la gravedad es igual a cero. (*Sugerencia:* véase el ejemplo 22.5.) *c*) Si se pudiera perforar un agujero a través

de un planeta con simetría esférica respecto de su centro, y si la densidad fuera uniforme, se encontraría que la magnitud de $\vec{g}$ es directamente proporcional a la distancia r del centro. (*Sugerencia:* véase el ejemplo 22.9 en la sección 22.4.) En la sección 12.6 se probaron estos resultados mediante un análisis extenuante; las demostraciones con la ley de Gauss para la gravitación son *mucho* más fáciles.

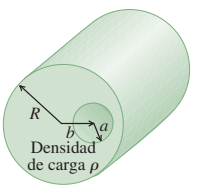
22.61. *a*) Una esfera aislante con radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ. La esfera no está centrada en el origen, sino en $\vec{r} = \vec{b}$. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$. *b*) Una esfera aislante de radio R tiene un agujero esférico de radio a ubicado dentro de su volumen y con centro a una distancia b del centro de la esfera, donde $a < b < R$ (en la figura 22.42 se muestra una sección transversal de la esfera). La parte sólida de la esfera tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Obtenga la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. [*Sugerencia:* use el principio de superposición y el resultado del inciso *a*).]

Figura 22.42 Problema 22.61.



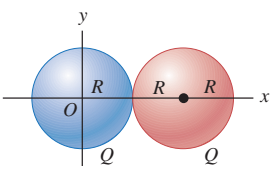
22.62. Un cilindro aislante sólido, muy largo, con radio R tiene un agujero cilíndrico con radio a perforado a lo largo de toda su longitud. El eje del agujero está a una distancia b del eje del cilindro, donde $a < b < R$ (figura 22.43). El material sólido del cilindro tiene densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. (*Sugerencia:* véase el problema 22.61.)

Figura 22.43 Problema 22.62.



22.63. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme sobre cada uno de dos volúmenes esféricos con radio R. Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra en $x = 2R$ (figura 22.44). Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los siguientes puntos sobre el eje x: *a*) $x = 0$; *b*) $x = R/2$; *c*) $x = R$; *d*) $x = 3R$.

Figura 22.44 Problema 22.63.



22.64. Repita el problema 22.63, pero ahora la esfera de la izquierda tiene carga positiva Q y la de la derecha carga negativa $-Q$.

22.65. Campo eléctrico dentro de un átomo de hidrógeno. Un átomo de hidrógeno está constituido por un protón de carga $+Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C y un electrón de carga $-Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C. El protón puede considerarse como una carga puntual en $r = 0$, el centro del átomo. El movimiento del electrón ocasiona que su carga se "disperse" hacia una distribución esférica alrededor del protón, por lo que el electrón es equivalente a una carga por unidad de volumen de

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

donde $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m se llama *radio de Bohr*. *a*) Encuentre la cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno encerrada dentro de una esfera con radio r centrado en el protón. Demuestre que cuando $r \to \infty$, la carga encerrada tiende a cero. Explique este resultado. *b*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) causado por la carga del átomo de hidrógeno como función de r. *c*) Grafique la magnitud del campo eléctrico E como función de r.

Problemas de desafío

22.66. Una región del espacio contiene una carga total positiva Q distribuida como esfera de manera que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\rho(r) = \alpha \qquad \text{para } r \le R/2$$
$$\rho(r) = 2\alpha(1 - r/R) \qquad \text{para } R/2 \le r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \ge R$$

Aquí α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3. *a*) Determine α en términos Q y R. *b*) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud de $\vec{E}$ como función de r. Haga esto para las tres regiones por separado. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. Asegúrese de comprobar que los resultados concuerden en las fronteras de las regiones. *c*) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $r \le R/2$? *d*) Si un electrón con carga $q' = -e$ oscila de ida y vuelta alrededor de $r = 0$ (el centro de la distribución) con una amplitud menor que $R/2$, demuestre que el movimiento es armónico simple. (*Sugerencia:* repase el análisis del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Si, y solo si, la fuerza neta sobre el electrón es proporcional a su desplazamiento del equilibrio, entonces el movimiento es armónico simple.) *e*) ¿Cuál es el periodo del movimiento en el inciso *d*)? *f*) Si la amplitud del movimiento descrito en el inciso *e*) es mayor que $R/2$, ¿el movimiento es armónico simple? ¿Por qué?

22.67. Una región en el espacio contiene una carga total positiva Q que está distribuida en forma esférica de manera que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\rho(r) = 3\alpha r/(2R) \qquad \text{para } r \le R/2$$
$$\rho(r) = \alpha[1 - (r/R)^2] \qquad \text{para } R/2 \le r \le R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \ge R$$

Aquí, α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3. *a*) Determine α en términos de Q y R. *b*) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico como función de r. Realice esto por separado para las tres regiones. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. *c*) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $R/2 \le r \le R$? *d*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = R/2$? *e*) Si un electrón con carga $q' = -e$ se libera desde el reposo en cualquier punto de alguna de las tres regiones, el movimiento resultante será oscilatorio pero no armónico simple. ¿Por qué? (Véase el problema de desafío 22.66.)

23 POTENCIAL ELÉCTRICO

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- A calcular la energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas.
- El significado e importancia del potencial eléctrico.
- A determinar el potencial eléctrico que un conjunto de cargas produce en un punto en el espacio.
- El uso de las superficies equipotenciales para visualizar la forma en que varía el potencial eléctrico en el espacio.
- A emplear el potencial eléctrico para calcular el campo eléctrico.

? En cierto tipo de soldadura eléctrica, entre la herramienta que suelda y las piezas metálicas por unir, fluye carga eléctrica. Esto produce un arco muy brillante cuya alta temperatura funde los elementos. ¿Por qué debe mantenerse la herramienta cerca de las piezas que se sueldan?

Este capítulo trata de la energía que se asocia con las interacciones eléctricas. Cada vez que se enciende una luz, un reproductor de CD o un aparato eléctrico, se utiliza energía eléctrica, un elemento indispensable de nuestra sociedad tecnológica. En los capítulos 6 y 7 se introdujeron los conceptos de *trabajo* y *energía* en el contexto de la mecánica; ahora se combinarán estos conceptos con lo que se ha aprendido sobre la carga eléctrica, las fuerzas eléctricas y los campos eléctricos. Así como el concepto de energía hizo posible resolver con facilidad algunos tipos de problemas de mecánica, el empleo de las ideas de energía hace más fácil la solución de una variedad de problemas de electricidad.

Cuando una partícula con carga se mueve en un campo eléctrico, el campo ejerce una fuerza que efectúa *trabajo* sobre la partícula. Este trabajo siempre se puede expresar en términos de la energía potencial eléctrica. Así como la energía potencial gravitatoria depende de la altura de una masa sobre la superficie terrestre, la energía potencial eléctrica depende de la posición que ocupa la partícula con carga en el campo eléctrico. Describiremos la energía potencial eléctrica utilizando un concepto nuevo, llamado *potencial eléctrico* o simplemente *potencial*. Es frecuente que en el estudio de los circuitos, una diferencia de potencial entre un punto y otro reciba el nombre de *voltaje*. Los conceptos de potencial y voltaje son cruciales para entender la manera en que funcionan los circuitos eléctricos, y tienen aplicaciones de gran importancia en los haces de electrones que se utilizan en la radioterapia contra el cáncer, los aceleradores de partículas de alta energía y muchos otros aparatos.

23.1 Energía potencial eléctrica

Se demostró que los conceptos de trabajo, energía potencial y conservación de la energía son sumamente útiles para el estudio de la mecánica. En esta sección se verá que estos conceptos son útiles para comprender y analizar las interacciones eléctricas.

Comencemos por revisar tres puntos esenciales de los capítulos 6 y 7. En primer lugar, cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que se mueve de un punto a a un punto b, el trabajo $W_{a\to b}$ efectuado por la fuerza está dado por la siguiente *integral de línea*:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b F\cos\phi\, dl \qquad \text{(trabajo realizado por una fuerza)} \qquad (23.1)$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula, y ϕ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ en cada punto de la trayectoria.

En segundo lugar, si la fuerza $\vec{F}$ es *conservativa*, según se definió el término en la sección 7.3, el trabajo realizado por $\vec{F}$ siempre se puede expresar en términos de una **energía potencial** U. Cuando la partícula se mueve de un punto donde la energía potencial es U_a a otro donde es U_b, el cambio en la energía potencial es $\Delta U = U_b - U_a$, y el trabajo $W_{a\to b}$ que realiza la fuerza es

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \qquad \text{(trabajo efectuado por una fuerza conservativa)} \qquad (23.2)$$

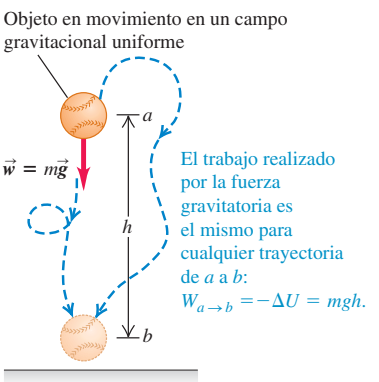
Cuando $W_{a\to b}$ es positivo, U_a es mayor que U_b, ΔU es negativo y la energía potencial *disminuye*. Eso es lo que ocurre cuando una pelota cae de un punto elevado (a) a otro más bajo (b) en presencia de la gravedad terrestre; la fuerza de la gravedad efectúa un trabajo positivo, y la energía potencial gravitacional disminuye (figura 23.1). Cuando se lanza una pelota hacia arriba, la fuerza gravitatoria hace un trabajo negativo durante el ascenso, y la energía potencial aumenta.

En tercer lugar, el teorema del trabajo y la energía establece que el cambio en la energía cinética $\Delta K = K_b - K_a$ durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo *total* realizado sobre la partícula. Si el único trabajo efectuado sobre la partícula lo realizan fuerzas conservativas, entonces la ecuación (23.2) da el trabajo total, y $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$. Por lo general esto se escribe así:

$$K_a + U_a = K_b + U_b \qquad (23.3)$$

Es decir, en estas circunstancias, la energía mecánica total (cinética más potencial) se *conserva*.

23.1 Trabajo realizado sobre una pelota de béisbol en movimiento en un campo gravitacional uniforme.



Energía potencial eléctrica en un campo uniforme

A continuación se verá un ejemplo eléctrico de estos conceptos básicos. En la figura 23.2 un par de placas metálicas paralelas con carga generan un campo eléctrico uniforme descendente y con magnitud E. El campo ejerce una fuerza hacia abajo con magnitud $F = q_0E$ sobre una carga de prueba positiva q_0. A medida que la carga se mueve hacia abajo una distancia d del punto a al punto b, la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su localización. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es el producto de la magnitud de la fuerza por la componente de desplazamiento en la dirección (descendente) de la fuerza.

$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed \qquad (23.4)$$

Este trabajo es positivo, toda vez que la fuerza está en la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.

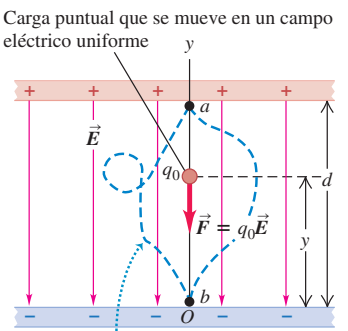
La componente y de la fuerza eléctrica, $F_y = -q_0E$, es constante, y no hay componente x o z. Esto es exactamente análogo a la fuerza gravitatoria sobre una masa m cerca de la superficie de la Tierra; para esta fuerza, existe una componente y constante $F_y = -mg$, y las componentes x y z son iguales a cero. A partir de esta analogía se puede concluir que la fuerza ejercida sobre q_0 por el campo eléctrico uniforme en la figura 23.2 es *conservativa*, igual que la fuerza gravitatoria. Esto significa que el trabajo $W_{a\to b}$ efectuado por el campo es independiente de la trayectoria que sigue la partícula de a a b. Este trabajo puede representarse con una función de *energía potencial* U, como se hizo para la energía potencial gravitacional en la sección 7.1. La energía potencial para la fuerza gravitatoria $F_y = -mg$ fue $U = mgy$; por consiguiente, la energía potencial para la fuerza eléctrica $F_y = -q_0E$ es

$$U = q_0Ey \qquad (23.5)$$

Cuando la carga de prueba se mueve de la altura y_a a la altura y_b, el trabajo realizado sobre la carga por el campo está dado por

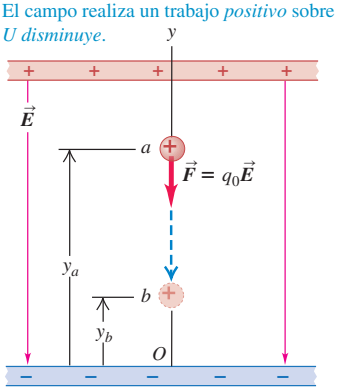
$$W_{a\to b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) = q_0E(y_a - y_b) \qquad (23.6)$$

23.2 Trabajo realizado sobre una carga puntual que se mueve en un campo eléctrico uniforme. Compare esta ilustración con la figura 23.1.

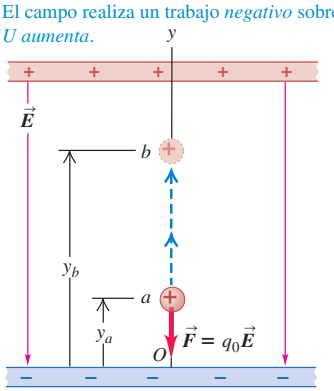


23.3 Carga positiva que se desplaza a) en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ y b) en la dirección opuesta a $\vec{E}$.

a) La carga positiva se desplaza en dirección de $\vec{E}$:
- El campo realiza un trabajo *positivo* sobre la carga.
- *U disminuye.*



b) La carga positiva se desplaza en dirección opuesta a $\vec{E}$:
- El campo realiza un trabajo *negativo* sobre la carga.
- *U aumenta.*



Cuando y_a es mayor que y_b (figura 23.3a), la carga de prueba positiva q_0 se mueve hacia abajo, en la misma dirección que $\vec{E}$; el desplazamiento tiene lugar en la misma dirección que la fuerza $\vec{F} = q_0\vec{E}$, por lo que el campo realiza trabajo positivo y U disminuye. [En particular, si $y_a - y_b = d$ como en la figura 23.2, la ecuación (23.6) da $W_{a\to b} = q_0Ed$ en concordancia con la ecuación (23.4).] Cuando y_a es menor que y_b (figura 23.3b), la carga de prueba positiva q_0 se mueve hacia arriba, en dirección opuesta a $\vec{E}$; el desplazamiento se opone a la fuerza, el campo hace un trabajo negativo y U aumenta.

Si la carga de prueba q_0 es *negativa*, la energía potencial aumenta cuando se mueve a favor del campo y disminuye cuando se mueve en contra del campo (figura 23.4).

Sea positiva o negativa la carga de prueba, se aplica la siguiente regla general: *U aumenta* si la carga de prueba q_0 se mueve en la dirección *opuesta* a la fuerza eléctrica $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (figuras 23.3b y 23.4a); *U disminuye* si q_0 se mueve en la *misma dirección* que $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (figuras 23.3a y 23.4b). Éste es el mismo comportamiento que para la energía potencial gravitacional, la cual aumenta si una masa m se mueve hacia arriba (en dirección opuesta a la dirección de la fuerza gravitatoria) y disminuye si m se mueve hacia abajo (en la misma dirección que la fuerza gravitatoria).

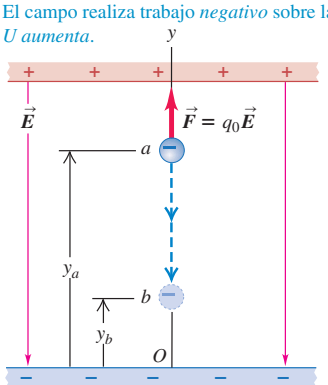
CUIDADO **Energía potencial eléctrica** La relación que hay entre el cambio en la energía potencial eléctrica y el movimiento en un campo eléctrico es muy importante, y se utilizará con frecuencia. También es una relación que requiere cierto esfuerzo para comprenderse del todo. Tómese el tiempo necesario para revisar el párrafo anterior y estudie con cuidado las figuras 23.3 y 23.4. ¡Hacerlo le será de gran utilidad más adelante!

Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales

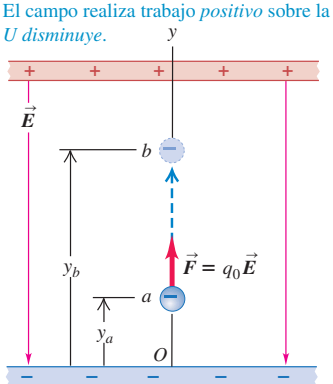
La idea de la energía potencial eléctrica no se restringe al caso especial de un campo eléctrico uniforme. En realidad, este concepto se puede aplicar a una carga puntual en *cualquier* campo eléctrico generado por una distribución de carga estática. Recuerde,

23.4 Una carga negativa que se desplaza a) en dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ y b) en dirección opuesta a $\vec{E}$. Compare con la figura 23.3.

a) La carga negativa se desplaza en la dirección de $\vec{E}$:
- El campo realiza trabajo *negativo* sobre la carga.
- *U aumenta.*



b) La carga negativa se desplaza en dirección opuesta a $\vec{E}$:
- El campo realiza trabajo *positivo* sobre la carga.
- *U disminuye.*



del capítulo 21, que cualquier distribución de carga se representa como un conjunto de cargas puntuales. Por consiguiente, es útil calcular el trabajo realizado sobre una carga de prueba q_0 que se mueve en el campo eléctrico ocasionado por una sola carga puntual estacionaria q.

En primer lugar se considerará un desplazamiento a lo largo de una línea *radial*, como se ilustra en la figura 23.5, del punto a al punto b. La fuerza sobre q_0 está dada por la ley de Coulomb, y su componente radial es

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} \tag{23.7}$$

Si q y q_0 tienen el mismo signo (+ o −), la fuerza es de repulsión y F_r es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y F_r es negativa. La fuerza *no* es constante durante el desplazamiento, y se tiene que integrar para obtener el trabajo $W_{a\to b}$ que realiza esta fuerza sobre q_0 a medida que q_0 se mueve de a a b. Resulta lo siguiente:

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \tag{23.8}$$

El trabajo efectuado por la fuerza eléctrica para esta trayectoria particular depende sólo de los puntos extremos.

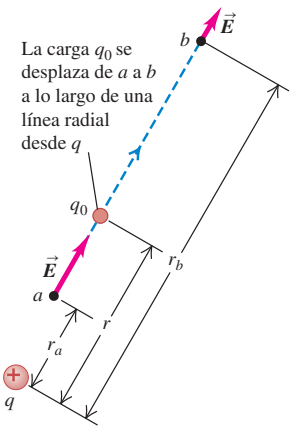
En realidad, el trabajo es el mismo para *todas las trayectorias posibles* entre a y b. Para demostrar esto, se considera un desplazamiento más general (figura 23.6) en el que a y b no están en la misma línea radial. De la ecuación (23.1), el trabajo efectuado sobre q_0 durante este desplazamiento está dado por

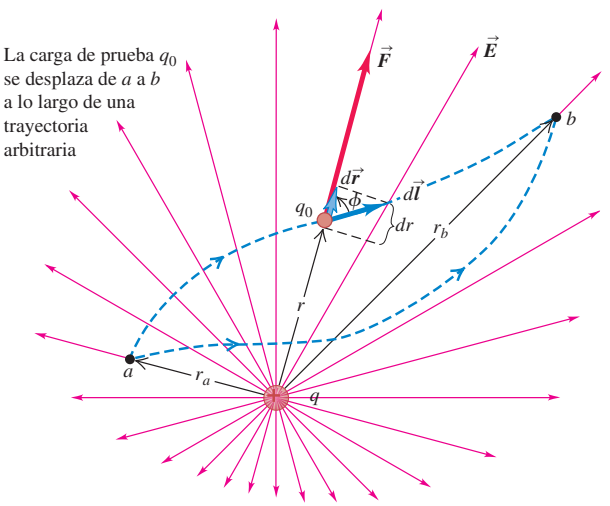
$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\, dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\, dl$$

Pero la figura muestra que $\cos\phi\, dl = dr$. Es decir, el trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño $d\vec{l}$ depende sólo del cambio dr en la distancia r entre las cargas, el cual es la *componente radial* del desplazamiento. Así, la ecuación (23.8) es válida incluso con respecto a este desplazamiento más general; el trabajo que efectúa sobre q_0 el campo eléctrico $\vec{E}$ producido por q sólo depende de r_a y r_b, y no de los detalles de la trayectoria. Asimismo, si q_0 regresa a su punto inicial a por una trayectoria diferente, el trabajo total que se realiza en el desplazamiento de ida y vuelta es igual a cero [la integral en la ecuación (23.8) es de r_a de regreso a r_a]. Éstas son las características necesarias para una fuerza conservativa, según se definió en la sección 7.3. Así, la fuerza sobre q_0 es *conservativa*.

Se ve que las ecuaciones (23.2) y (23.8) son consistentes si se define $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$ como la energía potencial U_a cuando q_0 está en el punto a, a una distancia r_a de q, y se define $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$ como la energía potencial U_b cuando q_0 está en el punto b, a una

23.5 La carga de prueba q_0 se desplaza a lo largo de una línea recta que se extiende en forma radial desde la carga q. Conforme se desplaza de a a b, la distancia varía de r_a a r_b.

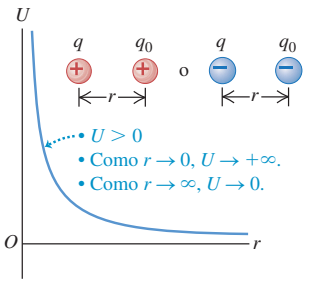




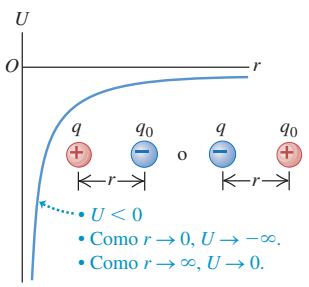
23.6 El trabajo efectuado sobre la carga q_0 por el campo eléctrico de carga q no depende de la trayectoria seguida, sino sólo de las distancias r_a y r_b.

23.7 Gráficas de la energía potencial U de dos cargas puntuales q y q_0 contra su separación r.

a) q y q_0 tienen el mismo signo



b) q y q_0 tienen signos opuestos



distancia r_b de q. De esta forma, la energía potencial U cuando la carga de prueba q_0 está a *cualquier* distancia r de la carga q es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \qquad \text{(energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales } q \text{ y } q_0\text{)} \tag{23.9}$$

Observe que *no* hemos supuesto nada acerca de los signos de q y q_0; la ecuación (23.9) es válida para cualquier combinación de signos. La energía potencial es positiva si las cargas q y q_0 tienen el mismo signo (figura 23.7a), y negativa si tienen signos opuestos (figura 23.7b).

CUIDADO **La energía potencial eléctrica contra la fuerza eléctrica** Hay que tener cuidado de no confundir la ecuación (23.9) para la energía potencial de dos cargas puntuales con la expresión similar en la ecuación (23.7) para la componente radial de la fuerza eléctrica que ejerce una carga sobre la otra. La energía potencial U es proporcional a $1/r$, mientras que la componente de la fuerza Fr es proporcional a $1/r^2$.

La energía potencial siempre se define en relación con algún punto de referencia donde $U = 0$. En la ecuación (23.9), U es igual a cero cuando q y q_0 están infinitamente alejadas y $r = \infty$. Por lo tanto, U representa el trabajo que realizaría el campo de q sobre la carga de prueba q_0 si esta última se desplazara de una distancia inicial r al infinito. Si q y q_0 tienen el mismo signo, la interacción será de repulsión, este trabajo será positivo y U será positiva en cualquier separación finita (figura 23.7a). Si las cargas tienen signos opuestos, la interacción es de atracción, el trabajo efectuado será negativo y U será negativa (figura 23.7b).

Conviene subrayar que la energía potencial U dada por la ecuación (23.9) es una propiedad *compartida* de las dos cargas q y q_0; es una consecuencia de la *interacción* entre estos dos cuerpos. Si la distancia entre las dos cargas cambia de r_a a r_b, el cambio en energía potencial es el mismo si q permanece fija y q_0 se mueve, o si q_0 se mantiene fija y es q la que se mueve. Por esta razón, nunca se usa la frase "la energía potencial eléctrica *de* una carga puntual". (De igual manera, si una masa m se encuentra a una altura h sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de la masa m y la Tierra. En las secciones 7.1 y 12.3 se hizo hincapié en este hecho.)

La ley de Gauss dice que el campo eléctrico fuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica es la misma que habría si toda la carga estuviera en el centro. Por lo tanto, la ecuación (23.9) también se cumple si la carga de prueba q_0 está fuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica con carga total q a una distancia r del centro.

Ejemplo 23.1 Conservación de energía con fuerzas eléctricas

Un positrón (antipartícula del electrón) tiene una masa de 9.11×10^{-31} kg y una carga $+e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. Suponga que un positrón se mueve en la vecindad de una partícula alfa cuya carga es $+2e = 3.20 \times 10^{-19}$ C. La partícula alfa tiene una masa más de 7000 veces mayor que la del positrón, por lo que se supondrá que está en reposo en algún marco de referencia inercial. Cuando el positrón está a 1.00×10^{-10} m de la partícula alfa, se aleja de ésta con una rapidez de 3.00×10^6 m/s. *a*) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están separadas por una distancia de 2.00×10^{-10} m? *b*) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula alfa? *c*) ¿Cómo cambiaría la situación si la partícula en movimiento fuera un electrón (igual masa que la del positrón pero con carga opuesta)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza eléctrica entre el positrón y la partícula alfa es conservativa, por lo que la energía mecánica (cinética más potencial) se conserva.

PLANTEAR: Las energías cinética y potencial en dos puntos cualesquiera a y b están relacionadas por la ecuación (23.3), $K_a - U_a = K_b - U_b$, y la energía potencial a cualquier distancia r está dada por la ecuación (23.9). Se da información completa sobre el sistema en un punto a en el que las dos cargas están a una distancia de 1.00×10^{-10} m. Se usan las ecuaciones (23.3) y (23.9) para encontrar la rapidez con dos valores diferentes de r en los incisos *a*) y *b*), y para el caso en que la carga $+e$ se sustituye por $-e$ en el inciso *c*).

EJECUTAR: *a*) En esta parte, $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m y se desea obtener la rapidez final v_b del positrón. Esto aparece en la expresión de la energía cinética final, $K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$; y al resolver la ecuación de conservación de la energía para K_b se tiene:

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$

Los valores de las energías en el lado derecho de esta expresión son

$$K_a = \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^6\ \text{m/s})^2$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \text{J}$$
$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_a}$$
$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3.20 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})}{1.00 \times 10^{-10}\ \text{m}}$$
$$= 4.61 \times 10^{-18}\ \text{J}$$
$$U_b = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3.20 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})}{2.00 \times 10^{-10}\ \text{m}}$$
$$= 2.30 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

Por lo tanto, la energía cinética final es

$$K_b = \frac{1}{2}mv_b^2 = K_a + U_a - U_b$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \text{J} + 4.61 \times 10^{-18}\ \text{J} - 2.30 \times 10^{-18}\ \text{J}$$
$$= 6.41 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

y la rapidez final del positrón es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.41 \times 10^{-18}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 3.8 \times 10^6\ \text{m/s}$$

La fuerza es de repulsión, por lo que el positrón acelera conforme se aleja de la partícula alfa estacionaria.

b) Cuando las posiciones finales del positrón y la partícula alfa están muy lejos una de otra, la separación r_b tiende al infinito y la energía potencial final U_b tiende a cero. Así, la energía cinética final del positrón es

$$K_b = K_a + U_a - U_b = 4.10 \times 10^{-18}\ \text{J} + 4.61 \times 10^{-18}\ \text{J} - 0$$
$$= 8.71 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

y su rapidez final es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(8.71 \times 10^{-18}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 4.4 \times 10^6\ \text{m/s}$$

Al comparar este resultado con el del inciso *a*) se observa que conforme el positrón se mueve de $r = 2.00 \times 10^{-10}$ m al infinito, el trabajo adicional realizado sobre él por el campo eléctrico de la partícula alfa incrementa la rapidez aproximadamente en un 16%. Esto se debe a que la fuerza eléctrica disminuye rápidamente con la distancia.

c) Si la carga en movimiento es negativa, la fuerza sobre su ella es de atracción en vez de repulsión, y se espera que disminuya en vez de acelerar. La única diferencia en los cálculos anteriores es que las dos cantidades de energía potencial son negativas. Del inciso *a*), a una distancia $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m se tiene

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \text{J} + (-4.61 \times 10^{-18}\ \text{J}) - (-2.30 \times 10^{-18}\ \text{J})$$
$$= 1.79 \times 10^{-18}\ \text{J}$$
$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = 2.0 \times 10^6\ \text{m/s}$$

Del inciso *b*), con $r_b = \infty$, la energía cinética del electrón parecería ser

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\ \text{J} + (-4.61 \times 10^{-18}\ \text{J}) - 0$$
$$= -5.1 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

¡Pero las energías cinéticas *nunca* son negativas! Este resultado significa que el electrón nunca puede alcanzar $r_b = \infty$; la fuerza de atracción lleva al electrón a detenerse a una distancia finita de la partícula alfa, y luego comenzará a moverse hacia la partícula alfa. Si se iguala K_b a cero en la ecuación de la conservación de la energía mecánica, se puede resolver para determinar la distancia r_b en la que el electrón se encuentra en reposo momentáneo.

EVALUAR: Es útil comparar nuestros cálculos con la figura 23.7. En los incisos *a*) y *b*), las cargas tienen el mismo signo; como $r_b > r_a$, la energía potencial U_b es menor que U_a. En el inciso *c*), las cargas tienen signos opuestos; como $r_b > r_a$, la energía potencial U_b es mayor (es decir, menos negativa) que U_a.

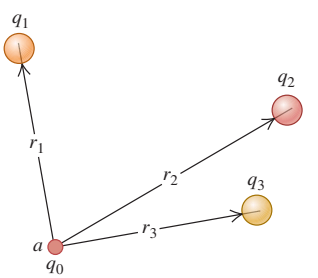
Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales

Suponga que el campo eléctrico $\vec{E}$ en el que se desplaza la carga q_0 se debe a *varias* cargas puntuales q_1, q_2, q_3, . . . a distancias r_1, r_2, r_3, . . . de q_0, como se ilustra en la figura 23.8. Por ejemplo, q_0 podría ser un ion positivo que se mueve en presencia de otros iones (figura 23.9). El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total realizado sobre q_0 durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. De la ecuación (23.9) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba q_0 en el punto *a* en la figura 23.8 es la suma *algebraica* (*no* la suma vectorial):

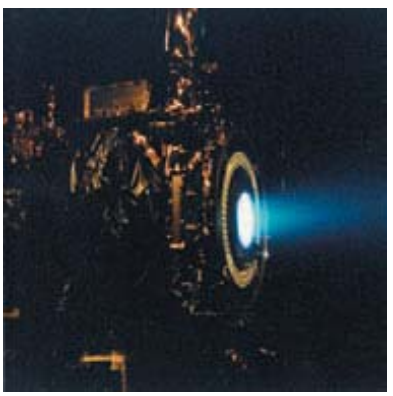
$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \begin{matrix}\text{(carga puntual } q_0 \\ \text{y conjunto de cargas } q_i)\end{matrix} \qquad (23.10)$$

Cuando q_0 está en un punto *b* diferente, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero r_1, r_2, . . . son las distancias desde q_1, q_2, . . . al punto *b*. El trabajo efectuado sobre la carga q_0 cuando se desplaza de *a* a *b* a lo largo de cualquier

23.8 La energía potencial asociada con la carga q_0 en el punto *a* depende de las otras cargas q_1, q_2 y q_3 y de sus distancias r_1, r_2 y r_3 desde el punto *a*.



23.9 Esta máquina de iones para naves espaciales utiliza fuerzas eléctricas para expulsar un chorro de iones positivos de xenón (Xe^+) con una rapidez superior a 30 km/s. La propulsión que ocasiona es muy baja (alrededor de 0.09 newtons), pero es posible mantenerla continuamente durante varios días, en contraste con los cohetes de combustible químico, que generan una enorme propulsión durante un breve lapso (figura 8.33). Los motores de iones se han utilizado para maniobrar las naves interplanetarias.



trayectoria es igual a la diferencia $U_a - U_b$ entre las energías potenciales cuando q_0 está en a y en b.

Se puede representar *cualquier* distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales, por lo que la ecuación (23.10) muestra que siempre es posible encontrar una función de la energía potencial para *cualquier* campo eléctrico estático. Se infiere que **para todo campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa**.

Las ecuaciones (23.9) y (23.10) definen que U es igual a cero cuando todas las distancias r_1, r_2, . . . son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba q_0 está muy lejos de todas las cargas que producen el campo. Igual que para cualquier función de la energía potencial, el punto en que $U = 0$, es arbitrario; siempre se puede sumar una constante que haga a U igual a cero en cualquier punto que se elija. En los problemas de electrostática, por lo general lo más sencillo es elegir que este punto se encuentre en el infinito. Cuando se analicen circuitos eléctricos en los capítulos 25 y 26, habrá otras elecciones que resulten más convenientes.

La ecuación (23.10) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba q_0 en el campo $\vec{E}$ producido por q_1, q_2, q_3, . . . Pero también hay energía potencial implicada en el arreglo de estas cargas. Si se comienza con las cargas q_1, q_2, q_3, . . . todas separadas entre sí por distancias infinitas, y luego se las acerca de manera que la distancia entre q_i y q_j sea r_{ij}, la energía potencial *total* U es la suma de las energías potenciales de interacción para cada par de cargas. Esto se escribe como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} \tag{23.11}$$

Esta suma se extiende a todas los *pares* de cargas; no se permite que $i = j$ (porque eso sería la interacción de una carga consigo misma), y sólo se incluyen términos con $i < j$ para garantizar que cada par se tome en cuenta sólo una vez. Así, para explicar la interacción entre q_3 y q_4, se incluye un término con $i = 3$ y $j = 4$, pero no un término con $i = 4$ y $j = 3$.

Interpretación de la energía potencial eléctrica

Como comentario final, a continuación se exponen dos puntos de vista sobre la energía potencial eléctrica. Definimos la energía potencial eléctrica en términos del trabajo realizado *por el campo eléctrico* sobre una partícula con carga que se mueve en el campo, en forma similar a como en el capítulo 7 se definió la energía potencial en términos del trabajo efectuado por la gravedad o por un resorte. Cuando una partícula se desplaza del punto a al punto b, el trabajo que realiza sobre ella el campo eléctrico es $W_{a\to b} = U_a - U_b$. Por lo tanto, la diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ es igual *al trabajo que efectúa la fuerza eléctrica cuando la partícula se desplaza de* a a b. Cuando U_a es mayor que U_b, el campo realiza trabajo positivo sobre la partícula conforme "cae" de un punto de mayor energía potencial (a) a otro con menor energía potencial (b).

Un punto de vista alternativo pero equivalente es considerar cuánto trabajo se hubiera tenido que hacer para "subir" la partícula desde un punto b, en el que la energía potencial es U_b, hasta un punto a en el que la energía potencial tiene un valor mayor U_a (por ejemplo, al empujar dos cargas positivas para acercarlas). Para mover la partícula lentamente (de manera que no se le imparta ninguna energía cinética), es necesario ejercer una fuerza externa adicional $\vec{F}_{\text{ext}}$ que es igual y opuesta a la fuerza del campo eléctrico y realiza un trabajo positivo. La diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ se define entonces como *el trabajo que debe efectuar una fuerza externa para desplazar la partícula lentamente desde* b *hasta* a *en contra de la fuerza eléctrica.* Como $\vec{F}_{\text{ext}}$ es el negativo de la fuerza del campo eléctrico y el desplazamiento ocurre en dirección opuesta, esta definición de la diferencia de potencial $U_a - U_b$ es equivalente a la que se dio antes. Este punto de vista alternativo también funciona si U_a es menor que U_b, lo que corresponde a "bajar" la partícula; un ejemplo de esto es alejar dos cargas positivas una de otra. En este caso, $U_a - U_b$ de nuevo es igual al trabajo realizado por la fuerza externa, pero ahora este trabajo es negativo.

En la siguiente sección se usarán estos dos puntos de vista para interpretar lo que se conoce como *potencial* eléctrico, o energía potencial por unidad de carga.

Ejemplo 23.2 Sistema de cargas puntuales

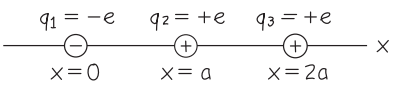
Dos cargas puntuales se localizan en el eje x, $q_1 = -e$ en $x = 0$ y $q_2 = +e$ en $x = a$. *a*) Determine el trabajo que debe realizar una fuerza externa para llevar una tercera carga puntual $q_3 = +e$ del infinito a $x = 2a$. *b*) Determine la energía potencial total del sistema de tres cargas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la relación entre el trabajo efectuado para mover una carga puntual y el cambio en la energía potencial. También implica la expresión para la energía potencial de un conjunto de cargas puntuales.

PLANTEAR: La figura 23.10 presenta el arreglo final de las tres cargas. Para determinar el trabajo que se requiere para traer a q_3 del infinito, se usa la ecuación (23.10) para encontrar la energía potencial asociada con q_3 en la presencia de q_1 y q_2. Después se emplea la ecuación (23.11) para determinar la energía potencial total del sistema.

23.10 Dibujo de la situación después de que se ha traído la tercera carga del infinito.



EJECUTAR: *a*) El trabajo que debe hacer una fuerza externa $\vec{F}_{\text{ext}}$ sobre q_3 es igual a la diferencia entre dos cantidades: la energía potencial U asociada con q_3 cuando está en $x = 2a$ y la energía potencial que tiene cuando está infinitamente lejos. La segunda de éstas es igual a cero, por lo que el trabajo que debe realizarse es igual a U. Las distancias entre las cargas son $r_{13} = 2a$ y $r_{23} = a$, por lo que a partir de la ecuación (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a}\right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Si q_3 se lleva del infinito a lo largo del eje $+x$, es atraída por q_1 pero repelida con más fuerza por q_2; por ello, debe hacerse un trabajo positivo para llevar q_3 a la posición $x = 2a$.

b) La energía potencial total del conjunto de tres cargas está dado por la ecuación (23.11):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a}\right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

EVALUAR: Como el resultado en el inciso *b*) es negativo, el sistema tiene menos energía potencial que si las tres cargas estuvieran infinitamente alejadas. Una fuerza externa tendría que hacer trabajo *negativo* para traerlas del infinito y acomodarlas en su arreglo, y trabajo *positivo* para llevarlas de regreso al infinito.

Evalúe su comprensión de la sección 23.1 Considere el sistema de tres cargas puntuales del ejemplo 21.4 (sección 21.3) y que se ilustra en la figura 21.14. *a*) ¿Cuál es el signo de la energía potencial total de este sistema? i) positivo; ii) negativo; iii) cero. *b*) ¿Cuál es el signo de la cantidad total de trabajo que tendría que hacerse para llevar las cargas infinitamente lejos una de otra? i) positivo; ii) negativo; iii) cero.

23.2 Potencial eléctrico

En la sección 23.1 se estudió la energía potencial U asociada con una carga de prueba q_0 en un campo eléctrico. Ahora interesa describir esta energía potencial sobre una base "por unidad de carga", al igual que el campo eléctrico describe la fuerza por unidad de carga sobre una partícula con carga en el campo. Esto lleva al concepto de *potencial eléctrico*, al que es frecuente llamar simplemente *potencial*. Este concepto es muy útil en los cálculos que implican energías de partículas con carga. También facilita hacer muchos cálculos de campo eléctrico porque el potencial eléctrico se relaciona estrechamente con el campo eléctrico $\vec{E}$. Cuando se necesita determinar un campo eléctrico, a menudo es más fácil determinar primero el potencial y después, a partir de éste, el campo.

Activ Online Physics
11.13 Energía potencial eléctrica y potencial

El **potencial** es *la energía potencial por unidad de carga.* Se define el potencial V en cualquier punto en el campo eléctrico como la energía potencial U *por unidad de carga* asociada con una carga de prueba q_0 en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{o bien,} \quad U = q_0 V \tag{23.12}$$

Tanto la energía potencial como la carga son escalares, por lo que el potencial es una cantidad escalar. Sus unidades se encuentran a partir de la ecuación (23.12), dividiendo las unidades de energía entre las de carga. La unidad del SI para el potencial se

llama **volt** (1 V) en honor del científico italiano y experimentador eléctrico Alejandro Volta (1745-1827), y es igual a 1 joule por coulomb:

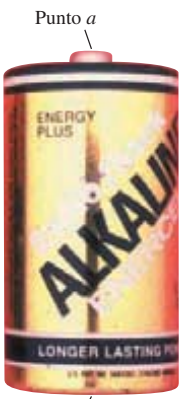
$$1\ \text{V} = 1\ \text{volt} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{joule/coulomb}$$

Expresemos la ecuación (23.2), que iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de a a b con la cantidad $-\Delta U = -(U_b - U_a)$, sobre una base de "trabajo por unidad de carga". Al dividir esta ecuación entre q_0 se obtiene:

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b \qquad (23.13)$$

donde $V_a = U_a/q_0$ es la energía potencial por unidad de carga en el punto a y se aplica de manera análoga para V_b. V_a y V_b se denominan el *potencial en el punto a* y *potencial en el punto b*, respectivamente. De este modo, el trabajo realizado por unidad de carga por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de a a b es igual al potencial en a menos el potencial en b.

23.11 El voltaje de esta batería es igual a la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre su terminal positiva (punto a) y su terminal negativa (punto b).



$V_{ab} = 1.5$ volts

La diferencia $V_a - V_b$ se llama *potencial de a con respecto a b*; en ocasiones esa diferencia se abrevia como $V_{ab} = V_a - V_b$ (observe el orden de los subíndices). No es raro que se llame a esta expresión *diferencia de potencial* entre a y b; pero esto es una ambigüedad, a menos que se especifique cuál es el punto de referencia. En los circuitos eléctricos, que se analizarán en capítulos posteriores, la diferencia de potencial entre dos puntos con frecuencia se denomina **voltaje** (figura 23.11). Así, la ecuación (23.13) establece: ***V_{ab}*, el potencial de *a* con respecto a *b*, es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una UNIDAD de carga se desplaza de *a* a *b***.

Otra manera de interpretar la diferencia de potencial V_{ab} en la ecuación (23.13) es recurrir al punto de vista alternativo que se mencionó al final de la sección 23.1. Desde ese punto de vista, $U_a - U_b$ es la cantidad de trabajo que debe realizar una fuerza *externa* para desplazar con lentitud una partícula de carga q_0 de b a a contra la fuerza eléctrica. El trabajo que debe hacer *por unidad de carga* la fuerza externa es, por lo tanto, $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$. En otras palabras, ***$V_{ab}$*, el potencial de *a* con respecto a *b*, es igual al trabajo que debe efectuarse para desplazar con lentitud una UNIDAD de carga de *b* a *a* contra la fuerza eléctrica.**

El instrumento que mide la diferencia de potencial entre dos puntos se llama *voltímetro*. En el capítulo 26 se estudiará el principio del tipo más común de voltímetro, el de bobina móvil. También hay instrumentos mucho más sensibles para medir el potencial, los cuales utilizan amplificación electrónica. Son comunes los instrumentos capaces de medir diferencias de potencial de 1 μV, y es posible obtener sensibilidades menores de 10^{-12} V.

Cálculo del potencial eléctrico

Para encontrar el potencial V debido a una sola carga puntual q, se divide la ecuación (23.9) entre q_0:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \qquad \text{(potencial debido a una carga puntual)} \qquad (23.14)$$

donde r es la distancia de la carga puntual q al punto en que se evalúa el potencial. Si q es positiva, el potencial que produce es positivo en todos los puntos; si q es negativa, produce un potencial negativo en cualquier lugar. En cualquier caso, V es igual a cero en $r = \infty$, a una distancia infinita de la carga puntual. Observe que el potencial, como el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba q_0 que se utiliza para definirlo.

De manera similar, para encontrar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, se divide la ecuación (23.10) entre q_0:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(potencial debido a un conjunto de cargas puntuales)} \qquad (23.15)$$

En esta expresión, r_i es la distancia de la i-ésima carga, q_i, al punto en que se evalúa V. Así como el campo eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma *vectorial* de los campos producidos por cada carga, el potencial eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma *escalar* de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, se divide la carga en elementos dq y la suma en la ecuación (23.15) se convierte en integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad \text{(potencial debido a una distribución continua de carga)} \qquad (23.16)$$

donde r es la distancia que hay entre el elemento con carga dq y el punto del campo donde se desea obtener V. Se verán varios ejemplos de tales casos. El potencial definido por las ecuaciones (23.15) y (23.16) es igual a cero en puntos que están infinitamente lejos de *todas* las cargas. Más adelante se verán casos en los que la distribución de carga en sí se extiende al infinito. En tales casos se verá que en el infinito no se puede establecer $V = 0$, y se necesitará tener cuidado en el uso e interpretación de las ecuaciones (23.15) y (23.16).

CUIDADO **¿Qué es el potencial eléctrico?** Antes de entrar en los detalles del cálculo del potencial eléctrico, debemos detenernos y recordar lo que es el potencial. El *potencial* eléctrico en cierto punto es la energía potencial que estaría asociada a una carga *unitaria* colocada en ese punto. Ésa es la razón por la que el potencial se mide en joules por coulomb, o volts. Asimismo, hay que recordar que no tiene que haber una carga en un punto dado para que ahí exista un potencial V. (De igual forma, un campo eléctrico puede existir en un punto dado aun si no hay carga que responda a él.)

Obtención del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación (23.15) es por lo general la forma más fácil de calcular el potencial V. Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede calcular con facilidad, es más fácil determinar V a partir de $\vec{E}$. La fuerza $\vec{F}$ sobre una carga de prueba q_0 se escribe como $\vec{F} = q_0\vec{E}$, por lo que, según la ecuación (23.1), el trabajo realizado por la fuerza eléctrica conforme la carga de prueba se desplaza de a a b está dado por:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si se divide entre q_0 y se compara el resultado con la ecuación (23.13), se encuentra que

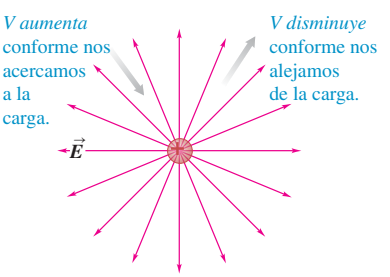
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \qquad \text{(diferencia de potencial como integral de } \vec{E}\text{)} \qquad (23.17)$$

El valor de $V_a - V_b$ es independiente de la trayectoria tomada de a a b, del mismo modo en que el valor de $W_{a\to b}$ es independiente de la trayectoria. Para interpretar la ecuación (23.17) hay que recordar que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica por unidad de carga sobre una carga de prueba. Si la integral de línea $\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ es positiva, el campo eléctrico efectúa un trabajo positivo sobre una carga de prueba positiva conforme ésta se desplaza de a a b. En este caso, la energía potencial eléctrica por unidad de carga disminuye a medida que la carga de prueba se desplaza, por lo que la energía potencial por unidad de carga también decrece; por consiguiente, V_b es menor que V_a y $V_a - V_b$ es positiva.

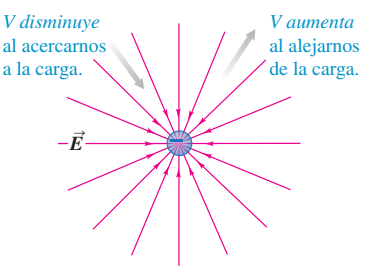
Como ilustración, considere una carga puntual positiva (figura 23.12a). El campo eléctrico se aleja de la carga, y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es positivo a cualquier distancia finita de la carga. Si nos alejamos de la carga, en dirección de $\vec{E}$, nos movemos hacia valores más bajos de V; si nos acercamos a la carga, en dirección opuesta a $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores mayores de V. Para la carga puntual negativa en la figura 23.12b, $\vec{E}$ está dirigido hacia la carga y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es negativo a cualquier distancia finita de la carga. En este caso, si nos desplazamos hacia la carga, nos moveremos en la dirección de $\vec{E}$

23.12 Si nos movemos en la dirección de $\vec{E}$, el potencial eléctrico V disminuye; si nos movemos en dirección opuesta a $\vec{E}$, V se incrementa.

a) Una carga puntual positiva



b) Una carga puntual negativa



y en la dirección de V decreciente (más negativo). Al alejarnos de la carga, en dirección opuesta a la de $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores crecientes de V (menos negativos). La regla general, válida para *cualquier* campo eléctrico, es la siguiente: desplazarse *en* la dirección de $\vec{E}$ significa hacerlo en la dirección de V *decreciente*, y desplazarse *contra de* la dirección de $\vec{E}$ significa moverse en la dirección de V *creciente*.

Asimismo, una carga de prueba positiva q_0 experimenta una fuerza eléctrica en la dirección de $\vec{E}$, hacia valores más pequeños de V; una carga de prueba negativa experimenta una fuerza opuesta a $\vec{E}$, hacia valores más grandes de V. Así, una carga positiva tiende a "caer" de una región de potencial elevado a otra de menor potencial. Lo contrario también se cumple para una carga negativa.

Observe que la ecuación (23.17) se puede escribir como

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{23.18}$$

En comparación con la integral de la ecuación (23.17), ésta tiene signo negativo y los límites están invertidos; de ahí que las ecuaciones (23.17) y (23.18) sean equivalentes. Pero la ecuación (23.18) tiene una interpretación un poco diferente. Para mover una unidad de carga lentamente en contra de la fuerza eléctrica, se debe aplicar una fuerza *externa* por unidad de carga igual a $-\vec{E}$, igual y opuesta a la fuerza eléctrica por unidad de carga $\vec{E}$. La ecuación 23.18 dice que $V_a - V_b = V_{ab}$, el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo realizado por unidad de carga por esta fuerza externa para desplazar una unidad de carga de b a a. Ésta es la misma interpretación alternativa que se estudió para la ecuación (23.13).

Las ecuaciones (23.17) y (23.18) demuestran que la unidad de la diferencia de potencial (1 V) es igual a la unidad del campo eléctrico (1 N/C) multiplicada por la unidad de distancia (1 m). Así, la unidad de campo eléctrico se expresa como 1 *volt por metro* (1 V/m), o como 1 N/C:

$$1\ \text{V/m} = 1\ \text{volt/metro} = 1\ \text{N/C} = 1\ \text{newton/coulomb}$$

En la práctica, la unidad habitual para la magnitud del campo eléctrico es el volt por metro.

Electrón volts

La magnitud e de la carga del electrón se usa para definir una unidad de energía que es útil en muchos cálculos con los sistemas atómico y nuclear. Cuando una partícula con carga q se desplaza de un punto en el que el potencial es V_b a otro en que es V_a, el cambio en la energía potencial U es

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Si la carga q es igual a la magnitud e de la carga del electrón, 1.602×10^{-19} C, y la diferencia de potencial es V_{ab}, el cambio en la energía es

$$U_a - U_b = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V}) = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Esta cantidad de energía se define como 1 **electrón volt** (1 eV):

$$1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

A menudo se utilizan los múltiplos meV, keV, MeV, GeV y TeV.

CUIDADO **Electrón volts contra volts** Recuerde que el electrón volt es una unidad de energía, ¡*no* una unidad de potencial ni de diferencia de potencial! ▮

Cuando una partícula con carga e se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 volt, el cambio en la *energía* potencial es 1 eV. Si la carga es algún múltiplo de e —digamos Ne—, el cambio en la energía potencial en electrón volts es N veces la diferencia de potencial expresada en volts. Por ejemplo, cuando una partícula alfa, que tiene una carga de $2e$, se desplaza entre dos puntos con diferencia de potencial de 1000 V, el cambio en la energía potencial es 2 (1000 eV) = 2000 eV. Para confirmar esto, se escribe

$$\begin{aligned} U_a - U_b = qV_{ab} &= (2e)(1000\ \text{V}) = (2)(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1000\ \text{V}) \\ &= 3.204 \times 10^{-16}\ \text{J} = 2000\ \text{eV} \end{aligned}$$

Si bien se ha definido el electrón volt en términos de energía *potencial*, se usa para *cualquier* forma de energía, como la energía cinética de una partícula en movimiento. Cuando se habla de "un millón de electrón volts protón," significa que hay un protón cuya energía cinética es de un millón de electrón volts (1 MeV), lo que es igual a $(10^6)(1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}) = 1.602 \times 10^{-13}\ \text{J}$ (figura 23.13).

23.13 Este acelerador en el Fermi National Accelerator Laboratory, en Illinois, da a los protones una energía cinética de 400 MeV (4×10^8 eV). Las etapas adicionales de aceleración incrementan su energía cinética a 980 GeV, o 0.98 TeV (9.8×10^{11} eV).

Ejemplo 23.3 Fuerza eléctrica y potencial eléctrico

En el interior de un acelerador lineal, un protón (carga $+e = 1.602 \times 10^{-19}$ C) se desplaza en línea recta de un punto a a otro punto b una distancia total $d = 0.50$ m. A lo largo de esta línea, el campo eléctrico es uniforme con magnitud $E = 1.5 \times 10^7$ V/m $= 1.5 \times 10^7$ N/C en la dirección de a a b. Determine *a*) la fuerza sobre el protón; *b*) el trabajo realizado sobre este por el campo; *c*) la diferencia de potencial $V_a - V_b$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la relación entre el campo eléctrico (que es un dato conocido) y la fuerza eléctrica (que es una de las variables buscadas). También utiliza la relación entre fuerza, trabajo y diferencia de energía potencial.

PLANTEAR: Se da el campo eléctrico, por lo que es fácil encontrar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el protón. El cálculo del trabajo que realiza esta fuerza sobre el protón también es fácil porque $\vec{\boldsymbol{E}}$ es uniforme, lo que significa que la fuerza es constante. Una vez que se conoce el trabajo, se determina la diferencia de potencial empleando la ecuación (23.13).

EJECUTAR: *a*) La fuerza sobre el protón está en la misma dirección que el campo eléctrico, y su magnitud es

$$F = qE = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5 \times 10^7\ \text{N/C}) = 2.4 \times 10^{-12}\ \text{N}$$

b) La fuerza es constante y está en la misma dirección que el campo eléctrico, de manera que el trabajo efectuado sobre el protón es

$$W_{a\to b} = Fd = (2.4 \times 10^{-12}\ \text{N})(0.50\ \text{m}) = 1.2 \times 10^{-12}\ \text{J}$$
$$= (1.2 \times 10^{-12}\ \text{J})\frac{1\ \text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$
$$= 7.5 \times 10^6\ \text{eV} = 7.5\ \text{MeV}$$

c) De la ecuación (23.13), la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga, que es

$$V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12}\ \text{J}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 7.5 \times 10^6\ \text{J/C}$$
$$= 7.5 \times 10^6\ \text{V} = 7.5\ \text{MV}$$

Se obtiene el mismo resultado con más facilidad si se recuerda que 1 electrón volt es igual a 1 volt multiplicado por la carga e. Como el trabajo realizado es 7.5×10^6 eV y la carga es e, la diferencia de potencial es $(7.5 \times 10^6\ \text{eV})/e = 7.5 \times 10^6$ V.

EVALUAR: El resultado del inciso *c*) puede comprobarse con las ecuaciones (23.17) o (23.18) para calcular la integral del campo eléctrico. El ángulo ϕ entre el campo constante $\vec{\boldsymbol{E}}$ y el desplazamiento es igual a cero, por lo que la ecuación (23.17) se convierte en

$$V_a - V_b = \int_a^b E\cos\phi\, dl = \int_a^b E\, dl = E\int_a^b dl$$

La integral de dt de a a b tan sólo es la distancia d, por lo que una vez más se obtiene

$$V_a - V_b = Ed = (1.5 \times 10^7\ \text{V/m})(0.50\ \text{m}) = 7.5 \times 10^6\ \text{V}$$

Ejemplo 23.4 Potencial debido a dos cargas puntuales

Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas puntuales, $q_1 = +12$ nC y $q_2 = -12$ nC, colocadas a una distancia de 10 cm una de la otra (figura 23.14). Calcule los potenciales en los puntos a, b y c sumando los potenciales debidos a cada carga, como en la ecuación (23.15).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste es el mismo ordenamiento de cargas que el del ejemplo 21.9 (sección 21.5). En ese ejemplo se calculó el *campo* eléctrico en cada punto por medio de una suma *vectorial*. La variable buscada en este problema es el *potencial* eléctrico V en tres puntos.

PLANTEAR: Para encontrar V en cada punto, en la ecuación (23.15) se hace la suma *algebraica*:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

EJECUTAR: En el punto a el potencial debido a la carga positiva q_1 es

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} &= (9.0\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{0.060\ \mathrm{m}}\\ &= 1800\ \mathrm{N\cdot m/C}\\ &= 1800\ \mathrm{J/C} = 1800\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

y el potencial debido a la carga q_2 es

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} &= (9.0\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(-12\times10^{-9}\ \mathrm{C})}{0.040\ \mathrm{m}}\\ &= -2700\ \mathrm{N\cdot m/C}\\ &= -2700\ \mathrm{J/C} = -2700\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

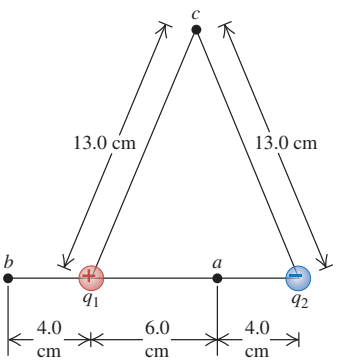
El potencial V_a en el punto a es la suma de éstos:

$$V_a = 1800\ \mathrm{V} + (-2700\ \mathrm{V}) = -900\ \mathrm{V}$$

Con cálculos similares se demuestra que en el punto b el potencial debido a la carga positiva es +2700 V, el potencial debido a la carga negativa es −770 V, y

$$V_b = 2700\ \mathrm{V} + (-770\ \mathrm{V}) = 1930\ \mathrm{V}$$

23.14 ¿Cuáles son los potenciales en los puntos a, b y c debidos a este dipolo eléctrico?



En el punto c, el potencial debido a la carga positiva es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = (9.0\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{0.13\ \mathrm{m}} = 830\ \mathrm{V}$$

El potencial debido a la carga negativa es −830 V, y el potencial total es igual a cero:

$$V_c = 830\ \mathrm{V} + (-830\ \mathrm{V}) = 0$$

El potencial también es igual a cero en el infinito (infinitamente lejos de ambas cargas).

EVALUAR: Al comparar este ejemplo con el 21.9 se aprecia que es mucho más fácil calcular el potencial eléctrico (un escalar) que el campo eléctrico (un vector). Hay que aprovechar esta simplificación siempre que sea posible.

Ejemplo 23.5 Potencial y energía potencial

Calcule la energía potencial asociada con una carga puntual de +4.0 nC si se coloca en los puntos a, b y c de la figura 23.14.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se conoce el valor del potencial eléctrico en cada uno de esos puntos, y se necesita encontrar la energía potencial para una carga puntual situada en cada punto.

PLANTEAR: Para cualquier carga puntual q, la energía potencial asociada es $U = qV$. Se utilizan los valores de V del ejemplo 23.4.

EJECUTAR: En el punto a,

$$U_a = qV_a = (4.0\times10^{-9}\ \mathrm{C})(-900\ \mathrm{J/C}) = -3.6\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

En el punto b,

$$U_b = qV_b = (4.0\times10^{-9}\ \mathrm{C})(1930\ \mathrm{J/C}) = 7.7\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

En el punto c,

$$U_c = qV_c = 0$$

Todos estos valores corresponden a U y V con valor de cero en el infinito.

EVALUAR: Observe que *no* se efectúa ningún trabajo neto sobre la carga de 4.0 nC si se desplaza del punto c al infinito *por cualquier trayectoria*. En particular, considere la trayectoria a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las otras dos cargas q_1 y q_2 en la figura 23.14. Como se vio en el ejemplo 21.9 (sección 21.5), en los puntos situados sobre la bisectriz, la dirección de $\vec{E}$ es perpendicular a la bisectriz. Por lo tanto, la fuerza sobre la carga de 4.0 nC es perpendicular a la trayectoria, y no se realiza ningún trabajo en cualquier desplazamiento a lo largo de ella.

Ejemplo 23.6 Cálculo del potencial por integración

Calcule el potencial a una distancia r de una carga puntual q, por medio de la integración del campo eléctrico, como en la ecuación (23.17).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema pide encontrar el potencial eléctrico a partir del campo eléctrico.

PLANTEAR: Para obtener el potencial V a una distancia r de la carga puntual, se establece que el punto a en la ecuación (23.17) sea la distancia r, y que el punto b esté en el infinito (figura 23.15). Como de costumbre, elegimos que el potencial sea cero a una distancia infinita a partir de la carga.

EJECUTAR: Para resolver la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos a y b. El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura 23.15, de manera que $d\vec{l}$ esté en la dirección radial y tenga magnitud dr. Si q es positiva, $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ siempre son paralelos, por lo que $\phi = 0$ y la ecuación (23.17) se convierte en

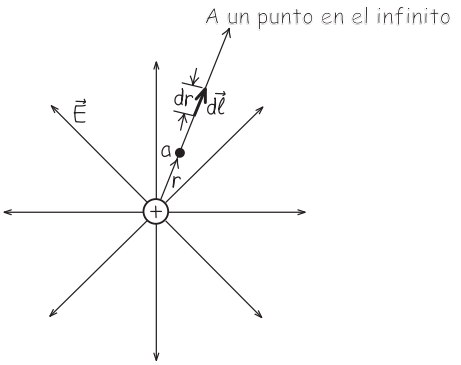
$$V - 0 = \int_r^\infty E\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\bigg|_r^\infty = 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Esto concuerda con la ecuación (23.14). Si q es negativa, $\vec{E}$ se dirige radialmente hacia la carga, en tanto que $d\vec{l}$ sigue yendo en forma radial, por lo que $\phi = 180°$. Como $\cos 180° = -1$, se agrega un signo menos al resultado anterior. Sin embargo, la magnitud del campo E siempre es positiva, y como q es negativa, se debe escribir $E = |q|/4\pi\epsilon_0 r = -q/4\pi\epsilon_0 r$, lo que da otro signo menos. Los dos signos menos se cancelan y el resultado anterior de V es válido para cargas puntuales de cualquier signo.

23.15 Cálculo de la energía potencial por integración de $\vec{E}$ para una sola carga puntual.



EVALUAR: Se obtiene el mismo resultado para el campo eléctrico mediante la ecuación (21.7), que es válida para cualquier signo de q, y escribiendo $d\vec{l} = \hat{r}dr$:

$$V - 0 = V = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}\,dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ejemplo 23.7 Desplazamiento a través de una diferencia de potencial

En la figura 23.16, una partícula de polvo, cuya masa es $m = 5.0 \times 10^{-9}$ kg $= 5.0\ \mu$g y con carga $q_0 = 2.0$ nC, parte del reposo en un punto a y se mueve en línea recta hasta un punto b. ¿Cuál es su velocidad v en el punto b?

SOLUCIÓN

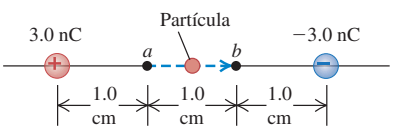
IDENTIFICAR: Este problema implica un cambio de rapidez y, por lo tanto, de la energía cinética de la partícula, por lo que se puede usar el enfoque de la energía. Este problema sería difícil de resolver sin el empleo de técnicas de energía, puesto que la fuerza que actúa sobre la partícula varía en magnitud conforme la partícula se desplaza de a a b.

PLANTEAR: Sobre la partícula actúa solo la fuerza eléctrica conservativa, por lo que la energía mecánica se conserva:

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

EJECUTAR: Para esta situación, $K_a = 0$ y $K_b = \frac{1}{2}mv^2$. Las energías potenciales (U) se obtienen de los potenciales (V) por medio de la ecuación (23.12): $U_a = q_0V_a$ y $U_b = q_0V_b$. Al sustituir esto en la ecuación de conservación de la energía y despejar v, se encuentra que

23.16 La partícula se mueve del punto a al punto b; su aceleración no es constante.



$$0 + q_0V_a = \frac{1}{2}mv^2 + q_0V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$

continúa

Con la ecuación (23.15) se calculan los potenciales, como se hizo en el ejemplo 23.4:

$$V_a = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \times \left(\frac{3.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.010\ \text{m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.020\ \text{m}}\right) = 1350\ \text{V}$$

$$V_b = (9.0 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \times \left(\frac{3.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.020\ \text{m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.010\ \text{m}}\right) = -1350\ \text{V}$$

$$V_a - V_b = (1350\ \text{V}) - (-1350\ \text{V}) = 2700\ \text{V}$$

Por último,

$$v = \sqrt{\frac{2(2.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(2700\ \text{V})}{5.0 \times 10^{-9}\ \text{kg}}} = 46\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El resultado es razonable: la carga de prueba positiva gana rapidez conforme se aleja de la carga positiva y se acerca a la carga negativa. Para comprobar la consistencia de las unidades en el último renglón del cálculo, se observa que 1 V = 1 J/C, por lo que el numerador bajo el radical tiene unidades de J o kg · m^2/s^2.

Se utiliza exactamente el mismo método para encontrar la rapidez de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 500 V en un tubo de osciloscopio, o de 20 kV en un cinescopio de televisión. Los problemas de final de capítulo incluyen varios ejemplos de tales cálculos.

Evalúe su comprensión de la sección 23.2 Si el *potencial* eléctrico en cierto punto es igual a cero, el *campo* eléctrico en ese punto, ¿tiene que valer cero? (*Sugerencia:* Considere el punto *c* en los ejemplos 23.4 y 21.9.)

23.3 Cálculo del potencial eléctrico

Cuando se calcula el potencial debido a una distribución de carga, por lo general se sigue una de dos rutas posibles. Si se conoce la distribución de carga se emplea la ecuación (23.15) o la (23.16). O si se conoce el modo en que el campo eléctrico depende de la posición, se usa la ecuación (23.17) estableciendo que el potencial es igual a cero en algún lugar conveniente. Algunos problemas requieren una combinación de estos enfoques.

Conforme analice estos ejemplos, compárelos con aquellos relacionados con el cálculo del *campo* eléctrico en la sección 21.5. Verá que es mucho más fácil calcular potenciales eléctricos escalares que campos eléctricos vectoriales. El mensaje es claro: siempre que sea posible, resuelva los problemas utilizando el enfoque de energía (potencial eléctrico y energía potencial eléctrica) en vez del enfoque de dinámica (campos eléctricos y fuerzas eléctricas).

Estrategia para resolver problemas 23.1 Cálculo del potencial eléctrico

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Recuerde que potencial es *energía potencial por unidad de carga*. La comprensión de este enunciado lo llevará lejos.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo que muestre con claridad las ubicaciones de las cargas (que pueden ser puntuales o una distribución continua de carga) y su elección de los ejes coordenados.
2. Indique en el dibujo la posición del punto en que se desea calcular el potencial eléctrico *V*. En ocasiones esta posición será arbitraria (por ejemplo, un punto a una distancia *r* del centro de una esfera con carga).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para encontrar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales utilice la ecuación (23.15). Si se da una distribución continua de carga, hay que ver la manera de dividirla en elementos infinitesimales para luego emplear la ecuación (23.16). Realice la integración utilizando los límites apropiados que incluyan toda la distribución de carga. En la integral tenga cuidado con la cantidades geométricas que varían y las que permanecen constantes.
2. Si se da el campo eléctrico, o si se puede encontrar con alguno de los métodos presentados en los capítulos 21 o 22, tal vez sea más fácil usar la ecuación (23.17) o (23.18) para calcular la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*. Cuando sea apropiado, hay que ejercer la libertad de definir que *V* es igual a cero en algún lugar conveniente, y elegir éste como punto *b*. (Para cargas puntuales, por lo general será el infinito. Para otras distribuciones de carga —en especial aquellas que se extienden al infinito—, quizá sea más conveniente o necesario que V_b sea igual a cero a cierta distancia finita de la distribución de carga. Esto es como definir que al nivel del suelo *U* es igual a cero en problemas relacionados con la gravitación.) En esas condiciones, el potencial en cualquier otro punto (por ejemplo, *a*) se obtiene con las ecuaciones (23.17) o (23.18) con $V_b = 0$.
3. Hay que recordar que el potencial es una cantidad *escalar*, no un *vector*, por lo que ¡no tiene componentes! Sin embargo, tal vez se tengan que usar componentes de los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ cuando se use la ecuación (23.17) o la (23.18).

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que la respuesta concuerde con la intuición. Si el resultado da *V* como función de la posición, elabore una gráfica de esta función para ver si es razonable. Si se conoce el campo eléctrico es posible hacer una comprobación aproximada del resultado para *V* verificando que *V* disminuye si nos movemos en la dirección de $\vec{E}$.

Ejemplo 23.8 Esfera conductora con carga

Una esfera sólida conductora de radio R tiene una carga total q. Encuentre el potencial en todos los lugares, tanto fuera como dentro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se usa la ley de Gauss como en el ejemplo 22.5 (sección 22.4) para encontrar el campo eléctrico en todos los puntos para esta distribución de carga. El resultado se emplea para determinar el potencial en todos los puntos.

PLANTEAR: Se elige como origen el centro de la esfera. Como se conoce E en todos los valores de la distancia r desde el centro de la esfera, se determina V como función de r.

EJECUTAR: Del ejemplo 22.5, en todos los puntos *fuera* de la esfera el campo es el mismo que si la esfera se eliminara y se sustituyera por una carga puntual q. Se considera $V = 0$ en el infinito, como se hizo para una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto en el exterior de la esfera a una distancia r de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual q en el centro:

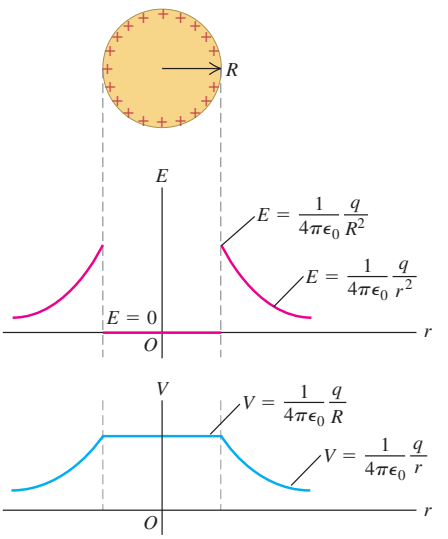
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es $V_{\text{superficie}} = q/4\pi\epsilon_0 R$.

En el *interior* de la esfera, $\vec{E}$ es igual a cero en todas partes; de otra manera, la carga se movería dentro de la esfera. De esta forma, si una carga de prueba se desplaza de un punto a otro en el interior de la esfera, no se efectúa ningún trabajo sobre la carga. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor $q/4\pi\epsilon_0 R$ en la superficie.

EVALUAR: La figura 23.17 ilustra el campo y el potencial como función de r para una carga positiva q. En este caso, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la esfera. Conforme nos alejamos de la esfera, en la dirección de $\vec{E}$, V disminuye (como debe ser). El campo eléctrico en la superficie tiene magnitud $E_{\text{superficie}} = |q|/4\pi\epsilon_0 R^2$.

23.17 Magnitud del campo eléctrico E y el potencial V en puntos dentro y fuera de una esfera conductora con carga positiva.



Ionización y descarga en corona

Los resultados del ejemplo 23.8 tienen numerosas consecuencias prácticas; una de ellas se relaciona con el potencial máximo que puede aplicarse en un conductor en el aire. Este potencial está limitado porque las moléculas de aire se *ionizan* y el aire se convierte en un conductor, a una magnitud de campo eléctrico de cerca de 3×10^6 V/m. De momento, suponga que q es positiva. Cuando se comparan las expresiones en el ejemplo 23.8 para el potencial $V_{\text{superficie}}$ y la magnitud de campo $E_{\text{superficie}}$ en la superficie de una esfera conductora con carga, se observa que $V_{\text{superficie}} = E_{\text{superficie}} R$. Así, si E_{m} representa la magnitud de campo eléctrico a la que el aire se vuelve conductor (lo que se conoce como *resistencia dieléctrica* del aire), entonces el potencial máximo V_{m} que se puede aplicar a un conductor esférico es

$$V_{\text{m}} = RE_{\text{m}}$$

Para una esfera conductora de 1 cm de radio en el aire, $V_{\text{m}} = (10^{-2}\text{ m})\,(3 \times 10^6\text{ V/m}) = 30{,}000$ V. Ninguna cantidad de "carga" puede sobrepasar el potencial de una esfera conductora de este tamaño en el aire en más de 30,000 V, aproximadamente; si se intenta aumentar el potencial más allá de esto agregando carga adicional, se provocaría que el aire circundante se ionizara y se convirtiera en conductor, y la carga adicional escaparía al aire.

Para lograr potenciales aún mayores, las máquinas de alto voltaje como los generadores Van de Graaff usan terminales esféricas con radios muy grandes (véase la figura 22.27 y la fotografía que abre el capítulo 22). Por ejemplo, una terminal de radio $R = 2$ m tiene un potencial máximo $V_{\text{m}} = (2\text{ m})\,(3 \times 10^6\text{ V/m}) = 6 \times 10^6\text{ V} = 6\text{ MV}$. Estas máquinas se colocan a veces en tanques presurizados llenos de un gas como el hexafluoruro de azufre (SF_6), que tiene un valor mayor de E_{m} que el del aire y, por consiguiente, es capaz de soportar campos aún más grandes sin volverse conductor.

23.18 El mástil metálico en la parte superior del edificio Empire State actúa como pararrayos. Es azotado por relámpagos hasta 500 veces al año.

El resultado del ejemplo 23.8 también explica lo que sucede con un conductor con carga y cuyo radio de curvatura es muy *pequeño*, como un objeto afilado o un alambre fino. Como el potencial máximo es proporcional al radio, incluso potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas en el aire producen campos suficientemente elevados inmediatamente afuera de las puntas para ionizar el aire que las rodea y convertirlo en un buen conductor. La corriente resultante y el resplandor asociado a ella (visible en un cuarto oscuro) se llama *corona*. Las impresoras láser y las máquinas de fotocopiado utilizan una corona de alambres muy finos para distribuir cargas sobre el tambor que forma las imágenes (figura 21.2).

En situaciones en que es importante *evitar* que exista una corona, se usan conductores de radio grande. Ejemplo de esto es la esfera metálica en el extremo de las antenas de radio para automóviles, lo que evita que se presente la corona, la cual provocaría estática. Otro ejemplo es el extremo romo de los pararrayos metálicos (figura 23.18). Si hay un exceso de carga en la atmósfera, como ocurre durante las tormentas, en el extremo romo se acumula una cantidad sustancial de carga del signo contrario. Como resultado, cuando la carga atmosférica se descarga a través de relámpagos, tiende a ser atraída hacia el pararrayos y no hacia otras estructuras cercanas que podrían resultar dañadas. (Un cable conductor que conecta el pararrayos con la tierra permite que la carga adquirida se disipe en forma inofensiva.) Un pararrayos con extremo agudo permitiría que se acumulara menos carga y por ello sería menos eficaz.

Ejemplo 23.9 Placas paralelas con cargas opuestas

Encuentre el potencial a cualquier altura y entre las dos placas paralelas con cargas opuestas que se estudiaron en la sección 23.1 (figura 23.19).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: De la sección 23.1 se conoce la *energía potencial* eléctrica U, para una carga de prueba q_0 como función de y. La meta aquí es obtener el *potencial* eléctrico V debido a las cargas en las placas como función de y.

PLANTEAR: De la ecuación (23.5), $U = q_0Ey$ en un punto a la distancia y sobre la placa inferior. Esta expresión se utiliza para determinar el potencial V en ese punto.

EJECUTAR: El potencia $V(y)$ en la coordenada y es la energía potencial por unidad de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0Ey}{q_0} = Ey$$

Se ha elegido que $U(y)$ y, por lo tanto, $V(y)$ sean igual a cero en el punto b, donde $y = 0$. Incluso si elegimos que el potencial sea diferente de cero en b, se cumpliría que

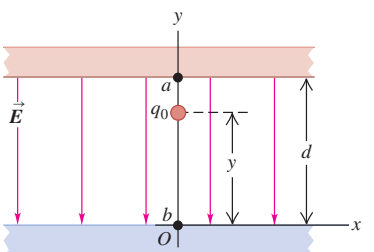
$$V(y) - V_b = Ey$$

El potencial disminuye conforme se mueve en la dirección de $\vec{E}$ de la placa superior a la inferior. En el punto a, donde $y = d$ y $V(y) = V_a$,

$$V_a - V_b = Ed \quad \text{y} \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

donde V_{ab} es el potencial de la placa positiva con respecto a la placa negativa. Es decir, el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las placas dividida entre la distancia que las separa. Para una diferencia de potencial dada V_{ab}, cuanto más pequeña sea la distancia entre las dos placas, mayor será la magnitud de E del campo eléctrico. (Esta relación entre E y V_{ab} se cumple *sólo* para la geometría plana descrita. *No* se aplica para situaciones tales como cilindros o esferas concéntricos en los que el campo eléctrico no es uniforme.)

23.19 Las placas paralelas con carga de la figura 23.2.



EVALUAR: El resultado nos dice cómo medir la densidad de carga sobre las cargas en las dos placas de la figura 23.19. En el ejemplo 22.8 (sección 22.4) se obtuvo la expresión $E = \sigma/\epsilon_0$ para el campo eléctrico E entre dos placas conductoras con densidades de carga superficiales $+\sigma$ y $-\sigma$. Al igualar esta expresión con $E = V_{ab}/d$ se obtiene lo siguiente:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{d}$$

La densidad superficial de carga en la placa positiva es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre las placas, y su valor σ se determina midiendo V_{ab}. Esta técnica es útil porque no hay instrumentos disponibles que lean directamente densidades superficiales de carga. En la placa negativa la densidad superficial de carga es $-\sigma$.

CUIDADO El "potencial cero" es arbitrario Quizá piense que si un cuerpo conductor tiene un potencial igual a cero, necesariamente debe tener también una carga neta de cero. ¡Pero no es así! Como ejemplo, la placa en $y = 0$ en la figura 23.19 tiene un potencial de cero ($V = 0$), pero tiene una carga por unidad de área, $-\sigma$, distinta de cero. Recuerde que no hay nada especial en la placa en que el potencial es igual a cero; este lugar se puede *definir* donde se desee.

Ejemplo 23.10 Una línea de carga infinita o un cilindro conductor con carga

Encuentre el potencial a la distancia r de una línea muy larga de carga con densidad lineal de carga λ (carga por unidad de longitud).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Un enfoque para este problema consiste en dividir la línea de carga en elementos infinitesimales, como se hizo en el ejemplo 21.11 (sección 21.5), para determinar el campo eléctrico que produce esa línea. Después se puede integrar como en la ecuación (23.16) para determinar el potencial neto V. Sin embargo, en este caso el objetivo se simplifica mucho porque ya se conoce el campo eléctrico.

PLANTEAR: Tanto en el ejemplo 21.11 como en el 22.6 (sección 22.4), se encontró que el campo eléctrico a una distancia r de una línea recta y larga de carga (figura 23.20a) sólo tiene una componente radial, dada por

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Esta expresión se utiliza para obtener el potencial por integración de $\vec{E}$, como en la ecuación (23.17).

EJECUTAR: Como el campo sólo tiene una componente radial, el producto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ es igual a $E_r dr$. Así, el potencial de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b, a distancias radiales r_a y r_b de la línea de carga, es

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Si se toma el punto b en el infinito y se establece que $V_b = 0$, se encuentra que V_a es *infinito*:

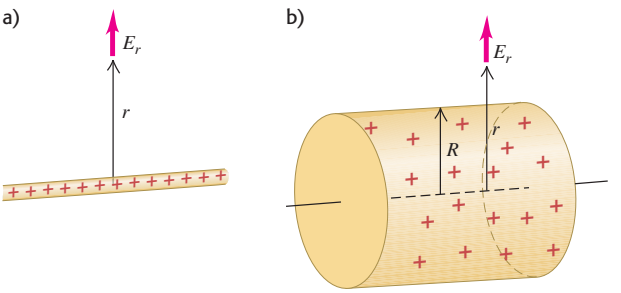
$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{\infty}{r_a} = \infty$$

Esto demuestra que si se trata de definir V como cero en el infinito, entonces V debe ser infinito a *cualquier* distancia infinita de la línea de carga. Ésta *no* es una manera útil de definir V para este problema. La dificultad estriba en que la distribución de carga en sí se extiende al infinito.

Para sortear la dificultad se debe recordar que V puede definirse como cero en cualquier punto que se desee. Se establece que $V_b = 0$ en el punto b a una distancia radial arbitraria r_0. Así, el potencial $V = V_a$ en el punto a a una distancia radial r está dado por $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_0/r)$, o bien,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

23.20 Campo eléctrico afuera de a) un alambre largo con carga positiva, y b) un cilindro largo con carga positiva.



EVALUAR: De acuerdo con el resultado, si λ es positiva, entonces V disminuye conforme r aumenta. Es así como debería ser: V decrece conforme nos movemos en la dirección de $\vec{E}$.

Del ejemplo 22.6, la expresión para E_r con la que se comenzó también se aplica fuera de un cilindro conductor largo con carga por unidad de longitud λ (figura 23.20b). De esta forma, nuestro resultado también da el potencial para ese cilindro, pero sólo para valores de r (la distancia desde el eje del cilindro) mayores o iguales que el radio R del cilindro. Si se elige que r_0 sea el radio del cilindro R, de manera que $V = 0$ cuando $r = R$, entonces en cualquier punto para el que $r > R$,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

En el interior del cilindro, $\vec{E} = \mathbf{0}$, y V tiene el mismo valor (cero) que en la superficie del cilindro.

Ejemplo 23.11 Anillo de carga

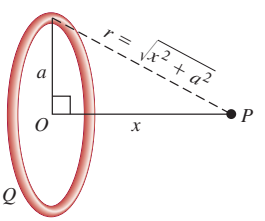
Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo delgado de radio a con carga total Q (figura 23.21). Determine el potencial en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro del anillo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Del ejemplo 21.10 (sección 21.5), ya se conoce el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje x, por lo que el problema se resuelve por integración de $\vec{E}$, como en la ecuación (23.17), para obtener V a lo largo de este eje. En forma alternativa, se podría dividir el anillo en segmentos infinitesimales y usar la ecuación (23.16) para encontrar V.

PLANTEAR: La figura 23.21 muestra que es mucho más fácil encontrar V en el eje empleando el enfoque de segmentos infinitesimales.

23.21 Toda la carga en un anillo con carga Q está a la misma distancia r de un punto P situado sobre el eje del anillo.



continúa

Eso se debe a que todas las partes del anillo (es decir, todos los elementos de la distribución de carga) están a la misma distancia r del punto P.

EJECUTAR: La figura 23.21 muestra que la distancia entre cada elemento de carga dq sobre el anillo y el punto P es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Por lo tanto, se saca de la integral el factor $1/r$ en la ecuación (23.16), y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

El potencial es una cantidad *escalar*, por lo que en este cálculo no es necesario considerar componentes de vectores, como se tuvo que hacer al obtener el campo eléctrico en P. Por ello, los cálculos del potencial son mucho más sencillos que los del campo.

EVALUAR: Cuando x es mucho más grande que a, la expresión anterior para V se vuelve aproximadamente igual a $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$. Esto corresponde al potencial de una carga puntual Q a una distancia x. Así que cuando se está muy lejos de un anillo con carga, éste se asemeja a una carga puntual. (En el ejemplo 21.10 se llegó a una conclusión similar con respecto al campo eléctrico de un anillo.)

Estos resultados para V también se obtienen por integración de la expresión para E_x, como en el ejemplo 21.10 (véase el problema 23.69).

Ejemplo 23.12 Línea de carga

Una carga eléctrica Q se encuentra distribuida de manera uniforme a lo largo de una línea o varilla delgada de longitud $2a$. Determine el potencial en el punto P a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia x de su centro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ésta es la misma situación que la del ejemplo 21.11 (sección 21.5), donde se obtuvo una expresión para el campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto arbitrario del eje x. Se pudo integrar $\vec{E}$ con la ecuación (23.17) para encontrar V. En vez de ello, se integrará sobre la distribución de carga utilizando la ecuación (23.16) para obtener un poco más de experiencia con este enfoque.

PLANTEAR: La situación se ilustra en la figura 23.22. A diferencia de la situación en el ejemplo 23.11, cada elemento de carga dQ está a una distancia diferente del punto P.

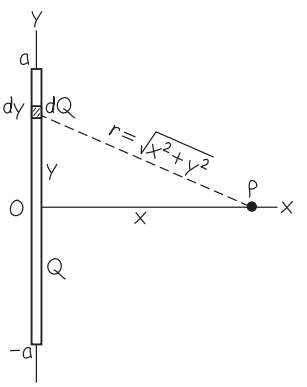
EJECUTAR: Igual que en el ejemplo 21.11, el elemento de carga dQ que corresponde a un elemento de longitud dy sobre la varilla, está dado por $dQ = (Q/2a)dy$. La distancia de dQ a P es $\sqrt{x^2 + y^2}$, y la contribución dV que hace al potencial en P es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para obtener el potencial en P debido a toda la varilla, se integra dV sobre la longitud de la varilla, de $y = -a$ a $y = a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

23.22 Diagrama para este problema.



La integral se puede consultar en una tabla. El resultado final es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

EVALUAR: El resultado se comprueba si se permite que x tienda al infinito. En este límite, el punto P está infinitamente lejos de toda la carga, por lo que es de esperar que V tienda a cero; se invita al lector a que verifique esto.

Como en el ejemplo 23.11, este problema es más sencillo que la obtención de $\vec{E}$ en el punto P, ya que el potencial es una cantidad escalar y no hay cálculos que impliquen vectores.

Evalúe su comprensión de la sección 23.3 Si el *campo* eléctrico en cierto punto es igual a cero, ¿el *potencial* eléctrico en ese punto tiene que ser igual a cero? (*Sugerencia:* Considere el centro del anillo en los ejemplos 23.11 y 21.10.)

23.4 Superficies equipotenciales

Las líneas de campo (véase la sección 21.6) nos ayudan a visualizar los campos eléctricos. En forma similar, el potencial en varios puntos de un campo eléctrico puede representarse gráficamente por medio de *superficies equipotenciales*. Éstas utilizan la misma idea fundamental que los mapas topográficos que emplean los excursionistas y alpinistas (figura 23.23). En un mapa topográfico las curvas de nivel unen puntos que se encuentran a la misma elevación. Se puede dibujar cualquier número de ellas, pero lo común es tener sólo algunas curvas de nivel a intervalos iguales de elevación. Si una masa m se moviera sobre el terreno a lo largo de una curva de nivel, la energía potencial gravitacional mgy no cambiaría porque la elevación y sería constante. Así,

las curvas de nivel en un mapa topográfico en realidad son curvas de energía potencial gravitacional constante. Las curvas de nivel están muy cerca unas de otras en las regiones en las que el terreno está muy inclinado y hay grandes cambios en la elevación en una distancia horizontal pequeña; en cambio, las curvas de nivel están muy separadas en los sitios en que el terreno tiene poca pendiente. Una pelota que se suelta cuesta abajo experimentaría la mayor fuerza gravitatoria ahí donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí.

Por analogía con las curvas de nivel en un mapa topográfico, una **superficie equipotencial** es una superficie tridimensional sobre la que el *potencial eléctrico V* es el mismo en todos los puntos. Si una carga de prueba q_0 se desplaza de un punto a otro sobre tal superficie, la energía potencial *eléctrica* q_0V permanece constante. En una región en la que existe un campo eléctrico, es posible construir una superficie equipotencial a través de cualquier punto. Los diagramas por lo general muestran sólo algunas superficies equipotenciales representativas, a menudo con iguales diferencias de potencial entre superficies adyacentes. Ningún punto puede estar en dos potenciales diferentes, por lo que las superficies equipotenciales para distintos potenciales nunca se tocan o intersecan.

23.23 Las curvas de nivel en un mapa topográfico son curvas de elevación constante, es decir, de energía potencial gravitacional constante.

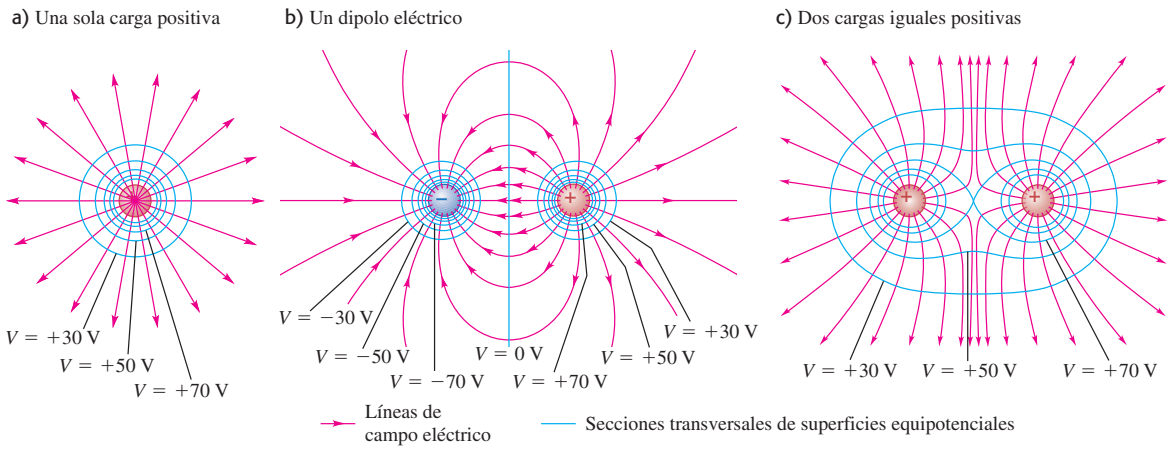
Superficies equipotenciales y líneas de campo

Como la energía potencial no cambia a medida que una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre esa carga. De ello se deriva que $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, de manera que la fuerza eléctrica $q_0\vec{E}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueva sobre la superficie. **Las líneas de campo y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares entre sí.** En general, las líneas de campo son curvas, y las equipotenciales son superficies curvas. Para el caso especial de un campo *uniforme*, en el que las líneas de campo son rectas, paralelas y están igualmente espaciadas, las superficies equipotenciales son *planos* paralelos perpendiculares a las líneas de campo.

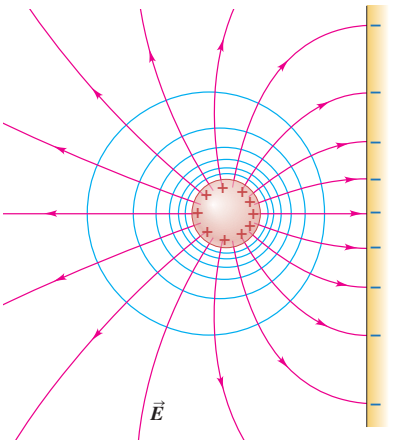
La figura 23.24 muestra tres configuraciones de cargas. Las líneas de campo en el plano de las cargas están representadas por líneas rojas, y las intersecciones de las superficies equipotenciales con este plano (es decir, las secciones transversales de estas superficies) se indican con líneas azules. Las superficies equipotenciales reales son tridimensionales. En cada cruce de una línea equipotencial y una línea de campo, las dos son perpendiculares.

En la figura 23.24 aparecen dibujadas superficies equipotenciales de manera que las diferencias de potencial entre superficies adyacentes sean iguales. En las regiones en que la magnitud de $\vec{E}$ es grande, las superficies equipotenciales están cerca entre sí

23.24 Secciones transversales de superficies equipotenciales (líneas azules) y líneas de campo eléctricas (líneas rojas) para arreglos de cargas puntuales. Hay diferencias de potencial iguales entre superficies adyacentes. Compare estos diagramas con los de la figura 21.29, que sólo muestran líneas de campo eléctricas.

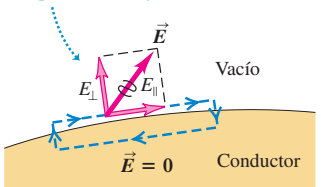


23.25 Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora siempre es una superficie equipotencial. Las líneas de campo son perpendiculares a una superficie conductora.

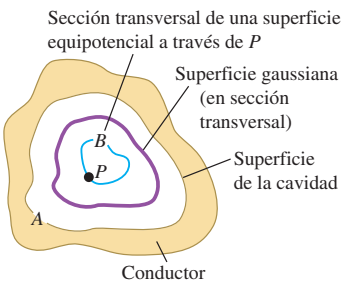


23.26 En todos los puntos de la superficie de un conductor, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie. Si $\vec{E}$ tuviera una componente tangencial, se realizaría una cantidad neta de trabajo sobre una carga de prueba al moverla en una espira como la que se ilustra, lo que es imposible porque la fuerza eléctrica es conservativa.

Un campo eléctrico imposible
Si el campo eléctrico inmediatamente afuera de un conductor tuviera una componente tangencial $E_{\parallel}$, una carga podría moverse en una espira con trabajo neto realizado.



23.27 Cavidad en un conductor. Si la cavidad no contiene carga, todos los puntos de tal cavidad están al mismo potencial, el campo eléctrico es igual a cero en cualquier lugar de ella, y no hay carga en ningún lugar sobre su superficie.



porque el campo efectúa una cantidad relativamente grande de trabajo sobre una carga de prueba en un desplazamiento más bien pequeño. Éste es el caso cerca de la carga puntual en la figura 23.24a o entre las dos cargas puntuales en la figura 23.24b; observe que en estas regiones las líneas de campo también están más próximas. Ésta es una analogía directa con la fuerza de la gravedad cuesta abajo, que es mayor en las regiones de un mapa topográfico donde las curvas de nivel están más cerca una de otra. A la inversa, en las zonas en que el campo es más débil, las superficies equipotenciales están más separadas; en la figura 23.24a esto ocurre en radios mayores, a la izquierda de la carga negativa o a la derecha de la positiva en la figura 23.24b, y a distancias mayores de ambas cargas en la figura 23.24c. (Tal vez parezca que dos superficies equipotenciales se intersecan en el centro de la figura 23.24c, violando la regla de que esto nunca puede suceder. De hecho, se trata de una sola superficie equipotencial en forma de "8".)

CUIDADO ***E* no necesita ser constante sobre una superficie equipotencial** En una superficie equipotencial dada, el potencial V tiene el mismo valor en todos los puntos. Sin embargo, en general la magnitud del campo eléctrico E *no es* la misma en todos los puntos sobre una superficie equipotencial. Por ejemplo, sobre la superficie equipotencial con la leyenda "$V = -30$ V" en la figura 23.24b, la magnitud E es menor a la izquierda de la carga negativa de lo que es entre las dos cargas. En la superficie equipotencial con forma de "8" en la figura 23.24c, $E = 0$ en el punto medio entre las dos cargas; en todos los demás puntos de esta superficie, E es distinto de cero.

Equipotenciales y conductores

El siguiente es un enunciado importante acerca de las superficies equipotenciales: **Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial.** Como el campo eléctrico $\vec{E}$ siempre es perpendicular a una superficie equipotencial, el enunciado se puede demostrar si se prueba que **cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico justo afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto** (figura 23.25). Se sabe que $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los lugares del interior del conductor; de otro modo, las cargas se moverían. En particular, en cualquier punto apenas dentro de la superficie, la componente de $\vec{E}$ tangente a la superficie es cero. Se deduce que la componente tangencial de $\vec{E}$ también es igual a cero inmediatamente *afuera* de la superficie. Si no fuera así, una carga podría recorrer una trayectoria rectangular parcialmente dentro y parcialmente fuera (figura 23.26) y volvería a su punto de partida con una cantidad neta de trabajo realizado sobre ella. Esto violaría la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos, por lo que la componente tangencial de $\vec{E}$ justo fuera de la superficie debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie. Así, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en cada punto, lo que prueba nuestra aseveración.

Por último, ahora es posible demostrar un teorema que se citó sin la prueba correspondiente en la sección 22.5. Es el siguiente: en una situación electrostática, si un conductor contiene una cavidad en cuyo interior no hay carga, entonces no puede haber carga neta *en ningún lugar* de la superficie de la cavidad. Esto significa que si se está dentro de una caja conductora con carga, se puede tocar con seguridad cualquier punto de las paredes interiores de la caja sin sufrir una descarga. Para probar este teorema, primero se demuestra que *todos los puntos en la cavidad están al mismo potencial.* En la figura 23.27, la superficie conductora A de la cavidad es una superficie equipotencial, como se acaba de demostrar. Suponga que el punto P en la cavidad estuviera a un potencial diferente; entonces se podría construir una superficie equipotencial B diferente que incluyera al punto P.

Ahora considere una superficie gaussiana, como se ilustra en la figura 23.27, entre las dos superficies equipotenciales. En virtud de la relación entre $\vec{E}$ y las equipotenciales, se sabe que el campo en cada punto entre las equipotenciales se dirige de A hacia B, o bien, en todos los puntos se dirige de B hacia A, lo que depende de cuál superficie equipotencial esté a un potencial mayor. En cualquier caso, es evidente que el flujo a través de esta superficie gaussiana es diferente de cero. Pero la ley de Gauss afirma que la carga encerrada por la superficie gaussiana no puede ser cero. Esto contradice nuestra suposición inicial de que en la cavidad *no hay* carga. Por lo tanto, el potencial en P *no puede* ser diferente del que hay en la pared de la cavidad.

Entonces, toda la región de la cavidad debe estar al mismo potencial. Pero para que esto sea verdadero, *el campo eléctrico dentro de la cavidad debe ser igual a cero*

en cualquier sitio. Por último, la ley de Gauss demuestra que el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie de un conductor es proporcional a la densidad superficial de carga σ en ese punto. Se concluye que *la densidad superficial de carga sobre la pared de la cavidad es igual a cero en todos los puntos*. Esta cadena de razonamientos parece tortuosa, pero su estudio cuidadoso resultará de gran utilidad.

CUIDADO **Superficies equipotenciales contra superficies gaussianas** No hay que confundir las superficies equipotenciales con las superficies gaussianas que se estudiaron en el capítulo 22, pues estas últimas son relevantes sólo cuando se utiliza la ley de Gauss y se elige *cualquier* superficie gaussiana que sea conveniente. *No* tenemos libertad de elegir la forma de las superficies equipotenciales; la forma está determinada por la distribución de la carga.

Evalúe su comprensión de la sección 23.4 Las formas de las superficies equipotenciales en la figura 23.24, ¿cambiarían si se invirtiera el signo de cada carga?

23.5 Gradiente de potencial

El campo eléctrico y el potencial se relacionan estrechamente. La ecuación (23.17), que se replantea a continuación, expresa un aspecto de esa relación:

Activ Online Physics
11.12.3 Potencial, campo y fuerza eléctricos

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

Si se conoce $\vec{\boldsymbol{E}}$ en varios puntos, esta ecuación se puede utilizar para calcular las diferencias de potencial. En esta sección se demuestra cómo hacer lo contrario: si se conoce el potencial V en varios puntos se puede determinar $\vec{\boldsymbol{E}}$. Considerando que V es función de las coordenadas (x, y, z) de un punto en el espacio, se demostrará que las componentes de $\vec{\boldsymbol{E}}$ se relacionan directamente con las *derivadas parciales* de V con respecto a x, y y z.

En la ecuación (23.17), $V_a - V_b$ es el potencial de a con respecto a b, es decir, el cambio de potencial encontrado en un desplazamiento de b a a. Esto se escribe como

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = -\int_a^b dV$$

donde dV es el cambio infinitesimal del potencial que acompaña un elemento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{l}}$ de la trayectoria de b a a. Al compararla con la ecuación (23.17) se tiene

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

Estas dos integrales deben ser iguales para *cualquier* par de límites a y b, y para que esto se cumpla los *integrados* deben ser iguales. Por lo tanto, para *cualquier* desplazamiento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{l}}$,

$$-dV = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

Para interpretar esta expresión, se escribe $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $d\vec{\boldsymbol{l}}$ en términos de sus componentes: $\vec{\boldsymbol{E}} = \hat{\boldsymbol{\imath}}\, E_x + \hat{\boldsymbol{\jmath}}\, E_y + \hat{\boldsymbol{k}}\, E_z$ y $d\vec{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{\imath}}\, dx + \hat{\boldsymbol{\jmath}}\, dy + \hat{\boldsymbol{k}}\, dz$. Así, se tiene que

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje x, por lo que $dy = dz = 0$. Entonces, $-dV = E_x dx$ o $E_x = -(dV/dx)_{y,\, z \text{ constantes}}$, donde el subíndice nos recuerda que en la derivada solo varía x; recuerde que V en general es una función de x, y y z. Pero esto es tan sólo lo que significa la derivada parcial $\partial V/\partial x$. Las componentes y y z de $\vec{\boldsymbol{E}}$ se relacionan con las derivadas correspondientes de V en la misma forma, por lo que se tiene

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{(componentes de } \vec{\boldsymbol{E}} \text{ en términos de } V\text{)} \tag{23.19}$$

Esto es congruente con las unidades de campo eléctrico, V/m. En términos de vectores unitarios, $\vec{E}$ se escribe como

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \qquad (\vec{E} \text{ en términos de } V) \tag{23.20}$$

En notación vectorial, la siguiente operación se llama **gradiente** de la función f:

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f \tag{23.21}$$

El operador denotado por el símbolo $\vec{\nabla}$ se llama "grad" o "del". Así, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \tag{23.22}$$

Esto se lee: "$\vec{E}$ es el negativo del gradiente de V" o "$\vec{E}$ es igual al gradiente negativo de V". La cantidad $\vec{\nabla} V$ se llama *gradiente de potencial*.

En cada punto, el gradiente de potencial señala en la dirección en que V se *incrementa* con más rapidez con un cambio de posición. De esta forma, en cada punto la dirección de $\vec{E}$ es la dirección en que V *disminuye* más rápido y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa a través del punto. Esto concuerda con nuestra observación en la sección 23.2, acerca de que desplazarse en dirección del campo eléctrico significa desplazarse en dirección del potencial decreciente.

La ecuación (23.22) no depende de la elección particular del punto cero para V. Si se cambiara el punto cero, el efecto sería cambiar V en cada punto en la misma cantidad; las derivadas de V serían las mismas.

Si $\vec{E}$ es radial con respecto a un punto o un eje, y r es la distancia del punto o eje, la relación correspondiente a las ecuaciones (23.19) es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad \text{(campo eléctrico radial)} \tag{23.23}$$

Es frecuente que se pueda calcular el campo eléctrico causado por una distribución de carga en cualquiera de las dos formas: directamente, con la suma de los campos $\vec{E}$ de cargas puntuales, o primero calculando el potencial y luego obteniendo su gradiente para encontrar el campo. Con frecuencia el segundo método resulta más fácil porque el potencial es una cantidad *escalar* que requiere cuando mucho la integración de una función escalar. El campo eléctrico es una cantidad *vectorial* y requiere el cálculo de componentes para cada elemento de carga y la integración separada de cada componente. Así, muy aparte de su significado fundamental, el potencial ofrece una técnica de cálculo muy útil en los cálculos del campo. A continuación se presentan dos ejemplos en los que se usa el conocimiento de V para encontrar el campo eléctrico.

Conviene recalcar una vez más que si se conoce $\vec{E}$ como función de la posición, se puede calcular V utilizando la ecuación (23.17) o la (23.18), y si se conoce V como función de la posición, se calcula $\vec{E}$ con las ecuaciones (23.19), (23.20) o (23.23). La obtención de V a partir de $\vec{E}$ requiere integración, y la obtención de $\vec{E}$ a partir de V requiere diferenciación.

Ejemplo 23.13 Potencial y campo de una carga puntual

De la ecuación (23.14), el potencial a una distancia radial r de una carga puntual q es $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. Encuentre el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión para V.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre el potencial eléctrico como función de la posición y el vector de campo eléctrico vectorial.

PLANTEAR: Por simetría, el campo eléctrico sólo tiene una componente radial E_r, y para encontrarla se usa la ecuación (23.23).

EJECUTAR: De la ecuación (23.23):

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico vectorial es

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

EVALUAR: El resultado concuerda con la ecuación (21.7), como debe ser.

Un enfoque alternativo es ignorar la simetría radial, escribir la distancia radial como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y tomar las derivadas de V con respecto a x, y y z, como en la ecuación (23.20). Se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$
$$= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

y de manera similar,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

De la ecuación (23.20), el campo eléctrico es

$$\vec{E} = -\left[\hat{\imath}\left(-\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{\jmath}\left(-\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{k}\left(-\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Este enfoque produce la misma respuesta, pero con un poco más de esfuerzo. Como resulta evidente, es mejor aprovechar la simetría de la distribución de carga siempre que sea posible.

Ejemplo 23.14 Potencial y campo de un anillo de carga

En el ejemplo 23.11 (sección 23.3) se encontró que para un anillo de carga con radio a y carga total Q, el potencial en el punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Encuentre el campo eléctrico en P.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se da V como función de x a lo largo del eje x, y se desea obtener el campo eléctrico en un punto sobre este eje.

PLANTEAR: De la simetría de la distribución de carga que se muestra en la figura 23.21, el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría del anillo sólo tiene una componente x, la cual se encuentra con la primera de las ecuaciones (23.19).

EJECUTAR: La componente x del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

EVALUAR: Esto concuerda con el resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.10 (sección 21.5).

CUIDADO No use expresiones donde no se aplican En este ejemplo, V no parece ser función de y o z, pero *no* sería correcto concluir que $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$ y que $E_y = E_z = 0$ en todo lugar. La razón es que nuestra expresión para V es válida *sólo para puntos sobre el eje x*, donde $y = z = 0$. Así que nuestra expresión para E_x es válida sólo sobre el eje x. Si se tuviera la expresión completa para V válida en *todos* los puntos del espacio, entonces se podría usar para encontrar las componentes de $\vec{E}$ en cualquier punto utilizando la ecuación (23.19).

Evalúe su comprensión de la sección 23.5 En cierta región del espacio, el potencial está dado por $V = A + Bx + Cy^3 + Dxy$, donde A, B, C y D son constantes positivas. ¿Cuál de estos enunciados sobre el campo eléctrico $\vec{E}$ en esta región del espacio es correcto? (Puede haber más de una respuesta correcta.) i) Aumentar el valor de A incrementará el valor de $\vec{E}$ en todos los puntos; ii) aumentar el valor de A disminuirá el valor de $\vec{E}$ en todos los puntos; iii) $\vec{E}$ no tiene componente z; iv) el campo eléctrico es igual a cero en el origen ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$).

CAPÍTULO 23 RESUMEN

Energía potencial eléctrica: La fuerza eléctrica causada por cualquier conjunto de cargas es una fuerza conservativa. El trabajo W realizado por la fuerza eléctrica sobre una partícula con carga que se mueve en un campo eléctrico se representa por el cambio en una función de energía potencial U.

La energía potencial eléctrica para dos cargas puntuales q y q_0 depende de su separación r. La energía potencial eléctrica para una carga q_0 en presencia de un conjunto de cargas q_1, q_2, q_3 depende de la distancia de q_0 a cada una de las demás cargas. (Véanse los ejemplos 23.1 y 23.2.)

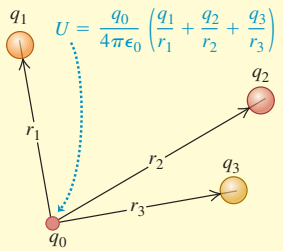
$$W_{a\to b} = U_a - U_b \tag{23.2}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \tag{23.9}$$

(dos cargas puntuales)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{23.10}$$

(q_0 en presencia de otras cargas puntuales)



Potencial eléctrico: El potencial, denotado por V, es energía potencial por unidad de carga. La diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la cantidad de trabajo que se requeriría para trasladar una unidad de carga de prueba positiva entre esos puntos. El potencial V debido a una cantidad de carga se calcula mediante una suma (si la carga es un conjunto de cargas puntuales) o mediante integración (si la carga es una distribución). (Véanse los ejemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 y 23.12.)

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b, también llamada *potencial* de a con respecto a b, está dado por la integral de línea de $\vec{E}$. El potencial de un punto dado se encuentra obteniendo primero $\vec{E}$ y después resolviendo la integral. (Véanse los ejemplos 23.6, 23.8, 23.9 y 23.10.)

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \tag{23.14}$$

(debido a una carga puntual)

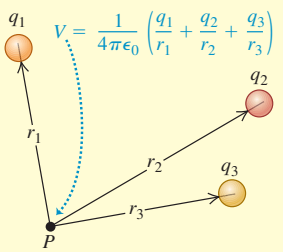
$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \tag{23.15}$$

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

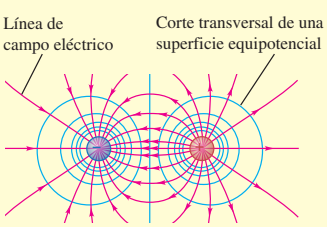
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \tag{23.16}$$

(debido a una distribución de carga)

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \tag{23.17}$$



Superficies equipotenciales: Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial tiene el mismo valor en cada punto. En el punto en que una línea de campo cruza una superficie equipotencial, ambas son perpendiculares. Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial y todos los puntos en el interior del conductor están al mismo potencial. Cuando una cavidad dentro de un conductor no contiene carga, toda la cavidad es una región equipotencial y no hay carga superficial en ninguna parte de la superficie de la cavidad.



Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico: Si se conoce el potencial V como función de las coordenadas x, y y z, las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto están dadas por las derivadas parciales de V. (Véanse los ejemplos 23.13 y 23.14.)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{23.19}$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{23.20}$$

(forma vectorial)

Términos clave

energía potencial (eléctrica), *781*
potencial (eléctrico), *787*
volt, *788*
voltaje, *788*
electrón volt, *790*
superficie equipotencial, *799*
gradiente, *802*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Una diferencia de potencial grande y constante V_{ab} se mantiene entre la herramienta de soldadura (*a*) y los elementos metálicos por soldar (*b*). Del ejemplo 23.9 (sección 23.3), el campo eléctrico entre dos conductores separados por una distancia d tiene magnitud $E = V_{ab}/d$. Entonces, d debe ser pequeña para que la magnitud del campo E sea suficientemente grande como para que ionice el gas entre los conductores a y b (véase la sección 23.3) y produzca un arco a través de este gas.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

23.1 Respuestas: *a*) i), *b*) ii) Las tres cargas q_1, q_2 y q_3 son positivas. De ahí que la energía potencial eléctrica total U sea positiva. Esto significa que se requeriría trabajo positivo para llevar las tres cargas del infinito a las posiciones que se indican en la figura 21.14, y trabajo *negativo* para llevarlas de regreso de esas posiciones al infinito.

23.2 Respuesta: no Si $V = 0$ en cierto punto, $\vec{E}$ *no* tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo de esto es el punto c en las figuras 21.23 y 23.14, para el que hay un campo eléctrico en dirección $+x$ (véase el ejemplo 21.9 en la sección 21.5) aun cuando $V = 0$ (véase el ejemplo 23.4). Este resultado no es sorprendente, ya que V y $\vec{E}$ son cantidades muy diferentes: V es la cantidad de trabajo que se requiere para llevar una carga unitaria del infinito al punto en cuestión, mientras que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica que actúa sobre una unidad de carga cuando llega a ese punto.

23.3 Respuesta: no Si $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cierto punto, V *no* tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo es el punto O en el centro del anillo con carga en las figuras 21.24 y 23.21. Del ejemplo 21.10 (sección 21.5), el campo eléctrico es igual a cero en O ya que las contribuciones de las diferentes partes del anillo se anulan por completo. Sin embargo, del ejemplo 23.11, el potencial en O *no* es igual a cero: este punto corresponde a $x = 0$, por lo que $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/a)$. Este valor de V corresponde al trabajo que se tendría que efectuar para desplazar una unidad de carga de prueba positiva a lo largo de una trayectoria del infinito al punto O; no es igual a cero porque el anillo con carga repele la carga de prueba, de manera que debe hacerse trabajo positivo para llevar la carga de prueba en dirección del anillo.

23.4 Respuesta: no Si las cargas positivas en la figura 23.24 se sustituyeran por cargas negativas, y viceversa, las superficies equipotenciales serían iguales, pero el signo del potencial se invertiría. Por ejemplo, las superficies en la figura 23.24b con potencial $V = +30$ V y $V = -50$ V tendrían potenciales $V = -30$ V y $V = +50$ V, respectivamente.

23.5 Respuesta: iii) De las ecuaciones (23.19), las componentes del campo eléctrico son $E_x = -\partial V/\partial x = B + Dy$, $E_y = -\partial V/\partial y = 3Cy^2 + Dx$ y $E_z = -\partial V/\partial z = 0$. El valor de A no tiene efecto, lo que significa que se puede sumar una constante al potencial eléctrico en todos los puntos sin que cambien $\vec{E}$ o la diferencia de potencial entre dos puntos. El potencial no depende de z, por lo que la componente z de $\vec{E}$ es igual a cero. Observe que en el origen el campo eléctrico no es igual a cero porque tiene una componente x distinta de cero: $E_x = B$, $E_y = 0$, $E_z = 0$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P23.1. Un estudiante preguntó: "Como el potencial eléctrico siempre es proporcional a la energía potencial, ¿por qué molestarse con el concepto de potencial?" ¿Qué respondería usted?

P23.2. El potencial (en relación con un punto en el infinito) a media distancia entre dos cargas de igual magnitud y signo opuesto es igual a cero. ¿Es posible traer una carga de prueba del infinito a ese punto medio en forma tal que no se efectúe trabajo en ninguna parte del desplazamiento? Si es así, describa cómo se puede lograr. Si no es posible, explique por qué.

P23.3. ¿Es posible tener una configuración de dos cargas puntuales separadas por una distancia finita de manera que la energía potencial eléctrica del arreglo sea la misma que si las dos cargas estuvieran separadas por una distancia infinita? ¿Por qué? ¿Qué pasaría si hubiera tres cargas? Explique su razonamiento.

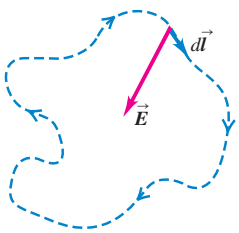
P23.4. Como el potencial puede tener cualquier valor que se desee en función de la elección del nivel de referencia de potencial cero, ¿cómo "sabe" un voltímetro qué lectura hacer cuando se conecta entre dos puntos?

P23.5. Si $\vec{E}$ es igual a cero en todo lugar a lo largo de cierta trayectoria que vaya del punto A al B, ¿cuál es la diferencia de potencial entre esos dos puntos? ¿Significa esto que $\vec{E}$ es igual a cero en todos los puntos a lo largo de *cualquier* trayectoria de A a B? Explique su respuesta.

P23.6. Si $\vec{E}$ es igual a cero a través de cierta región del espacio, ¿el potencial también es necesariamente igual a cero en esa región? ¿Por qué? Si no es así, ¿qué *puede* decirse acerca del potencial?

P23.7. Si se efectúa la integral del campo eléctrico $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para una trayectoria *cerrada* como la que se aprecia en la figura 23.28, la integral *siempre* será igual a cero, independientemente de la forma de la trayectoria y de dónde se localicen las cargas en relación con ésta. Explique por qué es así.

Figura **23.28** Pregunta P23.7.



P23.8. La diferencia de potencial entre dos terminales de una batería AA (de las que se usan en las linternas y los estéreos portátiles) es de 1.5 V. Si se colocan dos baterías AA extremo con extremo con la terminal positiva de una batería en contacto con la terminal negativa de la otra, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las terminales en los extremos expuestos de la combinación? ¿Qué pasa si las dos terminales positivas se tocan entre sí? Explique su razonamiento.

P23.9. Es fácil producir una diferencia de potencial de varios miles de volts entre el cuerpo de una persona y el piso, frotando los zapatos sobre una alfombra de nailon. Cuando usted toca una perilla metálica recibe una descarga moderada. Sin embargo, es probable que el contacto con una línea eléctrica de voltaje comparable sea mortal. ¿A qué se debe la diferencia?

P23.10. Si se conoce el potencial eléctrico en un solo punto, ¿se puede determinar $\vec{E}$ en ese punto? Si es así, ¿cómo? Si no es posible, ¿por qué?

P23.11. Como las líneas de campo eléctricas y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares, dos superficies equipotenciales nunca se cruzan; si lo hicieran, la dirección de $\vec{E}$ sería ambigua en los puntos de intersección. Pero dos superficies equipotenciales parecen cruzarse en el centro de la figura 23.24c. Explique por qué no hay ambigüedad acerca de la dirección de $\vec{E}$ en este caso particular.

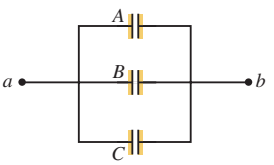
P23.12. El campo eléctrico debido a una lámina muy grande con carga es independiente de la distancia desde la lámina, aunque los campos debidos a las cargas puntuales individuales en la lámina obedecen una ley del inverso del cuadrado. ¿Por qué el campo de la lámina no es más débil con el aumento de la distancia?

P23.13. Es frecuente que se diga que si un punto A está a un potencial más elevado que un punto B, entonces A está en un potencial positivo y B en un potencial negativo. ¿Se concluye necesariamente que un punto en un potencial positivo está cargado positivamente, o que un punto en un potencial negativo está cargado negativamente? Ilustre sus respuestas con ejemplos claros y sencillos.

P23.14. Una esfera conductora va a cargarse induciendo en ella poco a poco carga positiva hasta que la carga total sea Q. Se afirma que el trabajo total que se requiere para tal efecto es proporcional a Q^2. ¿Esto es correcto? ¿Por qué? Una esfera conductora va a cargarse induciendo en ella poco a poco carga positiva hasta que la carga total sea Q. Se afirma que el trabajo total que se requiere para tal efecto es proporcional a Q^2. ¿Esto es correcto? ¿Por qué?

P23.15. Tres pares de placas paralelas de metal (A, B y C) están conectadas como se ilustra en la figura 23.29, y una batería mantiene un potencial de 1.5 V a través de ab. ¿Qué puede decirse acerca de la diferencia de potencial a través de cada par de placas? ¿Por qué?

Figura **23.29** Pregunta P23.15.



P23.16. Se coloca una esfera conductora entre dos placas paralelas con carga como las que se ilustran en la figura 23.2. El campo eléctrico dentro de la esfera, ¿depende precisamente de dónde se coloque la esfera entre las placas? ¿Qué pasa con el potencial eléctrico dentro de la esfera? ¿Las respuestas a estas preguntas dependen de si en la esfera hay o no una carga neta? Explique su razonamiento.

P23.17. Un conductor con una carga neta Q tiene una cavidad hueca y vacía en su interior. ¿El potencial varía de un punto a otro dentro del material del conductor? ¿Qué sucede dentro de la cavidad? ¿Cómo se compara el potencial en el interior de la cavidad con el potencial dentro del material del conductor?

P23.18. Una línea de cd de alto voltaje cae sobre un automóvil, por lo que toda la carrocería metálica del vehículo está a un potencial de 10,000 V con respecto a tierra. ¿Qué les pasa a los ocupantes cuando *a*) están sentados dentro del automóvil, y *b*) salen de éste? Explique su razonamiento.

P23.19. Cuando se acerca una tormenta, los marineros en altamar en ocasiones observan un fenómeno llamado "fuego de San Elmo", que consiste en un resplandor azuloso en las puntas de los mástiles. ¿Qué es lo que lo causa? ¿Por qué ocurre en los extremos de los mástiles? ¿Por qué es más pronunciado el efecto cuando los mástiles se encuentran húmedos? (*Sugerencia:* considere que el agua de mar es un buen conductor de la electricidad.)

P23.20. Una carga puntual positiva se coloca cerca de un plano conductor muy grande. Un profesor de física asevera que el campo creado por esta configuración es el mismo que el que se obtendría si se retirara el plano y se colocara una carga puntual negativa de igual magnitud en la posición equivalente de una imagen en el espejo detrás de la posición inicial del plano. ¿Es correcto esto? ¿Por qué? (*Sugerencia:* estudie la figura 23.24b.)

P23.21. En electrónica se acostumbra definir el potencial de tierra (piense en la Tierra como en un conductor muy grande) como igual a cero. ¿Esto es congruente con el hecho de que la Tierra tiene una carga eléctrica neta diferente de cero? (Consulte el ejercicio 21.32.)

Ejercicios

Sección 23.1 Energía potencial eléctrica

23.1. Una carga puntual $q_1 = +2.40\ \mu C$ se mantiene estacionaria en el origen. Una segunda carga puntual $q_2 = -4.30\ \mu C$ se mueve del punto $x = 0.150$ m, $y = 0$, al punto $x = 0.250$ m, $y = 0.250$ m. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre q_2?

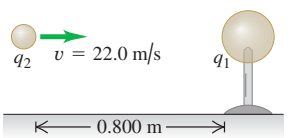
23.2. Una carga puntual q_1 se mantiene estacionaria en el origen. Se coloca una segunda carga q_2 en el punto a, y la energía potencial eléctrica del par de cargas es $+5.4 \times 10^{-8}$ J. Cuando la segunda carga se mueve al punto b, la fuerza eléctrica sobre la carga realiza -1.9×10^{-8} J de trabajo. ¿Cuál es la energía potencial eléctrica del par de cargas cuando la segunda carga se encuentra en el punto b?

23.3. Energía del núcleo. ¿Cuánto trabajo se necesita para ensamblar un núcleo atómico que contiene tres protones (como el del Be) si se modela como un triángulo equilátero de lado 2.00×10^{-15} m con un protón en cada vértice? Suponga que los protones parten desde muy lejos.

23.4. *a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para empujar dos protones con mucha lentitud desde una separación de 2.00×10^{-10} m (una distancia atómica común) a 3.00×10^{-15} m (una distancia nuclear común)? *b*) Si los dos protones se liberan desde el reposo en la distancia más cercana del inciso *a*), ¿con qué rapidez se moverán cuando alcancen su separación original?

23.5. Una esfera pequeña de metal tiene una carga neta de $q_1 = -2.80\ \mu C$ y se mantiene en posición estacionaria por medio de soportes aislados. Una segunda esfera metálica también pequeña con carga neta de $q_2 = -7.80\ \mu C$ y masa de 1.50 g es proyectada hacia q_1. Cuando las dos esferas están a una distancia de 0.800 m una de otra, q_2 se mueve hacia q_1 con una rapidez de 22.0 m/s (figura 23.30). Suponga que las dos esferas pueden considerarse como cargas puntuales y que se ignora la fuerza de gravedad. *a*) ¿Cuál es la rapidez de q_2 cuando las esferas están a 0.400 m una de la otra? *b*) ¿Qué tan cerca de $q_1$llega la q_2?

Figura **23.30** Ejercicio 23.5.



23.6. ¿Qué tan lejos de una carga puntual de $-7.20\ \mu C$ debe situarse una carga puntual de $+2.30\ \mu C$ para que la energía potencial eléctrica U del par de cargas sea -0.400 J? (Considere U igual a cero cuando las cargas tengan separación infinita.)

23.7. Una carga puntual $Q = +4.60\ \mu C$ se mantiene fija en el origen. Una segunda carga $q = +1.20\ \mu C$ con masa de 2.80×10^{-4} kg se coloca en el eje x, a 0.250 m del origen. *a*) ¿Cuál es la energía potencial eléctrica U del par de cargas? (Considere U igual a cero cuando las cargas tengan separación infinita.) *b*) La segunda carga puntual se libera del reposo. ¿Cuál es su rapidez cuando su distancia al origen es i) 0.500 m; ii) 5.00 m; iii) 50.0 m?

23.8. Se colocan tres cargas puntuales iguales de $1.20\ \mu C$ en las esquinas de un triángulo equilátero cuyos lados miden 0.500 m de longitud. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? (Considere la energía potencial de las tres cargas igual a cero cuando se encuentren separadas por una distancia infinita.)

23.9. Una carga puntual $q_1 = 4.00$ nC está situada en el origen, y una segunda carga puntual $q_2 = -3.00$ nC está en el eje x en $x = +20.0$ cm. Una tercera carga puntual $q_3 = 2.00$ nC se coloca sobre el eje x entre q_1 y q_2. (Considere la energía potencial de las tres cargas igual a cero cuando estén separadas por una distancia infinita.) *a*) ¿Cuál es la

energía potencial del sistema de tres cargas si q_3 se coloca en $x = +10.0$ cm? *b*) ¿Dónde debe situarse q_3 para hacer que la energía potencial del sistema sea igual a cero?

23.10. Cuatro electrones se localizan en las esquinas de un cuadrado de 10.0 nm de lado, con una partícula alfa en su parte media. ¿Cuánto trabajo se necesita hacer para mover la partícula alfa al punto medio de uno de los lados del cuadrado?

23.11. Tres cargas puntuales que al principio están infinitamente alejadas entre sí, se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero con lados *d*. Dos de las cargas puntuales son idénticas y tienen carga *q*. Si se requiere un trabajo neto igual a cero para situar las tres cargas en las esquinas del triángulo, ¿cuál debe ser el valor de la tercera carga?

23.12. Dos protones son lanzados por un acelerador ciclotrón directamente uno en dirección del otro con una rapidez de 1000 km/s, medida con respecto a la Tierra. Encuentre la fuerza eléctrica máxima que ejercerá cada protón sobre el otro.

Sección 23.2 Potencial eléctrico

23.13. Un campo eléctrico uniforme está dirigido hacia el este. El punto *B* está a 2.00 m al oeste del punto *A*, el punto *C* está a 2.00 m del punto *A*, y el punto *D* se localiza a 2.00 m al sur de *A*. En cada punto, *B*, *C* y *D*, ¿el potencial es mayor, menor o igual al del punto *A*? Exponga el razonamiento que sustenta sus respuestas.

23.14. Se colocan cargas puntuales idénticas $q = +5.00\ \mu$C en las esquinas opuestas de un cuadrado. La longitud de cada lado del cuadrado es de 0.200 m. Una carga puntual $q_0 = -2.00\ \mu$C se sitúa en una de las esquinas vacías. ¿Cuánto trabajo sobre q_0 realiza la fuerza eléctrica cuando q_0 se mueve a la otra esquina vacía?

23.15. Una partícula pequeña tiene carga de $-5.00\ \mu$C y masa de 2.00×10^{-4} kg. Se desplaza desde el punto *A*, donde el potencial eléctrico es $V_A = +200$ V, al punto *B*, donde el potencial eléctrico es $V_B = +800$V. La fuerza eléctrica es la única que actúa sobre la partícula, la cual tiene una rapidez de 5.00 m/s en el punto *A*. ¿Cuál es su rapidez en el punto *B*? ¿Se mueve más rápido o más lento en *B* que en *A*? Explique su respuesta.

23.16. Una partícula con carga de +4.20 nC está en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido hacia la izquierda. Se libera desde el reposo y se mueve a la izquierda; después de que se ha desplazado 6.00 cm, su energía cinética es de $+1.50 \times 10^{-6}$ J. *a*) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? *b*) ¿Cuál es el potencial del punto de inicio con respecto al punto final? *c*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$?

23.17. Una carga de 28.0 nC se coloca en un campo eléctrico uniforme que está dirigido verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud de 4.00×10^4 V/m. ¿Qué trabajo hace la fuerza eléctrica cuando la carga se mueve *a*) 0.450 m a la derecha; *b*) 0.670 m hacia arriba; *c*) 2.60 m con un ángulo de 45.0° hacia abajo con respecto a la horizontal?

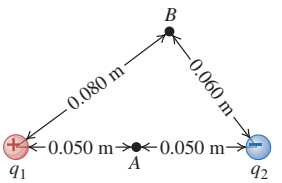
23.18. Dos cargas puntuales estacionarias de +3.00 nC y +2.00 nC están separadas por una distancia de 50.0 cm. Se libera un electrón desde el reposo en un punto a la mitad de camino entre las dos cargas y se mueve a lo largo de la línea que las conecta. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando está a 10.0 cm de la carga de +3.00 nC?

23.19. Una carga puntual tiene una carga de 2.50×10^{-11} C. ¿A qué distancia de la carga puntual el potencial eléctrico es de *a*) 90.0 V y *b*) 30.0 V? Considere el potencial igual a cero a una distancia infinita de la carga.

23.20. Dos cargas de igual magnitud *Q* se mantienen separadas una distancia *d*. Considere sólo puntos sobre la línea que pasa a través de ambas cargas. *a*) Si las dos cargas tienen el mismo signo, encuentre la ubicación de todos los puntos (si los hay) en los que i) el potencial (en relación con el infinito) es igual a cero (en estos puntos, ¿el campo eléctrico es cero?), y ii) el campo eléctrico es de cero (en estos puntos, ¿el potencial es de cero?). *b*) Repita el inciso *a*) para dos cargas que tienen signos opuestos.

23.21. Dos cargas puntuales $q_1 = +2.40$ nC y $q_2 = -6.50$ nC están separadas 0.100 m. El punto *A* está a la mitad de la distancia entre ellas; el punto *B* está a 0.080 m de q_1 y 0.060 m de q_2 (figura 23.31). Considere el potencial eléctrico como cero en el infinito. Determine *a*) el potencial en el punto *A*; *b*) el potencial en el punto *B*; *c*) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de 2.50 nC que viaja del punto *B* al punto *A*.

Figura 23.31 Ejercicio 23.21.



23.22. Dos cargas puntuales positivas, cada una con magnitud *q*, se encuentran fijas sobre el eje *y* en los puntos $y = +a$ y $y = -a$. Considere el potencial igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *a*) Indique en un diagrama la posición de las cargas. *b*) ¿Cuál es el potencial V_0 en el origen? *c*) Demuestre que el potencial en cualquier punto sobre el eje *x* es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

(*d*) Elabore la gráfica del potencial sobre el eje *x* como función de *x* sobre el intervalo de $x = -4a$ a $x = +4a$. *e*) ¿Cuál es el potencial cuando $x \gg a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.23. Una carga $+q$ se localiza en el punto $x = 0$, $y = -a$, y una carga negativa $-q$ se encuentra en el punto $x = 0$, $y = +a$. *a*) Señale en un diagrama las posiciones de las cargas. *b*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en los puntos sobre el eje *x* como función de la coordenada *x*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *c*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *x* como función de *x* en el intervalo de $x = -4a$ a $x = +4a$. *d*) ¿Cuál es la respuesta al inciso *b*) si las dos cargas se intercambian de manera que $+q$ esté en $y = +a$ y $-q$ esté en $y = -a$?

23.24. Considere la configuración de cargas descrita en el ejercicio 23.23. *a*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en puntos sobre el eje *y* como función de la coordenada *y*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *b*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *y* como función de *y* en el intervalo de $y = -4a$ a $y = +4a$. *c*) Demuestre que para $y \gg a$, el potencial en un punto sobre el eje *y* positivo está dado por $V = -(1/4\pi\epsilon_0)2qa/y^2$. *d*) ¿Cuáles son las respuestas a los incisos *a*) y *c*) si las dos cargas se intercambian de manera que $+q$ esté en $y = +a$ y $-q$ esté en $y = -a$?

23.25. Una carga positiva *q* está fija en el punto $x = 0$, $y = 0$, y una carga negativa $-2q$ se encuentra fija en el punto $x = a$, $y = 0$. *a*) Señale las posiciones de las cargas en un diagrama. *b*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en puntos sobre el eje *x* como función de la coordenada *x*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *c*) ¿En qué posiciones sobre el eje *x* $V = 0$? *d*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *x* como función de *x* en el intervalo de $x = -2a$ a $x = +2a$. *e*) ¿Cuál es la respuesta para el inciso *b*) cuando $x \gg a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.26. Considere la configuración de cargas puntuales descrita en el ejercicio 23.25. *a*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en puntos sobre el eje *y* como función de la coordenada *y*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *b*) ¿En qué posiciones sobre el eje *y*, $V = 0$? *c*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *y* como función de *y* en el intervalo de $y = -2a$ a $y = +2a$. *d*) ¿Cuál es la respuesta para el inciso *a*) cuando $y \gg a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.27. Antes del advenimiento de la electrónica de estado sólido, en los aparatos de radio y otros dispositivos se usaban bulbos de vacío. Un tipo sencillo de bulbo de vacío conocido como *diodo* consiste en esencia en dos electrodos en el interior de un compartimiento al alto vacío. Un electrodo, el *cátodo*, se mantiene a temperatura elevada y

emite electrones desde su superficie. Entre el cátodo y el otro electrodo, conocido como *ánodo*, hay una diferencia de potencial de algunos cientos de volts, con el ánodo en el potencial más alto. Suponga que en un bulbo de vacío en particular el potencial del ánodo es 295 V mayor que el del cátodo. Un electrón sale de la superficie del cátodo con rapidez inicial igual a cero. Calcule su rapidez al incidir en el ánodo.

23.28. A cierta distancia de una carga puntual, el potencial y la magnitud del campo eléctrico debido a esa carga son 4.98 V y 12.0 V/m, respectivamente. (Considere el potencial como cero en el infinito.) *a*) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la carga? *c*) ¿El campo eléctrico está dirigido hacia la carga puntual o se aleja de ésta?

23.29. Un campo eléctrico uniforme tiene una magnitud E y está dirigido en la dirección negativa de x. La diferencia de potencial entre el punto a (en $x = 0.60$ m) y el punto b (en $x = 0.90$ m) es 240 V. *a*) ¿Cuál punto, a o b, tiene el potencial más alto? *b*) Calcule el valor de E. *c*) Una carga puntual negativa $q = -0.200\ \mu$C se desplaza de b a a. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga puntual.

23.30. Para cada una de las siguientes configuraciones de dos cargas puntuales, encuentre todos los puntos a lo largo de la línea que pasa a través de ambas cargas para las que el potencial eléctrico V es igual a cero (considere que $V = 0$ a una distancia infinita de las cargas) y para las que el campo eléctrico E es cero: *a*) cargas $+Q$ y $+2Q$ separadas por una distancia d, y *b*) cargas $-Q$ y $+2Q$ separadas por una distancia d. *c*) ¿Son V y E iguales a cero en los mismos lugares? Explique.

23.31. *a*) Un electrón se acelera de 3.00×10^6 m/s a 8.00×10^6 m/s. ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para que esto suceda? *b*) ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón si ha de disminuir su velocidad de 8.00×10^6 m/s hasta detenerse?

Sección 23.3 Cálculo del potencial eléctrico

23.32. Una carga eléctrica total de 3.50 nC está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una esfera de metal con radio de 24.0 cm. Si el potencial es igual a cero en un punto en el infinito, encuentre el valor del potencial a las siguientes distancias desde el centro de la esfera: *a*) 48.0 cm; *b*) 24.0 cm; *c*) 12.0 cm.

23.33. Un anillo delgado con carga uniforme tiene un radio de 15.0 cm y carga total de +24.0 nC. Se coloca un electrón sobre el eje del anillo a una distancia de 30.0 cm de su centro y queda restringido a permanecer sobre ese eje. Después se libera el electrón desde el reposo. *a*) Describa el movimiento posterior del electrón. *b*) Determine la rapidez del electrón cuando alcanza el centro del anillo.

23.34. Una línea infinitamente larga de carga tiene densidad superficial de carga de 5.00×10^{-12} C/m. Un protón (masa de 1.67×10^{-27} kg, carga de $+1.60 \times 10^{-19}$ C) se localiza a 18.0 cm de la línea y se mueve directamente hacia ella con una rapidez de 1.50×10^3 m/s. *a*) Calcule la energía cinética inicial del protón. *b*) ¿A qué distancia de la línea de carga llega el protón? (*Sugerencia:* véase el ejemplo 23.10.)

23.35. Un alambre muy largo tiene una densidad lineal de carga uniforme λ. Se utiliza un voltímetro para medir la diferencia de potencial y se encuentra que cuando un sensor del instrumento se coloca a 2.50 cm del alambre y el otro sensor se sitúa a 1.00 cm más lejos del alambre, el aparato lee 575 V. *a*) ¿Cuál es el valor de λ? *b*) Si ahora se coloca un sensor a 3.50 cm del alambre y el otro a 1.00 cm más lejos, ¿el voltímetro leerá 575 V? Si no es así, ¿la lectura estará por encima o por debajo de 575 V? ¿Por qué? *c*) Si se sitúan ambos sensores a 3.50 cm del alambre pero a 17.0 cm uno de otro, ¿cuál será la lectura del voltímetro?

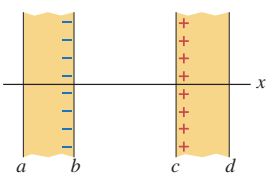
23.36. Un cilindro aislante muy largo de carga con radio de 2.50 cm tiene una densidad lineal uniforme de 15.0 nC/m. Si se coloca un sensor del voltímetro en la superficie, ¿a qué distancia de la superficie debe situarse el otro sensor para que la lectura sea de 175 V?

23.37. Una coraza cilíndrica aislante muy larga con radio de 6.00 cm tiene una densidad lineal de carga de 8.50 μC/m distribuida de manera uniforme en su superficie exterior. ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si se conectara entre *a*) la superficie del cilindro y un punto a 4.00 por arriba de la superficie, y *b*) la superficie y un punto a 1.00 cm del eje central del cilindro?

23.38. Un anillo con diámetro de 8.00 cm está fijo en un lugar y tiene una carga de +5.00 μC distribuida de manera uniforme sobre su circunferencia. *a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para desplazar una esfera diminuta con carga de +3.00 μC y masa de 1.50 g desde una distancia muy lejana al centro del anillo? *b*) ¿Es necesario seguir una trayectoria a lo largo del eje del anillo? ¿Por qué? *c*) Si la esfera se desplaza ligeramente del centro del anillo, ¿qué haría y cuál sería la velocidad máxima que alcanzaría?

23.39. Dos placas de metal paralelas, muy grandes, tienen densidades de carga de la misma magnitud pero con signos opuestos (figura 23.32). Suponga que están suficientemente cerca como para ser tratadas como placas ideales infinitas. Si se considera el potencial igual a cero a la izquierda de la superficie de la placa negativa, elabore una gráfica del potencial como función de x. Incluya *todas* las regiones de izquierda a derecha de las placas.

Figura 23.32 Ejercicio 23.39.



23.40. Dos placas conductoras paralelas y grandes, que llevan cargas opuestas de igual magnitud, están separadas por una distancia de 2.20 cm. *a*) Si la densidad superficial de carga para cada placa tiene una magnitud de 47.0 nC/m^2, ¿cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la región entre las placas? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos placas? *c*) Si la separación entre las placas se duplica mientras la densidad superficial de carga se mantiene constante en el valor que se obtuvo en el inciso *a*), ¿qué sucede con la magnitud del campo eléctrico y la diferencia de potencial?

23.41. Dos placas metálicas, grandes y paralelas tienen cargas opuestas de igual magnitud. Están separadas por una distancia de 45.0 mm, y la diferencia de potencial entre ellas es de 360 V. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico (el cual se supone uniforme) en la región entre las placas? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce este campo sobre una partícula con carga de +2.40 nC? *c*) Utilice los resultados del inciso *b*) para calcular el trabajo realizado por el campo sobre la partícula conforme se desplaza de la placa de mayor potencial a la de menor potencial. *d*) Compare el resultado del inciso *c*) con el cambio de energía potencial de la misma carga, calculado a partir del potencial eléctrico.

23.42. *a*) ¿Cuánta carga excedente debe colocarse en una esfera de cobre de 25.0 cm de diámetro de manera que el potencial de su centro, en relación con el infinito, sea de 1.50 kV? *b*) ¿Cuál es el potencial de la superficie de la esfera en relación con el infinito?

23.43. *a*) Demuestre que para una coraza esférica de radio R, que tiene una carga q distribuida de manera uniforme sobre su superficie, V es igual que V para un sólido conductor con radio R y carga q. *b*) Se frota un globo inflado sobre una alfombra, con lo que adquiere un potencial que es 1560 V más bajo que su potencial antes de haber sido cargado. Si la carga está distribuida de manera uniforme sobre la superficie del globo y el radio de éste es de 15 cm, ¿cuál es la carga neta en el globo? *c*) A la luz de su diferencia de potencial de 1200 V en relación con usted, ¿piensa que este globo es peligroso? Explique su respuesta.

23.44. El campo eléctrico en la superficie de una esfera de cobre con carga, sólida y con radio de 0.200 m es de 3800 N/C, dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se considera un potencial igual a cero a una distancia infinitamente grande con respecto a la esfera?

Sección 23.4 Superficies equipotenciales y Sección 23.5 Gradiente potencial

23.45. Se establece una diferencia de potencial de 480 V entre placas metálicas grandes y paralelas. El potencial de una placa es de 480 V, y el de la otra es 0 V. Las placas están separadas por $d = 1.70$ cm. *a*) Elabore un diagrama de las superficies equipotenciales que correspondan a 0, 120, 240, 360 y 480 V. *b*) En el diagrama, indique las líneas de campo eléctrico. ¿El diagrama confirma que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí?

23.46. Una lámina muy grande de plástico tiene una densidad de carga uniforme de $-6.00\ \text{nC/m}^2$ en una cara. *a*) Conforme usted se aleja de la lámina a lo largo de una línea perpendicular a ella, ¿el potencial se aumenta o disminuye? ¿Cómo lo sabe, sin hacer cálculos? ¿La respuesta depende del lugar que elija como punto de referencia para el potencial? *b*) Encuentre el espaciamiento entre superficies equipotenciales que difieren en 1.00 V una de otra. ¿Qué tipo de superficies son éstas?

23.47. En cierta región del espacio, el potencial eléctrico es $V(x, y, z) = Axy - Bx^2 + Cy$, donde A, B y C son constantes positivas. *a*) Calcule las componentes x, y y z del campo eléctrico. *b*) ¿En qué puntos el campo eléctrico es igual a cero?

23.48. El potencial debido a una carga puntual Q en el origen se puede escribir como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a) Calcule E_x, E_y y E_z utilizando las ecuaciones (23.19). *b*) Demuestre que los resultados del inciso *a*) concuerdan con la ecuación (21.7) para el campo eléctrico de una carga puntual.

23.49. Una esfera metálica con radio r_a está apoyada en un soporte aislante en el centro de una coraza esférica, hueca, metálica y con radio r_b. En la esfera interior hay una carga $+q$ y en la exterior otra $-q$. *a*) Calcule el potencial $V(r)$ para i) $r < r_a$; ii) $r_a < r < r_b$; iii) $r > r_b$. (*Sugerencia:* el potencial neto es la suma de los potenciales debidos a las esferas individuales.) Considere V igual a cero cuando r es infinito. *b*) Demuestre que el potencial de la esfera interior con respecto al de la esfera exterior es

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

c) Utilice la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para mostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre las esferas tiene una magnitud de

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{(1/r_a - 1/r_b)}\frac{1}{r^2}$$

d) Use la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para encontrar el campo eléctrico en un punto fuera de la esfera más grande a una distancia r del centro, donde $r > r_b$. *e*) Suponga que la carga en la esfera exterior no es $-q$ sino una carga negativa de diferente magnitud, por ejemplo, $-Q$. Demuestre que las respuestas para los incisos *b*) y *c*) son las mismas que antes, pero la del inciso *d*) es distinta.

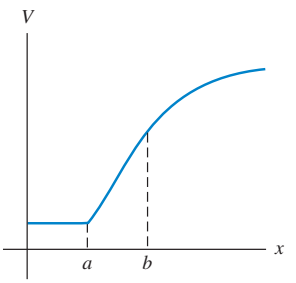
23.50. Una esfera metálica con radio $r_a = 1.20$ cm está sostenida por un soporte aislante en el centro de una coraza esférica, hueca, metálica y con radio $r_b = 9.60$ cm. En la esfera interior se coloca una carga $+q$ y en la exterior otra $-q$. Se elige que la magnitud de q sea tal que haga que la diferencia de potencial entre las esferas sea de 500 V, con la esfera interior a un potencial más elevado. *a*) Use el resultado del ejercicio 23.49*b*) para calcular q. *b*) Con ayuda del resultado del ejercicio 23.49*a*), elabore un diagrama de las superficies equipotenciales que correspondan a 500, 400, 300, 200, 100 y 0 V. *c*) En el diagrama indique las líneas de campo eléctrico. ¿Son perpendiculares entre sí las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales? Cuando la magnitud de $\vec{E}$ es máxima, ¿las superficies equipotenciales están más cercanas?

23.51. Un cilindro muy grande de 2.00 cm de radio tiene una densidad de carga uniforme de 1.50 nC/m. *a*) Describa la forma de las superficies equipotenciales para este cilindro. *b*) Tome el nivel de referencia de manera que el potencial cero sea la superficie del cilindro, encuentre el radio de las superficies equipotenciales que tienen potenciales de 10.0 V, 20.0 V y 30.0 V. *c*) ¿Están igualmente espaciadas las superficies equipotenciales? Si no es así, ¿están más juntas o separadas conforme r se incrementa?

Problemas

23.52. La figura 23.33 muestra el potencial de una distribución de carga como función de x. Elabore una gráfica del campo eléctrico E_x sobre la región que se ilustra.

Figura **23.33** Problema 23.52.



23.53. Una partícula con carga $+7.60$ nC está en un campo eléctrico uniforme dirigido a la izquierda. Otra fuerza, además de la eléctrica, actúa sobre la partícula de manera que cuando parte del reposo se desplaza a la derecha. Después de haberse movido 8.00 cm, la fuerza adicional ha efectuado un trabajo de 6.50×10^{-5} J y la partícula tiene una energía cinética de 4.35×10^{-5} J. *a*) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? *b*) ¿Cuál es el potencial del punto de inicio con respecto al del punto final? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

23.54. En el *modelo de Bohr* del átomo de hidrógeno, un único electrón gira alrededor de un solo protón en un círculo de radio r. Suponga que el protón permanece en reposo. *a*) Igualando la fuerza eléctrica con la masa del electrón multiplicada por su aceleración, obtenga una expresión para la rapidez del electrón. *b*) Obtenga una expresión para la energía cinética del electrón, y demuestre que su magnitud es la mitad de la de la energía potencial eléctrica. *c*) Obtenga una expresión para la energía total, y evalúela con $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m. Exprese el resultado numérico en joules y en electrón volts.

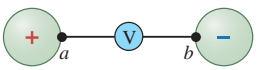
23.55. Un diodo de bulbo de vacío (véase el ejercicio 23.27) consiste en electrodos cilíndricos concéntricos, el cátodo negativo y el ánodo positivo. A causa de la acumulación de carga cerca del cátodo, el potencial eléctrico entre los electrodos no es una función lineal de la posición, ni siquiera con geometría plana, sino que está dada por

$$V(x) = Cx^{4/3}$$

donde x es la distancia desde el cátodo y C es una constante, característica de un diodo en particular y de las condiciones de operación. Suponga que la distancia entre el cátodo y el ánodo es de 13.0 mm y que la diferencia de potencial entre los electrodos es de 240 V. *a*) Determine el valor de C. *b*) Obtenga una fórmula para el campo eléctrico entre los electrodos como función de x. *c*) Determine la fuerza sobre un electrón cuando éste se encuentre en el punto medio entre los electrodos.

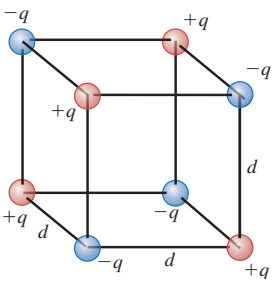
23.56. Dos esferas aislantes idénticas con cargas opuestas, cada una de 50.0 cm de diámetro y con carga uniforme de magnitud 175 μC, están colocadas con sus centros separados por una distancia de 1.00 m (figura 23.34). *a*) Si se conecta un voltímetro entre los puntos más cercanos (*a* y *b*) sobre sus superficies, ¿cuál será la lectura? *b*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está en el potencial más grande? ¿Cómo se puede saber esto sin hacer cálculos?

Figura **23.34** Problema 23.56.



23.57. Cristal iónico. La figura 23.35 muestra ocho cargas puntuales situadas en las esquinas de un cubo con lados de longitud *d*. Los valores de las cargas son $+q$ y $-q$, como se indica. Éste es un modelo de una celda de un cristal cúbico iónico. Por ejemplo, en el cloruro de sodio (NaCl) los iones positivos son Na^+ y los negativos son Cl^-. *a*) Calcule la energía potencial *U* de esta configuración. (Considere la energía potencial de las ocho cargas igual a cero cuando están separadas por una distancia infinita.) *b*) En el inciso *a*), se debe de haber encontrado que $U < 0$. Explique la relación entre este resultado y la observación de que tales cristales iónicos existen en la naturaleza.

Figura **23.35** Problema 23.57.

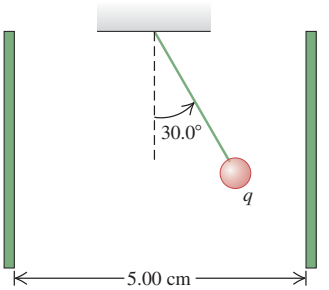


23.58. *a*) Calcule la energía potencial de un sistema de dos esferas pequeñas, una con carga de 2.00 μC y la otra con carga de -3.50 μC, con sus centros separados por una distancia de 0.250 m. Suponga una energía potencial igual a cero cuando las cargas están separadas por una distancia infinita. *b*) Suponga que una de las esferas permanece en su lugar y la otra, con masa de 1.50 g, se aleja de ella. ¿Qué rapidez inicial mínima sería necesario que tuviera la esfera en movimiento para escapar por completo de la atracción de la esfera fija? (Para escapar, la esfera en movimiento tendría que alcanzar una rapidez de cero cuando hubiera una distancia infinita entre ella y la esfera fija.)

23.59. El ion H_2^+. El ion H_2^+ está compuesto por dos protones, cada uno con carga $+e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, y un electrón de carga $-e$ y masa 9.11×10^{-31} kg. La separación entre los protones es de 1.07×10^{-10} m. Los protones y el electrón pueden ser tratados como cargas puntuales. *a*) Suponga que el electrón se localiza en el punto medio entre los dos protones. ¿Cuál es la energía potencial de la interacción entre el electrón y los dos protones? (No incluya la energía potencial debida a la interacción entre los dos protones.) *b*) Suponga que el electrón del inciso *a*) tiene una velocidad de magnitud 1.50×10^6 m/s en una dirección a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que conecta los dos protones. ¿Qué tan lejos del punto medio entre los dos protones se mueve el electrón? Como las masas de los protones son mucho mayores que la del electrón, los movimientos de los protones son muy lentos y se pueden ignorar. (*Nota:* una descripción realista del movimiento del electrón requiere el uso de la mecánica cuántica, no la newtoniana.)

23.60. Una esfera pequeña con masa de 1.50 g cuelga de una cuerda entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de 5.00 cm (figura 23.36). Las placas son aislantes y tienen densidades de carga superficial uniformes de $+\sigma$ y $-\sigma$. La carga sobre la esfera es $q = 8.90 \times 10^{-6}$ C. ¿Cuál diferencia de potencial entre las placas ocasionará que la cuerda formara un ángulo de 30.0° con respecto a la vertical?

Figura **23.36** Problema 23.60.



23.61. Cilindros coaxiales. Un cilindro metálico largo con radio *a* está apoyado en un soporte aislante sobre el eje de un tubo metálico largo y hueco con radio *b*. La carga positiva por unidad de longitud sobre el cilindro interior es igual a λ, y en el cilindro exterior hay una carga negativa igual por unidad de longitud. *a*) Calcule el potencial $V(r)$ para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $r > b$. (*Sugerencia:* el potencial neto es la suma de los potenciales debidos a los conductores individuales.) Considere $V = 0$ en $r = b$. *b*) Demuestre que el potencial del cilindro interior con respecto al del exterior es

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

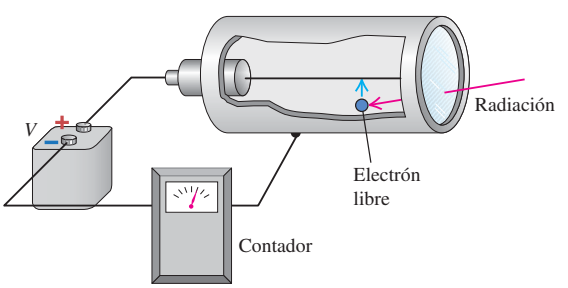
c) Use la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para demostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre los cilindros tiene magnitud

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}$$

d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos cilindros si el cilindro exterior no tiene carga neta?

23.62. Un *contador Geiger* detecta radiaciones como las partículas alfa utilizando el hecho de que la radiación ioniza el aire a lo largo de su trayectoria. Un alambre delgado está sobre el eje de un cilindro de metal hueco y aislado de éste (figura 23.37). Entre el alambre y el cilindro exterior se establece una diferencia de potencial grande, con el alambre con el potencial más elevado; esto produce un campo eléctrico intenso dirigido radialmente hacia fuera. Cuando una radiación ionizante entra al aparato, se ionizan algunas moléculas de aire. Los electrones libres producidos son acelerados por el campo eléctrico hacia el alambre y, en el camino, ionizan muchas más moléculas de aire. Entonces se produce un pulso de corriente que puede detectarse mediante circuitos electrónicos apropiados y convertirse en un "clic" audible. Suponga que el radio del alambre central es de 145 μm y que el radio del cilindro hueco es de 1.80 cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro que produce un campo eléctrico de

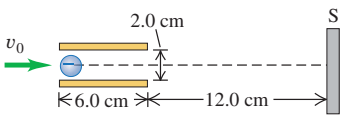
Figura **23.37** Problema 23.62.



2.00×10^4 V/m a una distancia de 1.20 cm del eje del alambre? (El alambre y el cilindro son muy largos en comparación con sus radios, por lo que se aplican los resultados del problema 23.61.)

23.63. Desviación en un TRC. Es frecuente que en los osciloscopios y monitores de computadora haya tubos de rayos catódicos (TRC). En la figura 23.38 se proyecta un electrón con rapidez inicial de 6.50×10^6 m/s a lo largo del eje en el punto medio entre las placas de desviación de un tubo de rayos catódicos. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una magnitud de 1.10×10^3 V/m y va hacia arriba. *a*) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) sobre el electrón cuando está entre las placas? *b*) ¿Cuál es la aceleración del electrón (magnitud y dirección) cuando actúa sobre él la fuerza del inciso *a*)? *c*) ¿Qué tan lejos por debajo del eje se ha movido el electrón cuando alcanza el final de las placas? *d*) ¿Con qué ángulo con respecto al eje se mueve cuando abandona las placas? *e*) ¿A qué distancia por debajo del eje golpeará la pantalla fluorescente *S*?

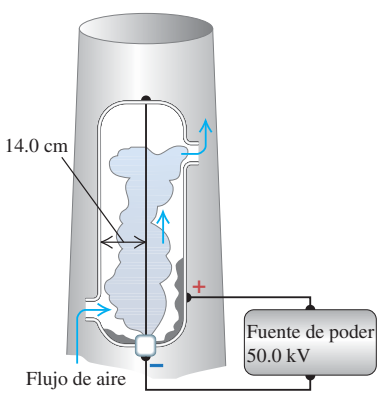
Figura **23.38** Problema 23.63.



23.64. Placas de desviación de un osciloscopio. Las placas de desviación verticales de un osciloscopio estudiantil común son un par de cuadrados metálicos paralelos con cargas iguales pero de signo contrario. Las dimensiones comunes miden aproximadamente 3.0 cm por lado, con una separación de cerca de 5.0 mm. Las placas están suficientemente cerca, por lo que se puede ignorar la flexión en los extremos. En estas condiciones: *a*) ¿Cuánta carga hay en cada placa, y *b*) ¿qué tan fuerte es el campo eléctrico entre las placas? *c*) Si un electrón es lanzado del reposo desde las placas negativas, ¿qué tan rápido se mueve cuando alcanza la placa positiva?

23.65. Los *precipitadores electrostáticos* se utilizan para eliminar partículas contaminantes de humo, en particular en las chimeneas de las plantas generadoras de energía a base de carbón. Una forma del precipitador consiste en un cilindro metálico, vertical y hueco, con un alambre delgado aislado del cilindro, que recorre su eje (figura 23.39). Entre el alambre y el cilindro exterior se establece una diferencia de potencial elevada, con el alambre en el menor potencial. Esto genera un campo eléctrico radial intenso dirigido hacia dentro. El campo crea una región de aire ionizado cerca del alambre. El humo entra al precipitador por la base, la ceniza y polvo capturan electrones, y los contaminantes con carga son acelerados por el campo eléctrico hacia la pared del cilindro exterior. Suponga que el radio del alambre central es 90.0 μm, el radio del cilindro es de 14.0 cm, y se establece una diferencia de potencial de 50.0 kV entre el alambre y el cilindro. También suponga que el alambre y el cilindro son muy largos en comparación con el radio del cilindro, por lo que se aplican los resultados del problema 23.61. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio entre el alambre y la pared del cilindro? *b*) ¿Qué magnitud de carga debe tener una partícula de ceniza de 30.0 μg si el campo eléctrico calculado en el inciso *a*) debe ejercer una fuerza equivalente a 10 veces el peso de la partícula?

Figura **23.39** Problema 23.65.



23.66. Un disco con radio *R* tiene una densidad superficial de carga σ. *a*) Si el disco se considera como una serie de anillos concéntricos, calcule el potencial eléctrico *V* en un punto sobre el eje del disco a una distancia *x* del centro del disco. Suponga que el potencial es igual a cero en el infinito. (*Sugerencia:* use el resultado del ejemplo 23.11 en la sección 23.3.) *b*) Calcule $-\partial V/\partial x$. Demuestre que el resultado concuerda con la expresión para E_x calculada en el ejemplo 21.12 (sección 21.5).

23.67. *a*) A partir de la expresión para *E* obtenida en el problema 22.40, encuentre las expresiones para el potencial eléctrico *V* como función de *r*, tanto dentro como fuera del cilindro. Sea $V = 0$ en la superficie del cilindro. En cada caso, exprese el resultado en términos de la carga por unidad de longitud λ de la distribución de carga. *b*) Elabore la gráfica de *V* y *E* como funciones de *r*, desde $r = 0$ hasta $r = 3R$.

23.68. Las partículas alfa (*masa* $= 6.7 \times 10^{-27}$ kg, carga $= +2e$) son proyectadas directamente hacia una lámina de oro. El núcleo del oro puede modelarse como una esfera de carga uniforme; suponga que el oro no se mueve. *a*) Si el radio del núcleo del oro es 5.6×10^{-15} m, ¿cuál es la rapidez mínima que necesitan las partículas alfa cuando están lejos de alcanzar la superficie del núcleo del oro? (Ignore los efectos relativistas.) *b*) Dé buenas razones físicas de por qué se pueden ignorar los efectos de los electrones orbitales cuando la partícula alfa está i) fuera de las órbitas del electrón, y ii) dentro de las órbitas del electrón.

23.69. Para el anillo de carga descrito en el ejemplo 23.11 (sección 23.3), integre la expresión para E_x obtenida en el ejemplo 21.10 (sección 21.5) para calcular el potencial en el punto *P* sobre el eje del anillo. Suponga que $V = 0$ en el infinito. Compare el resultado con el que se obtuvo en el ejemplo 23.11 por medio de la ecuación (23.16).

23.70. Una varilla aislante delgada se dobla para formar un arco semicircular de radio *a*, y una carga eléctrica total *Q* está distribuida de manera uniforme a lo largo de la varilla. Calcule el potencial en el centro de curvatura del arco si se supone que el potencial es igual a cero en el infinito.

23.71. Autoenergía de una esfera de carga. Una esfera sólida de radio *R* contiene una carga total *Q* distribuida de manera uniforme en todo su volumen. Calcule la energía necesaria para ensamblar esta carga por medio de traer cargas infinitesimales desde muy lejos. Esta energía se llama "autoenergía" de la distribución de carga. (*Sugerencia:* después de ensamblar la carga *q* en una esfera de radio *r*, ¿cuánta energía se necesitaría agregar a una coraza esférica con espesor *dr* y carga *dq*? Después integre para obtener la energía total.)

23.72. *a*) A partir de la expresión para *E* obtenida en el ejemplo 22.9 (sección 22.4), encuentre la expresión para el potencial eléctrico *V* como función de *r* tanto dentro como fuera de la esfera con carga uniforme. Suponga que en el infinito $V = 0$. *b*) Elabore una gráfica de *V* y *E* como funciones de *r*, desde $r = 0$ a $r = 3R$.

23.73. Una esfera aislante sólida de radio *R* tiene carga *Q* con distribución uniforme en todo su volumen. *a*) Utilice los resultados del problema 23.72 para encontrar la magnitud de la diferencia de potencial entre la superficie de la esfera y su centro. *b*) ¿Cuál tiene mayor potencial, la superficie o el centro si, i) *Q* es positiva y ii) si *Q* es negativa?

23.74. Una coraza esférica aislante con radio interior de 25.0 cm y radio exterior de 60.0 cm, tiene una carga de $+150.0\ \mu$C distribuida con uniformidad sobre su superficie externa (véase el ejercicio 23.43). El punto *a* está en el centro de la coraza, el punto *b* se encuentra en la superficie interna, y el punto *c* se localiza en la superficie exterior. *a*) ¿Cuál será la lectura de un voltímetro si se conecta entre los siguientes puntos: i) *a* y *b*; ii) *b* y *c*; iii) *c* y el infinito; iv) *a* y *c*? *b*) ¿Cuál tiene mayor potencial: i) *a* o *b*; ii) *b* o *c*; iii) *a* o *c*; *c*) ¿Cuál de las respuestas cambiaría, si alguna lo hiciera, si las cargas fueran de $-150\ \mu$C?

23.75. El ejercicio 23.43 demuestra que afuera de una coraza esférica con carga superficial uniforme, el potencial es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en una carga puntual situada en el centro de la esfera. *a*) Utilice este resultado para demostrar que para dos corazas aislantes con carga uniforme, la fuerza que ejercen una sobre la otra y su energía eléctrica mutua son las mismas que si toda la carga se concentrara en sus centros. (*Sugerencia:* consulte la sección 12.6.) *b*) ¿Este mismo resultado se cumple para esferas sólidas aislantes, con distribución de carga uniforme en todo su volumen? *c*) ¿Es válido este mismo resultado para la fuerza entre dos corazas conductoras con carga? ¿Y entre dos conductores sólidos con carga? Explique su respuesta.

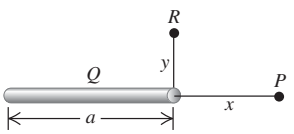
23.76. Dos esferas de plástico, cada una con carga distribuida de manera uniforme en su interior, entran en contacto inicialmente y luego se liberan. Una esfera mide 60.0 cm de diámetro, tiene masa de 50.0 g y contiene $-10.0\ \mu$C de carga. La otra esfera tiene un diámetro de 40.0 cm, masa de 150.0 g y contiene $-30.0\ \mu$C de carga. Determine la aceleración y la rapidez máximas que alcanza cada esfera (en relación con el punto fijo de su localización inicial en el espacio), suponiendo que no hay más fuerzas que actúen sobre ellas. (*Sugerencia:* las cargas distribuidas de manera uniforme se comportan como si estuvieran concentradas en los centros de las dos esferas.)

23.77. Use el campo eléctrico calculado en el problema 22.43 para determinar la diferencia de potencial entre la esfera conductora sólida y la delgada coraza aislante.

23.78. Considere una esfera conductora sólida dentro de otra esfera conductora hueca, con los radios y cargas especificados en el problema 22.42. Considere $V = 0$ cuando $r \to \infty$. Use el campo eléctrico calculado en el problema 22.42 para calcular el potencial V para los siguientes valores de r: *a*) $r = c$ (en la superficie exterior de la esfera hueca); *b*) $r = b$ (en la superficie interior de la esfera hueca); *c*) $r = a$ (en la superficie de la esfera sólida); *d*) $r = 0$ (en el centro de la esfera sólida).

23.79. Una carga eléctrica se encuentra distribuida de manera uniforme a lo largo de una varilla delgada de longitud *a*, con carga total *Q*. Considere el potencial igual a cero en el infinito. Determine el potencial en los siguientes puntos (figura 23.40): *a*) punto *P*, distancia *x* a la derecha de la barra, y *b*) punto *R*, distancia *y* arriba del extremo derecho de la varilla. *c*) En los incisos *a*) y *b*), ¿a qué se reduce el resultado conforme *x* se vuelve mucho más grande que *a*?

Figura 23.40 Problema 23.79.



23.80. *a*) Si una gota de lluvia esférica de radio 0.650 mm tiene una carga de -1.20 pC distribuida de manera uniforme en su volumen, ¿cuál es el potencial en su superficie? (Considere el potencial igual a cero a una distancia infinita de la gota.) *b*) Dos gotas idénticas, cada una con el radio y la carga especificados en el inciso *a*), chocan y forman una gota más grande. ¿Cuál es el radio de esta gota más grande, y cuál el potencial en su superficie, si su carga está distribuida de manera uniforme en su volumen?

23.81. Dos esferas de metal de diferentes tamaños tienen carga de manera que el potencial eléctrico es el mismo en la superficie de cada una. La esfera *A* tiene un radio tres veces mayor que el de la esfera *B*. Sean Q_A y Q_B las cargas en las dos esferas, y E_A y E_B las magnitudes de los campos eléctricos en las superficies de las dos esferas. ¿Cuáles son *a*) la razón Q_B/Q_A y *b*) la razón E_B/E_A?

23.82. Una partícula alfa con energía cinética de 11.0 MeV colisiona de frente con un núcleo de plomo en reposo. ¿Cuál es la distancia de la aproximación máxima de las dos partículas? (Suponga que el núcleo del plomo permanece estacionario y que puede tratarse como una carga puntual. El número atómico del plomo es 82. La partícula alfa es un núcleo de helio, con número atómico 2.)

23.83. Una esfera de metal de radio R_1 tiene una carga Q_1. Considere el potencial eléctrico igual a cero a una distancia infinita de la esfera. *a*) ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial eléctrico en la superficie de la esfera? Esta esfera se conecta ahora con un alambre conductor largo y delgado con otra esfera de radio R_2 que está alejada varios metros de la primera. Antes de hacer la conexión, esta segunda esfera está descargada. Después de alcanzar el equilibrio electrostático, indique cuáles son *b*) la carga total en cada esfera; *c*) el potencial eléctrico en la superficie de cada esfera; *d*) el campo eléctrico en la superficie de cada esfera. Suponga que la cantidad de carga en el alambre es mucho menor que la carga en cada esfera.

23.84. Use la distribución de carga y el campo eléctrico calculados en el problema 22.57. *a*) Demuestre que para $r \geq R$ el potencial es idéntico al que produce una carga puntual *Q*. (Considere el potencial igual a cero en el infinito.) *b*) Obtenga una expresión para el potencial eléctrico que sea válida en la región $r \leq R$.

23.85. Fusión nuclear en el Sol. La fuente de la energía del Sol es una secuencia de reacciones nucleares que tienen lugar en su núcleo. La primera de ellas implica la colisión de dos protones, que se funden para formar un núcleo más pesado y liberan energía. Para que ocurra este proceso, llamado *fusión nuclear*, los dos protones primero deben acercarse hasta que sus superficies entren, esencialmente, en contacto. *a*) Suponga que ambos protones se mueven con la misma rapidez y que colisionan de frente. Si el radio del protón es 1.2×10^{-15} m, ¿cuál es la rapidez mínima que permitiría que la fusión nuclear ocurriera? La distribución de carga dentro de un protón tiene simetría esférica, por lo que el campo eléctrico y el potencial fuera del protón son los mismos que si se tratara de una carga puntual. La masa del protón es 1.67×10^{-27} kg. *b*) Otra reacción de fusión nuclear que sucede en el núcleo del Sol implica una colisión entre dos núcleos de helio, cada uno de los cuales tiene 2.99 veces la masa del protón, carga $+2e$ y radio de 1.7×10^{-15} m. Si se supone la misma geometría de colisión que en el inciso *a*), ¿cuál es la rapidez mínima que se requiere para que tenga lugar esta reacción de fusión si los núcleos deben aproximarse a una distancia de 3.5×10^{-15} m entre sus centros? Igual que para el protón, la carga del núcleo de helio está distribuida de manera uniforme en todo su volumen. *c*) En la sección 18.3 se demostró que la energía cinética traslacional media de una partícula con masa *m* en un gas a temperatura absoluta *T* es $\frac{3}{2}kT$, donde *k* es la constante de Boltzmann (que aparece en el apéndice F). Para que dos protones con energía cinética igual a este valor medio sean capaces de experimentar el proceso descrito en el inciso *a*), ¿cuál es la temperatura absoluta que se requiere? ¿Qué temperatura absoluta se requiere para que dos núcleos de helio sean capaces de pasar por el proceso que se describe en el inciso *b*)? (A estas temperaturas, los átomos están ionizados por completo, por lo que los núcleos y los electrones se mueven por separado.) *d*) La temperatura en el núcleo del Sol es aproximadamente de 1.5×10^7 K. ¿Cómo se compara ésta con las temperaturas calculadas en el inciso *c*)? ¿Cómo es posible que ocurran las reacciones descritas en los incisos *a*) y *b*) en el interior del Sol? (*Sugerencia:* consulte el análisis de la distribución de rapidez molecular en la sección 18.5.)

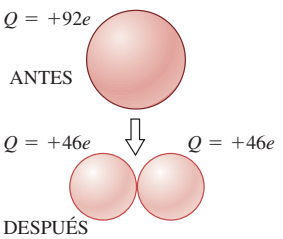
23.86. El potencial eléctrico V en cierta región del espacio está dada por

$$V(x, y, z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$$

donde A es una constante. *a*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto de esta región. *b*) Se mide el trabajo realizado por el campo cuando una carga de prueba de 1.50 μC se mueve del punto $(x, y, z) = (0, 0, 0.250\text{ m})$ al origen y resulta ser de 6.00×10^{-5} J. Determine A. *c*) Determine el campo eléctrico en el punto (0, 0, 0.250 m). *d*) Demuestre que en todo plano paralelo al plano xz, las líneas equipotenciales son círculos. *e*) ¿Cuál es el radio de la línea equipotencial que corresponde a $V = 1280$ V y $y = 2.00$ m?

23.87. Fisión nuclear. El núcleo inestable del uranio 236 se puede considerar una esfera con carga uniforme con $Q = +92\,e$ y radio $R = 7.4 \times 10^{-15}$ m. En la fisión nuclear, este núcleo se puede dividir en dos núcleos más pequeños, cada uno con la mitad de la carga y del volumen del núcleo original del uranio 236. Ésta es una de las reacciones que ocurrieron en la bomba nuclear que se hizo detonar en Hiroshima, Japón, en agosto de 1945. *a*) Calcule los radios de los dos núcleos "hijos" de carga $+46e$. *b*) En un modelo sencillo del proceso de fisión, inmediatamente después que el núcleo de uranio 236 ha pasado por el proceso de fisión, los núcleos "hijos" están en reposo y apenas en contacto, como se ilustra en la figura 23.41. Calcule la energía cinética que cada uno de estos núcleos "hijos" tendrá cuando estén muy separados. *c*) En este modelo, la suma de las energías cinéticas de los dos núcleos "hijos", calculadas en el inciso *b*), es igual a la energía liberada por la fisión del núcleo de uranio 236. Calcule la energía liberada por la fisión de 10.0 kg de uranio 236. La masa atómica del uranio 236 es 236 u, donde 1 u = 1 unidad de masa atómica $= 1.66 \times 10^{-24}$ kg. Exprese su respuesta tanto en joules como en kilotones de TNT (1 kilotón de TNT libera 4.18×10^{12} J al explotar). *d*) En términos de este modelo, analice por qué una bomba atómica podría llamarse también "bomba eléctrica".

Figura **23.41** Problema 23.87.



Problemas de desafío

23.88. En cierta región, existe una distribución de carga con simetría esférica pero no uniforme. Es decir, la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ depende de la distancia r del centro de la distribución, pero no de los ángulos polares esféricos θ y ϕ. El potencial eléctrico $V(r)$ debido a esta carga es

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a^2}{18\epsilon_0}\left[1 - 3\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\dfrac{r}{a}\right)^3\right] & \text{para } r \le a \\ 0 & \text{para } r \ge a \end{cases}$$

donde ρ_0 es una constante con unidades de C/m^3, y a es una constante en unidades de metros. *a*) Obtenga expresiones $\vec{E}$ para las regiones $r \le a$ y $r \ge a$. [*Sugerencia:* utilice la ecuación (23.23).] Explique por qué $\vec{E}$ sólo tiene una componente radial. *b*) Obtenga una expresión para $\rho(r)$ en cada una de las dos regiones $r \le a$ y $r \ge a$. [*Sugerencia:* utilice la ley de Gauss para dos corazas esféricas, una de radio r y otra de radio $r + dr$. La carga contenida en la coraza esférica infinitesimal de radio dr es $dq = 4\pi r^2 \rho(r)\,dr$.] *c*) Demuestre que la carga neta contenida en el volumen de una esfera de radio mayor o igual que a es cero. [*Sugerencia:* integre las expresiones obtenidas en el inciso *b*) para $\rho(r)$ sobre un volumen esférico de radio mayor o igual que a.] ¿Este resultado es congruente con el campo eléctrico para $r > a$ que se calculó en el inciso *a*)?

23.89. En los experimentos en que colisionan núcleos atómicos, suceden choques de frente como los descritos en el problema 23.82, pero son más comunes los que "fallan". Suponga que la partícula alfa en el problema 23.82 no "acertó" en el centro del núcleo de plomo, sino que tuvo cantidad de movimiento angular inicial distinta de cero (con respecto al núcleo de plomo estacionario) de magnitud $L = p_0 b$, donde p_0 es la magnitud de la cantidad de movimiento inicial de la partícula alfa y $b = 1.00 \times 10^{-12}$ m. ¿Cuál es la distancia de la máxima aproximación? Repita el ejercicio para $b = 1.00 \times 10^{-13}$ m y $b = 1.00 \times 10^{-14}$ m.

23.90. Un cilindro hueco, aislante, de paredes delgadas, radio R y longitud L (como el tubo de cartón de un rollo de papel sanitario) tiene carga Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie. *a*) Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo. Como origen tome el centro del tubo, y el potencial cero en el infinito. *b*) Demuestre que si $L \ll R$, el resultado del inciso *a*) se reduce al potencial sobre el eje de un anillo de carga de radio R. (Véase el ejemplo 23.11 en la sección 23.3.) *c*) Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo.

23.91. Experimento de la gota de aceite de Millikan. La carga de un electrón fue medida por primera vez por el físico estadounidense Robert Millikan entre 1909 y 1913. En su experimento roció gotas muy finas (alrededor de 10^{-4} mm de diámetro) de aceite en el espacio entre dos placas paralelas en posición horizontal separadas por una distancia d. Mantuvo una diferencia de potencial V_{AB} entre las placas paralelas, lo que ocasionó entre ellas un campo eléctrico dirigido hacia abajo. Algunas de las gotas de aceite adquirieron carga negativa por efecto de la fricción o la ionización del aire circundante por medio de rayos x o radiactividad. Se observaron las gotas con un microscopio. *a*) Demuestre que una gota de aceite de radio r que esté en reposo entre las placas seguirá en reposo si la magnitud de la carga es

$$q = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho r^3 g d}{V_{AB}}$$

donde ρ es la densidad del aceite. (Ignore la fuerza de flotabilidad del aire.) Al ajustar V_{AB} para mantener una gota dada en reposo, es posible determinar la carga sobre ésta, si se conoce su radio. *b*) Las gotas de aceite eran demasiado pequeñas como para medir sus radios en forma directa. En vez de ello, Millikan determinó r recortando el campo eléctrico y midiendo la *rapidez terminal* v_t de la gota al caer. (En la sección 5.3 se estudió el concepto de rapidez terminal.) La fuerza de la viscosidad F de una esfera de radio r que se desplaza con rapidez v a través de un fluido con viscosidad η está dada por la ley de Stokes: $F = 6\pi\eta r v$. Cuando la gota cae con velocidad v_t, la fuerza de la viscosidad compensa exactamente el peso $w = mg$ de la gota. Demuestre que la magnitud de la carga sobre la gota es

$$q = 18\pi\frac{d}{V_{AB}}\sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}$$

Dentro de los límites del error experimental, cada una de los miles de gotas que Millikan y sus colaboradores midieron que tenía una carga igual a cierto múltiplo entero pequeño de una carga básica e. Es decir, encontraron gotas con cargas $\pm 2e$, $\pm 5e$, etcétera, pero no valores tales como $0.76e$ o $2.49e$. Una gota con carga $-e$ adquiría un electrón adicional; si su carga era $-2e$, había adquirido dos electrones más, y así sucesivamente. *c*) En el aparato de Millikan para este experimento, se observó que una gota de aceite con carga caía 1.00 mm con rapidez constante en 39.3 s si $V_{AB} = 0$. La misma gota podía estar en reposo entre las dos placas separadas 1.00 mm si $V_{AB} = 9.16$ V. ¿Cuántos electrones en exceso había adquirido la gota, y cuál era su radio? La viscosidad del aire es $1.81 \times 10^{-5}\ \text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$, y la densidad del aceite es de 824 kg/m^3.

23.92. Dos cargas puntuales se desplazan hacia la derecha a lo largo del eje x. La carga puntual 1 tiene carga de $q_1 = 2.00\ \mu\text{C}$, masa $m_1 = 6.00 \times 10^5$ kg y rapidez v_1. La carga puntual 2 se encuentra a la derecha de q_1 y tiene carga $q_2 = -5.00\ \mu\text{C}$, masa $m_2 = 3.00 \times 10^{-5}$ kg, y rapidez v_2. En un instante en particular, las cargas están separadas por una distancia de 9.00 mm y su rapidez es, en cada caso, $v_1 = 400$ m/s y $v_2 = 1300$ m/s. Las únicas fuerzas que actúan sobre las partículas son las que ejercen una sobre la otra. *a*) Determine la rapidez v_{cm} del centro de masa del sistema. *b*) La *energía relativa* E_{rel} del sistema se define como la energía total menos la energía cinética aportada por el movimiento del centro de masa:

$$E_{\text{rel}} = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\text{cm}}^2$$

donde $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$ es la energía total del sistema y r es la distancia entre las cargas. Demuestre que $E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu v^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$, donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ se denomina la *masa reducida* del sistema, y $v = v_2 - v_1$ es la rapidez relativa de las partículas en movimiento. *c*) Para los valores numéricos dados, calcule el valor numérico de E_{rel}. *d*) Con base en el resultado del inciso *c*), para las condiciones mencionadas, indique si las partículas escaparán una de la otra. Explique su respuesta. *e*) Si las partículas escapan, ¿cuál sería su rapidez final relativa cuando $r \to \infty$? Si las partículas no escapan, ¿cuál sería su distancia de máxima separación? Es decir, ¿cuál sería el valor de r cuando $v = 0$? *f*) Repita los incisos *c*) a *e*) para $v_1 = 400$ m/s y $v_2 = 1800$ m/s cuando la separación es de 9.00 mm.

CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

24

? La energía utilizada en la unidad de un flash de una cámara fotográfica se almacena en un capacitor, el cual consiste en dos conductores cercanos entre sí y con cargas opuestas. Si la cantidad de carga en los conductores se duplica, ¿en qué factor se incrementa la energía almacenada?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

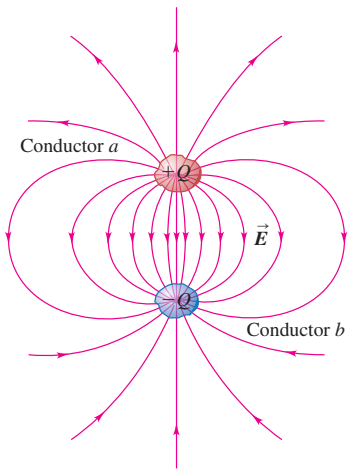
- La naturaleza de los capacitores y la forma de calcular una cantidad que mide su capacidad para almacenar carga.
- Cómo analizar capacitores conectados en una red.
- A calcular la cantidad de energía almacenada en un capacitor.
- Qué son los dieléctricos y cómo forman capacitores más eficaces.

Cuando preparamos una ratonera antigua de resorte o tensamos la cuerda de un arco, almacenamos energía mecánica en forma de energía potencial elástica. Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial *eléctrica* y carga eléctrica. Para hacer un capacitor, basta aislar dos conductores uno del otro. Para almacenar energía en este dispositivo hay que transferir carga de un conductor al otro, de manera que uno tenga carga negativa y en el otro haya una cantidad igual de carga positiva. Debe realizarse trabajo para trasladar las cargas a través de la diferencia de potencial resultante entre los conductores, y el trabajo efectuado se almacena como energía potencial eléctrica.

Los capacitores tienen un gran número de aplicaciones prácticas en dispositivos tales como unidades de flash electrónicas para fotografía, láseres de pulso, sensores de bolsas de aire para automóviles y receptores de radio y televisión. En capítulos posteriores encontraremos muchas de estas aplicaciones (en particular en el capítulo 31, en el que se verá el papel crucial que desempeñan los capacitores en los circuitos de corriente alterna que invaden nuestra sociedad tecnológica). Sin embargo, en este capítulo el énfasis está en las propiedades fundamentales de los capacitores. Para un capacitor en particular, la razón entre la carga de cada conductor y la diferencia de potencial entre los conductores es una constante llamada *capacitancia*. La capacitancia depende de las dimensiones y las formas de los conductores y del material aislante (si lo hay) entre ellos. En comparación con el caso en que sólo hay vacío entre los conductores, la capacitancia aumenta cuando está presente un material aislante (un *dieléctrico*). Esto sucede porque en el interior del material aislante ocurre una redistribución de la carga, llamada *polarización*. El estudio de la polarización ampliará nuestra perspectiva de las propiedades eléctricas de la materia.

Los capacitores también ofrecen una forma nueva de pensar acerca de la energía potencial eléctrica. La energía almacenada en un capacitor con carga, guarda relación con el campo eléctrico en el espacio entre los conductores. Veremos que la energía potencial eléctrica puede considerarse almacenada *en el mismo campo*. La idea de que el campo eléctrico es en sí un almacén de energía está en el corazón de la teoría de las ondas electromagnéticas y de nuestra concepción moderna de la naturaleza de la luz, que estudiaremos en el capítulo 32.

24.1 Dos conductores cualesquiera *a* y *b* aislados uno del otro forman un capacitor.



Activ ONLINE Physics

11.11.6 Potencial eléctrico: introducción cualitativa

11.12.1 y 11.12.3 Potencial, campo y fuerza eléctricos

24.1 Capacitores y capacitancia

Dos conductores separados por un aislante (o vacío) constituyen un **capacitor** (figura 24.1). En la mayoría de las aplicaciones prácticas, cada conductor tiene inicialmente una carga neta cero, y los electrones son transferidos de un conductor al otro; a esta acción se le denomina *cargar* el capacitor. Entonces, los dos conductores tienen cargas de igual magnitud y signo contrario, y la carga *neta* en el capacitor en su conjunto permanece igual a cero. En este capítulo se supondrá que éste es el caso. Cuando se dice que un capacitor tiene carga Q, o que una carga Q está *almacenada* en el capacitor, significa que el conductor con el potencial más elevado tiene carga $+Q$ y el conductor con el potencial más bajo tiene carga $-Q$ (si se supone que Q es positiva). Hay que tener presente esto en el análisis y los ejemplos que siguen.

En los diagramas de circuito, un capacitor se representa con cualquiera de estos símbolos:

En cada uno de estos símbolos, las líneas verticales (rectas o curvas) representan los conductores, y las líneas horizontales representan los alambres conectados a uno y otro conductor. Una manera común de cargar un capacitor es conectar estos dos alambres a las terminales opuestas de una batería. Una vez establecidas las cargas Q y $-Q$ en los conductores, se desconecta la batería. Esto da una *diferencia de potencial* fija V_{ab} entre los conductores (es decir, el potencial del conductor con carga positiva *a* con respecto al potencial del conductor con carga negativa *b*), que es exactamente igual al voltaje de la batería.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud Q de carga en cada conductor. Por lo tanto, la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores también es proporcional a Q. Si se duplica la magnitud de la carga en cada conductor, también se duplican la densidad de carga en cada conductor y el campo eléctrico en cada punto, al igual que la diferencia de potencial entre los conductores; sin embargo, la *razón* entre la carga y la diferencia de potencial no cambia. Esta razón se llama **capacitancia** C del capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad \text{(definición de capacitancia)} \tag{24.1}$$

La unidad del SI para la capacitancia es el **farad** (1 F), en honor del físico inglés del siglo XIX, Michael Faraday. De acuerdo con la ecuación (24.1), un farad es igual a un *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

CUIDADO **Capacitancia contra coulombs** No confunda el símbolo C para la capacitancia (que siempre está en cursivas) con la abreviatura C de los coulombs (que nunca se escribe con cursivas).

Cuanto mayor es la capacitancia C de un capacitor, mayor será la magnitud Q de la carga en el conductor de cierta diferencia de potencial dada V_{ab}, y, por lo tanto, mayor será la cantidad de energía almacenada. (Hay que recordar que el potencial es energía potencial por unidad de carga.) Así, *la capacitancia es una medida de la aptitud (capacidad) de un capacitor para almacenar energía*. Se verá que el valor de la capacitancia sólo depende de las formas y los tamaños de los conductores, así como de la naturaleza del material aislante que hay entre ellos. (El comentario anterior acerca de que la capacitancia es independiente de Q y de V_{ab} no se aplica a ciertos tipos especiales de materiales aislantes. Sin embargo, en este libro no se estudiarán esos materiales.)

Cálculo de la capacitancia: Capacitores con vacío

Es posible calcular la capacitancia C de un capacitor dado encontrando la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores para una magnitud de carga dada Q y aplicando la ecuación (24.1). Por ahora sólo se considerarán *capacitores con vacío*; es decir, se supondrá que los conductores que constituyen el capacitor están separados por un espacio vacío.

La forma más sencilla de un capacitor consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A, separadas por una distancia d que es pequeña en comparación con sus dimensiones (figura 24.2a). Cuando las placas tienen carga, el campo eléctrico está localizado casi por completo en la región entre las placas (figura 24.2b). Como se dijo en el ejemplo 22.8 (sección 22.4), el campo entre esas placas es esencialmente *uniforme*, y las cargas en las placas se distribuyen de manera uniforme en sus superficies opuestas. Este arreglo recibe el nombre de **capacitor de placas paralelas**.

En el ejemplo 21.13 (sección 21.5) se calculó la magnitud del campo eléctrico E para este arreglo utilizando el principio de superposición de campos eléctricos, y de nuevo en el ejemplo 22.8 (sección 22.4) empleando la ley de Gauss. Sería una buena idea revisar esos ejemplos. Se vio que $E = \sigma/\epsilon_0$, donde σ es la magnitud (valor absoluto) de la densidad superficial de carga en cada placa. Esto es igual a la magnitud de la carga total Q en cada placa dividida entre el área A de la placa, o bien, $\sigma = Q/A$, por lo que la magnitud del campo E se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es d, por lo que la diferencia de potencial (voltaje) entre las dos placas es

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

A partir de esto se observa que la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas con vacío es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad \text{(capacitancia de un capacitor de placas paralelas con vacío)} \qquad (24.2)$$

La capacitancia sólo depende de la geometría del capacitor; es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a su separación d. Las cantidades A y d son constantes para un capacitor dado, y ϵ_0 es una constante universal. Así, con vacío la capacitancia C es una constante independiente de la carga en el capacitor o de la diferencia de potencial entre las placas. Si una de las placas del capacitor es flexible, la capacitancia C cambia conforme cambia la separación d de las placas. Éste es el principio de operación de un micrófono condensador (figura 24.3).

Cuando hay materia entre las placas, sus propiedades afectan la capacitancia. En la sección 24.4 se volverá a tratar este asunto. Entre tanto, se debe hacer notar que si el espacio entre las placas contiene aire a presión atmosférica en lugar de vacío, la capacitancia difiere de lo que predice la ecuación (24.2) en menos del 0.06%.

En la ecuación (24.2), si A se expresa en metros cuadrados y d en metros, C está en farads. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N \cdot m^2$, por lo que se observa que

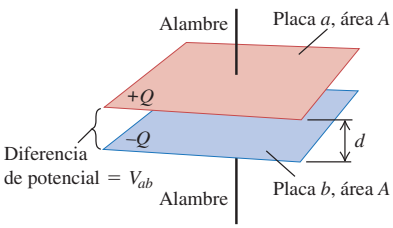
$$1\ F = 1\ C^2/N \cdot m = 1\ C^2/J$$

Como $1\ V = 1\ J/C$ (energía por unidad de carga), esto es congruente con la definición $1\ F = 1\ C/V$. Por último, las unidades de ϵ_0 se expresan como $1\ C^2/N \cdot m^2 = 1\ F/m$, por lo que

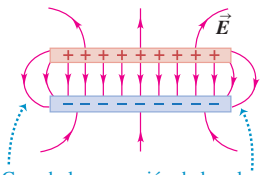
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$$

24.2 Capacitor de placas paralelas con carga.

a) Arreglo de las placas del capacitor



b) Vista lateral del campo eléctrico $\vec{E}$



Cuando la separación de las placas es pequeña en comparación con su tamaño, el campo eléctrico de los bordes es despreciable.

24.3 Dentro de un micrófono condensador hay un capacitor con una placa rígida y una placa flexible. Las dos placas se mantienen con una diferencia de potencial constante V_{ab}. Las ondas sonoras provocan que la placa flexible se mueva hacia delante y atrás, lo que hace variar la capacitancia C y ocasiona que la carga fluya hacia y desde el capacitor de acuerdo con la relación $C = Q/V_{ab}$. Así, la onda sonora se convierte en un flujo de carga que puede amplificarse y grabarse en forma digital.

24.4 Los capacitores comerciales están rotulados con el valor de su capacitancia. Para estos capacitores, $C = 2200\ \mu\text{F}$, $1000\ \mu\text{F}$ y $470\ \mu\text{F}$.

Esta relación es útil en los cálculos de la capacitancia y también ayuda a comprobar que la ecuación (24.2) es consistente en términos de dimensiones.

Un farad es una capacitancia muy grande, como lo ilustra el siguiente ejemplo. En muchas aplicaciones, las unidades más convenientes de capacitancia son el *microfarad* ($1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$) y el *picofarad* ($1\ \text{pF} = 10^{-12}\ \text{F}$). Por ejemplo, la unidad de flash de las cámaras fotográficas utiliza un capacitor de algunos cientos de microfarads (figura 24.4), mientras que las capacitancias en el circuito de sintonía de un aparato de radio por lo común están entre 10 y 100 picofarads.

Para *cualquier* capacitor con vacío, la capacitancia C sólo depende de las formas, las dimensiones y la separación de los conductores que constituyen el capacitor. Si las formas del conductor son más complejas que las del capacitor de placas paralelas, la expresión de la capacitancia es más complicada que la ecuación (24.2). En los siguientes ejemplos mostraremos cómo calcular C para otras dos geometrías distintas de conductores.

Ejemplo 24.1 Tamaño de un capacitor de 1 F

Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 1.0 F. Si las placas tienen una separación de 1.0 mm, ¿cuál es el área de las placas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre la capacitancia, la separación de las placas y el área de éstas (la variable que se busca) para un capacitor de placas paralelas.

PLANTEAR: Se dan los valores de C y d para un capacitor de placas paralelas, por lo que se emplea la ecuación (24.2) y se despeja la variable buscada A.

EJECUTAR: De la ecuación (24.2), el área A es

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}} = 1.1 \times 10^{8}\ \text{m}^2$$

EVALUAR: Esto corresponde a un cuadrado ¡de alrededor de 10 km (cerca de 6 millas) de lado! Esta área es la tercera parte de la isla de Manhattan. Es obvio que éste no es un diseño muy práctico para un capacitor.

De hecho, ahora es posible fabricar capacitores de 1 F que miden unos cuantos centímetros de lado. La clave está en que exista una sustancia apropiada entre las placas en vez del vacío. En la sección 24.4 se estudiará esto con más detalle.

Ejemplo 24.2 Propiedades de un capacitor de placas paralelas

Las placas paralelas de un capacitor con vacío están separadas una distancia de 5.00 mm y tienen 2.00 m^2 de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10,000 V (10.0 kV) a través del capacitor. Calcule *a*) la capacitancia, *b*) la carga en cada placa y *c*) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre ellas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se tienen los datos del área de las placas A, la separación d entre ellas y la diferencia de potencial V_{ab} para este capacitor de placas paralelas. Las variables que se buscan son la capacitancia C, la carga Q y la magnitud del campo eléctrico E.

PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (24.2) para calcular C y después se encuentra la carga Q en cada placa por medio de la diferencia de potencial dada V_{ab} y la ecuación (24.1). Una vez que se conoce Q, se encuentra el campo eléctrico entre las placas a partir de la relación $E = Q/\epsilon_0 A$.

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (24.2)

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(2.00\ \text{m}^2)}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 3.54 \times 10^{-9}\ \text{F} = 0.00354\ \mu\text{F}$$

b) La carga en el capacitor es

$$Q = CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9}\ \text{C/V})(1.00 \times 10^{4}\ \text{V}) = 3.54 \times 10^{-5}\ \text{C} = 35.4\ \mu\text{C}$$

La placa con mayor potencial tiene una carga de $+35.4\ \mu\text{C}$, y la otra tiene $-35.4\ \mu\text{C}$.

c) La magnitud del campo eléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.00\ \text{m}^2)} = 2.00 \times 10^{6}\ \text{N/C}$$

EVALUAR: Una forma alternativa de llegar al resultado del inciso *c*) es recordar que el campo eléctrico tiene igual magnitud que el gradiente de potencial [ecuación (23.22)]. Como el campo entre las placas es uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.00 \times 10^{4}\ \text{V}}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.00 \times 10^{6}\ \text{V/m}$$

(Recuerde que el newton por coulomb y el volt por metro son unidades equivalentes.)

Ejemplo 24.3 Capacitor esférico

Dos corazas conductoras esféricas y concéntricas están separadas por vacío. La coraza interior tiene una carga total $+Q$ y radio exterior r_a, y la coraza exterior tiene carga $-Q$ y radio interior r_b (figura 24.5). (La coraza interior está unida a la coraza exterior mediante delgadas varillas aislantes que tienen un efecto despreciable sobre la capacitancia.) Determine la capacitancia del capacitor esférico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste no es un capacitor de placas paralelas, por lo que no es posible utilizar las relaciones desarrolladas para esa geometría particular. En vez de ello, regresaremos a la definición fundamental de capacitancia: la magnitud de la carga en cualquier conductor dividida entre la diferencia de potencial de los conductores.

PLANTEAR: Emplearemos la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico entre los conductores esféricos. A partir de este valor se determina la diferencia de potencial V_{ab} entre los dos conductores; después usaremos la ecuación (24.1) para encontrar la capacitancia $C = Q/V_{ab}$.

EJECUTAR: Con el mismo procedimiento del ejemplo 22.5 (sección 22.4), se toma como superficie gaussiana una esfera con radio r entre las dos esferas y que sea concéntrica con respecto a éstas. La ley de Gauss (ecuación 22.8) establece que el flujo eléctrico a través de esta superficie es igual a la carga total encerrada dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

Por simetría, $\vec{E}$ es de magnitud constante y paralela a $d\vec{A}$ en cada punto de esta superficie, por lo que la integral en la ley de Gauss es igual a $(E)(4\pi r^2)$. La carga total encerrada es $Q_{\text{enc}} = Q$, por lo que se tiene

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El campo eléctrico entre las esferas sólo es el que se debe a la carga en la esfera interior; la esfera exterior no tiene ningún efecto. En el ejemplo 22.5 vimos que la carga en una esfera conductora produce un campo igual a cero *dentro* de la esfera, lo que también nos indica que el conductor exterior no contribuye al campo entre los conductores.

La expresión anterior para E es la misma que la correspondiente a una carga puntual Q, por lo que la expresión para el potencial también puede tomarse como la misma que la correspondiente a una carga puntual, $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. De ahí que el potencial del conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Por último, la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

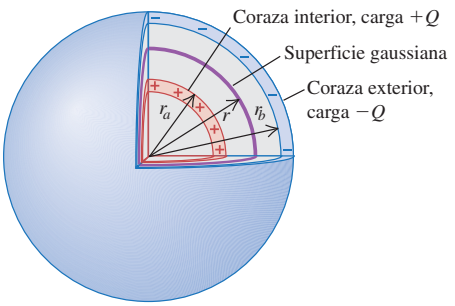
Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{(0.095\ \text{m})(0.105\ \text{m})}{0.010\ \text{m}}$$

$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \text{F} = 110\ \text{pF}$$

EVALUAR: Podemos relacionar este resultado con la capacitancia de un capacitor de placas paralelas. La cantidad $4\pi r_a r_b$ es intermedia entre las áreas $4\pi r_a^2$ y $4\pi r_b^2$ de las dos esferas; de hecho, es la *media geométrica* de las dos áreas, lo que se denota con A_{gm}. La distancia entre las esferas es $d = r_b - r_a$, por lo que el resultado anterior se escribe como $C = \epsilon_0 A_{\text{gm}}/d$. Ésta es exactamente la misma forma que para placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. La conclusión es que si la distancia entre las esferas es muy pequeña en comparación con sus radios, las esferas se comportan como placas paralelas con la misma área y separación.

24.5 Capacitor esférico.



Ejemplo 24.4 Capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico largo tiene un radio r_a y densidad lineal de carga $+\lambda$. Está rodeado por una coraza conductora cilíndrica coaxial con radio interior r_b y densidad lineal de carga $-\lambda$ (figura 24.6). Calcule la capacitancia por unidad de longitud para este capacitor, suponiendo que hay vacío en el espacio entre los cilindros.

SOLUCIÓN

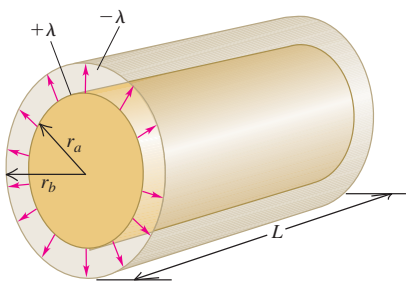
IDENTIFICAR: Igual que en el ejemplo 24.3, se usa la definición fundamental de capacitancia.

PLANTEAR: Primero se encuentran expresiones para la diferencia de potencial V_{ab} entre los cilindros y la carga Q en una longitud L de los cilindros; después se encuentra la capacitancia de una longitud L mediante la ecuación (24.1). La variable buscada es esta capacitancia dividida entre L.

EJECUTAR: Para encontrar la diferencia de potencial entre los cilindros, se utiliza el resultado que se obtuvo en el ejemplo 23.10 (sección

continúa

24.6 Un capacitor cilíndrico largo. En esta figura la densidad lineal de carga λ se supone positiva. La magnitud de carga en una longitud L de cualquier cilindro es λL.



23.3). Ahí se determinó que en un punto afuera de un cilindro con carga a una distancia r de su eje, el potencial debido al cilindro es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es el radio (arbitrario) en el que $V = 0$. En este problema, se puede usar este mismo resultado para el potencial *entre* los cilindros porque, de acuerdo con la ley de Gauss, la carga en el cilindro exterior no contribuye al campo entre los cilindros (véase el ejemplo 24.3). En nuestro caso, se toma el radio r_0 como r_b, el radio de la superficie interior del cilindro exterior, de manera que el cilindro conductor exterior está en $V = 0$. Entonces, el potencial en la superficie exterior del cilindro interior (donde $r = r_a$) es igual al potencial V_{ab} del cilindro interior a (positivo) con respecto al cilindro exterior b (negativo), es decir,

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Esta diferencia de potencial es positiva (si se toma λ como positiva, como en la figura 24.6) porque el cilindro interior está a un potencial más elevado que el del exterior.

La carga total Q en una longitud L es $Q = \lambda L$, por lo que, de la ecuación (24.1), la capacitancia C de una longitud L es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

La capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

Si se sustituye $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} = 8.85\ \text{pF/m}$, se obtiene

$$\frac{C}{L} = \frac{55.6\ \text{pF/m}}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

EVALUAR: Se observa que la capacitancia de los cilindros coaxiales está determinada en su totalidad por las dimensiones, tal como ocurre en el caso de las placas paralelas. Los cables coaxiales comunes están fabricados de este modo, pero entre los conductores interior y exterior tienen un material aislante en vez de vacío. El cable típico para las antenas de televisión y conexiones de videograbadoras tiene una capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m.

Evalúe su comprensión de la sección 24.1 Un capacitor tiene vacío en el espacio entre los conductores. Si se duplica la cantidad de carga en cada conductor, ¿qué pasa con la capacitancia? i) aumenta; ii) disminuye; iii) permanece igual; iv) la respuesta depende del tamaño o la forma de los conductores.

24.2 Capacitores en serie y en paralelo

24.7 Algunos de los capacitores disponibles en el comercio.

Los capacitores se fabrican con ciertas capacitancias y voltajes de trabajo estándares (figura 24.7). Sin embargo, estos valores estándar podrían no ser los que se necesiten en una aplicación específica. Se pueden obtener los valores requeridos combinando capacitores; son posibles muchas combinaciones, pero las más sencillas son la conexión en serie y la conexión en paralelo.

Capacitores en serie

La figura 24.8a es un diagrama de una **conexión en serie**. Se conectan en serie dos capacitores (uno en seguida del otro) mediante alambres conductores entre los puntos a y b. Al principio ambos capacitores están inicialmente sin carga. Cuando se aplica una diferencia de potencial V_{ab} positiva y constante entre los puntos a y b, los capacitores se cargan; la figura muestra que la carga en *todas* las placas conductoras tiene la misma magnitud. Para saber por qué, primero observe que la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q. El campo eléctrico de esta carga positiva atrae carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello se requiere que la placa inferior tenga carga $-Q$. Estas cargas negativas tuvieron que venir de la placa superior de C_2, la cual se carga positivamente con carga $+Q$. Luego, esta carga positiva atrae la carga negativa $-Q$ desde la conexión en el punto b a la placa inferior de

C_2. La carga total en la placa inferior de C_1 y la placa superior de C_2, en conjunto, debe ser siempre igual a cero porque tales placas sólo están conectadas una con otra y con nada más. Así, *en una conexión en serie, la magnitud de la carga en todas las placas es la misma.*

En relación con la figura 24.8a, las diferencias de potencial entre los puntos a y c, c y b, y a y b, pueden representarse como

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

por lo que

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24.3}$$

Por una convención común, los símbolos V_1, V_2 y V se utilizan para denotar las *diferencias* de potencial V_{ac} (a través del primer capacitor), V_{cb} (a través del segundo capacitor) y V_{ab} (a través de toda la combinación de capacitores), respectivamente.

La **capacitancia equivalente** C_{eq} de la combinación en serie se define como la capacitancia de un *solo* capacitor para el que la carga Q es la misma que para la combinación, cuando la diferencia de potencial es la misma. En otras palabras, la combinación se puede sustituir por un *capacitor equivalente* de capacitancia C_{eq}. Para un capacitor de este tipo, como el que se ilustra en la figura 24.8b,

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{o bien,} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \tag{24.4}$$

Al combinar las ecuaciones (24.3) y (24.4) se encuentra que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Este análisis se puede extender a cualquier número de capacitores conectados en serie. Se obtiene el siguiente resultado para el *recíproco* de la capacitancia equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad \text{(capacitores en serie)} \tag{24.5}$$

El recíproco de la capacitancia equivalente de una combinación en serie es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. En una conexión en serie la capacitancia equivalente siempre es *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO **Capacitores en serie** En una combinación en serie, la magnitud de la carga es la misma en todas las placas de todos los capacitores; sin embargo, las diferencias de potencial de los capacitores individuales *no* son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las diferencias de potencial de los capacitores individuales se suman para dar la diferencia de potencial total a través de la combinación en serie: $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$.

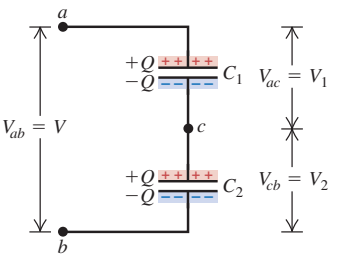
Capacitores en paralelo

El arreglo que se muestra en la figura 24.9a se llama **conexión en paralelo**. Dos capacitores están conectados en paralelo entre los puntos a y b. En este caso, las placas superiores de los dos capacitores están conectadas mediante alambres conductores para formar una superficie equipotencial, y las placas inferiores forman otra. Entonces, *en una conexión en paralelo, la diferencia de potencial para todos los capacitores individuales es la misma*, y es igual a $V_{ab} = V$. Sin embargo, las cargas Q_1 y Q_2 no son

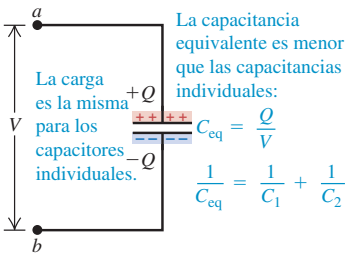
24.8 Conexión en serie de dos capacitores.

a) Dos capacitores en serie

Capacitores en serie:
- Los capacitores tienen la misma carga Q.
- Sus diferencias de potencial se suman: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$.



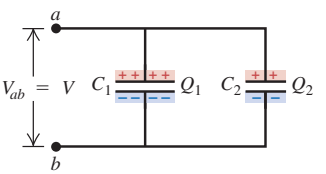
b) El capacitor equivalente único



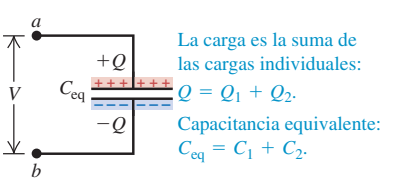
24.9 Conexión en paralelo de dos capacitores.

a) Dos capacitores en paralelo

Capacitores en paralelo:
- Los capacitores tienen el mismo potencial V.
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia: $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$.



b) El capacitor equivalente único



necesariamente iguales, puesto que pueden llegar cargas a cada capacitor de manera independiente desde la fuente (como una batería) de voltaje V_{ab}. Las cargas son

$$Q_1 = C_1 V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2 V$$

La carga *total* Q de la combinación, y por consiguiente la carga total en el capacitor equivalente, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

por lo que

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \tag{24.6}$$

La combinación en paralelo es equivalente a un solo capacitor con la misma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ y diferencia de potencial V que la combinación (figura 24.9b). La capacitancia equivalente de la combinación, C_{eq}, es la misma que la capacitancia Q/V de este único capacitor equivalente. Así, de la ecuación (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De igual forma se puede demostrar que para cualquier número de capacitores en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \text{(capacitores en paralelo)} \tag{24.7}$$

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es igual a la *suma* de las capacitancias individuales. En una conexión en paralelo, la capacitancia equivalente siempre es *mayor que* cualquier capacitancia individual.

CUIDADO **Capacitores en paralelo** Las diferencias de potencial son las mismas para todos los capacitores en una combinación en paralelo; no obstante, las cargas en los capacitores individuales *no* son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las cargas en los capacitores individuales se suman para dar la carga total en la combinación en paralelo: $Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$. [Compare estos enunciados con los del párrafo bajo el título "Cuidado" que sigue a la ecuación (24.5).]

Estrategia para resolver problemas 24.1 Capacitancia equivalente

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El concepto de capacitancia equivalente es útil siempre que se conectan dos o más capacitores.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo del arreglo de los capacitores.
2. Determine si los capacitores están conectados en serie o en paralelo. Cuando hay combinaciones más complicadas, a veces es posible identificar partes que son conexiones simples en serie o en paralelo.
3. Recuerde que cuando se dice que un capacitor tiene carga Q, siempre significa que la placa con mayor potencial tiene carga $+Q$, y la otra placa tiene carga $-Q$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Cuando los capacitores están conectados en serie, como en la figura 24.8a, siempre tienen la misma carga, considerando que estaban sin carga antes de conectarse. Las diferencias de potencial *no* son iguales a menos que las capacitancias sí lo sean. La diferencia de potencial total a través de la combinación es la suma de las diferencias de potencial individuales.
2. Cuando los capacitores están conectados en paralelo, como en la figura 24.9a, la diferencia de potencial V siempre es la misma para todos los capacitores individuales. Las cargas en los capacitores individuales *no* son iguales a menos que las capacitancias sean las mismas. La carga total en la combinación es la suma de las cargas individuales.
3. Para combinaciones más complicadas, identifique las partes que sean conexiones simples en serie o paralelo y sustitúyalas por sus capacitancias equivalentes, en una reducción paso a paso. Si luego se necesita encontrar la carga o la diferencia de potencial para un capacitor individual, regrese por el camino en reducción paso a paso, hasta llegar a los capacitores originales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que el resultado tenga sentido. Si los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente C_{eq} debe ser *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales. Por el contrario, si los capacitores están conectados en paralelo, C_{eq} debe ser *mayor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

Ejemplo 24.5 Capacitores en serie y en paralelo

En las figuras 24.8 y 24.9, sean $C_1 = 6.0\ \mu\text{F}$, $C_2 = 3.0\ \mu\text{F}$ y $V_{ab} = 18$ V. Encuentre la capacitancia equivalente, la carga y la diferencia de potencial para cada capacitor cuando los dos capacitores se conectan *a*) en serie, y *b*) en paralelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa las ideas analizadas en esta sección acerca de las conexiones de los capacitores.

PLANTEAR: En los dos incisos, una de las variables buscadas es la capacitancia equivalente C_{eq}, que para la combinación en serie del inciso *a*) está dada por la ecuación (24.5), y para la combinación en paralelo del inciso *b*) por la ecuación (24.6). En cada inciso podemos encontrar la carga y la diferencia de potencial utilizando la definición de capacitancia, ecuación (24.1), y las reglas descritas en la Estrategia para resolver problemas 24.1.

EJECUTAR: *a*) Para la capacitancia equivalente de la combinación en serie (figura 24.8a), se aplica la ecuación (24.5) y se encuentra que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0\ \mu\text{F}} + \frac{1}{3.0\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 2.0\ \mu\text{F}$$

La carga Q en cada capacitor en serie es igual a la carga en el capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2.0\ \mu\text{F})(18\ \text{V}) = 36\ \mu\text{C}$$

La diferencia de potencial a través de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu\text{C}}{6.0\ \mu\text{F}} = 6.0\ \text{V}$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu\text{C}}{3.0\ \mu\text{F}} = 12.0\ \text{V}$$

b) Para determinar la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo (figura 24.9a), se utiliza la ecuación (24.6):

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\ \mu\text{F} + 3.0\ \mu\text{F} = 9.0\ \mu\text{F}$$

La diferencia de potencial a través de cada uno de los dos capacitores en paralelo es la misma que aquélla a través del capacitor equivalente, 18 V. Las cargas Q_1 y Q_2 son directamente proporcionales a las capacitancias C_1 y C_2, respectivamente:

$$Q_1 = C_1V = (6.0\ \mu\text{F})(18\ \text{V}) = 108\ \mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2V = (3.0\ \mu\text{F})(18\ \text{V}) = 54\ \mu\text{C}$$

EVALUAR: Observe que la capacitancia equivalente C_{eq} para la combinación en serie del inciso *a*) es menor que C_1 o C_2, en tanto que para la combinación en paralelo del inciso *b*), la capacitancia equivalente es mayor que C_1 o C_2.

Resulta pertinente comparar las diferencias de potencial y las cargas en cada inciso del ejemplo. Para los dos capacitores en serie, como en el inciso *a*), la carga es la misma en cualquier capacitor y la diferencia de potencial *más grande* ocurre a través del capacitor con la *menor* capacitancia. Además, $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V, como debe ser. En contraste, para los dos capacitores en paralelo, como en el inciso *b*), cada capacitor tiene la misma diferencia de potencial y la *mayor* carga está en el capacitor con la *mayor* capacitancia. ¿Puede usted demostrar que la carga total $Q_1 + Q_2$ en la combinación en paralelo es igual a la carga $Q = C_{eq}V$ en el capacitor equivalente?

Ejemplo 24.6 Red de capacitores

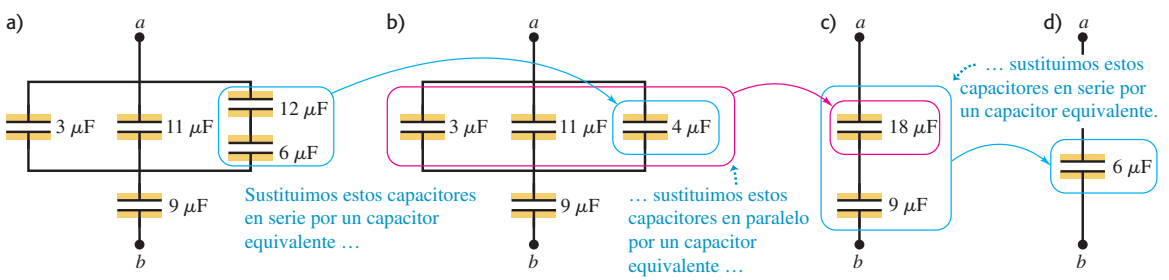
Encuentre la capacitancia equivalente de la combinación que se muestra en la figura 24.10a.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Los cinco capacitores en la figura 24.10a no están conectados todos en serie ni en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que *sí* están en serie o en paralelo, las cuales combinaremos para encontrar la capacitancia equivalente.

PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (24.5) para analizar las porciones de la red conectadas en serie, y la ecuación (24.7) para analizar aquellas que están en paralelo.

24.10 a) Red de capacitores entre los puntos *a* y *b*. b) Los capacitores de 12 μF y 6 μF conectados en serie en a) se sustituyen por un capacitor equivalente de 4 μF. c) Los capacitores en paralelo de 3 μF, 11 μF y 4 μF en b) se sustituyen por un capacitor equivalente de 18 μF. d) Por último, los capacitores en serie de 18 μF y 9 μF en c) se sustituyen por un capacitor equivalente de 6 μF.



continúa

EJECUTAR: Primero se sustituye la combinación en serie de 12 μF y 6 μF por su capacitancia equivalente, que se denota como C', en la ecuación (24.5):

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\ \mu\text{F}} + \frac{1}{6\ \mu\text{F}} \qquad C' = 4\ \mu\text{F}$$

Esto da la combinación equivalente que se ilustra en la figura 24.10b. A continuación, con la ecuación (24.7), se encuentra la capacitancia equivalente de los tres capacitores en paralelo, la cual se representa con C'':

$$C'' = 3\ \mu\text{F} + 11\ \mu\text{F} + 4\ \mu\text{F} = 18\ \mu\text{F}$$

Esto da la combinación más sencilla que aparece en la figura 24.10c. Por último, se calcula la capacitancia equivalente C_{eq} de estos dos capacitores en serie (figura 24.10d):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\ \mu\text{F}} + \frac{1}{9\ \mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 6\ \mu\text{F}$$

EVALUAR: La capacitancia equivalente de la red es 6 μF; es decir, si se aplica una diferencia de potencial V_{ab} a través de las terminales de la red, la carga neta en la red es el producto de 6 μF por V_{ab} veces. ¿Cómo se relaciona esta carga neta con las cargas en los capacitores individuales en la figura 24.10a?

Evalúe su comprensión de la sección 24.2 Se desea conectar un capacitor de 4 μF y otro de 8 μF. *a)* ¿Con qué tipo de conexión el capacitor de 4 μF tendrá una *diferencia de potencial* más grande que en el de 8 μF? i) en serie; ii) en paralelo; iii) indistintamente, en serie o paralelo; iv) ni en serie ni en paralelo. *b)* ¿Con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de 4 μF una *carga* mayor que la carga del capacitor de 8 μF? i) en serie; ii) en paralelo; iii) indistintamente, en serie o paralelo; iv) ni en serie ni en paralelo.

24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

Muchas de las aplicaciones más importantes de los capacitores dependen de su capacidad para almacenar energía. La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es exactamente igual a la cantidad de trabajo requerido para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en los diferentes conductores. Cuando el capacitor se descarga, esta energía almacenada se recupera en forma de trabajo realizado por las fuerzas eléctricas.

Podemos determinar la energía potencial U de un capacitor con carga mediante el cálculo del trabajo W que se requiere para cargarlo. Suponga que cuando se carga el capacitor, la carga final es Q y la diferencia de potencial final es V. Según la ecuación (24.1), estas cantidades están relacionadas de la siguiente forma

$$V = \frac{Q}{C}$$

Sean q y v la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces, $v = q/C$. En esta etapa, el trabajo dW que se requiere para transferir un elemento adicional de carga dq es

$$dW = v\ dq = \frac{q\ dq}{C}$$

El trabajo total W necesario para incrementar la carga q del capacitor, de cero a un valor final Q, es

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\ dq = \frac{Q^2}{2C} \qquad \text{(trabajo para cargar el capacitor)} \quad (24.8)$$

Esto también es igual al trabajo total realizado por el campo eléctrico sobre la carga cuando el capacitor se descarga. Entonces, q *disminuye* desde un valor inicial Q hasta cero conforme los elementos de carga dq "caen" a través de las diferencias de potencial v que varían desde V hasta cero.

Si se define la energía potencial de un capacitor *sin carga* como igual a cero, entonces W en la ecuación (24.8) es igual a la energía potencial U del capacitor con carga. La carga final almacenada es $Q = CV$, por lo que U (que es igual a W) se expresa como

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad \text{(energía potencial almacenada en un capacitor)} \quad (24.9)$$

Cuando Q está en coulombs, C en farads (coulombs por volt) y V en volts (joules por coulomb), U queda expresada en joules.

La última forma de la ecuación (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, muestra que el trabajo total W que se requiere para cargar el capacitor es igual a la carga total Q multiplicada por la diferencia de potencial *promedio* $\frac{1}{2}V$ durante el proceso de carga.

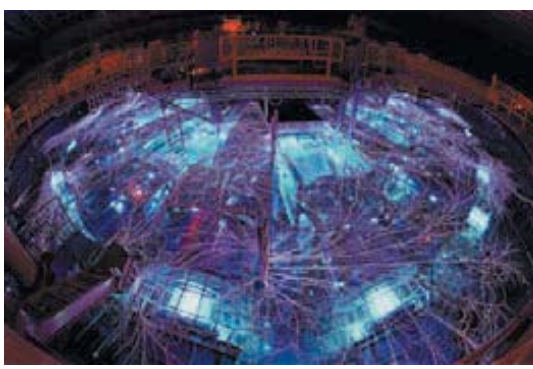
La expresión $U = \frac{1}{2}(Q^2/C)$ en la ecuación (24.9) indica que un capacitor con carga es el análogo eléctrico de un resorte estirado con energía potencial elástica $U = \frac{1}{2}kx^2$. La carga Q es análoga a la elongación x, y el *recíproco* de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante k de la fuerza. La energía suministrada a un capacitor en el proceso de carga es análoga al trabajo que se realiza sobre un resorte al estirarlo.

Las ecuaciones (24.8) y (24.9) plantean que la capacitancia mide la facultad de un capacitor para almacenar tanto energía como carga. Si un capacitor se carga conectándolo a una batería o a otra fuente que suministre una diferencia de potencial fija V, entonces un incremento en el valor de C da una carga mayor $Q = CV$ y una cantidad más grande de energía almacenada $U = \frac{1}{2}CV^2$. Si en vez de lo anterior, el objetivo es transferir una cantidad dada de carga Q de un conductor al otro, la ecuación (24.8) indica que el trabajo W requerido es inversamente proporcional a C; cuanto mayor sea la capacitancia, más fácil será dar a un capacitor una cantidad fija de carga.

Aplicaciones de los capacitores: Almacenamiento de energía

La mayoría de las aplicaciones de los capacitores aprovechan su capacidad de almacenar y liberar energía. En las unidades electrónicas de flash que usan los fotógrafos, la energía almacenada en un capacitor (véase la figura 24.4) se libera al oprimir el botón del obturador. Esto provee una trayectoria de conducción de una placa del capacitor a la otra a través del tubo del flash. Una vez establecida esta trayectoria, la energía almacenada se convierte rápidamente en un destello de luz breve, pero intenso. Un ejemplo extremo del mismo principio es la máquina Z en Sandia National Laboratories en Nuevo México, la cual se usa en experimentos de fusión nuclear controlada (figura 24.11). Un banco de capacitores cargados libera más de un millón de joules de energía en unas cuantas mil millonésimas de segundo. En ese breve lapso, la potencia de salida de la máquina Z es de 2.9×10^{14} W, que equivale a ¡80 veces la producción de electricidad de todas las plantas de energía de la Tierra!

24.11 La máquina Z utiliza un número grande de capacitores en paralelo para dar una capacitancia equivalente C enorme (véase la sección 24.2). De ahí que sea posible almacenar una gran cantidad de energía $U = \frac{1}{2}CV^2$ incluso con una diferencia de potencial modesta V. Los arcos mostrados en la figura se producen cuando los capacitores descargan su energía en un blanco, no mayor que un carrete de hilo. Esto hace que el objetivo se caliente a una temperatura superior a 2×10^9 K.



En otras aplicaciones, la energía se libera con más lentitud. Los resortes de la suspensión de un automóvil ayudan a hacer más suave la marcha al absorber la energía de las sacudidas bruscas y liberarla en forma gradual; de manera análoga, un capacitor en un circuito electrónico mitiga las variaciones indeseables del voltaje debido a oleadas de corriente. Y al igual que la presencia de un resorte da a un sistema mecánico una frecuencia natural a la que responde con más intensidad ante una fuerza periódica aplicada, la presencia de un capacitor da a un circuito eléctrico una frecuencia natural ante las oscilaciones de corriente. Esta idea se emplea en circuitos sintonizados tales como los de los receptores de radio y televisión, que responden a las señales de las emisoras en una frecuencia particular e ignoran las señales procedentes de otras. Estos circuitos se estudiarán en detalle en el capítulo 31.

Las propiedades de almacenamiento de energía de los capacitores también tienen efectos prácticos indeseables. Las patillas de conexión adyacentes del lado inferior de los chips de computadoras actúan como capacitores, y la propiedad que confiere utilidad a los capacitores para amortiguar las variaciones del voltaje actúa en este caso para disminuir la rapidez a la que cambian los potenciales de las patillas de conexión del chip. Esta tendencia limita la rapidez a la que los chips pueden realizar cálculos, un efecto que cobra mayor importancia a medida que los chips de computadora se hacen más pequeños y tienen que operar con mayor rapidez.

Energía del campo eléctrico

Un capacitor puede cargarse trasladando electrones directamente de una placa a otra. Esto requiere efectuar trabajo contra el campo eléctrico entre las placas. Así, es posible considerar la energía como si estuviera almacenada *en el campo,* en la región

entre las placas. Para desarrollar esta relación, debemos encontrar la energía *por unidad de volumen* en el espacio entre las placas paralelas de un capacitor con área A y separación d. Ésta se denomina **densidad de energía** y se denota con u. De la ecuación (24.9) se desprende que el total de energía potencial almacenada es $\frac{1}{2}CV^2$ y el volumen entre las placas es Ad; por lo tanto, la densidad de energía es

$$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \tag{24.10}$$

De la ecuación (24.2), la capacitancia C está dada por $C = \epsilon_0 A/d$. La diferencia de potencial V está relacionada con la magnitud del campo eléctrico E de acuerdo con $V = Ed$. Si estas expresiones se utilizan en la ecuación (24.10), los factores geométricos A y d se anulan y se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{(densidad de energía eléctrica en vacío)} \tag{24.11}$$

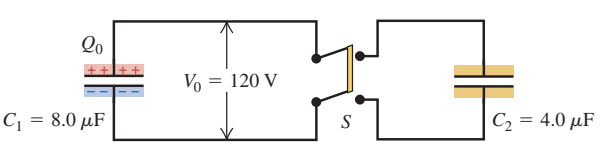
Aunque esta relación se obtuvo sólo para un capacitor de placas paralelas, es válida para cualquier capacitor con vacío y por ello *para cualquier configuración de campo eléctrico en el vacío*. Este resultado tiene una implicación interesante. El vacío se considera como espacio en el que no hay materia; sin embargo, el vacío puede tener campos eléctricos y, por lo tanto, energía. Así que, después de todo, el espacio "vacío" en realidad no está vacío. Esta idea y la ecuación (24.11) se utilizarán en el capítulo 32 en relación con la energía transportada por las ondas electromagnéticas.

CUIDADO **La energía del campo eléctrico es energía potencial eléctrica** Es un error común creer que la energía del campo eléctrico es una nueva clase de energía, distinta de la energía potencial eléctrica descrita con anterioridad. Pero *no* es así; tan sólo es una forma diferente de interpretar la energía potencial eléctrica. Se puede considerar la energía de un sistema de cargas como una propiedad compartida de todas las cargas, o pensar en la energía como una propiedad del campo eléctrico que crean las cargas. Cualquiera de estas interpretaciones lleva al mismo valor de la energía potencial.

Ejemplo 24.7 Transferencia de carga y energía entre capacitores

En la figura 24.12 se carga un capacitor de capacitancia $C_1 = 8.0\ \mu\text{F}$ al conectarlo a una fuente con diferencia de potencial $V_0 = 120$ V (en la figura no aparece). Inicialmente, el interruptor S está abierto. Una vez que C_1 se ha cargado, se desconecta la fuente de la diferencia de potencial. *a*) ¿Cuál es la carga Q_0 en C_1 si se deja abierto el interruptor S? *b*) ¿Cuál es la energía almacenada en C_1 si el interruptor S se deja abierto? *c*) Inicialmente, el capacitor de capacitancia $C_2 = 4.0\ \mu\text{F}$ está sin carga. Después de cerrar el interruptor S, ¿cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor, y cuál es la carga en cada uno? *d*) ¿Cuál es la energía total del sistema después de cerrar el interruptor S?

24.12 Cuando se cierra el interruptor S, el capacitor con carga C_1 está conectado a otro capacitor sin carga C_2. La parte central del interruptor es una manija aislante; la carga sólo puede fluir entre las dos terminales superiores y entre las dos terminales inferiores.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al principio se tiene un solo capacitor con una diferencia de potencial dada entre sus placas. Después de que se cierra el interruptor, un alambre conecta las placas superiores de los dos capacitores y otro conecta las placas inferiores; en otras palabras, los capacitores están conectados en paralelo.

PLANTEAR: En los incisos *a*) y *b*) se encuentran la carga y la energía almacenada para el capacitor C_1 mediante las ecuaciones (24.1) y (24.9), respectivamente. En el inciso *c*) se emplea el carácter de la conexión en paralelo para determinar la manera en que los dos capacitores comparten la carga Q_0. En el inciso *d*) se utiliza otra vez la ecuación (24.9) para calcular la energía almacenada en los capacitores C_1 y C_2; la energía total es la suma de estos valores.

EJECUTAR: *a*) La carga Q_0 en C_1 es

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8.0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

b) La energía almacenada inicialmente en el capacitor es

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0.058\ \text{J}$$

c) Cuando se cierra el interruptor, la carga positiva Q_0 se distribuye sobre las placas superiores de ambos capacitores, y la carga negativa $-Q_0$ se distribuye en las placas inferiores de los dos capacitores. Sean Q_1 y Q_2 las magnitudes de las cargas finales en los dos capacitores. De la conservación de la carga,

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

En el estado final, cuando las cargas ya no se trasladan, ambas placas superiores están al mismo potencial; están conectadas por un alambre conductor, de manera que forman una sola superficie equipotencial. Las dos placas inferiores también están al mismo potencial, diferente del potencial de las placas superiores. La diferencia de potencial final V entre las placas es, por lo tanto, la misma para los dos capacitores, como era de esperarse para una conexión en paralelo. Las cargas en los capacitores son

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Cuando se combina esto con la ecuación anterior de la conservación de la carga, se obtiene

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8.0\ \mu\text{F} + 4.0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$
$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

d) La energía final del sistema es la suma de las energías almacenadas en cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}Q_1 V + \frac{1}{2}Q_2 V = \frac{1}{2}Q_0 V$$
$$= \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0.038\ \text{J}$$

EVALUAR: La energía final es menor que la energía original $U_{\text{inicial}} = 0.058$ J; la diferencia se ha convertido en energía de algún otro tipo. Los conductores se calientan un poco debido a su resistencia, y algo de energía se irradia como ondas electromagnéticas. En los capítulos 26 y 31 se estudiará con detalle el comportamiento de los capacitores en los circuitos.

Ejemplo 24.8 Energía del campo eléctrico

Se desea almacenar 1.00 J de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.00 m^3 en vacío. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico que se requiere? *b*) Si la magnitud del campo eléctrico es 10 veces mayor, ¿cuánta energía se almacena por metro cúbico?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se utiliza la relación entre la magnitud del campo eléctrico E y la densidad de energía u, que es igual a la energía del campo eléctrico dividida entre el volumen ocupado por el campo.

PLANTEAR: En el inciso *a*) se emplea la información dada para obtener u, y después se usa la ecuación (24.11) para encontrar el valor de E que se requiere. Esta misma ecuación da la relación entre los cambios en E y los cambios correspondientes en u.

EJECUTAR: *a*) La densidad de energía deseada es $u = 1.00\ \text{J/m}^3$. Se despeja E en la ecuación (24.11):

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00\ \text{J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$
$$= 4.75 \times 10^5\ \text{N/C} = 4.75 \times 10^5\ \text{V/m}$$

b) La ecuación (24.11) muestra que u es proporcional a E^2. Si E se incrementa en un factor de 10, u aumenta en un factor de $10^2 = 100$ y la densidad de energía es 100 J/m^3.

EVALUAR: El valor de E calculado en el inciso *a*) es considerable, pues corresponde a una diferencia de potencial de casi medio millón de volts en una distancia de 1 metro. En la sección 24.4 se verá que la magnitud del campo eléctrico en los aislantes prácticos llega a ser tan grande como este valor o incluso más.

Ejemplo 24.9 Dos maneras de calcular la energía almacenada en un capacitor

El capacitor esférico descrito en el ejemplo 24.3 (sección 24.1) tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus conductores interior y exterior. Calcule la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor *a*) calculando la capacitancia C obtenida en el ejemplo 24.3, y *b*) integrando la densidad de energía del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema pide que se piense en la energía almacenada en un capacitor U de dos maneras diferentes: en términos del trabajo realizado para colocar las cargas en los dos conductores, $U = Q^2/2C$, y en términos de la energía en el campo eléctrico entre los dos conductores. Las dos descripciones son equivalentes, por lo que deben dar el mismo resultado para U.

PLANTEAR: En el ejemplo 24.3 se obtuvo la capacitancia C y la magnitud del campo E entre los conductores. Para determinar la energía almacenada U en el inciso *a*), se utilizará la expresión para C en la ecuación (24.9). En el inciso *b*) se empleará la expresión para E en la ecuación (24.11) para determinar la densidad de energía del campo eléctrico u entre los conductores. La magnitud del campo depende de la distancia r desde el centro del capacitor, por lo que u también depende de r. Entonces, no es posible calcular U con sólo multiplicar u por el volumen entre los conductores; en vez de ello, se debe integrar u con respecto a ese volumen.

EJECUTAR: *a*) Del ejemplo 24.3, el capacitor esférico tiene una capacitancia

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

donde r_a y r_b son los radios interior y exterior de las esferas conductoras. De la ecuación (24.9), la energía almacenada en este capacitor es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

b) El campo eléctrico en el volumen entre las dos esferas conductoras tiene una magnitud de $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. El campo eléctrico es igual a cero dentro de la esfera interior y también afuera de la superficie interna de la esfera exterior, ya que una superficie gaussiana con radio $r < r_a$ o $r > r_b$ encierra una carga neta de cero. Así, la densidad de energía es diferente de cero sólo en el espacio comprendido entre las esferas ($r_a < r < r_b$). En esta región,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

La densidad de energía *no* es uniforme, sino que disminuye rápidamente al aumentar la distancia desde el centro del capacitor. Para

continúa

encontrar la energía total del campo eléctrico se integra u (energía por unidad de volumen) sobre el volumen que hay entre las esferas conductoras interior y exterior. Al dividir este volumen en corazas esféricas de radio r, área superficial $4\pi r^2$, espesor dr y volumen $dV = 4\pi r^2\,dr$, se obtiene

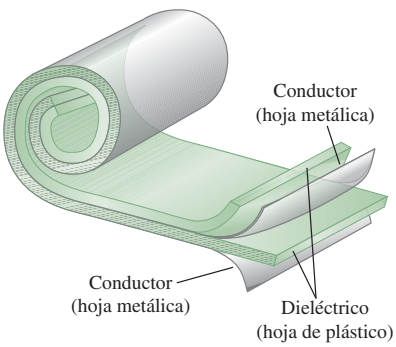
$$\begin{aligned} U &= \int u\,dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\,dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_a}\right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \end{aligned}$$

EVALUAR: Con cualquiera de los enfoques se obtiene el mismo resultado para U, como debe ser. Hacemos hincapié en que la energía potencial eléctrica puede considerarse como asociada con cualquiera de las *cargas*, como en el inciso *a*), o el *campo*, como en el inciso *b*); sin importar el punto de vista que se elija, la cantidad de energía almacenada es la misma.

Evalúe su comprensión de la sección 24.3 Se desea conectar un capacitor de 4 μF con otro de 8 μF. ¿Con qué tipo de conexión el capacitor de 4 μF tendrá una cantidad mayor de *energía almacenada* que el de 8 μF? i) en serie; ii) en paralelo; iii) con cualquiera, ya sea en serie o en paralelo; iv) ni en serie ni en paralelo.

24.4 Dieléctricos

24.13 Un tipo común de capacitor utiliza láminas dieléctricas para separar los conductores.



La mayoría de los capacitores tienen un material no conductor o **dieléctrico** entre sus placas conductoras. Un tipo común de capacitor emplea tiras largas de hojas (láminas) metálicas como placas, separadas por tiras de hojas de materiales plásticos, como Mylar. Estos materiales dispuestos en forma de emparedado se enrollan para formar una unidad capaz de proveer una capacitancia de varios microfarads en un paquete compacto (figura 24.13).

La colocación de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones. La primera es que resuelve el problema mecánico de mantener dos hojas metálicas grandes con una separación muy pequeña sin que hagan contacto.

La segunda función es que un dieléctrico incrementa al máximo posible la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Como se describió en la sección 23.3, cualquier material aislante experimenta una ionización parcial que permite la conducción a través de él, si se somete a un campo eléctrico suficientemente grande. Este fenómeno se llama **ruptura del dieléctrico**. Muchos materiales dieléctricos toleran sin romperse campos eléctricos más intensos que los que soporta el aire. Así que el uso de un dieléctrico permite que un capacitor mantenga una gran diferencia de potencial V y que, por lo tanto, almacene cantidades más grandes de carga y energía.

La tercera función es que la capacitancia de un capacitor de dimensiones dadas es *mayor* cuando entre sus placas hay un material dieléctrico en vez de vacío. Este efecto se demuestra con ayuda de un *electrómetro* sensible, dispositivo que mide la diferencia de potencial entre dos conductores sin permitir un flujo apreciable de carga de uno a otro. La figura 24.14a ilustra un electrómetro conectado a través de un capacitor con carga, con magnitud de carga Q en cada placa y diferencia de potencial V_0. Cuando entre las placas se inserta una lámina sin carga de material dieléctrico, como vidrio, parafina o poliestireno, los experimentos muestran que la diferencia de potencial *disminuye* a un valor pequeño V (figura 24.14b). Al retirar el dieléctrico, la diferencia de potencial vuelve a su valor original V_0, lo que demuestra que las cargas originales en las placas no han cambiado.

La capacitancia original C_0 está dada por $C_0 = Q/V_0$, y la capacitancia C con el dieléctrico presente es $C = Q/V$. La carga Q es la misma en ambos casos, y V es menor que V_0, de donde se concluye que la capacitancia C con el dieléctrico presente es *mayor que* C_0. Cuando el espacio entre las placas está lleno por completo por el dieléctrico, la razón de C a C_0 (igual a la razón de V_0 a V) se denomina **constante dieléctrica** del material, K:

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(definición de constante dieléctrica)} \tag{24.12}$$

Cuando la carga es constante, $Q = C_0V_0 = CV$ y $C/C_0 = V_0/V$. En este caso, la ecuación (24.12) se puede expresar de la forma

$$V = \frac{V_0}{K} \qquad \text{(donde } Q \text{ es una constante)} \tag{24.13}$$

Con el dieléctrico presente, la diferencia de potencial para una carga Q dada se *reduce* en un factor de K.

La constante dieléctrica K es un número puro. Como C siempre es mayor que C_0, K siempre es mayor que la unidad. En la tabla 24.1 se incluyen algunos valores representativos de K. Para el vacío, $K = 1$, por definición. Para el aire a temperaturas y presiones ordinarias, K es alrededor de 1.0006; este valor es tan cercano a 1 que para fines prácticos, un capacitor con aire es equivalente a uno con vacío. Observe que aunque el agua tiene un valor de K muy grande, por lo general no es un dieléctrico muy práctico como para usarlo en capacitores. La razón es que si bien el agua pura es un conductor deficiente, por otro lado, es un excelente solvente iónico. Cualquier ion disuelto en el agua haría que las cargas fluyeran entre las placas del capacitor, por lo que éste se descargaría.

Tabla 24.1 Valores de la constante dieléctrica, K, a 20 °C

Material	K	Material	K
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

Ningún dieléctrico real es un aislante perfecto. Por consiguiente, siempre hay cierta *corriente de fuga* entre las placas con carga de un capacitor con dieléctrico. En la sección 24.2 se ignoró tácitamente este efecto en la obtención de las expresiones para las capacitancias equivalentes de capacitores conectados en serie, ecuación (24.5), y en paralelo, ecuación (24.7). Pero si la corriente de fuga fluye un tiempo suficientemente largo como para cambiar de manera sustancial las cargas con respecto a los valores usados para obtener las ecuaciones (24.5) y (24.7), tales ecuaciones podrían dejar de ser exactas.

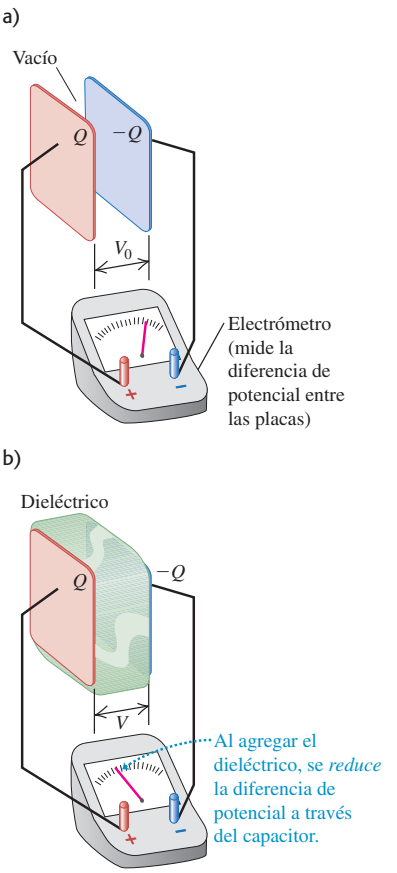
Carga inducida y polarización

Cuando se inserta un material dieléctrico entre las placas de un capacitor al mismo tiempo que la carga se mantiene constante, la diferencia de potencial entre aquéllas disminuye en un factor K. Por lo tanto, el campo eléctrico entre las placas debe reducirse en el mismo factor. Si E_0 es el valor con vacío y E es el valor con dieléctrico, entonces

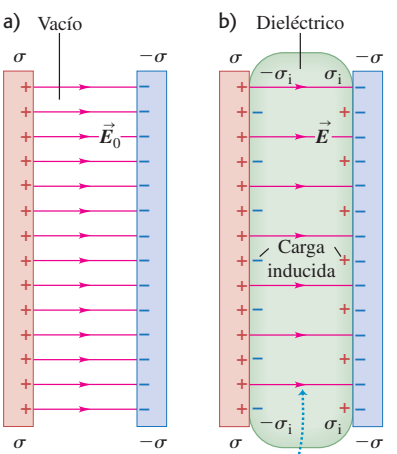
$$E = \frac{E_0}{K} \qquad \text{(cuando } Q \text{ es una constante)} \tag{24.14}$$

Como la magnitud del campo eléctrico es menor cuando el dieléctrico está presente, la densidad superficial de carga (que crea el campo) también debe ser menor. La carga superficial en las placas conductoras no cambia, pero en cada superficie del dieléctrico aparece una carga *inducida* de signo contrario (figura 24.15). Originalmente, el dieléctrico era neutro y todavía lo es; las cargas superficiales inducidas surgen como resultado de la *redistribución* de la carga positiva y negativa dentro del material dieléctrico. Este fenómeno se llama **polarización**. La polarización se mencionó por primera vez en la sección 21.2, y se sugiere al lector que vuelva a leer la explicación de la figura 21.8. Se supondrá que la carga superficial inducida es *directamente proporcional* a la magnitud del campo eléctrico E en el material; de hecho, éste es el caso de muchos dieléctricos comunes. (Esta proporcionalidad directa es análoga a la

24.14 Efecto de un dieléctrico entre las placas paralelas de un capacitor. **a)** Con una carga dada, la diferencia de potencial es V_0. **b)** Con la misma carga pero con un dieléctrico entre las placas, la diferencia de potencial V es menor que V_0.



24.15 Líneas de campo eléctrico cuando entre las placas hay **a)** vacío y **b)** un dieléctrico.



ley de Hooke para un resorte.) En este caso, K es una constante para cualquier material en particular. Cuando el campo eléctrico es muy intenso o si el dieléctrico está hecho de ciertos materiales cristalinos, la relación entre la carga inducida y el campo eléctrico es más compleja; no consideraremos aquí este tipo de casos.

Es posible obtener una relación entre esta carga superficial inducida y la carga en las placas. Se denotará como σ_i la magnitud de la carga inducida por unidad de área en las superficies del dieléctrico (la densidad superficial de carga inducida). La magnitud de la densidad superficial de carga en cada lado del capacitor es σ, como de costumbre. En tal caso, la magnitud de la carga superficial neta en cada lado del capacitor es $(\sigma - \sigma_i)$, como se ilustra en la figura 24.15b. Como vimos en los ejemplos 21.13 (sección 21.5) y 22.8 (sección 22.4), el campo entre las placas se relaciona con la densidad superficial de carga de acuerdo con $E = \sigma_{neta}/\epsilon_0$. Sin el dieléctrico y con éste, respectivamente, se tiene

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Al usar estas expresiones en la ecuación (24.14) y reordenar el resultado, se encuentra que

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \qquad \text{(densidad superficial de carga inducida)} \tag{24.16}$$

Esta ecuación plantea que cuando K es muy grande, σ_i casi es tan grande como σ. En este caso, σ_i casi anula a σ, y el campo y la diferencia de potencial son mucho menores que sus valores en el vacío.

El producto $K\epsilon_0$ se llama **permitividad** del dieléctrico, y se denota con ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \qquad \text{(definición de permitividad)} \tag{24.17}$$

En términos de ϵ, el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

La capacitancia cuando hay un dieléctrico presente está dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \qquad \text{(capacitor de placas paralelas, dieléctrico entre las placas)} \tag{24.19}$$

La obtención de la ecuación (24.11) se repite para la densidad de energía u en un campo eléctrico para el caso en que hay un dieléctrico presente. El resultado es

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad \text{(densidad de energía eléctrica en un dieléctrico)} \tag{24.20}$$

En el espacio vacío, donde $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$ y las ecuaciones (24.19) y (24.20) se reducen a las ecuaciones (24.2) y (24.11), respectivamente, para un capacitor de placas paralelas con vacío. Por esta razón, en ocasiones ϵ_0 se llama "permitividad del espacio libre" o "permitividad del vacío". Como K es un número puro, ϵ y ϵ_0 tienen las mismas unidades, $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

La ecuación (24.19) muestra que es posible obtener capacitancias muy elevadas con placas que tienen una gran área superficial A y están separadas una distancia pequeña d por un dieléctrico con un valor elevado de K. En un *capacitor electrolítico de doble capa*, hay gránulos diminutos de carbono adheridos a cada capa: el valor de A es el área superficial de los gránulos combinada, que puede ser enorme. Las placas con gránulos adheridos están separadas por una lámina dieléctrica muy delgada. Un capacitor de esta clase llega a tener una capacitancia de 5000 farads y puede caber en la palma de la mano (compárelo con el del ejemplo 24.1 en la sección 24.1).

Varios dispositivos prácticos aprovechan la manera en que un capacitor responde ante un cambio en la constante dieléctrica. Un ejemplo es el localizador eléctrico de

clavos, que utilizan quienes hacen reparaciones en el hogar para localizar clavos metálicos ocultos tras la superficie de un muro. Consiste en una placa metálica con circuitos asociados. La placa actúa como la mitad de un capacitor, y el muro como la otra mitad. Si el localizador de clavos pasa por encima un objeto metálico, la constante dieléctrica efectiva del capacitor cambia, lo que modifica la capacitancia y activa una señal.

Estrategia para resolver problemas 24.2 Dieléctricos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las relaciones de esta sección son útiles siempre que haya un campo eléctrico en un dieléctrico, como el que existe entre las placas de un capacitor con carga. Es común que se pida relacionar la diferencia de potencial entre las placas, el campo eléctrico en el capacitor, la densidad de carga en las placas y la densidad de carga inducida sobre las superficies del dieléctrico en el capacitor.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo de la situación.
2. Identifique las variables que se buscan y elija cuáles de las ecuaciones clave de esta sección le servirán para encontrar esas variables.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. En problemas como los del siguiente ejemplo, es fácil perderse en un laberinto de fórmulas. Pregúntese a cada paso qué tipo de cantidad representa cada símbolo. Por ejemplo, distinga con claridad entre las cargas y las densidades de carga, y entre los campos eléctricos y las diferencias de potencial eléctrico.
2. Conforme efectúe los cálculos compruebe continuamente la consistencia de las unidades. Esto implica un mayor esfuerzo con las cantidades eléctricas que con las de la mecánica. Las distancias siempre deben estar expresadas en metros. Recuerde que un microfarad es 10^{-6} farads, etcétera. No confunda el valor numérico de ϵ_0 con el valor de $1/4\pi\epsilon_0$. Hay varios conjuntos alternativos de unidades para la magnitud del campo eléctrico, como N/C y V/m. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando compruebe valores numéricos, recuerde que con un dieléctrico presente, *a*) la capacitancia siempre es mayor que sin el dieléctrico; *b*) para una cantidad dada de carga en el capacitor, el campo eléctrico y la diferencia de potencial siempre son menores que sin el dieléctrico; y *c*) la densidad superficial de carga inducida σ_i en el dieléctrico siempre es de menor magnitud que la densidad de carga σ en las placas del capacitor.

Ejemplo 24.10 Capacitor con y sin dieléctrico

Suponga que cada una de las placas paralelas en la figura 24.15 tiene un área de 2000 cm^2 (2.00×10^{-1} m^2) y están separadas por 1.00 cm (1.00×10^{-2} m). El capacitor está conectado a una fuente de energía y se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 3000$ V = 3.00 kV. Después se desconecta de la fuente de energía y se inserta entre las placas una lámina de material plástico aislante, llenando por completo el espacio entre ellas. Se observa que la diferencia de potencial disminuye a 1000 V y que la carga en cada placa del capacitor permanece constante. Calcule *a*) la capacitancia original C_0; *b*) la magnitud de la carga Q en cada placa; *c*) la capacitancia C después de haber insertado el dieléctrico; *d*) la constante dieléctrica K del dieléctrico; *e*) la permitividad ϵ del dieléctrico; *f*) la magnitud de la carga Q_i inducida en cada cara del dieléctrico; *g*) el campo eléctrico original E_0 entre las placas; y *h*) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la mayoría de relaciones que se han estudiado para capacitores y dieléctricos.

PLANTEAR: La mayoría de las variables buscadas se pueden obtener de diferentes maneras. Los métodos que se usan a continuación son una muestra representativa; invitamos al lector a pensar en otros métodos y a comparar los resultados.

EJECUTAR: *a*) Con vacío entre las placas se usa la ecuación (24.19) con $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}) \frac{2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 1.77 \times 10^{-10}\ \text{F} = 177\ \text{pF}$$

b) A partir de la definición de capacitancia, ecuación (24.1),

$$Q = C_0 V_0 = (1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3.00 \times 10^{3}\ \text{V})$$
$$= 5.31 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0.531\ \mu\text{C}$$

c) Cuando se inserta el dieléctrico, la carga permanece sin cambio, pero el potencial disminuye a $V = 1000$ V. Por ello, de acuerdo con la ecuación (24.1), la nueva capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{1.00 \times 10^{3}\ \text{V}} = 5.31 \times 10^{-10}\ \text{F} = 531\ \text{pF}$$

d) De la ecuación (24.12), la constante dieléctrica es

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31 \times 10^{-10}\ \text{F}}{1.77 \times 10^{-10}\ \text{F}} = \frac{531\ \text{pF}}{177\ \text{pF}} = 3.00$$

En forma alternativa, de la ecuación (24.13),

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \text{V}}{1000\ \text{V}} = 3.00$$

e) Al sustituir el valor de K del inciso *d*) en la ecuación (24.17), la permitividad resulta ser

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)$$
$$= 2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

f) Se multiplica la ecuación (24.15) por el área de cada placa para obtener la carga inducida $Q_i = \sigma_i A$ en términos de la carga $Q = \sigma A$ en cada placa:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7}\ \text{C})\left(1 - \frac{1}{3.00}\right)$$
$$= 3.54 \times 10^{-7}\ \text{C}$$

continúa

g) Como el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es la diferencia de potencial dividida entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

h) Con la nueva diferencia de potencial después de insertar el dieléctrico,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o, de la ecuación (24.17),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o bien, de la ecuación (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A} = \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o, de la ecuación (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5\ \text{V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

EVALUAR: Siempre es útil comprobar los resultados obteniéndolos en más de una forma, como se hizo en los incisos *d*) y *h*). Los resultados indican que al insertar el dieléctrico se incrementa la capacitancia en un factor de $K = 3.00$ y el campo eléctrico entre las placas se reduce en un factor de $1/K = 1/3.00$. Eso ocurre porque se desarrollan cargas inducidas en las caras del dieléctrico con magnitud $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3.00) = 0.667Q$.

Ejemplo 24.11 Almacenamiento de energía con y sin dieléctrico

Calcule el total de energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 24.10, así como la densidad de energía, tanto antes como después de haber insertado el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se tiene que extender el análisis del ejemplo 24.10 para que incluya las ideas de la energía almacenada en un capacitor y de la energía del campo eléctrico.

PLANTEAR: Se usa la ecuación (24.9) para encontrar la energía almacenada antes y después de insertar el dieléctrico, y la ecuación (24.20) para calcular la densidad de energía.

EJECUTAR: Sea U_0 la energía original y U la energía con el dieléctrico insertado. De acuerdo con la ecuación (24.9),

$$U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}(1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(5.31 \times 10^{-10}\ \text{F})(1000\ \text{V})^2 = 2.66 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

La energía final es un tercio de la energía original.

La densidad de energía sin el dieléctrico está dada por la ecuación (24.20) con $K = 1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.0 \times 10^5\ \text{N/C})^2 = 0.398\ \text{J/m}^3$$

Con el dieléctrico insertado,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1.00 \times 10^5\ \text{N/C})^2 = 0.133\ \text{J/m}^3$$

La densidad de energía con el dieléctrico es un tercio de la densidad de energía original.

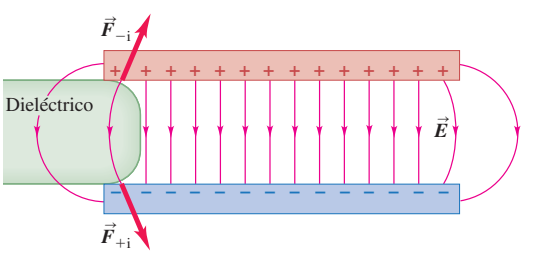
EVALUAR: La respuesta para u_0 se comprueba al notar que el volumen entre las placas es $V = (0.200\ \text{m})^2(0.0100\ \text{m}) = 0.00200\ \text{m}^3$. Como el campo eléctrico es uniforme entre las placas, u_0 también es uniforme y la densidad de energía es simplemente el cociente que resulta de dividir la energía almacenada entre el volumen:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}}{0.00200\ \text{m}^3} = 0.398\ \text{J/m}^3$$

lo que concuerda con la primera respuesta. Se debe utilizar el mismo enfoque para comprobar el valor de U y el de la densidad de energía con el dieléctrico.

Los resultados de este ejemplo se pueden generalizar. Cuando se inserta un dieléctrico en un capacitor mientras la carga en cada placa permanece igual, la permitividad ϵ se incrementa en un factor de K (la constante dieléctrica), el campo eléctrico disminuye en un factor de $1/K$, y la densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ se reduce en un factor de $1/K$. ¿A dónde se fue la energía? La respuesta está en la curvatura del campo en los bordes de un capacitor real de placas paralelas. Como se aprecia en la figura 24.16, ese campo tiende a atraer el dieléctrico hacia el espacio entre las placas, y al hacerlo efectúa un trabajo sobre él. Se podría acoplar un resorte en el extremo izquierdo del dieléctrico de la figura 24.16 y usar esta fuerza para estirar el resorte. Puesto que el campo realiza un trabajo, la densidad de energía del campo disminuye.

24.16 La curvatura del campo en los bordes del capacitor ejerce fuerzas $\vec{F}_{-i}$ y $\vec{F}_{+i}$ sobre las cargas superficiales positivas y negativas inducidas de un dieléctrico, lo que atrae al dieléctrico hacia el interior del capacitor.



Ruptura del dieléctrico

Ya se mencionó que cuando un material dieléctrico se somete a un campo eléctrico suficientemente intenso, tiene lugar la *ruptura del dieléctrico* y entonces el dieléctrico se convierte en conductor (figura 24.17). Esto ocurre cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca los electrones de sus moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento, que forma una chispa o descarga de arco, suele iniciarse de forma repentina.

Debido a la ruptura del dieléctrico, los capacitores siempre tienen voltajes máximos nominales. Cuando un capacitor se somete a un voltaje excesivo se forma un arco a través de la capa de dieléctrico, y lo quema o perfora. Este arco crea una trayectoria conductora (un circuito corto) entre los conductores. Si la trayectoria conductora permanece después de haberse extinguido el arco, el dispositivo queda inutilizado de manera permanente en su función de capacitor.

La magnitud máxima de campo eléctrico a que puede someterse un material sin que ocurra la ruptura se denomina **rigidez dieléctrica**. Esta cantidad se ve afectada de manera significativa por la temperatura, las impurezas, las pequeñas irregularidades en los electrodos metálicos y otros factores que son difíciles de controlar. Por esta razón sólo pueden darse cifras aproximadas de las rigideces dieléctricas. La rigidez dieléctrica del aire seco es alrededor de 3×10^6 V/m. En la tabla 24.2 se presentan valores de la rigidez dieléctrica de varios materiales aislantes comunes. Observe que todos los valores son mucho mayores que el del aire. Por ejemplo, una capa de policarbonato de 0.01 mm de espesor (el espesor práctico más pequeño) tiene 10 veces la rigidez dieléctrica del aire y soporta un voltaje máximo cercano a $(3 \times 10^7 \text{ V/m})\,(1 \times 10^{-5} \text{ m}) = 300$ V.

24.17 Un campo eléctrico muy intenso ocasionó la ruptura de la rigidez del dieléctrico en un bloque de plexiglás. El flujo de carga resultante grabó este patrón en el bloque.

Tabla 24.2 Constante dieléctrica y rigidez dieléctrica de algunos materiales aislantes

Material	Constante dieléctrica, K	Rigidez dieléctrica, E_m (V/m)
Policarbonato	2.8	3×10^7
Poliéster	3.3	6×10^7
Polipropileno	2.2	7×10^7
Poliestireno	2.6	2×10^7
Vidrio pyrex	4.7	1×10^7

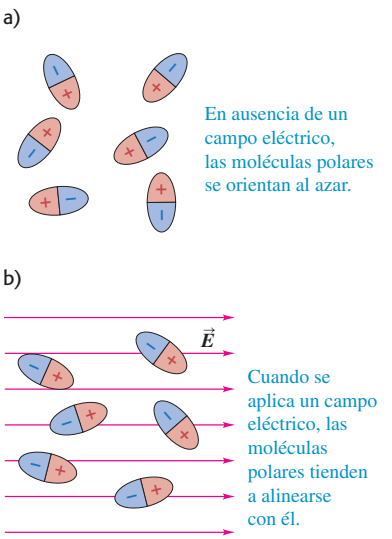
Evalúe su comprensión de la sección 24.4 El espacio entre las placas de un capacitor aislado de placas paralelas está ocupado por un bloque de material dieléctrico con constante dieléctrica K. Las dos placas del capacitor tienen cargas Q y $-Q$. Se extrae el bloque dieléctrico. Si las cargas no cambian, ¿cómo se modifica la energía en el capacitor cuando se retira el material dieléctrico? i) Se incrementa; ii) disminuye; iii) permanece igual.

*24.5 Modelo molecular de la carga inducida

En la sección 24.4 se estudiaron las cargas superficiales inducidas en un dieléctrico, debidas a un campo eléctrico. Ahora veremos cómo se originan estas cargas superficiales. Si el material fuera un *conductor*, la respuesta sería sencilla. Los conductores contienen carga que tiene libertad de movimiento y, cuando está presente un campo eléctrico, algunas de ellas se redistribuyen en la superficie de manera que no hay campo eléctrico dentro del conductor. Pero un dieléctrico ideal *no* tiene cargas con libertad para moverse, así que, ¿cómo puede surgir una carga superficial?

Para comprender esto, se tiene que analizar otra vez el reacomodo de la carga a nivel *molecular*. Algunas moléculas, como las de H_2O y N_2O, tienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas, pero con una distribución desigual, con exceso de carga positiva concentrada en un lado de la molécula y carga negativa en el otro. Como se describió en la sección 21.7, tal arreglo recibe el nombre de *dipolo eléctrico*, y la molécula se llama *molécula polar*. Cuando no está presente un campo eléctrico en un gas o un líquido con moléculas polares, éstas se orientan al azar (figura 24.18a). Sin embargo, al colocarse en un campo eléctrico, tienden a orientarse como en la

24.18 Moléculas polares a) sin un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$ y b) con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.



24.19 Moléculas no polares a) sin un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$ y b) con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

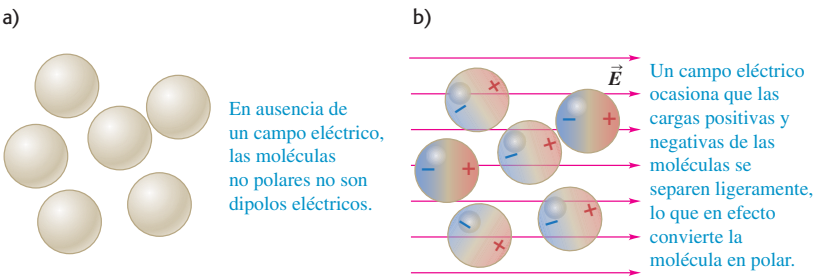


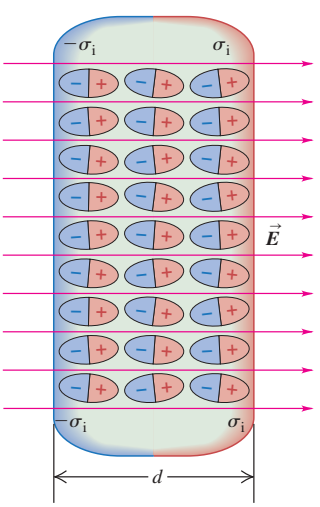
figura 24.18b, como resultado de los pares de torsión de campo eléctrico descritos en la sección 21.7. En virtud de la agitación térmica, la alineación de las moléculas con respecto a $\vec{E}$ no es perfecta.

Incluso una molécula que por lo general *no* es polar se *convierte* en un dipolo al colocarse en un campo eléctrico debido a que éste empuja las cargas positivas en las moléculas en la dirección del campo, y a las negativas en dirección opuesta. Esto ocasiona una redistribución de la carga dentro de la molécula (figura 24.19). Tales dipolos se llaman dipolos *inducidos*.

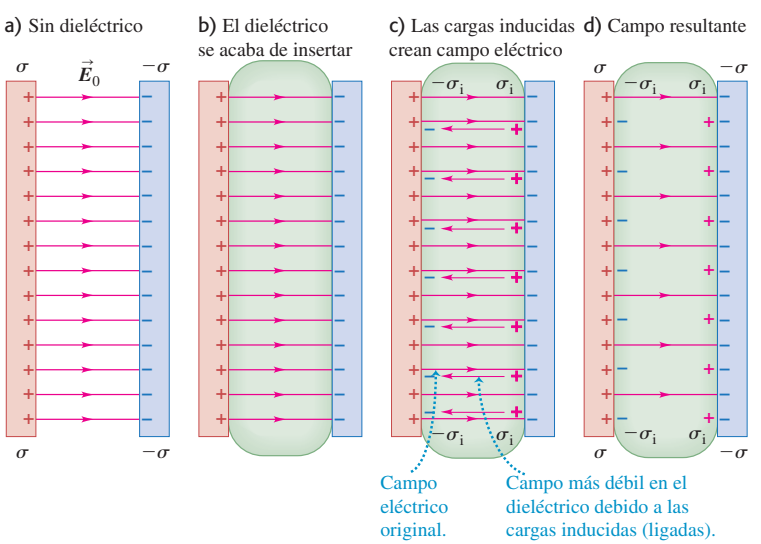
Ya sea con moléculas polares o no polares, la redistribución de la carga causada por el campo origina la formación de una capa de carga en cada superficie del material dieléctrico (figura 24.20). Estas capas son las cargas superficiales descritas en la sección 24.4; su densidad superficial de carga se denota con σ_i. Las cargas *no* tienen libertad para moverse indefinidamente como lo harían en un conductor porque cada una está unida a una molécula. En realidad se llaman **cargas ligadas** para diferenciarlas de las **cargas libres** que se agregan y se retiran de las placas conductoras de un capacitor. En el interior del material, la carga neta por unidad de volumen permanece igual a cero. Como se ha visto, esta redistribución de carga recibe el nombre de *polarización*, y se dice que el material está *polarizado*.

Los cuatro incisos de la figura 24.21 ilustran el comportamiento de un trozo de dieléctrico cuando se inserta en el campo entre un par de placas de capacitor con cargas opuestas. La figura 24.21a muestra el campo original. La figura 24.21b presenta la situación después de haber insertado el dieléctrico, pero antes de que ocurra el reacomodo de las cargas. La figura 24.21c ilustra con flechas delgadas el campo adicio-

24.20 La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ da lugar a la formación de capas delgadas de cargas ligadas en las superficies, lo que crea densidades de carga superficiales σ_i y $-\sigma_i$. Por claridad, se han exagerado los tamaños de las moléculas.



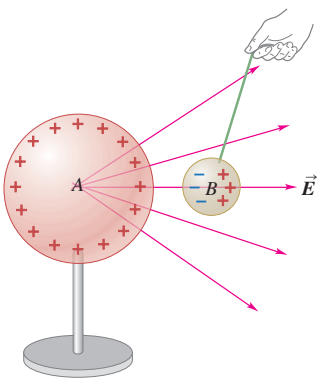
24.21 a) Campo eléctrico de magnitud E_0 entre dos placas con cargas. b) Introducción de un dieléctrico con constante dieléctrica K. c) Las cargas superficiales inducidas y su campo. d) Campo resultante de magnitud E_0/K.



nal que se establece en el dieléctrico por sus cargas superficiales inducidas. Este campo es *opuesto* al original, pero no tan grande como para anularlo por completo, ya que las cargas en el dieléctrico no tienen libertad para moverse en forma indefinida. Por consiguiente, el campo resultante en el dieléctrico, que se presenta en la figura 24.21d, disminuyó su magnitud. En la representación con líneas de campo, algunas de ellas salen de la placa positiva y van a través del dieléctrico, mientras que otras terminan en las cargas inducidas en las caras del dieléctrico.

Como se vio en la sección 21.2, la polarización también es la razón por la que un cuerpo con carga, como una varilla de plástico electrificada, puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo *sin carga*, como un trozo de papel o una bolita de médula de saúco. En la figura 24.22 se presenta una esfera B dieléctrica sin carga en el campo radial de un cuerpo con carga positiva A. Las cargas positivas inducidas en B experimentan una fuerza hacia la derecha, mientras que la fuerza en las cargas inducidas negativas va hacia la izquierda. Las cargas negativas están más cerca de A, por lo que se encuentran en un campo más intenso que las cargas positivas. La fuerza hacia la izquierda es mayor que la que va hacia la derecha, y B es atraída hacia A, aun cuando su carga neta es igual a cero. La atracción ocurre sin importar que el signo de la carga de A sea positivo o negativo (véase la figura 21.7). Además, el efecto no está limitado a los dieléctricos; un cuerpo conductor sin carga sería atraído de igual manera.

24.22 Una esfera B neutra en el campo eléctrico radial de una esfera con carga positiva A es atraída hacia la carga a causa de la polarización.



Evalúe su comprensión de la sección 24.5 Un capacitor tiene cargas Q y $-Q$ en sus dos placas paralelas. Después se inserta un bloque de dieléctrico con $K = 3$ en el espacio entre las placas, como se ilustra en la figura 24.21. Ordene las siguientes magnitudes de campo eléctrico, en orden decreciente. i) El campo antes de insertar el dieléctrico; ii) el campo resultante después de haber insertado el dieléctrico; iii) el campo debido a las cargas ligadas.

*24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

El análisis de la sección 24.4 puede extenderse para reformular la ley de Gauss de manera que sea útil en el caso particular de los dieléctricos. La figura 24.23 es un acercamiento de la placa izquierda del capacitor y la superficie izquierda del dieléctrico de la figura 24.15b. Se aplicará la ley de Gauss a la caja rectangular que se muestra en corte transversal mediante la línea púrpura; el área superficial de los lados izquierdo y derecho es A. El lado izquierdo está incrustado en el conductor que forma la placa izquierda del capacitor, por lo que el campo eléctrico en cualquier sitio de esa superficie es igual a cero. El lado derecho está incrustado en el dieléctrico, donde el campo eléctrico tiene magnitud E y $E_\perp = 0$ en cualquier lugar de las otras cuatro caras. La carga total encerrada, incluida la carga de la placa del capacitor y la carga inducida en la superficie del dieléctrico, es $Q_{\text{enc}} = (\sigma - \sigma_i)A$, por lo que la ley de Gauss da

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \tag{24.21}$$

Tal como está, esta ecuación no es muy esclarecedora porque relaciona dos cantidades desconocidas: E dentro del dieléctrico y la densidad superficial de carga inducida σ_i. Pero ahora se puede usar la ecuación (24.16), desarrollada para esta misma situación, con la finalidad de simplificar la ecuación eliminando σ_i. La ecuación (24.16) es

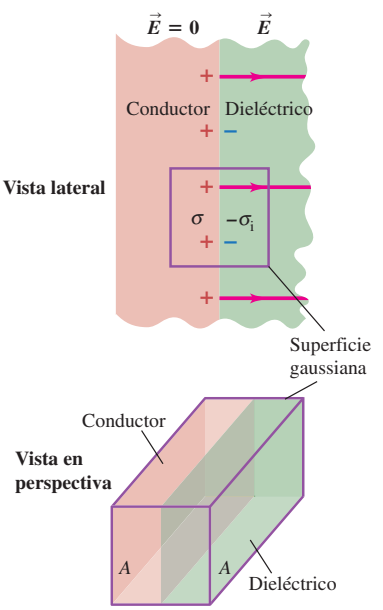
$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{o bien,} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

Al combinarse con la ecuación (24.21) se obtiene

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{o bien,} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

La ecuación (24.22) plantea que el flujo de $K\vec{E}$, no $\vec{E}$, a través de la superficie gaussiana, como en la figura 24.23, es igual a la carga *libre* encerrada σA dividida entre ϵ_0.

24.23 Ley de Gauss con un dieléctrico. Esta figura presenta un acercamiento de la placa izquierda del capacitor de la figura 24.15b. La superficie gaussiana es una caja rectangular que tiene una mitad en el conductor y la otra mitad en el dieléctrico.



Resulta que, para *cualquier* superficie gaussiana, siempre que la carga inducida sea proporcional al campo eléctrico en el material, la ley de Gauss puede expresarse como

$$\oint K\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss en un dieléctrico)} \qquad (24.23)$$

donde $Q_{\text{enc-libre}}$ es la carga *libre* total (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. La importancia de estos resultados es que las caras derechas sólo contienen la carga *libre* en el conductor, no la carga ligada (inducida). En realidad, aunque no lo hemos demostrado, la ecuación (24.23) sigue siendo válida aun cuando diferentes partes de la superficie gaussiana estén incrustadas en dieléctricos que tengan valores distintos de K, siempre y cuando el valor de K en cada dieléctrico sea independiente del campo eléctrico (que por lo general es el caso para los campos eléctricos que no son demasiado intensos) y que se utilice el valor de K apropiado para cada punto de la superficie gaussiana.

Ejemplo 24.12 Capacitor esférico con dieléctrico

En el capacitor esférico del ejemplo 24.3 (sección 24.1), el volumen entre las corazas conductoras esféricas está lleno de un aceite aislante cuya constante dieléctrica es igual a K. Use la ley de Gauss para encontrar la capacitancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En esencia, éste es el mismo problema que el del ejemplo 24.3. La única diferencia es la presencia del dieléctrico.

PLANTEAR: Al igual que se hizo en el ejemplo 24.3, se utiliza una superficie gaussiana esférica de radio r entre las dos esferas. Como hay un dieléctrico, la ley de Gauss se emplea en la forma de la ecuación (24.23).

EJECUTAR: La simetría esférica del problema no cambia por la presencia del dieléctrico, por lo que se tiene

$$\oint K\vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint KE\,dA = KE\oint dA = (KE)\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$ es la permitividad del dieléctrico (presentada en la sección 24.4). En comparación con el caso en que hay vacío entre las corazas conductoras, el campo eléctrico se reduce en un factor de $1/K$. De igual forma, la diferencia de potencial V_{ab} entre las corazas disminuye en un factor de $1/K$, con lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ se *incrementa* en un factor de K, al igual que para un capacitor de placas paralelas cuando se inserta un dieléctrico. Utilizando el resultado para el caso con vacío, ejemplo 24.3, se encuentra que la capacitancia con el dieléctrico es

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

EVALUAR: En este caso, el dieléctrico llena por completo el volumen entre los dos conductores, por lo que la capacitancia es simplemente el producto de K por el valor sin dieléctrico. El resultado es más complicado si el dieléctrico llena sólo parcialmente este volumen (véase el problema de desafío 24.76).

Evalúe su comprensión de la sección 24.6 Una carga puntual única q está incrustada en un dieléctrico cuya constante dieléctrica es K. En cierto punto dentro del dieléctrico a una distancia r de la carga puntual, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico? i) $q/4\pi\epsilon_0 r^2$; ii) $Kq/4\pi\epsilon_0 r^2$; iii) $q/4\pi K\epsilon_0 r^2$; iv) ninguna de las anteriores.

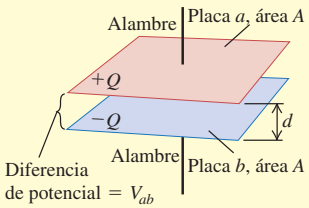
CAPÍTULO 24 RESUMEN

Capacitores y capacitancia: Un capacitor es todo par de conductores separados por un material aislante. Cuando el capacitor está cargado hay cargas de igual magnitud Q y signo opuesto en los dos conductores, y el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva con respecto al que tiene carga negativa es proporcional a Q. La capacitancia C se define como la razón de Q a V_{ab}. La unidad del SI para la capacitancia es el farad (F): 1 F = 1 C/V.

Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A, separadas por una distancia d. Si están separadas por vacío, la capacitancia sólo depende de A y d. Para otras geometrías, la capacitancia se obtiene a partir de la definición $C = Q/V_{ab}$. (Véanse los ejemplos 24.1 a 24.4.)

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \tag{24.1}$$

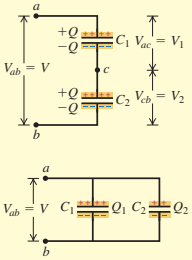
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{24.2}$$



Capacitores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie capacitores con capacitancias C_1, C_2, C_3, . . . , el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando los capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales. (Véanse los ejemplos 24.5 y 24.6.)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \tag{24.5}$$
(capacitores en serie)

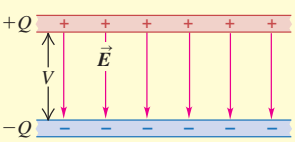
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \tag{24.7}$$
(capacitores en paralelo)



Energía en un capacitor: La energía U que se requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y carga Q, es igual a la energía almacenada en el capacitor. Esta energía se puede considerar como si residiera en el campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico. (Véanse los ejemplos 24.7 a 24.9.)

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \tag{24.9}$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{24.11}$$



Dieléctricos: Cuando el espacio entre conductores está ocupado por un material dieléctrico, la capacitancia se incrementa en un factor K, llamado constante dieléctrica del material. La cantidad $\epsilon = K\epsilon_0$ se llama permitividad del dieléctrico. Para una cantidad fija de carga en las placas del capacitor, las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico disminuyen el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas en el mismo factor K. La carga superficial proviene de la polarización, que es el reacomodo microscópico de la carga en el dieléctrico. (Véase el ejemplo 24.10.)

Bajo la influencia de campos eléctricos suficientemente intensos, los dieléctricos se vuelven conductores, una situación que se conoce como ruptura del dieléctrico. El campo máximo que un material puede soportar sin sufrir ruptura se llama rigidez dieléctrica.

En un dieléctrico la expresión para la densidad de energía es la misma que en el vacío pero sustituyendo ϵ_0 por $\epsilon = K\epsilon_0$. (Véase el ejemplo 24.11.)

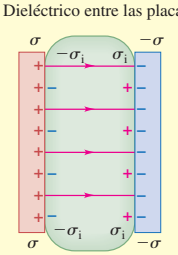
La ley de Gauss en un dieléctrico tiene casi la misma forma que en el vacío, con dos diferencias clave: $\vec{E}$ se sustituye por $K\vec{E}$ y Q_{enc} se sustituye por $Q_{enc\text{-}libre}$, que incluye solo la carga libre (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. (Véase el ejemplo 24.12.)

$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \tag{24.19}$$
(capacitor de placas paralelas con un dieléctrico)

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{24.20}$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc\text{-}libre}}{\epsilon_0} \tag{24.23}$$

Dieléctrico entre las placas



Términos clave

capacitor, *816*
capacitancia, *816*
farad, *816*
capacitor de placas paralelas, *817*
conexión en serie, *820*
capacitancia equivalente, *821*
conexión en paralelo, *821*
densidad de energía, *826*
dieléctrico, *828*
ruptura del dieléctrico, *828*
constante dieléctrica, *828*
polarización, *829*
permitividad, *830*
rigidez dieléctrica, *833*
carga ligada, *834*
carga libre, *834*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La ecuación (24.9) indica que la energía almacenada en un capacitor con capacitancia C y carga Q es $U = Q^2/2C$. Si la carga Q se duplica, la energía almacenada se incrementa en un factor de $2^2 = 4$. Observe que si el valor de Q es demasiado grande, la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor superará la rigidez dieléctrica del material entre las placas y ocurrirá la ruptura del dieléctrico (véase la sección 24.4). Esto fija un límite práctico a la cantidad de energía que puede almacenarse.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

24.1 Respuesta: iii) La capacitancia no depende del valor de la carga Q. La duplicación del valor de Q hace que la diferencia de potencial V_{ab} se duplique, por lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ permanece sin cambio. Estos enunciados son verdaderos sin importar la geometría del capacitor.

24.2 Respuestas: *a*) i), *b*) iv) En una conexión en serie, los dos capacitores tienen la misma carga Q, pero distintas diferencias de potencial $V_{ab} = Q/C$; el capacitor con la menor capacitancia C tiene la mayor diferencia de potencial. En una conexión en paralelo, los dos capacitores tienen la misma diferencia de potencial V_{ab}, pero distintas cargas $Q = CV_{ab}$; el capacitor con la mayor capacitancia C tiene la carga más grande. Por lo tanto, un capacitor de 4 μF tendrá una diferencia de potencial más grande que otro capacitor de 8 μF si los dos están conectados en serie. El capacitor de 4 μF no puede tener más carga que el de 8 μF sin importar cómo se conecten: en una conexión en serie tendrán la misma carga, y en una conexión en paralelo el capacitor de 8 μF tendrá más carga.

24.3 Respuesta: i) Los capacitores conectados en serie tienen la misma carga Q. Para comparar la cantidad de energía almacenada se utiliza la expresión $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9); esto indica que el capacitor con la *menor* capacitancia ($C = 4$ μF) tiene más energía almacenada en una combinación en serie. En contraste, los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial V, por lo que para compararlos se emplea $U = \frac{1}{2}CV^2$ de la ecuación (24.9). Esto demuestra que en una combinación en paralelo, el capacitor con la capacitancia *más grande* ($C = 8$ μF) tiene más energía almacenada. (Si en vez de lo anterior se hubiera usado $U = \frac{1}{2}CV^2$ para analizar la combinación en serie, se habrían tenido que explicar las distintas diferencias de potencial a través de los capacitores. En forma similar, el empleo de $U = Q^2/2C$ para estudiar la combinación en paralelo requeriría que se explicaran las diferentes cargas en los capacitores.)

24.4 Respuesta: i) Aquí, Q permanece sin cambio, por lo que se emplea $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9) para la energía almacenada. Si se retira el dieléctrico la capacitancia se reduce en un factor de $1/K$; como U es inversamente proporcional a C, la energía almacenada aumenta en un factor de K. Se requiere trabajo para retirar el bloque dieléctrico del capacitor porque la curvatura del campo trata de atraerlo de regreso (figura 24.16). El trabajo que se hace pasa a la energía almacenada en el capacitor.

24.5 Respuestas: i), iii), ii) La ecuación (24.14) establece que si E_0 es la magnitud del campo eléctrico inicial (antes de insertar el dieléctrico), entonces la magnitud del campo resultante después de insertar el dieléctrico es $E_0/K = E_0/3$. La magnitud del campo resultante es igual a la diferencia entre la magnitud del campo inicial y la magnitud E_i del campo debido a las cargas ligadas (véase la figura 24.21). Por lo tanto, $E_0 - E_i = E_0/3$ y $E_i = 2E_0/3$.

24.6 Respuesta: iii) La ecuación (24.23) muestra que esta situación es la misma en una carga puntual aislada en el vacío pero sustituyendo $\vec{E}$ por $K\vec{E}$. Así, KE en el punto de interés es igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y por eso $E = q/4\pi K\epsilon_0 r^2$. Al igual que en el ejemplo 24.12, si se llena el espacio con un dieléctrico, el campo eléctrico se reduce en un factor de $1/K$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P24.1. La ecuación (24.2) muestra que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas aumenta a medida que la separación d entre las placas disminuye. Sin embargo, existe un límite práctico en cuanto a qué tan pequeña puede ser d, lo que también impone un límite superior a la magnitud de C. Explique qué es lo que fija los límites para d. (*Sugerencia:* piense en qué pasa con la magnitud del campo eléctrico cuando $d \to 0$.)

P24.2. Suponga que distintos capacitores de placas paralelas se cargan con una fuente de voltaje constante. Pensando en el movimiento y la posición reales de las cargas a nivel atómico, ¿por qué es razonable que las capacitancias sean proporcionales a las áreas de las placas? ¿Por qué es razonable que las capacitancias sean *inversamente* proporcionales a la distancia entre las placas?

P24.3. Suponga que las dos placas de un capacitor tienen diferentes áreas. Cuando el capacitor se carga conectándolo a una batería, ¿las cargas en las dos placas tienen magnitud igual o diferente? Explique su razonamiento.

P24.4. En el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab), en Illinois, los protones se aceleran en un anillo de 2 km de radio hasta alcanzar una rapidez cercana a la de la luz. La energía para este proceso se almacena en capacitores del tamaño de una casa. Cuando esos capacitores se están cargando emiten un sonido muy intenso. ¿Cuál es el origen de ese sonido?

P24.5. En el capacitor de placas paralelas de la figura 24.2, suponga que las placas se separan de manera que la separación d es mucho ma-

yor que el tamaño de las placas. *a*) ¿Es exacto decir que el campo eléctrico entre las placas es uniforme? ¿Por qué? *b*) En la situación que se ilustra en la figura 24.2, la diferencia de potencial entre las placas es $V_{ab} = Qd/\epsilon_0 A$. Si las placas se separan según la descripción anterior, ¿V_{ab} es mayor o menor de lo que indicaría esta fórmula? Explique su razonamiento. *c*) Con las placas separadas de acuerdo con la descripción, ¿la capacitancia es mayor, menor o igual a la que da la ecuación (24.2)? Explique su razonamiento.

P24.6. Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería y se mantiene conectado a ésta. Después se duplica la distancia de separación entre las placas. ¿Cómo cambian el campo eléctrico, la carga en las placas y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.7. Un capacitor de placas paralelas se carga conectándolo a una batería y luego se desconecta de ésta. Después se duplica la distancia de separación entre las placas. ¿Cómo cambian el campo eléctrico, la diferencia de potencial y la energía total? Dé una explicación de su razonamiento.

P24.8. Dos capacitores de placas paralelas, idénticos, pero con la excepción de que uno tiene el doble de separación entre sus placas que el otro, se cargan mediante la misma fuente de voltaje. ¿Cuál capacitor tiene el campo eléctrico más intenso entre las placas? ¿Cuál capacitor tiene mayor carga? ¿Cuál tiene mayor densidad de energía? Explique su razonamiento.

P24.9. Las placas con carga de un capacitor se atraen entre sí, por lo que el hecho de separarlas requiere trabajo realizado por alguna fuente externa. ¿A dónde va la energía agregada por ese trabajo? Explique su razonamiento.

P24.10. Las dos placas de un capacitor reciben cargas $\pm Q$. Después se desconecta el capacitor del dispositivo de carga de manera que las cargas en las placas no cambien, y el capacitor se sumerge en un tanque de aceite. El campo eléctrico entre las placas, ¿aumenta, disminuye o permanece igual? Explique su razonamiento. ¿Cómo podría medirse el campo?

P24.11. Como se aprecia en la tabla 24.1, el agua tiene una constante dieléctrica muy grande, $K = 80.4$. ¿Por qué piensa que no es común utilizar agua como dieléctrico en los capacitores?

P24.12. ¿La rigidez dieléctrica es lo mismo que la constante dieléctrica? Explique cualesquiera diferencias entre las dos cantidades. ¿Existe alguna relación sencilla entre la rigidez dieléctrica y la constante dieléctrica? (Consulte la tabla 24.2.)

P24.13. Un capacitor construido con tiras de aluminio separadas por una película de Mylar estuvo sometido a un voltaje excesivo, y la ruptura resultante del dieléctrico perforó agujeros en el Mylar. Después de esto, se observó que la capacitancia era aproximadamente la misma que antes, pero el voltaje de ruptura era mucho menor, ¿por qué?

P24.14. Suponga que usted acerca un bloque dieléctrico al espacio entre las placas de un capacitor con carga y se prepara para introducirlo entre ellas. ¿Qué fuerza sentiría? ¿Qué le dice esta fuerza acerca de la energía almacenada entre las placas una vez que el dieléctrico esté en su lugar, en relación con el momento en que no lo estaba?

P24.15. La frescura del pescado se puede medir si se coloca un ejemplar entre las placas de un capacitor y se mide la capacitancia. ¿Cómo funciona esto? (*Sugerencia:* considere que el pescado se seca conforme pasa el tiempo. Consulte la tabla 24.1.)

P24.16. Los capacitores *electrolíticos* usan como dieléctrico una capa muy delgada de óxido no conductor entre una placa metálica y una solución conductora. Analice la ventaja de esa clase de capacitores en relación con los que se construyen colocando un dieléctrico sólido entre las placas metálicas.

P24.17. En términos de la constante dieléctrica K, ¿qué sucede con el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana que se ilustra en la figura 24.23, cuando se inserta el dieléctrico en el espacio antes vacío entre las placas? Explique su respuesta.

P24.18. Un capacitor de placas paralelas está conectado a una fuente de energía que mantiene una diferencia de potencial fija entre las placas. *a*) Si luego se coloca una lámina de dieléctrico entre las placas, ¿qué sucede con i) el campo eléctrico entre las placas, ii) la magnitud de la carga entre cada placa y iii) la energía almacenada en el capacitor? *b*) Ahora suponga que antes de insertar el dieléctrico se desconecta el capacitor con carga de la fuente de energía. En este caso, ¿qué pasa con i) el campo eléctrico entre las placas, ii) la magnitud de la carga en cada placa, iii) la energía almacenada en el capacitor? Explique cualquier diferencia que exista entre las dos situaciones.

P24.19. Los dieléctricos líquidos que tienen moléculas polares (como el agua) siempre tienen constantes dieléctricas que disminuyen al aumentar la temperatura. ¿Por qué?

P24.20. Un conductor es un caso extremo de dieléctrico ya que, si se le aplica un campo eléctrico, las cargas tienen libertad para moverse dentro del conductor para establecer "cargas inducidas". ¿Cuál es la constante dieléctrica de un conductor perfecto: $K = 0$, $K \to \infty$, o algún valor intermedio? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 24.1 Capacitores y capacitancia

24.1. Un capacitor tiene una capacitancia de 7.28 μF. ¿Qué cantidad de carga debe colocarse en cada una de sus placas para que la diferencia de potencial entre ellas sea de 25.0 V?

24.2. Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas por una distancia de 3.28 mm, y cada una tiene un área de 12.2 cm^2. Cada placa tiene una carga con magnitud de 4.35×10^{-8} C. Las placas están en el vacío. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas?

24.3. Un capacitor de placas paralelas de aire y capacitancia de 245 pF tiene una carga con magnitud de 0.148 μC en cada placa. Las placas están separadas por una distancia de 0.328 mm. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? *d*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en cada placa?

24.4. Capacitancia de un osciloscopio. Los osciloscopios tienen placas metálicas paralelas en su interior para que desvíen el haz de electrones. Estas placas se llaman *placas de desviación*, y es común que sean cuadradas de 3.0 cm por lado y estén separadas 5.0 mm, con vacío entre ellas. ¿Cuál es la capacitancia de estas placas de desviación y, por lo tanto, del osciloscopio? (*Nota:* esta capacitancia en ocasiones tiene un efecto en el circuito en estudio y debe tomarse en cuenta al efectuar los cálculos.)

24.5. Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF con placas circulares está conectado a una batería de 12.0 V. *a*) ¿Cuál es la carga en cada placa? *b*) ¿Cuánta carga habría en las placas si se duplicara la separación y el capacitor permaneciera conectado a la batería? *c*) ¿Cuánta carga habría en las placas si el capacitor se conectara a la batería de 12.0 V después de duplicar el radio de cada placa sin modificar su separación?

24.6. Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF está conectado a una batería de 12.0 V. Después de que el capacitor se carga por completo, la batería se desconecta sin que haya pérdida de carga en las placas. *a*) Se conecta un voltímetro a través de las dos placas sin descargarlas. ¿Cuál es su lectura? *b*) ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si i) la separación de las placas se duplica; ii) el radio de cada placa se duplica, pero la separación entre ellas permanece igual?

24.7. ¿Cuál debe ser la separación entre dos monedas de un centavo de dólar colocadas en forma paralela para constituir un capacitor de 1.00 pF? ¿Su respuesta sugiere que se justifica tratar las monedas como láminas infinitas? Explique su respuesta.

24.8. Un capacitor lleno de aire, con placas circulares paralelas de 5.00 pF, va a usarse en un circuito en el que estará sometido a potenciales de hasta 1.00×10^2 V. El campo eléctrico entre las placas no va a ser mayor de 1.00×10^4 N/C. Suponga que, como ingeniero eléctrico en ciernes de Live-Wire Electronics, se le asignan las siguientes tareas: *a*) diseñe el capacitor determinando las dimensiones físicas y la separación que debe tener; *b*) determine la carga máxima que pueden tener sus placas.

24.9. Un capacitor está construido con dos cilindros coaxiales de hierro, huecos, uno dentro del otro. El cilindro interior tiene carga negativa y el exterior tiene carga positiva; la magnitud de la carga en cada uno es 10.0 pC. El cilindro interior tiene un radio de 0.50 mm y el exterior de 5.00 mm, y la longitud de cada cilindro es de 18.0 cm. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Qué diferencia de potencial es necesario aplicar para tener tales cargas en los cilindros?

24.10. Un capacitor cilíndrico consiste en un núcleo sólido conductor con radio de 0.250 cm, coaxial con un tubo conductor exterior hueco. Los dos conductores están rodeados por aire, y la longitud del cilindro es de 12.0 cm. La capacitancia es de 36.7 pF. *a*) Calcule el radio interior del tubo hueco. *b*) Cuando el capacitor está cargado a 125 V, ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ del capacitor?

24.11. Un capacitor cilíndrico tiene un conductor interno de 1.5 mm de radio y un conductor externo de 3.5 mm de radio. Los dos conductores están separados por vacío, y el capacitor completo mide 2.8 m de largo. *a*) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud? *b*) El potencial del conductor interno es 350 mV mayor que el del conductor externo. Determine la carga (magnitud y signo) en ambos conductores.

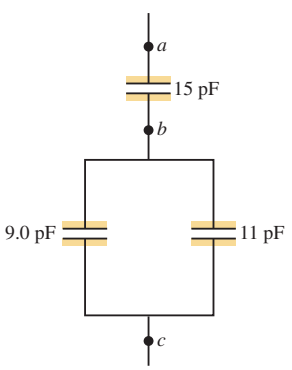
24.12. Un capacitor esférico está formado por dos corazas concéntricas, esféricas y conductoras, separadas por vacío. La esfera interior tiene un radio de 15.0 cm y la capacitancia es de 116 pF. *a*) ¿Cuál es el radio de la esfera exterior? *b*) Si la diferencia de potencial entre las dos esferas es de 220 V, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada esfera?

24.13. Un capacitor esférico contiene una carga de 3.30 nC cuando está conectado a una diferencia de potencial de 220 V. Si sus placas están separadas por vacío y el radio interno de la coraza exterior es de 4.00 cm, calcule: *a*) la capacitancia; *b*) el radio de la esfera interior; *c*) el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie de la esfera interior.

Sección 24.2 Capacitores en serie y en paralelo

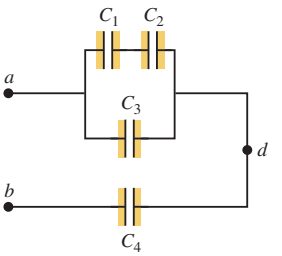
24.14. Para el sistema de capacitores que se aprecia en la figura 24.24, calcule la capacitancia equivalente *a*) entre *b* y *c*, y *b*) entre *a* y *c*.

Figura **24.24** Ejercicio 24.14.



24.15. En la figura 24.25, cada capacitor tiene $C = 4.00\ \mu$F y $V_{ab} = +28.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor; *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor; *c*) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *d*.

Figura **24.25** Ejercicio 24.15.

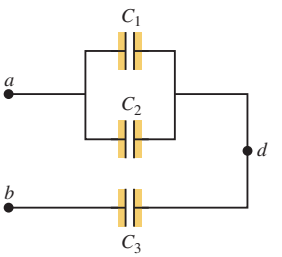


24.16. En la figura 24.8a, sean $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\mu$F y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor, y *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.17. En la figura 24.9a, sean $C_1 = 3.00\ \mu$F, $C_2 = 5.00\ \mu$F y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor y *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.18. En la figura 24.26, $C_1 = 6.00\ \mu$F, $C_2 = 3.00\ \mu$F y $C_3 = 5.00\ \mu$F. La red de capacitores está conectada a un potencial aplicado V_{ab}. Después de que las cargas en los capacitores han alcanzado sus valores finales, la carga en C_2 es de 40.0 μC. *a*) ¿Cuáles son las cargas en los capacitores C_1 y C_3? *b*) ¿Cuál es el voltaje aplicado V_{ab}?

Figura **24.26** Ejercicios 24.18 y 24.19.



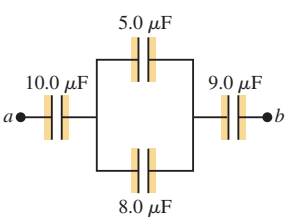
24.19. En la figura 24.26, $C_1 = 3.00\ \mu$F y $V_{ab} = 120$ V. La carga en el capacitor C_1 es 150 μC. Calcule el voltaje a través de los otros dos capacitores.

24.20. Dos capacitores de placas paralelas al vacío tienen separaciones d_1 y d_2 entre sus placas; las áreas A de las placas son iguales. Demuestre que cuando los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente es la misma que para un solo capacitor con área de placas A y distancia de separación $d_1 + d_2$.

24.21. Dos capacitores al vacío entre placas paralelas tienen áreas A_1 y A_2, con igual distancia de separación d. Demuestre que cuando los capacitores están conectados en paralelo, la capacitancia equivalente es la misma que para un solo capacitor con área de placa $A_1 + A_2$ y distancia de separación d.

24.22. En la figura 24.27 se ilustra un sistema de cuatro capacitores, donde la diferencia de potencial a través de *ab* es 50.0 V. *a*) Determine la capacitancia equivalente de este sistema entre *a* y *b*. *b*) ¿Cuánta carga se almacena en esta combinación de capacitores? *c*) ¿Cuánta carga se almacena en cada uno de los capacitores de 10.0 μF y 9.0 μF?

Figura **24.27** Ejercicio 24.22.



24.23. Suponga que el capacitor de 3 μF en la figura 24.10a se retirara para sustituirse por otro diferente, y que esto cambiara la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b* a 8 μF. ¿Cuál sería la capacitancia del capacitor remplazado?

Sección 24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía del campo eléctrico

24.24. Un capacitor de placas paralelas separadas por aire tiene una capacitancia de 920 pF. La carga en cada placa es de 2.55 μC. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) Si la carga se mantiene constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas, si la separación se duplica? *c*) ¿Cuánto trabajo se requiere para duplicar la separación?

24.25. Un capacitor de placas paralelas separadas por aire, de 5.80 μF, tiene una separación de 5.00 mm y está cargado a una diferencia de potencial de 400 V. Calcule la densidad de energía en la región comprendida entre las placas, en unidades de J/m^3.

24.26. Un capacitor con aire está hecho de dos placas paralelas planas con una separación de 1.50 mm. La magnitud de la carga en cada placa es de 0.0180 μC, cuando la diferencia de potencial es de 200 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse sin que haya ruptura del dieléctrico? (En el caso del aire, la ruptura del dieléctrico ocurre con una intensidad de campo eléctrico de 3.0×10^6 V/m.) *d*) Cuando la carga es de 0.0180 μC, ¿cuál es la energía total almacenada?

24.27. Un capacitor de 450 μF se carga a 295 V. Después se conecta un alambre entre las placas. ¿Cuántos joules de energía térmica se producen conforme se descarga el capacitor, si toda la energía almacenada se convierte en calor en el alambre?

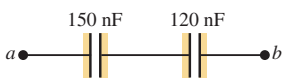
24.28. Un capacitor de capacitancia C se carga a una diferencia de potencial V_0. Después, las terminales del capacitor con carga se conectan a las de un capacitor sin carga de capacitancia $C/2$. Calcule *a*) la carga original del sistema; *b*) la diferencia de potencial final a través de cada capacitor; *c*) la energía final del sistema; *d*) la disminución de energía cuando se conectan los capacitores. *e*) ¿A dónde fue la energía "perdida"?

24.29. Un capacitor tiene placas paralelas con vacío entre ellas, con área de placa igual a A, una separación x, y cargas $+Q$ y $-Q$ en cada una. El capacitor se desconecta de la fuente de carga, por lo que la carga en cada placa permanece fija. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor? *b*) Se separan las placas una distancia adicional dx. ¿Cuál es el cambio en la energía almacenada? *c*) Si F es la fuerza con la que las placas se atraen entre sí, entonces el cambio en la energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado para separar las placas. Encuentre una expresión para F. *d*) Explique por qué F *no* es igual a QE, donde E es el campo eléctrico entre las placas.

24.30. Un capacitor de placas paralelas con vacío entre ellas tiene 8.38 J de energía almacenada. La separación entre las placas es de 2.30 mm. Si la separación disminuye a 1.15 mm, ¿cuál es la energía almacenada *a*) si el capacitor se desconecta de la fuente de potencial de manera que la carga en las placas permanece constante, y *b*) si el capacitor sigue conectado a la fuente de potencial de manera que la diferencia de potencial entre las placas permanece constante?

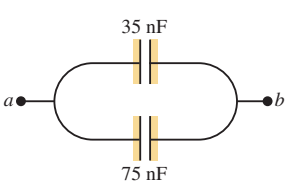
24.31. *a*) ¿Cuánta carga tiene que suministrar una batería a un capacitor de 5.0 μF para crear una diferencia de potencial de 1.5 V a través de sus placas? En este caso, ¿cuánta energía estaría almacenada en el capacitor? *b*) ¿Cuánta carga tendría que suministrar la batería para que en el capacitor se almacenara 1.0 J de energía? En este caso, ¿cuál sería el potencial a través del capacitor?

Figura **24.28** Ejercicio 24.32.



24.32. Para la red de capacitores que se ilustra en la figura 24.28, la diferencia de potencial a través de ab es de 36 V. Encuentre *a*) la carga total almacenada en esta red; *b*) la carga en cada capacitor; *c*) la energía total almacenada en la red; *d*) la energía almacenada en cada capacitor; *e*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

Figura **24.29** Ejercicio 24.33.



24.33. Para la red de capacitores que se ilustra en la figura 24.29, la diferencia de potencial a través de ab es 220 V. Calcule *a*) la carga total almacenada en la red; *b*) la carga en cada capacitor; *c*) la energía total almacenada en la red; *d*) la energía almacenada en cada capacitor; *e*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.34. Un capacitor cilíndrico de 0.350 m de longitud consiste en un núcleo conductor sólido de 1.20 mm de radio, y un tubo exterior conductor hueco con radio interior de 2.00 mm. Los dos conductores coaxiales están separados por aire y se cargan a una diferencia de potencial de 6.00 V. Calcule *a*) la carga por unidad de longitud para el capacitor; *b*) la carga total en el capacitor; *c*) la capacitancia; *d*) la energía almacenada en el capacitor cuando está cargado por completo.

24.35. Un capacitor cilíndrico de aire tiene una longitud de 15.0 m y almacena 3.20×10^{-9} J de energía cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores es de 4.00 V. *a*) Calcule la magnitud de la carga en cada conductor. *b*) Calcule la razón de los radios interior y exterior de los conductores.

24.36. Un capacitor está formado por dos corazas conductoras concéntricas esféricas separadas por vacío. La esfera interior tiene un radio de 12.5 cm, y la exterior tiene un radio de 14.8 cm. Se aplica al capacitor una diferencia de potencial de 120 V. *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 12.6$ cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? *b*) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 14.7$ cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? *c*) Para un capacitor de placas paralelas la densidad de energía es uniforme en la región entre las placas, excepto cerca de los bordes de éstas. ¿Esto también se cumple para un capacitor esférico?

24.37. Se tienen dos capacitores idénticos y una fuente externa de potencial. *a*) Compare la energía total almacenada en los capacitores cuando se conectan en serie y en paralelo al potencial aplicado. *b*) Compare la cantidad máxima de carga almacenada en cada caso. *c*) El almacenamiento de energía en un capacitor está limitado por el máximo campo eléctrico entre las placas. ¿Cuál es la razón del campo eléctrico para las combinaciones en serie y paralelo?

Sección 24.4 Dieléctricos

24.38. Un capacitor de placas paralelas tiene capacitancia $C_0 = 5.00$ pF cuando hay aire entre sus placas. La separación entre las placas es de 1.50 mm. *a*) ¿Cuál es la magnitud máxima de carga Q que puede colocarse en cada placa si el campo eléctrico entre ellas no debe exceder 3.00×10^4 V/m? *b*) Se inserta un dieléctrico con $K = 2.70$ entre las placas del capacitor, llenando por completo el volumen entre ellas. Ahora, ¿cuál es la magnitud máxima de carga en cada placa si el campo eléctrico entre ellas no debe exceder 3.00×10^4 V/m?

24.39. Dos placas paralelas tienen cargas iguales de signo contrario. Cuando se evacua el espacio entre las placas, el campo eléctrico es $E = 3.20 \times 10^5$ V/m. Cuando el espacio se llena con un dieléctrico, el campo eléctrico es $E = 2.50 \times 10^5$ V/m. *a*) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico? *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica?

24.40. Un aficionado a la electrónica quiere construir un capacitor sencillo de 1.0 nF para sintonizar su radio de cristal, con dos láminas de aluminio como placas y algunas hojas de papel entre ellas como dieléctrico. El papel tiene una constante dieléctrica de 3.0, y el espesor de una hoja es de 0.20 mm. *a*) Si las hojas de papel miden 22 × 28 cm y el aficionado corta el aluminio con las mismas dimensiones, ¿cuántas hojas de papel debe poner entre las placas para lograr la capacitancia apropiada? *b*) Suponga que, por conveniencia, él quiere utilizar, en vez de papel, una sola hoja de cartón con la misma constante dieléctrica pero con espesor de 12.0 mm. ¿Qué área de hoja de aluminio necesitará para hacer sus placas y obtener 1.0 nF de capacitancia? *c*) Suponga que recurre a la alta tecnología y encuentra una hoja de teflón del mismo espesor que el del cartón para utilizarla como dieléctrico. ¿Necesitará una área más grande o más pequeña de teflón en comparación con la de cartón? Explique su respuesta.

24.41. El dieléctrico que ha de usarse en un capacitor de placas paralelas tiene una constante dieléctrica de 3.60 y rigidez dieléctrica de 1.60×10^7 V/m. El capacitor debe tener una capacitancia de 1.25×10^{-9} F y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 5500 V. ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas del capacitor?

24.42. Demuestre que la ecuación (24.20) se cumple para un capacitor de placas paralelas con un material dieléctrico entre ellas. Use un procedimiento análogo al que se empleó para obtener la ecuación (24.11).

24.43. Un capacitor tiene placas paralelas con un área de 12 cm^2 separadas por una distancia de 2.0 mm. El espacio entre las placas está lleno de poliestireno (consulte la tabla 24.2). *a*) Determine la permitividad del poliestireno. *b*) Calcule el voltaje máximo permisible a través del capacitor para evitar la ruptura del dieléctrico. *c*) Con el voltaje igual al valor obtenido en el inciso *b*), determine la densidad superficial de carga en cada placa y la densidad superficial de carga inducida en la superficie del dieléctrico.

24.44. Se mantiene una diferencia de potencial constante de 12 V entre las terminales de un capacitor de 0.25 μF de placas paralelas con aire entre ellas. *a*) Se inserta una lámina de Mylar entre las placas de manera que llene por completo el espacio. Cuando se hace esto, ¿cuánta carga adicional fluye hacia la placa positiva del capacitor (consulte la tabla 24.1)? *b*) ¿Cuál es la carga total inducida en cada cara de la lámina de Mylar? *c*) ¿Qué efecto tiene la lámina de Mylar en el campo eléctrico entre las placas? Explique cómo se puede conciliar este hecho con el incremento de la carga en las placas, el cual actúa para *aumentar* el campo eléctrico.

24.45. Cuando se conecta un capacitor con aire de 360 nF (1 nF = 10^{-9} F) a una fuente de potencia, la energía almacenada en el capacitor es de 1.85×10^{-5} J. Mientras el capacitor se mantiene conectado a la fuente de potencia, se inserta un trozo de material dieléctrico que llena por completo el espacio entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada en 2.32×10^{-5} J. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor? *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica del trozo de material?

24.46. Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de $C = 12.5$ pF cuando el volumen entre las placas está lleno de aire. Las placas son circulares con radio de 3.00 cm. El capacitor está conectado a una batería y una carga de magnitud 25.0 pC va hacia cada placa. Con el capacitor aún conectado a la batería, se inserta un bloque de dieléctrico entre las placas llenando por completo el espacio entre ellas. Después de insertar el dieléctrico, la carga en cada placa tiene una magnitud de 45.0 pC. *a*) ¿Cuál es la constante dieléctrica K del dieléctrico? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas antes y después de haber insertado el dieléctrico? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto medio entre las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

24.47. Se conecta un capacitor de 12.5 μF a una fuente de potencia que mantiene una diferencia de potencial constante de 24.0 V a través de las placas. Entre las placas se coloca un trozo de material cuya constante dieléctrica es de 3.75 llenando por completo el espacio que hay entre ellas. *a*) ¿Cuánta energía hay almacenada en el capacitor antes y después de insertar el dieléctrico? *b*) ¿En cuánto cambia la energía durante la inserción? ¿Aumenta o disminuye?

*Sección 24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

***24.48.** Las placas paralelas de un capacitor tienen un área de 0.0225 m^2 y están separadas por 1.00 mm de teflón. *a*) Calcule la carga en las placas cuando están cargadas a una diferencia de potencial de 12.0 V. *b*) Use la ley de Gauss (ecuación 24.23) para calcular el campo eléctrico dentro del teflón. *c*) Aplique la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico si se desconecta la fuente de voltaje y se retira el teflón.

***24.49.** El volumen entre las placas paralelas de un capacitor está lleno de plástico cuya constante dieléctrica es K. La magnitud de la carga en cada placa es Q. Cada placa tiene área A, con una distancia d entre ambas. *a*) Utilice la ley de Gauss como se plantea en la ecuación (24.23) para calcular la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico. *b*) Use el campo eléctrico obtenido en el inciso *a*) para calcular la diferencia de potencial entre las dos placas. *c*) Con el resultado del inciso *b*), determine la capacitancia del capacitor. Compare su resultado con la ecuación (24.12).

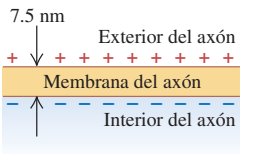
Problemas

24.50. Las placas paralelas de un capacitor con aire miden 16 cm cuadrados de superficie, con una separación de 4.7 mm. El capacitor se conecta a una batería de 12 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es la carga en cada placa? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? *d*) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor? *e*) Si la batería se desconecta y luego se separan las placas hasta estar a 9.4 mm, ¿cuáles son las respuestas para los incisos *a*) a *d*)?

24.51. Suponga que la batería del problema 24.50 permanece conectada mientras se separan las placas. ¿Cuáles son las respuestas para los incisos *a*) a *d*) después de haber separado las placas?

24.52. Membranas celulares. Las membranas de las células (la pared que las rodea) normalmente tienen un espesor de 7.5 nm. Son parcialmente permeables para permitir que material con carga entre y salga, según sea necesario. En las caras interior y exterior de las membranas hay densidades de carga iguales pero de signo contrario, para impedir que cargas adicionales crucen la pared celular. Se puede modelar la membrana celular como un capacitor de placas paralelas, con la membrana que contiene proteínas incrustada en un material orgánico que le da una constante dieléctrica alrededor de 10. (Véase la figura 24.30.) *a*) ¿Cuál es la capacitancia por centímetro cuadrado de una membrana celular? *b*) En su estado de reposo normal una célula tiene una diferencia de potencial de 85 mV a través de su membrana. ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de ella?

Figura 24.30
Problema 24.52.



24.53. Las unidades de flash electrónicas de las cámaras fotográficas contienen un capacitor que almacena energía para producir el destello. En una de tales unidades, el destello dura $\frac{1}{675}$ s, con salida media de potencia luminosa de 2.70×10^5 W. *a*) Si la conversión de energía eléctrica en luz tiene una eficiencia del 95% (el resto se convierte en energía térmica), ¿cuánta energía debe almacenarse en el capacitor para obtener un destello? *b*) El capacitor tiene una diferencia de potencial entre sus placas de 125 V, cuando la energía almacenada es igual al valor calculado en el inciso *a*). ¿Cuál es la capacitancia?

24.54. En cierto tipo de teclado de computadora, cada tecla tiene una pequeña placa metálica que funciona como una de las placas de un capacitor de placas paralelas relleno de aire. Cuando se oprime la tecla, la separación de las placas disminuye y la capacitancia aumenta. Los circuitos electrónicos detectan el cambio de la capacitancia y con ello la tecla que se oprimió. En un teclado en particular, el área de cada placa metálica es de 42.0 mm^2, y la separación entre las placas es de 0.700 mm antes de oprimir la tecla. *a*) Calcule la capacitancia antes de oprimir la tecla. *b*) Si los circuitos son capaces de detectar un cambio en la capacitancia de 0.250 pF, ¿qué distancia hay que oprimir la tecla para que los circuitos detecten que la tecla se oprimió?

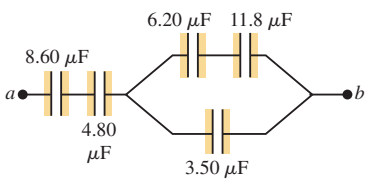
24.55. Considere un capacitor cilíndrico como el que se ilustra en la figura 24.6. Sea $d = r_b - r_a$ la distancia entre los conductores interior y exterior. *a*) Los radios de ambos conductores son sólo un poco diferentes, de manera que $d \ll r_a$. Demuestre que el resultado obtenido en el ejemplo 24.4 (sección 24.1) para la capacitancia de un capacitor cilíndrico se reduce a la ecuación (24.2), que es la ecuación de la capacitan-

cia de un capacitor de placas paralelas, con área A como superficie de cada cilindro. Use el resultado de que $\ln(1+z) \cong z$ para $|z| \ll 1$. *b*) Aunque la Tierra es esencialmente esférica, su superficie parece plana porque su radio es muy grande. Utilice esta idea para explicar por qué es razonable el resultado del inciso *a*) desde un punto de vista puramente geométrico.

24.56. En la figura 24.9a, sean $C_1 = 9.0\ \mu F$, $C_2 = 4.0\ \mu F$ y $V_{ab} = 28$ V. Suponga que los capacitores con carga se desconectan de la fuente y uno del otro, para luego reconectarlos entre sí con placas de signo *contrario*. ¿En cuánto disminuye la energía del sistema?

24.57. Para la red de capacitores que se ilustra en la figura 24.31, la diferencia de potencial a través de *ab* es de 12.0 V. Calcule *a*) la energía total almacenada en la red, y *b*) la energía almacenada en el capacitor de 4.80 μF.

Figura 24.31 Problema 24.57.



24.58. Se dispone de varios capacitores de 0.25 μF. El voltaje a través de cada uno no debe exceder de 600 V. Se necesita construir un capacitor con capacitancia de 0.25 μF para conectarlo a través de una diferencia de potencial de 960 V. *a*) En un diagrama, muestre la manera de obtener un capacitor equivalente con las propiedades mencionadas. *b*) Ningún dieléctrico es un aislante perfecto que impida por completo el flujo de carga a través de su volumen. Suponga que el dieléctrico en uno de los capacitores en el diagrama es un conductor moderadamente bueno. En este caso, ¿qué ocurrirá cuando la combinación de capacitores se conecte a través de una diferencia de potencial de 960 V?

24.59. En la figura 24.32, $C_1 = C_5 = 8.4\ \mu F$ y $C_2 = C_3 = C_4 = 4.2\ \mu F$. El potencial aplicado es $V_{ab} = 220$ V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la red entre los puntos *a* y *b*? *b*) Calcule la carga y la diferencia de potencial en cada capacitor.

Figura 24.32 Problema 24.59.

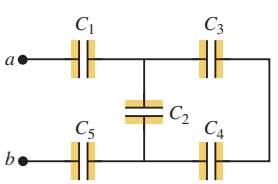
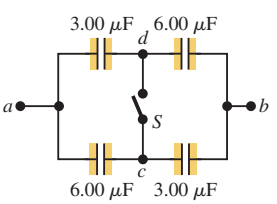


Figura 24.33 Problema 24.60.



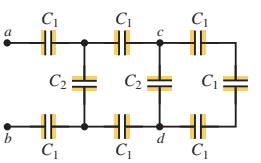
24.60. Los capacitores en la figura 24.33 se encuentran inicialmente sin carga y están conectados, como se ilustra en el diagrama, con el interruptor S abierto. La diferencia de potencial aplicada es $V_{ab} = +210$ V. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{cd}? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor una vez cerrado el interruptor S? *c*) ¿Cuánta carga fluyó a través del interruptor cuando se cerró?

24.61. Tres capacitores con capacitancias de 8.4, 8.4 y 4.2 μF están conectados en serie a través de una diferencia de potencial de 36 V. *a*) ¿Cuál es la carga en el capacitor de 4.2 μF? *b*) ¿Cuál es la energía total almacenada en los tres capacitores? *c*) Los capacitores se desconectan de la diferencia de potencial sin permitir que se descarguen. Después se vuelven a conectar en paralelo entre sí, con las placas con carga positiva conectadas. ¿Cuál es el voltaje a través de cada capacitor en la combinación en paralelo? *d*) ¿Cuál es la energía total que ahora está almacenada en los capacitores?

24.62. Capacitancia en una nube de tormenta. El centro de carga de una nube de tormenta, que se encuentra a 3.0 km sobre la superficie terrestre, contiene 20 C de carga negativa. Si se supone que el centro de carga tiene un radio de 1.0 km, y el centro de carga y la superficie de la Tierra se modelan como placas paralelas, calcule: *a*) la capacitancia del sistema; *b*) la diferencia de potencial entre el centro de carga y la superficie terrestre; *c*) la intensidad media del campo eléctrico entre la nube y la superficie terrestre; *d*) la energía eléctrica almacenada en el sistema.

24.63. En la figura 24.34, cada capacitancia C_1 es de 6.9 μF, y cada capacitancia C_2 es de 4.6 μF. *a*) Calcule la capacitancia equivalente de la red entre los puntos *a* y *b*. *b*) Determine la carga en cada uno de los tres capacitores más cercanos a *a* y *b* cuando $V_{ab} =$ 420 V. *c*) Con 420 V a través de *a* y *b*, calcule V_{cd}.

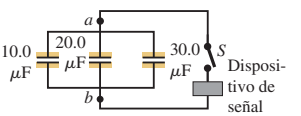
Figura 24.34 Problema 24.63.



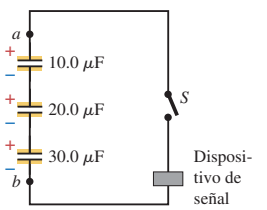
24.64. Cada combinación de capacitores entre los puntos *a* y *b* en la figura 24.35 se conecta primero a través de una batería de 120 V, para cargar la combinación a 120 V. Después, estas combinaciones se conectan para formar el circuito que se ilustra. Cuando se acciona el interruptor S, fluye una oleada de carga desde los capacitores que se descargan, la cual activa el dispositivo de señal. ¿Cuánta carga fluye a través del dispositivo de señal?

Figura 24.35 Problema 24.64.

a)



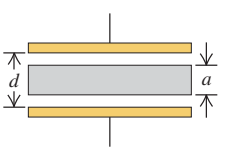
b)



24.65. Un capacitor de placas paralelas que tiene sólo aire entre las placas se carga conectándolo a una batería. Luego se desconecta el capacitor de la batería sin que ninguna carga salga de las placas. *a*) Cuando se coloca a través del capacitor, un voltímetro da una lectura de 45.0 V. Al insertar un dieléctrico entre las placas llenando por completo el espacio entre ellas, el voltímetro lee 11.5 V. ¿Cuál es la constante dieléctrica de este material? *b*) ¿Cuál será la lectura del voltímetro si se retira parte del dieléctrico de manera que sólo ocupe la tercera parte del espacio entre las placas?

24.66. Un capacitor con aire está construido con dos placas planas, cada una con área A, separadas una distancia d. Después se inserta entre ellas un bloque metálico con espesor a (menor que d) y de la misma forma y tamaño que las placas, paralelo a éstas y sin tocarlas (figura 24.36). *a*) ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo? *b*) Exprese la capacitancia como un múltiplo de la capacitancia C_0 cuando el bloque de metal no está presente. *c*) Analice lo que pasa con la capacitancia en los límites cuando $a \to 0$ y $a \to d$.

Figura 24.36 Problema 24.66.



24.67. Capacitancia de la Tierra. *a*) Analice cómo puede aplicarse el concepto de capacitancia a un *solo* conductor. (*Sugerencia:* en la relación $C = Q/V_{ab}$, piense en el segundo conductor como si se localizara en el infinito.) *b*) Utilice la ecuación (24.1) para demostrar que

$C = 4\pi\epsilon_0 R$ para una esfera conductora sólida de radio R. Utilice el resultado del inciso *b*) para calcular la capacitancia de la Tierra, que es un buen conductor con radio de 6380 km. Realice una comparación con los capacitores comunes que se emplean en los circuitos electrónicos y que tienen capacitancias que van de 10 pF a 100 μF.

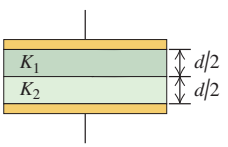
24.68. Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga Q. Calcule la densidad de la energía del campo eléctrico en un punto localizado a una distancia r del centro de la esfera para *a*) $r < R$, y *b*) $r > R$. *c*) Calcule la energía total del campo eléctrico asociada con la esfera con carga. (*Sugerencia:* considere una coraza esférica de radio r y espesor dr con volumen $dV = 4\pi r^2\,dr$, y encuentre la energía almacenada en este volumen. Después integre de $r = 0$ a $r \to \infty$.) *d*) Explique por qué el resultado del inciso *c*) se interpreta como la cantidad de trabajo requerido para colocar la carga Q en la esfera. *e*) Empleando la ecuación (24.9) y el resultado del inciso *c*), demuestre que la capacitancia de la esfera es la que se da en el problema 24.67.

24.69. Capacitancia de la Tierra-ionosfera. La Tierra puede considerarse como un capacitor de un solo conductor (véase el problema 24.67). En combinación con la ionosfera, que es una capa atmosférica con carga, también es posible considerarla como un capacitor esférico de dos placas, donde la superficie terrestre es la placa negativa. La ionosfera se encuentra a una altitud de 70 km aproximadamente, y la diferencia de potencial entre ésta y la superficie terrestre es de alrededor de 350,000 V. Calcule *a*) la capacitancia de este sistema; *b*) la carga total en el capacitor; *c*) la energía almacenada en el sistema.

24.70. El cilindro interior de un capacitor largo y cilíndrico tiene un radio r_a y densidad lineal de carga $+\lambda$. Está rodeado por una coraza cilíndrica, coaxial, conductora, con radio interior r_b y densidad lineal de carga $-\lambda$ (véase la figura 24.6). *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en la región entre los conductores a una distancia r del eje? *b*) Integre la densidad de energía calculada en el inciso *a*) con respecto al volumen entre los conductores en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total del campo eléctrico por unidad de longitud. *c*) Con base en la ecuación (24.9) y la capacitancia por unidad de longitud calculada en el ejemplo 24.4 (sección 24.1), calcule U/L. ¿Concuerda el resultado con el que se obtuvo en el inciso *b*)?

24.71. El espacio entre las placas paralelas de un capacitor está ocupado por dos bloques de dieléctrico, uno con constante K_1 y otro con constante K_2 (figura 24.37). Cada bloque tiene un espesor de $d/2$, donde d es la distancia entre las placas. Demuestre que la capacitancia es

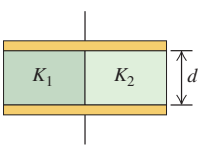
Figura **24.37** Problema 24.71.



$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right)$$

24.72. El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas está ocupado por dos bloques de material dieléctrico, uno con constante K_1 y otro con constante K_2 (figura 24.38). El espesor de cada bloque es el mismo que la separación d entre las placas, y cada uno llena la mitad del volumen entre ellas. Demuestre que la capacitancia es

Figura **24.38** Problema 24.72.



$$C = \frac{\epsilon_0 A(K_1 + K_2)}{2d}$$

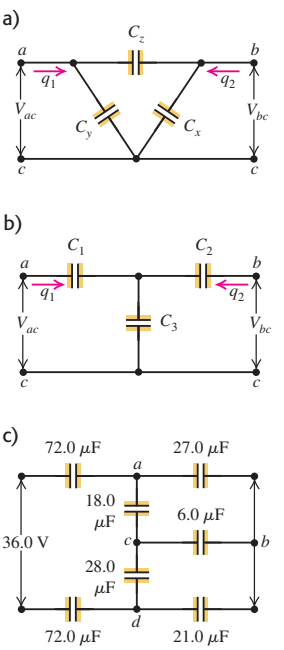
Problemas de desafío

24.73. Los capacitores en red no siempre pueden agruparse en combinaciones sencillas de conexiones en serie o en paralelo. Por ejemplo, la figura 24.39a muestra tres capacitores, C_x, C_y y C_z, en una *red en delta*, llamada así en virtud de su forma triangular. Esta red tiene *tres* terminales *a*, *b* y *c*, por lo que no puede transformarse en un único capacitor equivalente. Es posible demostrar que hasta donde concierne al efecto en el circuito externo, una red en delta es equivalente a lo que se denomina *red en estrella*. Por ejemplo, la red en delta de la figura 24.39a se puede sustituir por la red en estrella de la figura 24.39b. (El nombre "red en estrella" también se refiere a la forma que tiene.) *a*) Demuestre que las ecuaciones de transformación que dan C_1, C_2 y C_3 en términos de C_x, C_y y C_z son

$$C_1 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_x$$
$$C_2 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_y$$
$$C_3 = (C_x C_y + C_y C_z + C_z C_x)/C_z$$

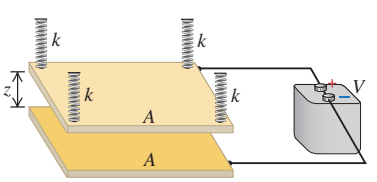
(*Sugerencia:* la diferencia de potencial V_{ac} debe ser la misma en ambos circuitos, igual que ocurre para V_{bc}. Asimismo, la carga q_1, que fluye del punto *a* a lo largo del alambre según se indica, debe ser la misma en los dos circuitos, al igual que sucede para q_2. Obtenga una relación para V_{ac} como función de q_1 y q_2 y las capacitancias para cada red, y obtenga una relación aparte para V_{bc} como función de las cargas en cada red. Los coeficientes de cargas correspondientes en ecuaciones correspondientes deben ser los mismos para las dos redes.) *b*) Para la red que aparece en la figura 24.39c, determine la capacitancia equivalente entre las terminales en el extremo izquierdo de la red. (*Sugerencia:* utilice la transformación delta-estrella obtenida en el inciso *a*). Utilice los puntos *a*, *b* y *c* para formar la delta, y transfórmela en una estrella. Luego, los capacitores pueden combinarse empleando las relaciones para combinaciones en serie y paralelo.) *c*) Determine la carga de cada capacitor de la figura 24.39c, así como la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos.

Figura **24.39** Problema de desafío 24.73.



24.74. El capacitor con aire entre las placas paralelas que se ilustra en la figura 24.40 consiste en dos placas conductoras horizontales de área igual A. La placa inferior descansa en un apoyo fijo, y la superior está

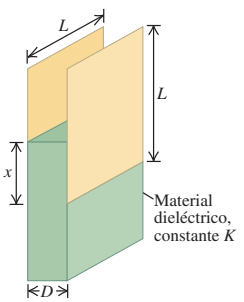
Figura **24.40** Problema de desafío 24.74.



sostenida por cuatro resortes con constante de elasticidad k, cada uno ubicado en una de las cuatro esquinas de la placa, como se observa en la figura. Cuando no tienen carga, las placas están separadas por una distancia z_0. Se conecta una batería a las placas y produce una diferencia de potencial V entre ellas. Esto ocasiona que la separación entre las placas disminuya a z. Ignore cualquier efecto de los bordes. *a*) Demuestre que la fuerza electrostática entre las placas con carga tiene una magnitud de $\epsilon_0 A V^2/2z^2$. (*Sugerencia:* consulte el ejercicio 24.29.) *b*) Obtenga una expresión que relacione la separación z entre las placas con la diferencia de potencial V. La ecuación resultante será cúbica con respecto a z. *c*) Dados los valores $A = 0.300\ \text{m}^2$, $z_0 = 1.20$ mm, $k = 25.0$ N/m y $V = 120$ V, encuentre los dos valores de z para los que la placa superior estará en equilibrio. (*Sugerencia:* es posible resolver la ecuación cúbica insertando un valor de ensayo de z en la ecuación, y después ajustar la conjetura hasta que se satisfaga la ecuación a tres cifras significativas. La ubicación gráfica de las raíces de la ecuación cúbica ayuda a elegir los valores iniciales de z para este procedimiento por ensayo y error. Una raíz de la ecuación cúbica tiene un valor negativo no físico.) *d*) Para cada uno de los dos valores de z encontrados en el inciso *c*), ¿el equilibrio es estable o inestable? Para el equilibrio estable, un desplazamiento pequeño del objeto dará lugar a una fuerza neta que tiende a regresar al objeto a la posición de equilibrio. Para el equilibrio inestable, un desplazamiento pequeño originará una fuerza neta que aleje al objeto aún más del equilibrio.

24.75. Dos placas conductoras cuadradas con lados de longitud L están separadas por una distancia D. Se inserta un bloque dieléctrico con constante K con dimensiones $L \times L \times D$, a una distancia x en el espacio entre las placas, como se ilustra en la figura 24.41. *a*) Calcule la capacitancia C de este sistema (véase el problema 24.72). *b*) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si el dieléctrico se inserta una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, demuestre que el cambio en la energía almacenada es

Figura **24.41** Problema de desafío 24.75.

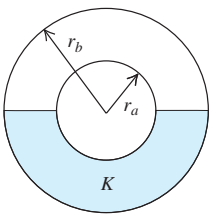


$$dU = +\frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D}dx$$

c) Suponga que antes de desplazar el bloque dieléctrico la distancia dx, las placas se desconectan de la batería, de manera que las cargas en ellas permanecen constantes. Determine la magnitud de la carga en cada placa y luego demuestre que cuando el dieléctrico se desplaza la distancia adicional dx en el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión para dU que se dio en el inciso *b*). *d*) Si F es la fuerza que las cargas de las placas ejercen sobre el dieléctrico, entonces dU debe ser igual al trabajo realizado *contra* esta fuerza para desplazar el material dieléctrico una distancia dx. De esta forma, $dU = -F\,dx$. Demuestre que la aplicación de esta expresión al resultado del inciso *b*) sugiere que la fuerza eléctrica sobre el dieléctrico lo empuja *hacia fuera* del capacitor, mientras que el resultado para el inciso *c*) sugiere que la fuerza atrae al dieléctrico *hacia dentro* del capacitor. *e*) La figura 24.16 indica que la fuerza en realidad atrae al dieléctrico hacia el capacitor. Explique por qué el resultado del inciso *b*) da una respuesta incorrecta para la dirección de la fuerza, y calcule la magnitud de tal fuerza. (Este método no requiere conocer la naturaleza del efecto de bordes del campo.)

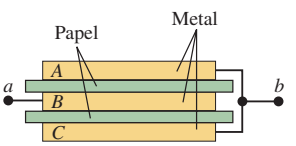
24.76. Un capacitor esférico aislado tiene carga $+Q$ en su conductor interior (radio r_a) y carga $-Q$ en su conductor exterior (radio r_b). Después, se llena la mitad del volumen entre los dos conductores con un líquido dieléctrico con constante K, como se muestra en el corte transversal de la figura 24.42. *a*) Encuentre la capacitancia del capacitor medio lleno. *b*) Calcule la magnitud de $\vec{E}$ en el volumen entre los dos conductores como función de la distancia r desde el centro del capacitor. Dé respuestas para las mitades superior e inferior de este volumen. *c*) Obtenga la densidad superficial de la carga libre en las mitades superior e inferior de los conductores interno y externo. *d*) Determine la densidad superficial de la carga ligada en las superficies interior ($r = r_a$) y exterior ($r = r_b$) del dieléctrico. *e*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga ligada en la superficie plana del dieléctrico? Explique su respuesta.

Figura **24.42** Problema de desafío 24.76.



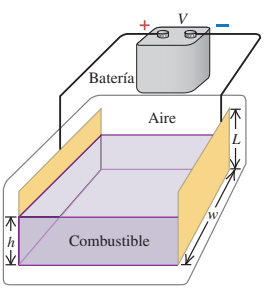
24.77. Tres placas metálicas cuadradas A, B y C, cada una de 12 cm de lado y 1.50 mm de espesor, se acomodan como se ilustra en la figura 24.43. Las placas están separadas por hojas de papel de 0.45 mm de espesor y constante dieléctrica de 4.2. Las placas exteriores se conectan entre sí y con el punto b. La placa interior se conecta al punto a. *a*) Copie el diagrama y muestre con signos más y menos la distribución de la carga en las placas cuando el punto a se mantiene a un potencial positivo en relación con el punto b. *b*) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos a y b?

Figura **24.43** Problema de desafío 24.77.



24.78. Un medidor de combustible utiliza un capacitor para determinar la altura que alcanza el combustible dentro de un tanque. La constante dieléctrica efectiva K_{ef} cambia de un valor de 1 cuando el tanque está vacío, a un valor de K, la constante dieléctrica del combustible cuando el tanque está lleno. Circuitos electrónicos apropiados determinan la constante dieléctrica efectiva de la combinación de aire y combustible entre las placas del capacitor. Cada una de las dos placas rectangulares tiene un ancho w y longitud L (figura 24.44). La altura del combustible entre las placas es h. Se pueden ignorar los efectos de los bordes. *a*) Obtenga una expresión para K_{ef} como función de h. *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva para un tanque a la cuarta parte, a la mitad y a las tres cuartas partes de su volumen de llenado, si el combustible es gasolina ($K = 1.95$)? *c*) Repita el inciso *b*) para metanol ($K = 33.0$). *d*) ¿Para qué combustible resulta más práctico usar este medidor?

Figura **24.44** Problema de desafío 24.78.



25 CORRIENTE, RESISTENCIA Y FUERZA ELECTROMOTRIZ

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de la corriente eléctrica y cómo se desplaza la carga en un conductor.
- El significado de la resistividad y la conductividad eléctrica de una sustancia.
- Cómo calcular la resistencia de un conductor a partir de sus dimensiones y su resistividad.
- El modo en que una fuerza electromotriz (fem) hace posible que la corriente fluya en un circuito.
- Cómo efectuar cálculos que implican energía y potencia en circuitos.

? En una linterna, la cantidad de corriente que sale de la bombilla eléctrica, ¿es menor, mayor o igual a la cantidad de corriente que entra a la bombilla?

En los pasados cuatro capítulos estudiamos las interacciones de las cargas eléctricas *en reposo*; ahora estamos listos para estudiar las cargas *en movimiento*. Una *corriente eléctrica* consiste en cargas en movimiento de una región a otra. Cuando este desplazamiento tiene lugar en una trayectoria de conducción que forma una espira cerrada, la trayectoria recibe el nombre de *circuito eléctrico*.

Fundamentalmente, los circuitos eléctricos son un medio de transportar *energía* de un lugar a otro. A medida que las partículas se desplazan por un circuito, la energía potencial eléctrica se transfiere de una fuente (como una batería o un generador) a un dispositivo en el que se almacena o se convierte en otra forma: sonido en un equipo estereofónico, o calor y luz en un tostador o una eléctrica, por ejemplo. Desde el punto de vista tecnológico, los circuitos eléctricos son útiles porque permiten transportar energía sin que haya partes macroscópicas móviles (además de las partículas con carga en movimiento). Los circuitos eléctricos son la base de las linternas, los reproductores de CD, las computadoras, los transmisores y receptores de radio y televisión, y los sistemas domésticos e industriales de distribución de energía eléctrica. Los sistemas nerviosos de los animales y los humanos son circuitos eléctricos especializados que conducen señales vitales de una parte del cuerpo a otra.

En el capítulo 26 veremos la manera de analizar circuitos eléctricos y estudiaremos algunas de sus aplicaciones prácticas. Sin embargo, antes de ello, habrá que entender las propiedades básicas de las corrientes eléctricas, que es el tema de este capítulo. Comenzaremos por describir la naturaleza de los conductores eléctricos y ver cómo los afecta la temperatura. Aprenderemos por qué un alambre corto, grueso y frío es mejor conductor que otro largo, delgado y caliente. Estudiaremos otras propiedades de las baterías y veremos cómo producen corriente y transfieren energía en un circuito. En este análisis usaremos los conceptos de corriente, diferencia de potencial (o voltaje), resistencia y fuerza electromotriz. Por último, estudiaremos las corrientes eléctricas en un material desde el punto de vista microscópico.

25.1 Corriente eléctrica

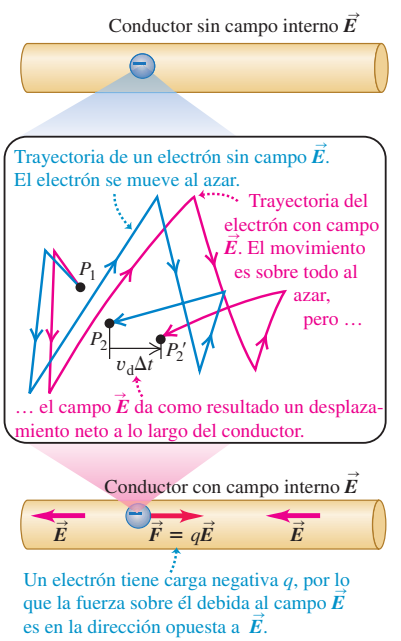
Una **corriente eléctrica** es todo movimiento de carga de una región a otra. En esta sección estudiaremos las corrientes en los materiales conductores. La gran mayoría de aplicaciones tecnológicas de cargas en movimiento implican corrientes de este tipo.

En situaciones electrostáticas (las cuales se analizaron en los capítulos 21 a 24), el campo eléctrico dentro de un conductor es igual a cero, y *no* hay corriente. Sin embargo, esto no significa que todas las cargas en el interior del conductor estén en reposo. En un metal común, como el cobre o el aluminio, algunos de los electrones están en libertad para moverse dentro del material conductor. Estos electrones libres se mueven al azar en todas direcciones, en forma parecida a como lo hacen las moléculas de un gas, sólo que con una rapidez mucho mayor, del orden de 10^6 m/s. No obstante, los electrones no escapan del material conductor, ya que son atraídos hacia los iones positivos del material. El movimiento de los electrones es aleatorio, por lo que no hay un flujo *neto* de carga en ninguna dirección y, por consiguiente, no existe corriente.

Ahora, considere lo que pasa si se establece un campo eléctrico $\vec{E}$ constante y estable dentro de un conductor. (Más adelante se verá cómo ocurre esto.) En ese caso, una partícula con carga (como un electrón libre) en el interior del material conductor se somete a una fuerza estable $\vec{F} = q\vec{E}$. Si la partícula con carga se moviera en el *vacío*, esta fuerza estable ocasionaría una aceleración estable en dirección de $\vec{F}$, y después de cierto tiempo la partícula con carga se desplazaría en esa dirección con gran rapidez. Pero una partícula con carga en movimiento en un *conductor* experimenta colisiones frecuentes con los iones masivos y casi estacionarios del material. En cada colisión, la dirección en que se mueve la partícula sufre un cambio aleatorio. El efecto neto del campo eléctrico $\vec{E}$ es que, además del movimiento al azar de las partículas con carga dentro del conductor, también hay un movimiento neto muy lento o *deriva* de las partículas con carga que se desplazan como grupo en dirección de la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ (figura 25.1). Este movimiento queda descrito en términos de la **velocidad de deriva** $\vec{v}_d$ de las partículas. Como resultado, existe una corriente neta en el conductor.

Si bien el movimiento aleatorio de los electrones tiene una rapidez media muy grande, alrededor de 10^6 m/s, la rapidez de deriva es muy baja, con frecuencia del orden de 10^{-4} m/s. Como los electrones se mueven con tanta lentitud, tal vez se pregunte por qué la luz se enciende de inmediato cuando se activa el interruptor de una linterna. La razón es que el campo eléctrico se establece en el alambre conductor con una rapidez cercana a la de la luz, y los electrones comienzan a desplazarse a todo lo largo del alambre casi al mismo tiempo. En realidad no es muy relevante el tiempo que toma a cualquier electrón individual trasladarse del interruptor a la bombilla. Una buena analogía es un grupo de soldados a la espera de la orden de un sargento para comenzar a marchar; la orden llega a oídos de los soldados con la rapidez del sonido, que es mucho mayor que aquella a que marchan, por lo que los soldados comienzan a marchar prácticamente al unísono.

25.1 Si no hay campo eléctrico en el interior de un conductor, un electrón se traslada al azar del punto P_1 al punto P_2 en el momento Δt. Si está presente un campo eléctrico $\vec{E}$, la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ impone una pequeña deriva (muy exagerada en la ilustración) que lleva al electrón al punto P'_2, a una distancia $v_d\Delta t$ de P_2 en dirección de la fuerza.



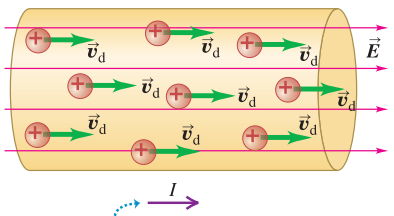
Dirección del flujo de corriente

La deriva de las cargas en movimiento a través de un conductor puede interpretarse en términos de trabajo y energía. El campo eléctrico $\vec{E}$ efectúa trabajo sobre las cargas en movimiento. La energía cinética resultante se transfiere al material del conductor por medio de colisiones con los iones, los cuales vibran en torno a sus posiciones de equilibrio en la estructura cristalina del conductor. Esta transferencia de energía incrementa la energía media de vibración de los iones y, por lo tanto, la temperatura del material. Así, gran parte del trabajo realizado por el campo eléctrico se dedica a calentar el conductor, *no* a hacer que las cargas se muevan cada vez más rápido. Este calentamiento a veces resulta útil, como en el caso de un tostador eléctrico, pero en muchas situaciones es tan sólo un subproducto inevitable del flujo de la corriente.

En distintos materiales que conducen corriente, las cargas de las partículas en movimiento son positivas o negativas. En los metales las cargas en movimiento siempre son electrones (negativos), mientras que en un gas ionizado (plasma) o una solución iónica,

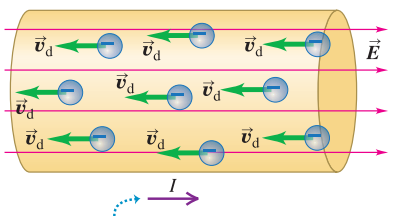
25.2 La misma corriente es producida por a) cargas positivas que se trasladan en dirección del campo eléctrico $\vec{E}$, o b) el mismo número de cargas negativas que se desplazan con la misma rapidez en la dirección opuesta a $\vec{E}$.

a)



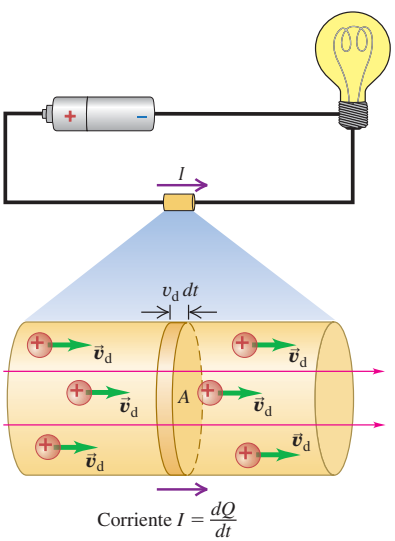
Una **corriente convencional** es tratada como un flujo de cargas positivas, sin importar si las cargas libres en el conductor son positivas, negativas o ambas.

b)



En un conductor metálico, las cargas en movimiento son electrones, pero la corriente aún apunta en la dirección en que fluirían las cargas positivas.

25.3 La corriente I es la tasa de transferencia de carga a través del área de la sección transversal A. En promedio, la componente aleatoria del movimiento de cada partícula con carga es cero, y la corriente va en la misma dirección de $\vec{E}$ sin que importe si las cargas en movimiento son positivas (como se ilustra) o negativas (véase la figura 25.2b).



las cargas en movimiento incluyen tanto electrones como iones con carga positiva. En un material semiconductor, como el germanio o el silicio, la conducción ocurre en parte por los electrones y en parte por el movimiento de las *vacantes*, también llamadas *huecos*, que son sitios donde se pierden electrones y actúan como cargas positivas.

La figura 25.2 presenta segmentos de dos materiales diferentes portadores de corriente. En la figura 25.2a, las cargas en movimiento son positivas, la fuerza eléctrica ocurre en la misma dirección que $\vec{E}$, y la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es de izquierda a derecha. En la figura 25.2b las cargas son negativas, la fuerza eléctrica es opuesta a $\vec{E}$, y la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es de derecha a izquierda. En ambos casos hay un flujo neto de carga positiva de izquierda a derecha, y las cargas positivas terminan a la derecha de las negativas. *Definimos* que la corriente, denotada por I, va en la dirección en la que hay un flujo de carga *positiva*. Por ello, las corrientes se describen como si consistieran por completo en un flujo de cargas positivas, aun en los casos en que se sabe que la corriente real se debe a electrones. Así, en las figuras 25.2a y 25.2b la corriente es hacia la derecha. Esta convención sobre la dirección del flujo de la corriente se llama **corriente convencional**. Aunque la dirección de la corriente convencional *no* es necesariamente la misma en que se desplazan en realidad las partículas con carga, veremos que el signo de las cargas en movimiento tiene poca importancia en el análisis de los circuitos eléctricos.

La figura 25.3 muestra un segmento de conductor por el que fluye una corriente. Se considera que las cargas en movimiento son *positivas*, por lo que se mueven en la misma dirección que la corriente. Definimos la corriente a través del área de sección transversal A como *la carga neta que fluye a través del área por unidad de tiempo*. De esta forma, si una carga neta dQ fluye a través de un área en el tiempo dt, la corriente I a través del área es

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{(definición de corriente)} \tag{25.1}$$

CUIDADO **La corriente no es un vector** Aunque nos referimos a la *dirección* de una corriente, la corriente, tal como está definida en la ecuación (25.1), *no* es una cantidad vectorial. En un conductor portador de corriente, la corriente siempre va a lo largo del conductor sin importar si es recto o curvo. Ningún vector podría describir el movimiento a lo largo de una trayectoria curva, y por eso la corriente no es un vector. Por lo general describiremos la dirección de la corriente ya sea con palabras (por ejemplo, "la corriente fluye por el circuito en el sentido horario") o eligiendo una corriente como positiva si fluye en un sentido a lo largo de un conductor, y negativa si fluye en sentido contrario.

La unidad del SI para la corriente es el **ampere**; un ampere se define como *un coulomb por segundo* (1 A = 1 C/s). Esta unidad recibe su nombre en honor del científico francés André Marie Ampère (1775-1836). Cuando se enciende una linterna común (de pilas tamaño D), la corriente en ella es aproximadamente de 0.5 a 1 A; la corriente en los cables del motor de arranque de un automóvil es de alrededor de 200 A. Las corrientes en los circuitos de radio y televisión por lo general se expresan en *miliamperes* (1 mA = 10^{-3} A) o *microamperes* (1 μA = 10^{-6} A), y las corrientes en los circuitos de computadoras son del orden de *nanoamperes* (1 nA = 10^{-9} A) o *picoamperes* (1 pA = 10^{-12} A).

Corriente, velocidad de deriva y densidad de corriente

La corriente se puede expresar en términos de la velocidad de deriva de las cargas en movimiento. Consideremos de nuevo la situación de la figura 25.3, que ilustra un conductor con área de sección transversal A y un campo eléctrico $\vec{E}$ dirigido de izquierda a derecha. Para comenzar, se supondrá que las cargas libres en el conductor son positivas; entonces, la velocidad de deriva tiene la misma dirección que el campo.

Suponga que hay n partículas con carga en movimiento por unidad de volumen. Llamaremos n a la **concentración** de partículas, cuya unidad correspondiente del SI es m^{-3}. Suponga que todas las partículas se mueven con la misma velocidad de deriva con magnitud v_d. En un intervalo de tiempo dt, cada partícula se mueve una distancia $v_d\,dt$. Las partículas que fluyen hacia fuera del extremo derecho del cilindro sombreado cuya longitud es $v_d\,dt$ durante dt son partículas que estuvieron dentro del cilindro al comienzo del intervalo dt. El volumen del cilindro es $Av_d\,dt$, y el número

de partículas dentro es $nAv_d\,dt$. Si cada partícula tiene una carga q, la carga dQ que fluye hacia fuera por el extremo del cilindro durante el tiempo dt es

$$dQ = q(nAv_d\,dt) = nqv_dA\,dt$$

y la corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = nqv_dA$$

La corriente *por unidad de área de la sección transversal* se denomina **densidad de corriente** J:

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d$$

Las unidades de la densidad de corriente son amperes por metro cuadrado (A/m^2).

Si las cargas en movimiento son negativas en vez de positivas, como en la figura 25.2b, la velocidad de deriva es opuesta a $\vec{E}$. Pero la *corriente* aún tiene la misma dirección que $\vec{E}$ en cada punto del conductor. Entonces, la corriente I y la densidad de corriente J no dependen del signo de la carga, por lo que en las expresiones anteriores para I y J, la carga q se sustituye por su valor absoluto $|q|$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_dA \quad \text{(expresión general para la corriente)} \qquad (25.2)$$

$$J = \frac{I}{A} = n|q|v_d \quad \text{(expresión general para la densidad de corriente)} \qquad (25.3)$$

La corriente en un conductor es el producto de la concentración de las partículas en movimiento con carga, la magnitud de la carga de cada una de esas partículas, la magnitud de la velocidad de deriva y el área de la sección transversal del conductor.

Se puede definir además una densidad de corriente *vectorial* $\vec{J}$ que incluye la dirección de la velocidad de deriva:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad \text{(densidad de corriente vectorial)} \qquad (25.4)$$

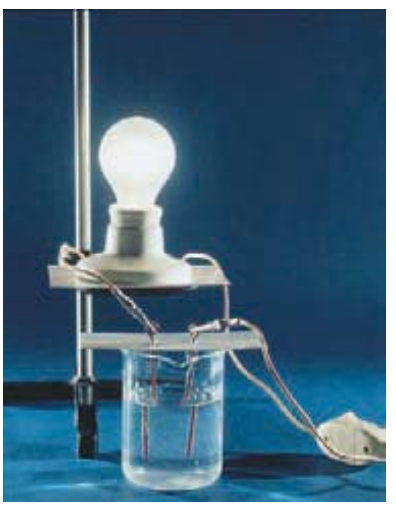
En la ecuación (25.4) *no* hay signos de valor absoluto. Si q es positiva, $\vec{v}_d$ tiene la misma dirección que $\vec{E}$; si q es negativa, $\vec{v}_d$ es opuesta a $\vec{E}$. En cualquier caso, $\vec{J}$ tiene la misma dirección que $\vec{E}$. La ecuación (25.3) da la *magnitud* J de la densidad de corriente vectorial $\vec{J}$.

CUIDADO **Densidad de corriente contra corriente** Observe que la densidad de corriente $\vec{J}$ es un vector, pero la corriente I no lo es. La diferencia está en que la densidad de corriente $\vec{J}$ describe cómo fluyen las cargas en cierto punto, y la dirección del vector indica la dirección del flujo en ese punto. En contraste, la corriente I describe la forma en que fluyen las cargas a través de un objeto extendido, como un alambre. Por ejemplo, I tiene el mismo valor en todos los puntos del circuito de la figura 25.3, pero $\vec{J}$ no: la densidad de corriente está dirigida hacia abajo en el lado izquierdo de la espira y hacia arriba en el lado derecho. La magnitud de $\vec{J}$ también puede variar alrededor del circuito. En la figura 25.3, la magnitud de la densidad de corriente $J = I/A$ es menor en la batería (que tiene un área de sección transversal mayor A) que en los alambres (los cuales tienen un área pequeña de sección transversal). ▮

En general, un conductor puede contener varias clases diferentes de partículas con carga en movimiento $q_1, q_2, \ldots$, concentraciones $n_1, n_2, \ldots$, y velocidades de deriva con magnitudes $v_{d1}, v_{d2}, \ldots$ Un ejemplo es el flujo de corriente en una solución iónica (figura 25.4). En una solución de cloruro de sodio, la corriente es transportada tanto por los iones positivos de sodio como por iones negativos de cloro; la corriente total I se encuentra sumando las corrientes debidas a cada clase de partícula con carga mediante la ecuación (25.2). Asimismo, el total de densidad de corriente vectorial $\vec{J}$ se obtiene mediante la ecuación (25.4) para cada tipo de partícula con carga y sumando los resultados.

En la sección 25.4 se verá que es posible tener una corriente *estacionaria* (es decir, constante en el tiempo) sólo si el material conductor forma una espira cerrada, llamada

25.4 Parte del circuito eléctrico que incluye esta bombilla eléctrica pasa a través de un vaso de precipitados que contiene una solución de cloruro de sodio. La corriente en la solución es transportada tanto por cargas positivas (iones Na^+) como por cargas negativas (iones Cl^-).



circuito completo. En una situación estacionaria, la carga total en cada segmento del conductor es constante. Por lo tanto, la tasa de flujo de carga *hacia fuera* de un extremo de un segmento en cualquier instante es igual a la tasa de flujo de carga *hacia dentro* en el otro extremo del segmento, y *la corriente es la misma en todas las secciones transversales del circuito.* Más adelante en este capítulo, cuando analicemos circuitos eléctricos recurriremos a esta observación.

En muchos circuitos simples, como los de linternas de mano o los taladros eléctricos inalámbricos, la dirección de la corriente siempre es la misma; a esto se le llama *corriente directa*. Pero los aparatos domésticos, tales como tostadores, refrigeradores y televisores utilizan *corriente alterna*, lo que significa que la corriente cambia continuamente de dirección. En este capítulo sólo consideraremos la corriente directa. La corriente alterna tiene muchas características especiales que ameritan un estudio detallado, las cuales analizaremos en el capítulo 31.

Ejemplo 25.1 Densidad de corriente y velocidad de deriva en un alambre

Un alambre de cobre del número 18 (el calibre que por lo general se utiliza en los cables para lámparas), tiene un diámetro nominal de 1.02 mm. Conduce una corriente constante de 1.67 A para alimentar una bombilla de 200 watts. La densidad de electrones libres es de 8.5×10^{28} electrones por metro cúbico. Determine las magnitudes de *a*) la densidad de corriente y *b*) la velocidad de deriva.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se apoya en las relaciones entre corriente, densidad de corriente y velocidad de deriva.

PLANTEAR: Se conoce la corriente y las dimensiones del alambre, por lo que se emplea la ecuación (25.3) para calcular la magnitud J de la densidad de corriente. Después se emplea la ecuación (25.3) de nuevo para obtener la velocidad de deriva v_d a partir de J y la concentración de electrones.

EJECUTAR: *a*) El área de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1.02 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}{4} = 8.17 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$$

La magnitud de la densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1.67\ \text{A}}{8.17 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 2.04 \times 10^6\ \text{A/m}^2$$

b) Al despejar la magnitud de la velocidad de deriva v_d en la ecuación (25.3) , se obtiene

$$v_d = \frac{J}{n|q|} = \frac{2.04 \times 10^6\ \text{A/m}^2}{(8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})|-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}|} = 1.5 \times 10^{-4}\ \text{m/s} = 0.15\ \text{mm/s}$$

EVALUAR: A esta rapidez, un electrón requeriría 6700 s (alrededor de 1 hora con 50 minutos) para recorrer un alambre con longitud de 1 m. La rapidez del movimiento aleatorio de los electrones es del orden de 10^6 m/s, por lo que en este ejemplo la velocidad de deriva es cerca de 10^{10} veces más lenta que la velocidad del movimiento aleatorio. ¡Imagine a los electrones rebotando en forma frenética, por todas partes, con una deriva sumamente lenta!

Evalúe su comprensión de la sección 25.1 Suponga que se remplaza el alambre del ejemplo 25.1 por otro de cobre de calibre 12, el cual tiene el doble de diámetro que uno de calibre 18. Si la corriente es la misma, ¿qué efecto tendría esto en la magnitud de la velocidad de deriva v_d? i) Ninguno, v_d no cambiaría; ii) el valor de v_d se duplicaría; iii) v_d sería cuatro veces mayor; iv) v_d tendría un valor igual a la mitad; v) v_d sería la cuarta parte.

25.2 Resistividad

La densidad de corriente $\vec{J}$ en un conductor depende del campo eléctrico $\vec{E}$ y de las propiedades del material. En general, esta dependencia es muy compleja. Pero para ciertos materiales, en especial metálicos, a una temperatura dada, $\vec{E}$ es casi *directamente proporcional* a $\vec{E}$, y la razón de las magnitudes de E y J es constante. Esta relación, llamada ley de Ohm, fue descubierta en 1826 por el físico alemán Georg Simon Ohm (1787-1854). En realidad, la palabra "ley" debería escribirse entre comillas, ya que la **ley de Ohm** —al igual que la ecuación de los gases ideales y la ley de Hooke— es un *modelo idealizado* que describe muy bien el comportamiento de ciertos materiales, pero no es una descripción general de *toda* la materia. En el siguiente análisis supondremos que es válida la ley de Ohm, aun cuando existen muchos casos en que no lo es. La situación es comparable a nuestra representación del comportamiento de las fuerzas de fricción estática y cinética, las cuales fueron tratadas como si fueran directamente proporcionales a la fuerza normal, aunque sabíamos que en el mejor de los casos ésta era una descripción aproximada.

Tabla 25.1 Resistividades a temperatura ambiente (20 °C)

Sustancia		$\rho\,(\Omega\cdot\mathrm{m})$	Sustancia	$\rho\,(\Omega\cdot\mathrm{m})$
Conductores			**Semiconductores**	
Metales	Plata	1.47×10^{-8}	Carbono puro (grafito)	3.5×10^{-5}
	Cobre	1.72×10^{-8}	Germanio puro	0.60
	Oro	2.44×10^{-8}	Silicio puro	2300
	Aluminio	2.75×10^{-8}	**Aislantes**	
	Tungsteno	5.25×10^{-8}	Ámbar	5×10^{14}
	Acero	20×10^{-8}	Vidrio	10^{10}–10^{14}
	Plomo	22×10^{-8}	Lucita	$>10^{13}$
	Mercurio	95×10^{-8}	Mica	10^{11}–10^{15}
Aleaciones	Manganina (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni)	44×10^{-8}	Cuarzo (fundido)	75×10^{16}
	Constantán (60% Cu, 40% Ni)	49×10^{-8}	Azufre	10^{15}
	Nicromel	100×10^{-8}	Teflón	$>10^{13}$
			Madera	10^{8}–10^{11}

La **resistividad** ρ de un material se define como la razón de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente:

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad \text{(definición de resistividad)} \tag{25.5}$$

Cuanto mayor sea la resistividad, tanto mayor será el campo necesario para causar una densidad de corriente dada, o tanto menor la densidad de corriente ocasionada por un campo dado. De la ecuación (25.5) se desprende que las unidades de ρ son $(\mathrm{V/m})/(\mathrm{A/m^2}) = \mathrm{V\cdot m/A}$. Como se verá en la siguiente sección, 1 V/A se llama un *ohm* (1 Ω; se usa la letra griega Ω, omega, que es una aliteración de "ohm"). Por consiguiente, las unidades del SI para ρ son $\Omega\cdot$ m (ohm-metros). La tabla 25.1 lista algunos valores representativos de resistividad. Un conductor perfecto tendría una resistividad igual a cero; y un aislante perfecto tendría resistividad infinita. Los metales y las aleaciones tienen las menores resistividades y son los mejores conductores. Las resistividades de los aislantes son mayores que las de los metales en un factor enorme, del orden de 10^{22}.

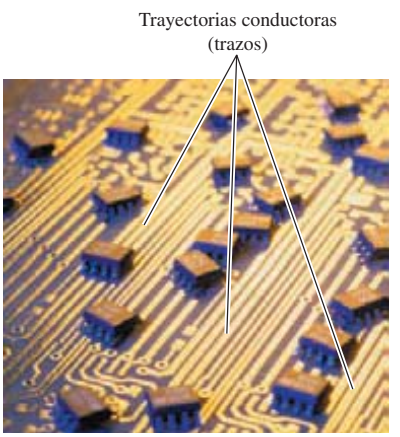
El recíproco de la resistividad es la **conductividad**. Sus unidades son $(\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$. Los buenos conductores de la electricidad tienen una conductividad mayor que la de los aislantes. La conductividad es el análogo eléctrico directo de la conductividad térmica. Si se compara la tabla 25.1 con la 17.5 (conductividades térmicas), se observa que los buenos conductores eléctricos, como los metales, por lo general son buenos conductores del calor. Los malos conductores de la electricidad, como la cerámica y los materiales plásticos, también son malos conductores térmicos. En un metal los electrones libres que transportan la carga en la conducción eléctrica también son el mecanismo principal para la conducción del calor, por lo que es de esperar que haya una correlación entre la conductividad eléctrica y la térmica. Debido a la enorme diferencia en conductividad entre los conductores eléctricos y los aislantes, es fácil confinar las corrientes eléctricas a trayectorias o circuitos bien definidos (figura 25.5). La variación en la conductividad *térmica* es mucho menor, sólo alrededor de un factor de 10^3, y por lo general es imposible confinar flujos de calor hasta ese grado.

Los *semiconductores* tienen resistividades intermedias entre las de los metales y las de los aislantes. Estos materiales son importantes en virtud de la forma en que sus resistividades se ven afectadas por la temperatura y por pequeñas cantidades de impurezas.

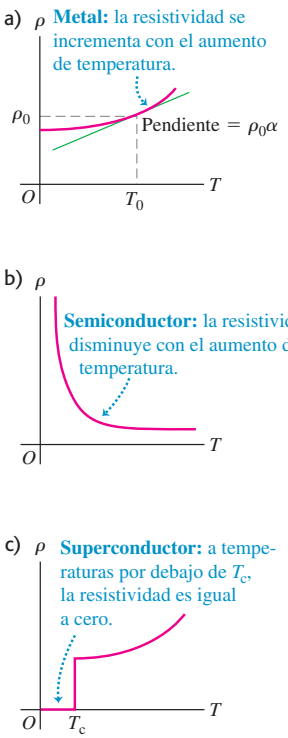
Un material que obedece razonablemente bien la ley de Ohm se llama conductor *óhmico* o conductor *lineal*. Para esos materiales, a una temperatura dada, ρ es una constante que no depende del valor de E. Muchos materiales muestran un comportamiento que se aparta mucho de la ley de Ohm, por lo que se denominan *no óhmicos* o *no lineales*. En estos materiales, J depende de E de manera más complicada.

Las analogías con el flujo de fluidos son de gran ayuda para desarrollar la intuición con respecto a la corriente y los circuitos eléctricos. Por ejemplo, en la fabricación de vino o jarabe de maple, en ocasiones se filtra el producto para retirar los sedimentos. Una bomba fuerza al fluido sometiéndolo a presión para que pase a través del filtro; si la tasa de flujo (análoga a J) es proporcional a la diferencia de presión entre los lados corriente arriba y corriente abajo (análoga a E), el comportamiento es análogo al que describe la ley de Ohm.

25.5 Los "alambres" de cobre, o trazos, en esta tarjeta de circuitos están impresos directamente sobre la superficie de la tarjeta aislante de color oscuro. Aun cuando los trazos se encuentran muy próximos entre sí (a un milímetro de distancia), la tarjeta tiene una resistividad tan grande (y baja conductividad) en comparación con el cobre, que ninguna corriente puede fluir entre los trazos.



25.6 Variación de la resistividad ρ con la temperatura absoluta T para a) un metal normal, b) un semiconductor y c) un superconductor. En a), la aproximación lineal a ρ como función de T se muestra con línea color verde; la aproximación coincide exactamente en $T = T_0$, donde $\rho = \rho_0$.



Resistividad y temperatura

La resistividad de un conductor *metálico* casi siempre se incrementa al aumentar la temperatura, como se ilustra en la figura 25.6a. A medida que la temperatura se incrementa, los iones del conductor vibran con mayor amplitud, lo que hace más probable que un electrón en movimiento colisione con un ion, como se ilustra en la figura 25.1; esto dificulta la deriva de los electrones a través del conductor y con ello reduce la corriente. En un pequeño intervalo de temperatura (hasta 100 °C, aproximadamente), la resistividad de un metal queda representada en forma adecuada por la ecuación:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad \text{(dependencia de la resistividad con respecto a la temperatura)} \qquad (25.6)$$

donde ρ_0 es la resistividad de una temperatura de referencia T_0 (a menudo 0 °C o 20 °C) y $\rho(T)$ es la resistividad a la temperatura T, que puede ser mayor o menor que T_0. El factor α se llama **coeficiente de temperatura de la resistividad**, y en la tabla 25.2 se presentan algunos de sus valores representativos. La resistividad de la aleación llamada manganina es prácticamente independiente de la temperatura.

Tabla 25.2 Coeficientes de temperatura de la resistividad (valores aproximados cerca de la temperatura ambiente)

Material	α [(°C)$^{-1}$]	Material	α [(°C)$^{-1}$]
Aluminio	0.0039	Plomo	0.0043
Latón	0.0020	Manganina	0.00000
Carbono (grafito)	−0.0005	Mercurio	0.00088
Constantán	0.00001	Nicromel	0.0004
Cobre	0.00393	Plata	0.0038
Hierro	0.0050	Tungsteno	0.0045

La resistividad del grafito (un no metal) *disminuye* con el aumento de la temperatura, ya que a temperaturas más elevadas, más electrones "se desprenden" de los átomos y se vuelven móviles; de ahí que el coeficiente de temperatura (o térmico) de la resistividad del grafito sea negativo. Este mismo comportamiento lo presentan los semiconductores (figura 25.6b). Por consiguiente, medir la resistividad de un pequeño cristal semiconductor significa medir la temperatura con mucha exactitud; éste es el principio de un tipo de termómetro llamado *termistor*.

Algunos materiales, que incluyen algunas aleaciones y óxidos metálicos, presentan un fenómeno llamado *superconductividad*. Al principio, conforme la temperatura desciende, la resistividad disminuye de manera uniforme, como la de cualquier metal. Pero después de cierta temperatura crítica, T_c, ocurre una fase de transición, y la resistividad cae abruptamente hasta cero, como se ilustra en la figura 25.6c. Una vez que se ha establecido una corriente en un superconductor en forma de anillo, continúa en forma indefinida sin la presencia de ningún campo que la impulse.

La superconductividad fue descubierta en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926). Él descubrió que a temperaturas muy bajas, inferiores a 4.2 K, la resistividad del mercurio disminuía de manera repentina hasta cero. Durante los 75 años siguientes, la T_c más alta que se logró fue de 20 K. Esto quería decir que la superconductividad se conseguía sólo cuando el material se enfriaba por medio del costoso helio líquido, con punto de ebullición de 4.2 K, o hidrógeno líquido explosivo, cuyo punto de ebullición es de 20.3 K. Sin embargo, en 1986, Karl Müller y Johannes Bednorz descubrieron un óxido de bario, lantano y cobre, con T_c cercana a 40 K, con lo que comenzó la carrera por desarrollar materiales superconductores de "alta temperatura".

En 1987 se descubrió un óxido complejo de itrio, cobre y bario con un valor de T_c muy por encima de la temperatura de ebullición de 77 K del nitrógeno líquido, un refrigerante de bajo costo y seguro. La marca actual (en 2006) para la T_c a presión atmosférica es de 138 K, y los materiales superconductores a temperatura ambiente pueden llegar a ser una realidad. Las implicaciones de estos descubrimientos para los sistemas de distribución de energía, diseño de computadoras y sistemas de transporte son enormes. Mientras tanto, en aceleradores de partículas y ciertos trenes experimentales de levitación magnética se utilizan electroimanes superconductores enfriados con helio líquido. Los superconductores tienen otras propiedades exóticas que requieren la comprensión del magnetismo, un tema que estudiaremos en el capítulo 29.

Evalúe su comprensión de la sección 25.2 Se mantiene un campo eléctrico constante dentro de un elemento semiconductor al mismo tiempo que se reduce la temperatura de éste. ¿Qué sucede con la densidad de corriente en el semiconductor? i) Aumenta; ii) disminuye; iii) permanece sin cambio.

25.3 Resistencia

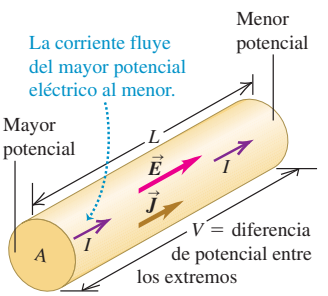
Para un conductor con resistividad ρ, con densidad de corriente $\vec{J}$ en un punto, el campo eléctrico $\vec{E}$ está dado por la ecuación (25.5), que se escribe como

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \tag{25.7}$$

Cuando se cumple la ley de Ohm, ρ es constante e independiente de la magnitud del campo eléctrico, por lo que $\vec{E}$ es directamente proporcional a $\vec{J}$. Sin embargo, es frecuente que estemos más interesados en el total de corriente en un conductor que en $\vec{J}$, y también que tengamos más interés en la diferencia de potencial entre las terminales del conductor que en $\vec{E}$. Esto se debe en buena parte a que la corriente y la diferencia de potencial son mucho más fáciles de medir que $\vec{J}$ y $\vec{E}$.

Suponga que nuestro conductor es un alambre con sección transversal uniforme de área A y longitud L, como se ilustra en la figura 25.7. Sea V la diferencia de potencial entre los extremos de mayor y menor potencial del conductor, de manera que V es positiva. La *dirección* de la corriente siempre va del extremo de mayor potencial al de menor potencial. Esto se debe a que en un conductor la corriente fluye en dirección de $\vec{E}$, sin importar el signo de las cargas en movimiento (figura 25.2), y porque $\vec{E}$ apunta en la dirección del potencial eléctrico *decreciente* (véase la sección 23.2). A medida que la corriente fluye a través de la diferencia de potencial, la energía potencial eléctrica se pierde; esta energía se transfiere a los iones del material conductor durante las colisiones.

25.7 Conductor con sección transversal uniforme. La densidad de corriente es uniforme sobre cualquier sección transversal, y el campo eléctrico es constante en toda la longitud.



También se puede relacionar el *valor* de la corriente I con la diferencia de potencial entre los extremos del conductor. Si las magnitudes de la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ son uniformes a través del conductor, la corriente total I está dada por $I = JA$, y la diferencia de potencial V entre los extremos es $V = EL$. Cuando se despejan J y E, respectivamente, en estas ecuaciones y se sustituyen los resultados en la ecuación (25.7), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \quad \text{o bien,} \quad V = \frac{\rho L}{A} I \tag{25.8}$$

Esto demuestra que cuando ρ es constante, la corriente total I es proporcional a la diferencia de potencial V.

La razón de V a I para un conductor particular se llama **resistencia**, R:

$$R = \frac{V}{I} \tag{25.9}$$

Al comparar esta definición de R con la ecuación (25.8), se observa que la resistencia R de un conductor particular se relaciona con la resistividad ρ del material mediante la ecuación

$$R = \frac{\rho L}{A} \qquad \text{(relación entre la resistencia y la resistividad)} \tag{25.10}$$

Si ρ es constante, como en el caso de los materiales óhmicos, entonces también lo es R.

La ecuación

$$V = IR \qquad \text{(relación entre voltaje, corriente y resistencia)} \tag{25.11}$$

suele identificarse con la *ley de Ohm*, pero es importante entender que el contenido real de la ley de Ohm es la proporcionalidad directa (para ciertos materiales) de V con respecto a I, o de J con respecto a E. La ecuación (25.9) o la (25.11) *definen* la resistencia R para *cualquier* conductor, ya sea que cumpla o no la ley de Ohm, pero sólo cuando R es constante es correcto llamar a esta relación *ley de Ohm*.

Interpretación de la resistencia

La ecuación (25.10) muestra que la resistencia de un alambre u otro conductor de sección transversal uniforme es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área de su sección transversal. También es proporcional a la resistividad del material del que está hecho el conductor.

Una vez más resulta útil la analogía del líquido que fluye. En forma análoga a lo que describe la ecuación (25.10), una manguera angosta ofrece más resistencia al flujo que una ancha, y una manguera larga tiene más resistencia que una corta (figura 25.8). Se puede incrementar la resistencia al flujo si se rellena la manguera con algodón o arena; esto equivale a aumentar la resistividad. La tasa de flujo del agua es aproximadamente proporcional a la diferencia de presión entre los extremos de la manguera. La tasa de flujo es análoga a la corriente, y la diferencia de presión es análoga a la diferencia de potencial ("voltaje"). Sin embargo, no hay que llevar esta analogía demasiado lejos; la tasa de flujo del agua en un tubo por lo general *no* es proporcional al área de su sección transversal (véase la sección 14.6).

25.8 Una manguera larga contra incendios ofrece mucha resistencia al flujo del agua. Para hacer que el agua fluya rápido a través de la manguera, el extremo de la toma debe estar a una presión mucho más alta que el extremo por donde sale el líquido. En forma análoga, debe haber una diferencia de potencial grande entre los extremos de un conductor largo para que pueda pasar por él una corriente eléctrica sustancial.

La unidad del SI para la resistencia es el **ohm**, igual a un volt por ampere (1 Ω = 1 V/A). También son de uso común el *kiloohm* (1 kΩ = 10^3 Ω) y el *megaohm* (1 MΩ = 10^6 Ω). Un alambre de cobre de calibre 12 y 100 m de longitud —que es el tamaño usual en instalaciones domésticas—, a temperatura ambiente tiene una resistencia de 0.5 Ω aproximadamente. Una bombilla de 100 W y 120 V tiene una resistencia (a su temperatura de operación) de 140 Ω. Si la misma corriente I fluye tanto por el alambre de cobre como por la bombilla, la diferencia de potencial $V = IR$ es mucho mayor a través de la bombilla, y se pierde mucha más energía potencial por carga en esta última. La energía que se pierde se convierte en luz y calor en el filamento de la bombilla. Usted no desearía que las instalaciones de su casa se calentaran al rojo vivo, por lo que su resistencia se mantiene baja empleando conductores de baja resistividad y una gran área de sección transversal.

Como la resistividad de un material varía con la temperatura, la resistencia de un conductor específico también cambia con la temperatura. Para intervalos de temperatura que no son demasiado elevados, esta variación sigue aproximadamente una relación lineal, análoga a la ecuación (25.6):

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{25.12}$$

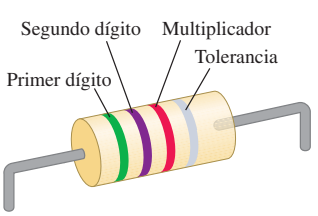
En esta ecuación, $R(T)$ es la resistencia a la temperatura T, y R_0 es la resistencia a la temperatura T_0, que con frecuencia se toma como 0 °C o 20 °C. El *coeficiente de temperatura de la resistencia* α es la misma constante que aparece en la ecuación (25.6) si las dimensiones L y A en la ecuación (25.10) no cambian apreciablemente con la temperatura; de hecho, éste es el caso para la mayoría de materiales conductores (véase el problema 25.67). Dentro de los límites de validez de la ecuación (25.12), el *cambio* en la resistencia que resulta de un cambio de temperatura $T - T_0$ está dado por $R_0\alpha(T - T_0)$.

Tabla 25.3 Códigos de color para los resistores

Color	Valor como dígito	Valor como multiplicador
Negro	0	1
Café	1	10
Rojo	2	10^2
Naranja	3	10^3
Amarillo	4	10^4
Verde	5	10^5
Azul	6	10^6
Violeta	7	10^7
Gris	8	10^8
Blanco	9	10^9

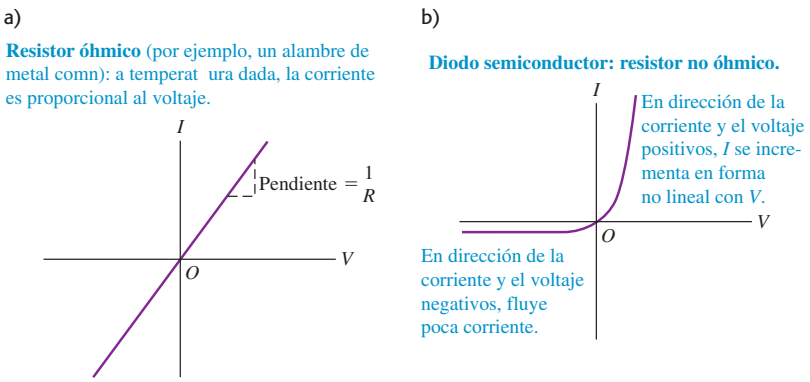
El dispositivo de un circuito hecho para tener un valor específico de resistencia entre sus extremos se llama **resistor**. Se pueden adquirir fácilmente en el comercio resistores desde 0.01 hasta 10^7 Ω. Es frecuente que los resistores individuales que se usan en los circuitos electrónicos sean cilíndricos, midan pocos milímetros de diámetro y de longitud, y tengan alambres que sobresalen de sus extremos. La resistencia se indica con un código estándar que usa tres o cuatro bandas de colores cerca de un extremo (figura 25.9), de acuerdo con el esquema que se presenta en la tabla 25.3. Las primeras dos bandas (comenzando por la banda más cercana a un extremo) son dígitos, y la tercera es un multiplicador de potencia de 10, como muestra la figura 25.9. Por ejemplo, el verde-violeta-rojo significa 57 × 10^2 Ω, o 5.7 kΩ. La cuarta banda, si está presente, indica la precisión (tolerancia) del valor; la ausencia de banda significa ±20%, una banda plateada quiere decir ±10%, y una dorada indica ±5%. Otra característica importante de un resistor es la *energía eléctrica* máxima que es capaz de disipar sin sufrir daños. Volveremos a este punto en la sección 25.5.

25.9 Este resistor tiene una resistencia de 5.7 kΩ, y precisión (tolerancia) de ±10%.



Para un resistor que obedece la ley de Ohm, la gráfica de corriente como función de la diferencia de potencial (voltaje) es una línea recta (figura 25.10a). La pendiente de la recta es $1/R$. Si el signo de la diferencia de potencial cambia, también cambia el

25.10 Relaciones corriente-voltaje para dos dispositivos. Sólo para un resistor que obedezca la ley de Ohm como en *a*), la corriente I es proporcional al voltaje V.



signo de la corriente producida; en la figura 25.7 esto corresponde a intercambiar los extremos de mayor y menor potencial del conductor, por lo que el campo eléctrico, la densidad de corriente y la corriente invierten su dirección. En dispositivos que no obedecen la ley de Ohm, la relación entre el voltaje y la corriente tal vez no esté en proporción directa, y quizá sea diferente para las dos direcciones de la corriente. La figura 25.10b muestra el comportamiento de un *diodo* semiconductor, un dispositivo que se usa para convertir corriente alterna en directa, y que realiza muchas funciones lógicas en los circuitos de cómputo. Para potenciales V positivos del ánodo (una de las dos terminales del diodo) con respecto del cátodo (la otra terminal), I aumenta en forma exponencial con el incremento de V; para potenciales negativos, la corriente es extremadamente pequeña. Así, una diferencia de potencial positiva V ocasiona que una corriente fluya en la dirección positiva, pero una diferencia de potencial negativa origina poca o ninguna corriente. De este modo, un diodo actúa en los circuitos como una válvula de un solo sentido.

Ejemplo 25.2 Campo eléctrico, diferencia de potencial y resistencia en un alambre

El alambre de cobre calibre 18 del ejemplo 25.1 (sección 25.1) tiene un diámetro de 1.02 mm y sección transversal de $8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$. Transporta una corriente de 1.67 A. Calcule *a*) la magnitud del campo eléctrico en el alambre, *b*) la diferencia de potencial entre dos puntos del alambre separados por una distancia de 50.0 m; *c*) la resistencia de un trozo de 50.0 m de longitud de ese alambre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se dan los valores de la superficie de la sección transversal A y la corriente I. Las variables que se buscan son la magnitud del campo eléctrico E, la diferencia de potencial V y la resistencia R.

PLANTEAR: La magnitud de la densidad de corriente es $J = I/A$, y la resistividad ρ se da en la tabla 25.1. Con la ecuación (25.5) se calcula la magnitud del campo eléctrico, $E = \rho J$. Una vez calculado E, la diferencia de potencial es tan sólo el producto de E por la longitud del alambre. La resistencia se calcula mediante la ecuación (25.11).

EJECUTAR: *a*) De la tabla 25.1, la resistividad del cobre es $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Por lo tanto, con la ecuación (25.5),

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.67\ \text{A})}{8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 0.0350\ \text{V/m}$$

b) La diferencia de potencial está dada por

$$V = EL = (0.0350\ \text{V/m})(50.0\ \text{m}) = 1.75\ \text{V}$$

c) De la ecuación (25.11), la resistencia de un trozo del alambre de 50.0 m de longitud es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.75\ \text{V}}{1.67\ \text{A}} = 1.05\ \Omega$$

EVALUAR: Para comprobar el resultado del inciso *c*), se calcula la resistencia por medio de la ecuación (25.10):

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(50.0\ \text{m})}{8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 1.05\ \Omega$$

Conviene hacer hincapié en que la resistencia del alambre se *define* como la razón entre el voltaje y la corriente. Si el alambre estuviera hecho de material no óhmico, entonces R sería diferente para distintos valores de V, pero siempre está dada por $R = V/I$. La resistencia también está dada por $R = \rho L/A$; si el material es no óhmico, ρ no es constante, pero depende de E (o, en forma equivalente, de $V = EL$).

Ejemplo 25.3 Dependencia de la resistencia con respecto a la temperatura

Suponga que la resistencia del alambre del ejemplo 25.2 es 1.05 Ω a 20 °C de temperatura. Calcule la resistencia a 0 °C y a 100 °C.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo tiene que ver con la manera en que la resistencia (la variable buscada) depende de la temperatura. Como se aprecia en la tabla 25.2, esa dependencia difiere para distintas sustancias.

PLANTEAR: Las variables que se buscan son los valores de la resistencia R del alambre a dos temperaturas, $T = 0$ °C y $T = 100$ °C. Para encontrar estos valores se emplea la ecuación (25.12). Observe que se da la resistencia $R_0 = 1.05\ \Omega$ a la temperatura de referencia $T_0 = 20$ °C, y del ejemplo 25.2 se sabe que el alambre es de cobre.

EJECUTAR: De acuerdo con la tabla 25.2, el coeficiente de temperatura de la resistividad del cobre es $\alpha = 0.00393\ (\text{C}°)^{-1}$. De la ecuación (25.12), la resistencia a $T = 0$ °C es

$$\begin{aligned} R &= R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \\ &= (1.05\ \Omega)\{1 + [0.00393\ (\text{C}°)^{-1}][0\ °\text{C} - 20\ °\text{C}]\} \\ &= 0.97\ \Omega \end{aligned}$$

A $T = 100$ °C,

$$\begin{aligned} R &= (1.05\ \Omega)\{1 + [0.00393\ (\text{C}°)^{-1}][100\ °\text{C} - 20\ °\text{C}]\} \\ &= 1.38\ \Omega \end{aligned}$$

EVALUAR: La resistencia a 100 °C es mayor que a 0 °C en un factor de (1.38 Ω)/(0.97 Ω) = 1.42. En otras palabras, al aumentar la temperatura del alambre común de cobre de 0 °C a 100 °C, su resistencia aumenta en un 42%. De la ecuación (25.11), $V = IR$, esto significa que se requiere un 42% más de voltaje para producir la misma corriente I a 100 °C que a 0 °C. Éste es un efecto sustancial que debe tenerse en cuenta al diseñar circuitos eléctricos que deban operar en un intervalo amplio de temperaturas.

Ejemplo 25.4 Cálculo de la resistencia

El cilindro hueco que se ilustra en la figura 25.11 tiene una longitud L y radios interior y exterior a y b. Está hecho de un material cuya resistividad es ρ. Se establece una diferencia de potencial entre las superficies interior y exterior del cilindro (cada una de las cuales es una superficie equipotencial), de manera que la corriente fluye en forma radial a través del cilindro. ¿Cuál es la resistencia a este flujo radial de corriente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 25.11 indica que la corriente fluye de manera radial del interior del conductor hacia el exterior, *no* a lo largo del conductor, como se ilustra en la figura 25.7. De ahí que se deban usar los conceptos de esta sección para obtener una fórmula nueva para la resistencia (la variable buscada) que sea apropiada para un flujo radial de corriente.

PLANTEAR: No es posible utilizar directamente la ecuación (25.10) porque la sección transversal por la que viaja la carga *no* es constante, sino que varía de $2\pi aL$ en la superficie interna, a $2\pi bL$ en la externa. En vez de ello, calculamos la resistencia al flujo de corriente radial a través de una coraza (capa) cilíndrica delgada de radio interior r y espesor dr. Después combinamos las resistencias para todas esas corazas entre el radio interior y el exterior del cilindro.

EJECUTAR: El área A para la coraza es $2\pi rL$, el área superficial que encuentra la corriente cuando fluye al exterior. La longitud de la trayectoria de la corriente a través de la coraza es dr. La resistencia dR de esta coraza, entre las superficies interna y externa, es la de un conductor con longitud dr y área $2\pi rL$:

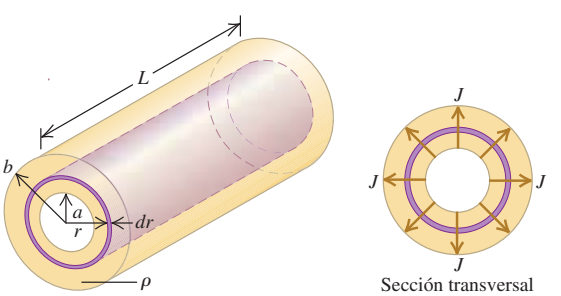
$$dR = \frac{\rho\, dr}{2\pi rL}$$

La corriente tiene que pasar sucesivamente a través de todas esas corazas entre los radios a y b. De la ecuación (25.11), la diferencia de potencial a través de una coraza es $dV = I\,dR$, y la diferencia de potencial total entre las superficies interna y externa es la suma de las diferencias de potencial para todas las corazas. La corriente total es la misma a través de cada coraza, por lo que la resistencia total es la suma de las resistencias de todas las corazas. Si el área $2\pi rL$ fuera constante, bastaría con integrar dr de $r = a$ a $r = b$ para obtener la longitud total de la trayectoria de la corriente. Pero el área se incrementa conforme la corriente pasa a través de corazas de mayor radio, por lo que tenemos que integrar la expresión anterior para dR. Entonces, la resistencia total está dada por

$$R = \int dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\frac{b}{a}$$

EVALUAR: La geometría del conductor que se ilustra en la figura 25.11 desempeña un papel importante en el sistema nervioso del cuerpo humano. Cada neurona, o célula nerviosa, tiene una extensión larga llamada fibra nerviosa o *axón*. Un axón tiene una membrana cilíndrica cuya forma se asemeja mucho a la de un resistor como el de la figura 25.11, con un fluido conductor en el interior de la membrana y otro fuera de ésta. Lo común es que todo el fluido interior esté al mismo potencial, por lo que no hay corriente que tienda a fluir a lo largo del axón. Sin embargo, si un axón se ve estimulado en cierto punto de su longitud, iones con carga fluyen radialmente en ese punto a través de la membrana cilíndrica, como se aprecia en la figura 25.11. Este flujo causa una diferencia de potencial entre ese punto y otros puntos a lo largo del axón, lo que permite que las señales neurológicas fluyan en esa dirección.

25.11 Cálculo de la resistencia para un flujo de corriente radial.



Evalúe su comprensión de la sección 25.3 Suponga que se incrementa el voltaje a través del alambre de cobre de los ejemplos 25.2 y 25.3. El voltaje incrementado hace que fluya más corriente, lo que provoca que suba la temperatura del conductor. (Esto mismo ocurre en las bobinas de un horno o tostador eléctrico cuando se les aplica un voltaje. Esto se estudiará con más profundidad en la sección 25.5.) Si se duplica el voltaje a través del alambre, aumenta la corriente en éste. ¿En qué factor se incrementa? i) 2; ii) más de 2; iii) menos de 2.

25.4 Fuerza electromotriz y circuitos

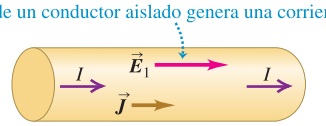
Para que un conductor tenga una corriente constante, debe ser parte de una trayectoria que forme una espira cerrada o **circuito completo**. A continuación se explica por qué. Si se establece un campo eléctrico $\vec{E}_1$ dentro de un conductor aislado con resistividad ρ que *no* es parte de un circuito completo, comienza a fluir una corriente cuya densidad es $\vec{J} = \vec{E}_1/\rho$ (figura 25.12a). Como resultado, en un extremo del conductor se acumula con rapidez una carga neta positiva, y en el otro extremo se acumula una carga neta negativa (figura 25.12b). Estas cargas producen un campo eléctrico $\vec{E}_2$ en la dirección opuesta a $\vec{E}_1$, lo que ocasiona que el campo eléctrico total y, por lo tanto, la corriente disminuyan. En una pequeña fracción de segundo, se acumula suficiente carga en los extremos del conductor, de manera que el campo eléctrico total es $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \mathbf{0}$ dentro del conductor. Luego, también $\vec{J} = \mathbf{0}$, y la corriente cesa por completo (figura 25.12c). Por lo tanto, no puede haber un movimiento constante de carga en un circuito *incompleto*.

Para ver cómo mantener una corriente constante en un circuito *completo*, recordemos un hecho básico sobre la energía potencial eléctrica: si una carga q recorre un circuito completo y regresa a su punto de partida, la energía potencial debe ser la misma al final y al principio del recorrido. Como se dijo en la sección 25.3, siempre hay una *disminución* de la energía potencial cuando se desplazan cargas a través de un material conductor ordinario con resistencia. Así que debe haber una parte en el circuito en la que la energía potencial se *incremente*.

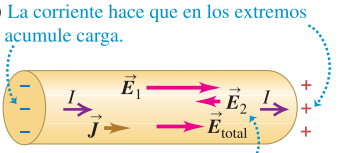
El problema es análogo a una fuente de agua ornamental que recicla el líquido. El agua cae desde las aberturas en la parte superior, forma cascadas en las terrazas y escurre (se desplaza en la dirección en que disminuye la energía potencial gravitacional) para acumularse en la pileta inferior. Después, una bomba la lleva de nuevo a la parte superior (incrementando la energía potencial) y el ciclo se repite. Sin la bomba, el agua caería a la base y se quedaría ahí.

25.12 Si se produce un campo eléctrico dentro de un conductor que *no* forma parte de un circuito completo, la corriente fluye sólo durante un breve tiempo.

a) Un campo eléctrico $\vec{E}_1$ producido dentro de un conductor aislado genera una corriente.

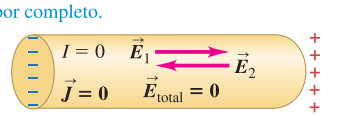


b) La corriente hace que en los extremos se acumule carga.



La carga acumulada produce un campo opuesto $\vec{E}_2$, lo que reduce la corriente.

c) Al cabo de un lapso muy corto $\vec{E}_2$ tiene la misma magnitud que $\vec{E}_1$; entonces, el campo total es $\vec{E}_{total} = \mathbf{0}$ y la corriente cesa por completo.



Fuerza electromotriz

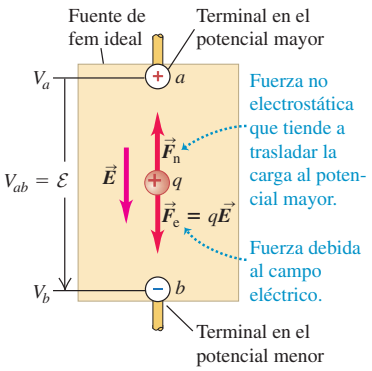
En un circuito eléctrico debe haber en algún punto de la espira un dispositivo que actúe como la bomba hidráulica de la fuente (figura 25.13). En este dispositivo una carga viaja "hacia arriba", del lugar donde hay menos energía potencial hacia donde hay más, aun cuando la fuerza electrostática trate de llevarla de la mayor energía potencial a la menor. La dirección de la corriente en ese dispositivo es del potencial más bajo al más alto, exactamente lo opuesto de lo que ocurre en un conductor ordinario. La influencia que hace que la corriente fluya del potencial menor al mayor se llama **fuerza electromotriz** (se abrevia **fem**). Éste es un término inadecuado porque la fem *no* es una fuerza, sino una cantidad de energía por unidad de carga, como el potencial. La unidad del SI de la fem es la misma que la del potencial, el volt (1V = 1 J/C). Una batería de linterna común tiene una fem de 1.5 V; esto significa que la batería hace un trabajo de 1.5 J por cada coulomb de carga que pasa a través de ella. Para denotar la fem se usará el símbolo $\mathcal{E}$ (la letra E manuscrita).

Todo circuito completo con corriente constante debe incluir algún dispositivo que provea una fem. Tal dispositivo recibe el nombre de **fuente de fem**. Algunos ejemplos de fuentes de fem son las baterías, los generadores eléctricos, las celdas solares, los termopares y las celdas de combustible. Todos estos dispositivos convierten energía de alguna forma (mecánica, química, térmica, etcétera) en energía potencial eléctrica y la transfieren al circuito al que está conectado el dispositivo. Una fuente

25.13 Así como una fuente de agua requiere de una bomba, un circuito eléctrico necesita una fuente de fuerza electromotriz para mantener una corriente constante.

Activ ONLINE Physics
12.1 Circuitos de CD en serie (cualitativos)

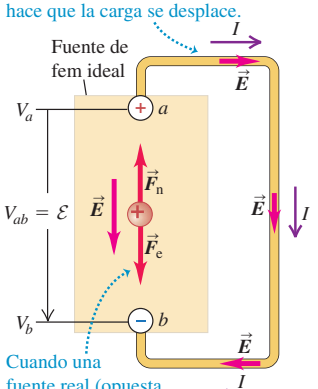
25.14 Diagrama de una fuente de fem en una situación de "circuito abierto". La fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ se ilustran actuando sobre una carga positiva q.



Cuando la fuente de fem no es parte de un circuito cerrado, $F_n = F_e$ y no hay movimiento neto de carga entre las terminales.

25.15 Diagrama de una fuente ideal de fem en un circuito completo. La fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ se ilustran para una carga q positiva. La dirección de la corriente es de a a b en el circuito externo y de b a a en el interior de la fuente.

El potencial a través de las terminales crea un campo eléctrico en el circuito, lo que hace que la carga se desplace.



Cuando una fuente real (opuesta a la ideal) de fem se conecta a un circuito, disminuye, V_{ab} y por lo tanto F_e, de manera que, $F_n > F_e$ y $\vec{F}_n$ realiza un trabajo sobre las cargas.

ideal de fem mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales, independiente de la corriente que pasa a través de ella. La fuerza electromotriz se define cuantitativamente como la magnitud de esta diferencia de potencial. Como se verá, las fuentes ideales de este tipo son idealizaciones, como el plano sin fricción y la cuerda sin masa. Más adelante se estudiará en qué difiere el comportamiento de las fuentes de fem en la vida real con respecto a este modelo idealizado.

La figura 25.14 es un diagrama de una fuente de fem ideal que mantiene una diferencia de potencial entre los conductores a y b, llamados *terminales* del dispositivo. La terminal a, marcada con $+$, se mantiene a un potencial *más alto* que la terminal b, marcada con $-$. Asociado con esta diferencia de potencial hay un campo eléctrico $\vec{E}$ en la región que rodea a las terminales, tanto adentro como afuera de la fuente. El campo eléctrico en el interior del dispositivo está dirigido de a a b, como se ilustra. Una carga q dentro de la fuente experimenta una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Pero la fuente suministra además una influencia adicional, la cual se representa como una fuerza no electrostática $\vec{F}_n$. Esta fuerza, que opera dentro del dispositivo, empuja la carga de b a a "cuesta arriba" y contra la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$. Así, $\vec{F}_n$ mantiene la diferencia de potencial entre las terminales. Si $\vec{F}_n$ no estuviera presente, la carga fluiría entre las terminales hasta que la diferencia de potencial fuera igual a cero. El origen de la influencia adicional $\vec{F}_n$ depende de la clase de fuente. En un generador proviene de las fuerzas del campo magnético de las cargas en movimiento. En una batería o celda de combustible está asociada con procesos de difusión y concentraciones electrolíticas variables que son el resultado de reacciones químicas. En una máquina electrostática como un generador Van de Graaff (véase la figura 22.27), se aplica una fuerza mecánica real por medio de una banda o rueda en movimiento.

Si una carga positiva q se desplaza de b a a en el interior de la fuente, la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ realiza una cantidad positiva de trabajo $W_n = q\mathcal{E}$ sobre la carga. Este desplazamiento es *opuesto* a la fuerza electrostática $\vec{F}_e$, por lo que la energía potencial asociada con la carga se *incrementa* en una cantidad igual a qV_{ab}, donde $V_{ab} = V_a - V_b$ es la diferencia de potencial (positivo) del punto a con respecto al punto b. Para la fuente ideal de fem que se ha descrito, $\vec{F}_e$ y $\vec{F}_n$ tienen igual magnitud pero dirección opuesta, por lo que el trabajo total realizado sobre la carga q es igual a cero; hay un aumento de la energía potencial pero *ningún* cambio en la energía cinética de la carga. Es como levantar un libro del piso a un estante elevado con rapidez constante. El incremento en energía potencial es igual al trabajo no electrostático W_n, por lo que $q\mathcal{E} = qV_{ab}$, o bien,

$$V_{ab} = \mathcal{E} \qquad \text{(fuente ideal de fem)} \tag{25.13}$$

Ahora, consideremos que se forma un circuito completo conectando un alambre con resistencia R a las terminales de una fuente (figura 25.15). La diferencia de potencial entre las terminales a y b establece un campo eléctrico dentro del alambre; esto hace que la corriente fluya alrededor de la espira de a hacia b, del potencial más alto al más bajo. Donde el alambre se dobla, persisten cantidades iguales de carga positiva y negativa en el "interior" y en el "exterior" del doblez. Estas cargas ejercen las fuerzas que hacen que la corriente siga los dobleces del alambre.

De la ecuación (25.11), la diferencia de potencial entre los extremos del alambre en la figura 25.15 está dada por $V_{ab} = IR$. Al combinarse con la ecuación (25.13), se obtiene

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR \qquad \text{(fuente ideal de fem)} \tag{25.14}$$

Es decir, cuando una carga positiva q fluye alrededor del circuito, el *aumento* de potencial $\mathcal{E}$ a medida que pasa a través de la fuente ideal es numéricamente igual a la *caída* de potencial $V_{ab} = IR$ conforme pasa por el resto del circuito. Una vez que se conocen $\mathcal{E}$ y R, esta relación determina la corriente en el circuito.

CUIDADO **La corriente no "se gasta" en un circuito** Es un error común considerar que en un circuito cerrado la corriente es algo que sale de la terminal positiva de una batería y se consume o "se gasta" en el momento en que llega a la terminal negativa. De hecho, la corriente es la *misma* en cualquier punto de una espira simple como la de la figura 25.15, aun si el espesor de los alambres fuera diferente en distintos puntos del circuito. Esto pasa porque la carga se conserva (es decir, no se crea ni se destruye) y porque no se puede acumular en los dis-

positivos del circuito que hemos descrito. Si la carga se acumulara, las diferencias de potencial cambiarían con el tiempo. Es como el flujo de agua en una fuente de ornato; el agua brota de la parte superior de la fuente al mismo ritmo con el que llega a la parte inferior, sin importar las dimensiones de la fuente. ¡El agua no "se gasta" a lo largo del trayecto!

Resistencia interna

Las fuentes reales de fem en un circuito no se comportan exactamente del modo descrito; la diferencia de potencial a través de una fuente real en un circuito *no* es igual a la fem como en la ecuación (25.14). La razón es que la carga en movimiento a través del material de cualquier fuente real encuentra una *resistencia*, a la que llamamos **resistencia interna** de la fuente, y se denota con r. Si esta resistencia se comporta de acuerdo con la ley de Ohm, r es constante e independiente de la corriente I. Conforme la corriente avanza a través de r, experimenta una caída de potencial asociada que es igual a Ir. Así, cuando una corriente fluye a través de una fuente de la terminal negativa b a la terminal positiva a, la diferencia de potencial V_{ab} entre las terminales es

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \qquad \text{(voltaje terminal, fuente con resistencia interna)} \qquad (25.15)$$

El potencial V_{ab}, llamado **voltaje terminal**, es menor que la fem $\mathcal{E}$ a causa del término Ir que representa la caída de potencial a través de la resistencia interna r. Dicho de otra manera, el aumento en la energía potencial qV_{ab} que se produce cuando una carga q se traslada de b a a dentro de la fuente es ahora menor que el trabajo $q\mathcal{E}$ realizado por la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$, ya que se pierde algo de energía potencial al atravesar la resistencia interna.

Una batería de 1.5 V tiene una fem de 1.5 V, pero el voltaje terminal V_{ab} de la batería es igual a 1.5 V sólo si no hay corriente que fluya a través de ella, de manera que en la ecuación (25.15) $I = 0$. Si la batería es parte de un circuito completo a través del cual fluye corriente, el voltaje terminal será menor de 1.5 V. *Para una fuente real de fem, el voltaje terminal es igual a la fem sólo si no hay corriente que fluya a través de la fuente* (figura 25.16). Así, el comportamiento de una fuente se puede describir en términos de dos propiedades: una fem $\mathcal{E}$, que suministra una diferencia de potencial constante independiente de la corriente, en serie con una resistencia interna r.

La corriente en el circuito externo conectado a las terminales a y b de la fuente sigue determinada por $V_{ab} = IR$. Al combinar esto con la ecuación (25.15) se obtiene

$$\mathcal{E} - Ir = IR \quad \text{o bien,} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad \text{(corriente, fuente con resistencia interna)} \qquad (25.16)$$

Es decir, la corriente es igual a la fuente de fem dividida entre la resistencia *total* del circuito $(R + r)$.

CUIDADO **Una batería no es una "fuente de corriente"** Quizá piense que una batería u otra fuente de fem siempre produce la misma corriente sin importar en cuál circuito se utilice. Pero, como indica la ecuación (25.16), la corriente que produce una fuente de fem en un circuito dado depende de la resistencia R del circuito externo (así como de la resistencia interna r de la fuente). Cuanto mayor es la resistencia, menos corriente producirá la fuente. Es análogo a empujar un objeto a través de un líquido espeso y viscoso como el aceite o la melaza; si se ejerce cierto empuje sostenido (fem), es posible desplazar un objeto pequeño con gran rapidez (R pequeña, I grande), o un objeto grande con lentitud (R grande, I pequeña).

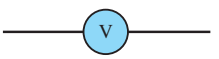
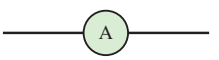
Símbolos para diagramas de circuito

Una parte importante del análisis de un circuito consiste en realizar el *diagrama del circuito*. La tabla 25.4 muestra los símbolos usuales que se emplean en los diagramas de circuito. En este capítulo y en el siguiente se usarán mucho estos símbolos. Por lo general se supone que los alambres que conectan los diversos elementos del circuito tienen una resistencia despreciable; de la ecuación (25.11), $V = IR$, la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de este tipo es igual a cero.

25.16 La fem de esta batería —es decir, el voltaje terminal cuando no está conectada a nada— es de 12 V. Pero como la batería tiene resistencia interna, el voltaje terminal en ella es menor que 12 V cuando suministra corriente a una bombilla.

La tabla 25.4 incluye dos instrumentos que se usan para medir las propiedades de los circuitos. Los *medidores* ideales no interfieren con el circuito al cual se conectan. Un **voltímetro**, presentado en la sección 23.2, mide la diferencia de potencial entre sus terminales; un voltímetro idealizado tiene una resistencia infinitamente grande y mide la diferencia de potencial sin tener que desviar ninguna corriente a través él. Un amperímetro mide la corriente que pasa a través de él; un **amperímetro** idealizado tiene resistencia igual a cero y no hay diferencia de potencial entre sus terminales. Como los medidores actúan como parte del circuito al que están conectados, es importante recordar estas propiedades.

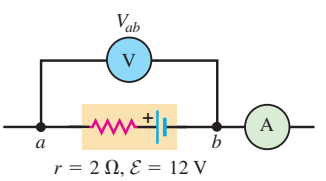
Tabla 25.4 Símbolos para diagramas de circuito

	Conductor con resistencia despreciable.
	Resistor.
	Fuente de fem (la línea vertical más larga representa la terminal positiva, por lo general aquélla con el mayor potencial).
o bien	Fuente de fem con resistencia interna r (la r se puede colocar en cualquier lado).
	Voltímetro (mide la diferencia de potencial entre sus terminales).
	Amperímetro (mide la corriente que pasa a través suyo).

Ejemplo conceptual 25.5 Fuente en un circuito abierto

La figura 25.17 ilustra una fuente (batería) con fem $\mathcal{E}$ de 12 V y resistencia interna r de 2 Ω. (En comparación, la resistencia interna de una batería comercial de plomo de 12 V es de sólo algunas milésimas de ohm.) Los alambres a la izquierda de a y a la derecha del amperímetro A no están conectados a nada. Determine las lecturas del voltímetro ideal V y del amperímetro A, también ideal.

25.17 Fuente de fem en un circuito abierto.



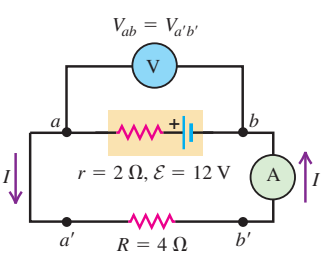
SOLUCIÓN

No hay corriente porque no hay un circuito completo. (No existe corriente a través de nuestro voltímetro ideal, que tiene resistencia infinitamente grande.) Por lo tanto, el amperímetro A da una lectura de $I = 0$. Como no hay corriente a través de la batería, no hay diferencia de potencial a través de su resistencia interna. De la ecuación (25.15) con $I = 0$, la diferencia de potencial V_{ab} a través de las terminales de la batería es igual a la fem. Por lo tanto, la lectura del voltímetro es $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V. El voltaje terminal de una fuente real, no ideal, es igual a la fem *sólo* si no hay corriente que fluya a través de la fuente, como en este ejemplo.

Ejemplo 25.6 Fuente en un circuito completo

En el ejemplo conceptual 25.5, se agrega un resistor de 4 Ω para formar el circuito completo que se ilustra en la figura 25.18. ¿Cuáles son ahora las lecturas del voltímetro y del amperímetro?

25.18 Fuente de fem en un circuito completo.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La primera variable que se busca es la corriente I a través del circuito $aa'b'b$ (igual a la lectura del amperímetro). La segunda es la diferencia de potencial V_{ab} (igual a la lectura del voltímetro).

PLANTEAR: Se calcula I mediante la ecuación (25.16). Para determinar V_{ab} se observa que éste se puede considerar como diferencia de potencial a través de la fuente o como la diferencia de potencial alrededor del circuito a través del resistor externo.

EJECUTAR: El amperímetro ideal tiene una resistencia igual a cero, por lo que la resistencia externa a la fuente es $R = 4\ \Omega$. De la ecuación (25.16), la corriente a través del circuito $aa'b'b$ es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\ \text{V}}{4\ \Omega + 2\Omega} = 2\ \text{A}$$

El amperímetro A da una lectura de $I = 2$ A.

Nuestros alambres conductores ideales tienen una resistencia igual a cero, y el amperímetro idealizado A también. Por lo tanto, no hay diferencia de potencial entre los puntos a y a' o entre b y b'; es decir, $V_{ab} = V_{a'b'}$. Podemos encontrar V_{ab} considerando a y b como las terminales del resistor o como las terminales de la fuente. Si las consideramos como las terminales del resistor, utilizamos la ley de Ohm ($V = IR$):

$$V_{a'b'} = IR = (2\ \text{A})(4\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

Si las consideramos como las terminales de la fuente, tenemos que

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 12\ \text{V} - (2\ A)(2\ \Omega) = 8\ \text{V}$$

De cualquier modo, se concluye que la lectura del voltímetro es $V_{ab} = 8$ V.

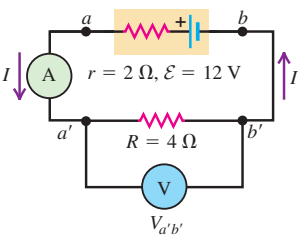
EVALUAR: Con una corriente que fluye a través de la fuente, el voltaje terminal V_{ab} es menor que la fem. Cuanto menor sea la resistencia interna r, menor será la diferencia entre V_{ab} y $\mathcal{E}$.

Ejemplo conceptual 25.7 Uso de voltímetros y amperímetros

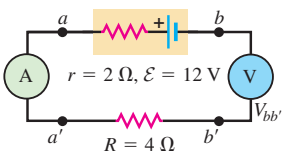
El voltímetro y el amperímetro del ejemplo 25.6 ahora se colocan en posiciones diferentes en el circuito. ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro y del amperímetro en las situaciones que se ilustran en *a*) la figura 25.19a y *b*) la figura 25.19b?

25.19 Distintas ubicaciones de un voltímetro y un amperímetro en un circuito completo.

a)



b)



SOLUCIÓN

a) El voltímetro ahora mide la diferencia de potencial entre los puntos a' y b'. Pero, como se dijo en el ejemplo 25.6, $V_{ab} = V_{a'b'}$, por lo que el voltímetro da la misma lectura que en el ejemplo 25.6; $V_{a'b'} = 8$ V.

CUIDADO **Corriente en una espira simple** Tal vez usted se sienta tentado a concluir que el amperímetro de la figura 25.19a, el cual se localiza "corriente arriba" del resistor, arrojaría una lectura mayor que el que está "corriente abajo" del resistor en la figura 25.18. Pero esta conclusión se basa en el error de considerar que la corriente es algo que "se gasta" a medida que avanza a través del resistor. Conforme las cargas se desplazan por un resistor, hay una disminución en la energía potencial eléctrica, pero la corriente *no* cambia. *La corriente en una espira simple es la misma en todos los puntos*. Un amperímetro colocado como el de la figura 25.19a da la misma lectura que el ubicado como en la figura 25.18: $I = 2$ A.

b) A través del voltímetro no hay corriente porque éste tiene una resistencia infinitamente grande. Como el voltímetro ahora forma parte del circuito, no hay corriente en el circuito, por lo que la lectura del amperímetro es $I = 0$.

El voltímetro mide la diferencia de potencial $V_{bb'}$ entre los puntos b y b'. Como $I = 0$, la diferencia de potencial a través del resistor es $V_{a'b'} = IR = 0$, y la que hay entre los extremos a y a' del amperímetro ideal también es igual a cero. Por lo tanto, $V_{bb'}$ es igual a V_{ab}, el voltaje terminal de la fuente. Como en el ejemplo conceptual 25.5, no hay corriente que fluya, por lo que el voltaje terminal es igual a la fem, y la lectura del voltímetro es $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V.

Este ejemplo ilustra que los amperímetros y voltímetros también son elementos del circuito. Al mover el voltímetro de la posición que tenía en la figura 25.19a a la de la figura 25.19b, cambian la corriente y las diferencias de potencial en el circuito, en este caso, de forma considerable. Si se quiere medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito sin alterarlo, hay que usar un voltímetro como se ilustra en la figura 25.18 o 25.19a, *no* como en la figura 25.19b.

Ejemplo 25.8 Fuente con un cortocircuito

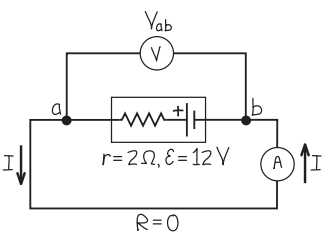
Utilizando la misma batería de los tres ejemplos anteriores, ahora se sustituye el resistor de 4 Ω con un conductor cuya resistencia es igual a cero. ¿Cuáles son las lecturas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las variables que se buscan son I y V_{ab}, las mismas que en el ejemplo 25.6. La única diferencia con ese ejemplo es que la resistencia externa ahora es $R = 0$.

PLANTEAR: La figura 25.20 ilustra el nuevo circuito. Ahora hay una trayectoria con resistencia igual a cero entre los puntos a y b (a través de la espira inferior en la figura 25.20). Por consiguiente, la diferencia de potencial entre estos puntos debe ser igual a cero, lo que se utiliza para resolver el problema.

25.20 Diagrama para este problema.



continúa

EJECUTAR: Debemos tener $V_{ab} = IR = I(0) = 0$, sin importar cuál sea la corriente. Al saber esto, podemos calcular la corriente I mediante la ecuación (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega} = 6\ \text{A}$$

La lectura del amperímetro es $I = 6$ A, y la del voltímetro es $V_{ab} = 0$.

EVALUAR: La corriente tiene un valor distinto que la del ejemplo 25.6, aun cuando se utiliza la misma batería. Una fuente *no* proporciona la misma corriente en todas las situaciones; la cantidad de corriente depende de la resistencia interna r y de la resistencia del circuito externo.

La situación de este ejemplo se llama *cortocircuito*. Las terminales de la batería están conectadas directamente una con la otra, sin una resistencia externa. La corriente del cortocircuito es igual a la fem $\mathcal{E}$ dividida entre la resistencia interna r. *Advertencia:* un cortocircuito puede representar una situación sumamente peligrosa. Una batería de automóvil o una línea eléctrica doméstica tienen una resistencia interna muy pequeña (mucho menor que las de estos ejemplos), y la corriente del cortocircuito es suficientemente grande como para fundir un alambre delgado o hacer que estalle una batería. ¡No lo intente!

Cambios de potencial alrededor de un circuito

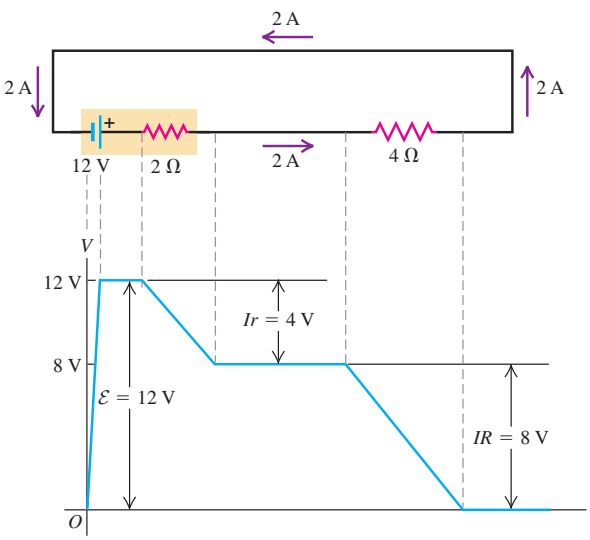
El cambio neto en la energía potencial para una carga q que hace un viaje redondo alrededor de un circuito completo debe ser igual a cero. Por lo tanto, el cambio neto del *potencial* alrededor del circuito también debe ser igual a cero; en otras palabras, la suma algebraica de las diferencias de potencial y fems alrededor de la espira es igual a cero. Esto se observa si se escribe la ecuación (25.16) en la forma

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0$$

Una ganancia de potencial de $\mathcal{E}$ está asociada con la fem, y caídas de potencial de Ir e IR están asociadas con la resistencia interna de la fuente y el circuito externo, respectivamente. La figura 25.21 es una gráfica que muestra la forma en que varía el potencial conforme nos movemos alrededor del circuito completo de la figura 25.18. El eje horizontal no necesariamente representa distancias reales, sino varios puntos de la espira. Si se toma el potencial igual a cero en la terminal negativa de la batería, entonces se tiene un aumento $\mathcal{E}$ y una caída Ir en la batería, así como una caída adicional IR en el resistor externo; al terminar el recorrido alrededor de la espira, el potencial es de nuevo como al principio.

En esta sección sólo hemos considerado situaciones en las que las resistencias son óhmicas. Si el circuito incluye un dispositivo no lineal como un diodo (véase la figura 25.10b), la ecuación (25.16) sigue siendo válida, pero no se puede resolver algebraicamente porque R no es constante. En una situación como ésa, la corriente I se calcula utilizando métodos numéricos (véase el problema de desafío 25.84).

Por último, haremos hincapié en que la ecuación (25.15) no siempre es una representación adecuada del comportamiento de una fuente. La fem tal vez no sea constante, y lo que hemos descrito como resistencia interna quizá sea una relación más



25.21 Aumentos y caídas de potencial en un circuito.

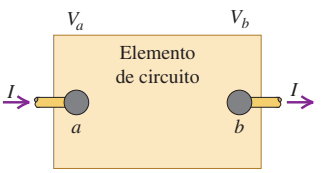
compleja entre el voltaje y la corriente que no siga la ley de Ohm. No obstante, es frecuente que el concepto de resistencia interna proporcione una descripción adecuada de las baterías, los generadores y otros convertidores de energía. La diferencia principal entre una batería nueva de linterna y otra usada no es la fem, la cual disminuye sólo un poco con el uso, sino la resistencia interna, que se incrementa de menos de un ohm cuando la batería está nueva hasta 1000 Ω o más después de haberla usado mucho. De manera similar, la batería de un automóvil puede proporcionar menos corriente al motor de arranque en una mañana fría que cuando la batería está caliente, no porque la fem sea apreciablemente menor, sino porque la resistencia interna aumenta cuando la temperatura desciende. En los climas fríos, los habitantes toman varias medidas para evitar esta pérdida, desde utilizar calentadores especiales para el acumulador hasta remojar la batería con agua caliente en las mañanas muy frías.

Evalúe su comprensión de la sección 25.4 Clasifique los siguientes circuitos, de la mayor corriente a la menor. i) Un resistor de 1.4 Ω conectado a una batería de 1.5 V que tiene una resistencia interna de 0.10 Ω; ii) un resistor de 1.8 Ω conectado a una batería de 4.0 V que tiene un voltaje terminal de 3.6 V y resistencia interna desconocida; iii) un resistor desconocido conectado a una batería de 12.0 V con resistencia interna de 0.20 Ω y un voltaje terminal de 11.0 V.

25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos

Ahora estudiaremos algunas relaciones entre la energía y la potencia en los circuitos eléctricos. La caja de la figura 25.22 representa un elemento de circuito con diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ entre sus terminales y la corriente I que pasa a través suyo en dirección de a hacia b. Este elemento puede ser un resistor, una batería u otro; los detalles no importan. Conforme la carga pasa por el elemento de circuito, el campo eléctrico realiza trabajo sobre la carga. En una fuente de fem la fuerza $\vec{F}_n$, que se mencionó en la sección 25.4, efectúa trabajo adicional.

25.22 La potencia de alimentación al elemento de circuito entre a y b es $P = (V_a - V_b)\, I = V_{ab} I$.



Conforme una cantidad de carga q pasa a través del elemento de circuito, hay un cambio en la energía potencial igual a qV_{ab}. Por ejemplo, si $q > 0$ y $V_{ab} = V_a - V_b$ es positiva, la energía potencial disminuye a medida que la carga "cae" del potencial V_a al potencial más bajo V_b. Las cargas en movimiento no ganan energía *cinética* porque la tasa de flujo de carga (es decir, la corriente) que sale del elemento de circuito debe ser igual que la tasa de flujo de carga que entra a éste. En vez de ello, la cantidad qV_{ab} representa energía eléctrica transferida hacia el elemento de circuito. Esta situación ocurre en las bobinas de un tostador o un horno eléctrico, en donde la energía eléctrica se convierte en energía térmica.

Tal vez ocurra que el potencial en b sea mayor que en a. En este caso, V_{ab} es negativa, y hay una transferencia neta de energía *hacia fuera* del elemento de circuito. Después, el elemento actúa como fuente proveyendo energía eléctrica al circuito en que se encuentra. Ésta es la situación habitual para una batería, la cual convierte energía química en eléctrica y la entrega al circuito externo. Así, qV_{ab} puede denotar una cantidad de energía entregada a un elemento de circuito o una cantidad de energía que se extrae de ese elemento.

En los circuitos eléctricos es más frecuente que interese la *rapidez* con la que la energía se proporciona a un elemento de circuito o se extrae de él. Si la corriente a través del elemento es I, entonces en un intervalo de tiempo dt pasa una cantidad de carga $dQ = I\, dt$ a través del elemento. El cambio en la energía potencial para esta cantidad de carga es $V_{ab}\, dQ = V_{ab} I\, dt$. Si esta expresión se divide entre dt, se obtiene la *rapidez* a la que se transfiere la energía hacia fuera o hacia dentro de circuito. La relación de transferencia de energía por unidad de tiempo es la *potencia*, y se denota mediante P; por lo tanto, escribimos

$$P = V_{ab} I \qquad \text{(rapidez con la que se entrega energía a un elemento de circuito o se extrae de éste)} \qquad (25.17)$$

La unidad de V_{ab} es un volt, o un joule por coulomb, y la unidad de I es un ampere, o un coulomb por segundo. Entonces, la unidad de $P = V_{ab}I$ es un watt, como debe ser:

$$(1\ \text{J/C})(1\ \text{C/s}) = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{W}$$

Veamos algunos casos especiales.

Potencia en una resistencia pura

Si el elemento de circuito de la figura 25.22 es un resistor, la diferencia de potencial es $V_{ab} = IR$. De la ecuación (25.17), la potencia eléctrica entregada al resistor por el circuito es

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \qquad \text{(potencia entregada a un resistor)} \qquad (25.18)$$

En este caso, el potencial en a (donde entra la corriente al resistor) siempre es mayor que el que hay en b (donde sale la corriente). La corriente entra por la terminal de mayor potencial del dispositivo, y la ecuación (25.18) representa la tasa o rapidez de transferencia de energía potencial eléctrica *hacia* el elemento de circuito.

¿Qué le ocurre a esta energía? Las cargas en movimiento colisionan con los átomos en el resistor y transfieren algo de su energía a estos átomos, lo que incrementa la energía interna del material. O bien la temperatura del resistor aumenta o hay un flujo de calor hacia fuera de él, o ambas cosas. En cualquiera de estos casos se dice que la energía se *disipa* en el resistor a una tasa de I^2R. Cada resistor tiene una *potencia nominal*, que es la potencia máxima que el resistor es capaz de disipar sin que se sobrecaliente o se dañe. En las aplicaciones prácticas, la potencia nominal de un resistor a menudo es una característica tan importante como el valor de su resistencia. Por supuesto, algunos dispositivos, como los calentadores eléctricos, están diseñados para calentarse y transferir calor al ambiente. Pero si se excede la potencia nominal, incluso esa clase de aparatos pueden fundirse y estallar.

Potencia de salida de una fuente

El rectángulo superior de la figura 25.23a representa una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r, conectada por conductores ideales (sin resistencia) a un circuito externo representado por el rectángulo inferior. Esto podría describir la batería de un automóvil conectada a uno de los faros (figura 25.23b). El punto a está a un potencial mayor que el b, por lo que $V_a > V_b$, y V_{ab} es positiva. Observe que la corriente I *sale* de la fuente por la terminal de mayor potencial (en vez de entrar por ahí). Se provee energía al circuito externo, y la rapidez con la que se entrega al circuito está dada por la ecuación (25.17):

$$P = V_{ab}I$$

Para una fuente que puede describirse por una fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r, se usa la ecuación (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Si se multiplica esta ecuación por I, se obtiene

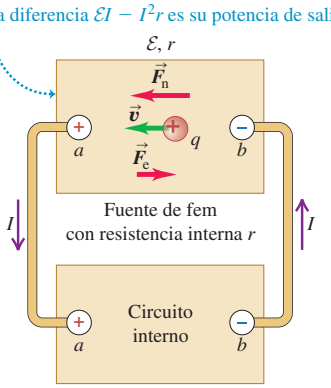
$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2r \qquad (25.19)$$

¿Qué significan los términos $\mathcal{E}I$ e I^2r? En la sección 25.4 se definió la fem $\mathcal{E}$ como el trabajo por unidad de carga que la fuerza no electrostática realiza sobre las cargas cuando éstas son empujadas "cuesta arriba" de b hacia a en la fuente. En el tiempo dt, fluye una carga $dQ = I\,dt$ a través de la fuente; el trabajo realizado sobre ella por esta fuerza no electrostática es $\mathcal{E}\,dQ = \mathcal{E}I\,dt$. Así, $\mathcal{E}I$ es la *tasa* a la que realiza trabajo sobre las cargas en circulación cualquier agente que ocasione la fuerza no electrostática en la fuente. Este término representa la rapidez de conversión de la energía no eléctrica en eléctrica dentro de la fuente. El término I^2r es la tasa a la que se *disipa* energía

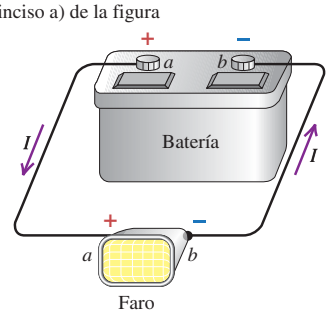
25.23 Conversión de la energía en un circuito simple.

a) Diagrama del circuito

- La fuente de fem convierte energía que no es eléctrica en energía eléctrica, a una tasa de $\mathcal{E}I$.
- Su resistencia interna *disipa* energía a una tasa de I^2r.
- La diferencia $\mathcal{E}I - I^2r$ es su potencia de salida.



b) Circuito real del tipo que se ilustra en el inciso a) de la figura



Faro

eléctrica en la resistencia interna de la fuente. La diferencia $\mathcal{E}I - I^2r$ es la potencia eléctrica *neta* de salida de la fuente, es decir, la rapidez a la que la fuente entrega energía eléctrica al resto del circuito.

Potencia de entrada a una fuente

Suponga que el rectángulo inferior de la figura 25.23a es una fuente, con una fem *mayor* que la de la fuente superior y opuesta a ella. La figura 25.4 muestra un ejemplo práctico: el proceso de carga de una batería de automóvil (el elemento de circuito superior) por el alternador del vehículo (el elemento inferior). La corriente I en el circuito es *opuesta* a la de la figura 25.23; la fuente inferior empuja corriente de regreso hacia la fuente superior. En virtud de esta inversión de la corriente, en vez de la ecuación (25.15), para la fuente superior se tiene

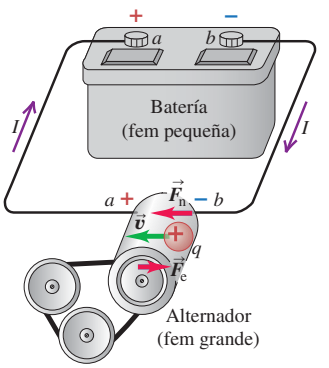
$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$$

y en vez de la ecuación (25.19), tenemos

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I + I^2R \tag{25.20}$$

En vez de que el agente que genera la fuerza no electrostática de la fuente superior *realice* trabajo, se está realizando trabajo *sobre* el agente. En la fuente superior hay energía eléctrica que se convierte en energía no eléctrica a una tasa de $\mathcal{E}I$. El término I^2r en la ecuación (25.20) es, de nuevo, la tasa de disipación de energía en la resistencia interna de la fuente superior, y la suma $\mathcal{E}I + I^2r$ es la potencia eléctrica total de *alimentación* a la fuente superior. Esto es lo que pasa cuando se conecta una batería recargable (de almacenamiento) a un cargador. El cargador suministra energía eléctrica a la batería; parte de esta energía se convierte en energía química que se reconvierte después, y el resto se disipa (se pierde) en la resistencia interna de la batería, la calienta y origina un flujo de calor hacia fuera. Si usted tiene algún aparato o computadora portátil con batería recargable, tal vez haya notado que se calienta mientras se está cargando.

25.24 Cuando se conectan dos fuentes en una espira simple, la fuente con mayor fem entrega energía a la otra fuente.



Estrategia para resolver problemas 25.1 Potencia y energía en los circuitos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:*
Los conceptos de potencia eléctrica de alimentación y salida son aplicables a cualquier circuito eléctrico. En la mayoría de los casos se sabrá cuándo se necesitan estos conceptos porque el problema pedirá en forma explícita que se considere potencia o energía.

PLANTEAR *el problema* según los siguientes pasos:
1. Elabore un dibujo del circuito.
2. Identifique los elementos de circuito, incluyendo las fuerzas fem y los resistores. En capítulos posteriores se agregarán otros elementos de circuitos, como capacitores e inductores (que se estudian en el capítulo 30).
3. Determine las variables que se buscan. Lo común es que sean la potencia de alimentación o de salida para cada elemento de circuito, o la cantidad total de energía que entra o sale de un elemento de circuito en un tiempo dado.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Una fuente de fem $\mathcal{E}$ entrega potencia $\mathcal{E}I$ a un circuito cuando la corriente I pasa a través de la fuente de − a +. La conversión de energía se realiza a partir de energía química en una batería, de energía mecánica a partir de un generador, etcétera. En este caso, la fuente tiene una potencia de salida *positiva* hacia el circuito, o, de manera equivalente, una potencia de alimentación *negativa* a la fuente.
2. Una fuente de fem toma potencia $\mathcal{E}I$ de un circuito —es decir, tiene una potencia de salida negativa o, en forma equivalente, una potencia de alimentación positiva— cuando pasa corriente a través de la fuente en dirección de + a −. Esto ocurre cuando se carga una batería de almacenamiento, es decir, cuando la energía eléctrica se convierte de nuevo en energía química. En este caso, la fuente tiene una potencia de salida *negativa* hacia el circuito o, de manera equivalente, una potencia de alimentación *positiva* a la fuente.
3. Sin importar la dirección de la corriente a través de un resistor, siempre hay una potencia de alimentación *positiva* al resistor. Éste extrae energía del circuito a una tasa dada por la expresión $VI = I^2R = V^2/R$, donde V es la diferencia de potencial a través del resistor.
4. También hay una potencia de alimentación *positiva* a la resistencia interna r de una fuente, sin que importe la dirección de la corriente. La resistencia interna siempre retira energía del circuito y la convierte en calor a una tasa de I^2r.
5. Se necesita calcular el total de energía que se entrega o se extrae de un elemento de circuito en una cantidad dada de tiempo. Si la potencia que entra a un elemento de circuito o que sale de él es constante, esta integral es simplemente el producto de la potencia por el tiempo transcurrido. (En el capítulo 26 encontraremos situaciones en las que la potencia no es constante. En tales casos, se requiere una integral para calcular la energía total.)

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe los resultados y no olvide verificar que la energía se conserva. Esta conservación se expresa en cualquiera de dos formas posibles: "potencia de alimentación neta = potencia de salida neta", o "la suma algebraica de las potencia de alimentación a los elementos de circuito es igual a cero".

Ejemplo 25.9 Potencias de alimentación y salida en un circuito completo

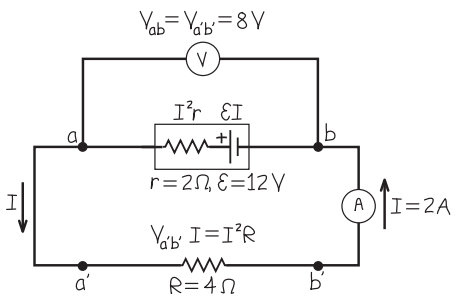
Para la situación que se analizó en el ejemplo 25.6, calcule la tasa de conversión de energía (química o eléctrica) y la tasa de disipación de energía en la batería, así como la potencia neta de salida de la batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las variables que se buscan son la potencia de salida de la fuente de fem, la potencia de alimentación a la resistencia interna y la potencia neta de salida de la fuente.

PLANTEAR: La figura 25.25 representa el circuito. Se utiliza la ecuación (25.17) para encontrar la potencia de alimentación o de salida de un elemento de circuito, y la ecuación (25.19) para la potencia neta de salida de la fuente.

25.25 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Del ejemplo 25.6, la corriente en el circuito es $I = 2$ A. La tasa de conversión de energía en la batería es

$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$$

La tasa de disipación de energía en la batería es

$$I^2r = (2\text{ A})^2(2\ \Omega) = 8\text{ W}$$

La potencia eléctrica de *salida* de la fuente es la diferencia entre $\mathcal{E}I - I^2r = 16$ W.

EVALUAR: La potencia de salida también está dada por el voltaje terminal $V_{ab} = 8$ V (calculado en el ejemplo 25.6) multiplicado por la corriente:

$$V_{ab}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W}$$

La potencia eléctrica de alimentación al resistor es

$$V_{a'b'}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W}$$

Esto es igual a la tasa de disipación de energía eléctrica en el resistor:

$$I^2R = (2\text{ A})^2(4\ \Omega) = 16\text{ W}$$

Observe que nuestros resultados concuerdan con la ecuación (25.19), que establece que $V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2R$; el lado izquierdo de esta ecuación es igual a 16 W, y el derecho es igual a 24 W − 8 W = 16 W. Esto comprueba la congruencia de las diversas cantidades de potencia.

Ejemplo 25.10 Aumento de la resistencia

Suponga que el resistor de 4 Ω de la figura 25.25 se sustituye por otro de 8 Ω. ¿Cómo afecta esto la potencia eléctrica disipada en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La variable que se busca es la potencia disipada en el resistor al que está conectada la fuente de fem.

PLANTEAR: La situación es la misma que la del ejemplo 25.9, pero con un valor diferente de la resistencia externa R.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (25.18), la potencia disipada en el resistor está dada por $P = I^2R$. Si usted tuviera prisa, tal vez concluiría que como R ahora tiene el doble del valor que tenía en el ejemplo 25.9, la potencia también se duplicaría y sería 2(16 W) = 32 W. O tal vez trataría de usar la fórmula $P = V_{ab}^2/R$; esta fórmula lo llevaría a concluir que la potencia debería ser la mitad de la del ejemplo anterior, es decir, (16 W)/2 = 8 W. ¿Cuál respuesta es la correcta?

En realidad, *ambas* respuestas son *incorrectas*. La primera porque al cambiar la resistencia R, también cambia la corriente en el circuito (recuerde, una fuente de fem *no* genera la misma corriente en todas las situaciones). La segunda conclusión también es incorrecta porque la diferencia de potencial V_{ab} a través del resistor cambia cuando la corriente cambia. Para conocer la respuesta correcta, primero se usa la misma técnica que en el ejemplo 25.6 para obtener la corriente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\text{ V}}{8\ \Omega + 2\ \Omega} = 1.2\text{ A}$$

La mayor resistencia hace que la corriente disminuya. La diferencia de potencial a través del resistor es

$$V_{ab} = IR = (1.2\text{ A})(8\ \Omega) = 9.6\text{ V}$$

que es mayor que con el resistor de 4 Ω. Después, se calcula la potencia disipada en el resistor en cualquiera de dos formas:

$$P = I^2R = (1.2\text{ A})^2(8\ \Omega) = 12\text{ W} \quad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{(9.6\text{ V})^2}{8\ \Omega} = 12\text{ W}$$

EVALUAR: El incremento de la resistencia R ocasiona una *reducción* en la potencia de alimentación al resistor. En la expresión $P = I^2R$ es más importante la disminución de la corriente que el aumento de la resistencia; en la expresión $P = V_{ab}^2/R$ tiene mayor importancia el aumento en la resistencia que el aumento de V_{ab}. Este mismo principio se aplica a las bombillas eléctricas comunes; una bombilla de 50 W tiene más resistencia que una de 100 W.

¿Podría demostrar que si se sustituye el resistor de 4 Ω por otro de 8 Ω, disminuyen tanto la tasa de conversión de energía (química a eléctrica) en la batería como la tasa de disipación de energía en la batería?

Ejemplo 25.11 Potencia en un cortocircuito

Para el circuito que se analizó en el ejemplo 25.8, calcule las tasas de conversión de energía y disipación de energía en la batería, así como la potencia de salida neta de la batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las variables buscadas son otra vez las potencias de entrada y salida asociadas con la batería.

PLANTEAR: La figura 25.26 muestra el circuito. Ésta es la misma situación que la del ejemplo 25.9, pero ahora la resistencia externa R es igual a cero.

EJECUTAR: En el ejemplo 25.8 se calculó que en esta situación la corriente es $I = 6$ A. La tasa de conversión de energía (química a eléctrica) en la batería es

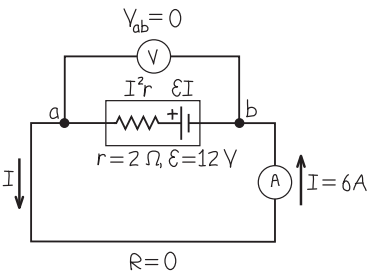
$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(6\text{ A}) = 72\text{ W}$$

La tasa de disipación de energía en la batería es

$$I^2r = (6\text{ A})^2(2\ \Omega) = 72\text{ W}$$

La potencia de salida neta de la fuente, dada por $V_{ab}I$, es igual a cero porque el voltaje terminal V_{ab} es cero.

25.26 El diagrama para este problema es el siguiente:



EVALUAR: Con alambres ideales y un amperímetro ideal, de manera que $R = 0$, se disipa *toda* la energía convertida dentro de la fuente. Por eso, una batería en cortocircuito se arruina con rapidez y, en ciertos casos, llega a estallar.

Evalúe su comprensión de la sección 25.5 Ordene los siguientes circuitos en orden decreciente de sus valores de potencia de salida neta de la batería. i) Un resistor de 1.4 Ω conectado a una batería de 1.5 V que tiene una resistencia interna de 0.10 Ω; ii) un resistor de 1.8 Ω conectado a una batería de 4.0 V con voltaje terminal de 3.6 V y resistencia interna desconocida; iii) un resistor desconocido conectado a una batería de 12.0 V con resistencia interna de 0.20 Ω y voltaje terminal de 11.0 V.

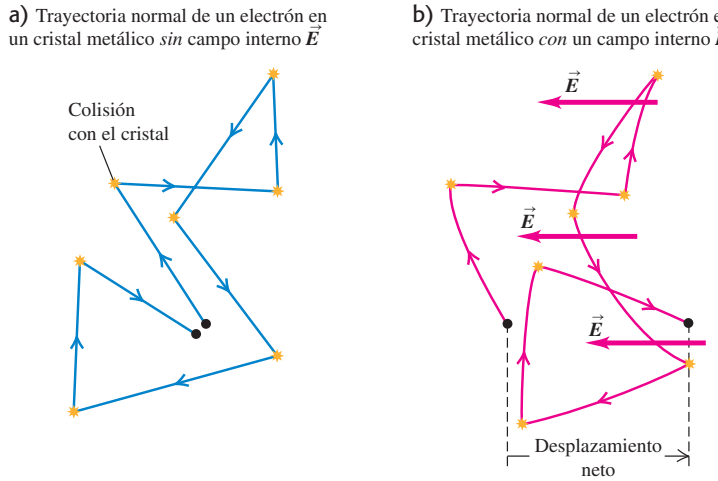
*25.6 Teoría de la conducción metálica

Podemos comprender mejor el fenómeno de la conducción eléctrica examinando el origen microscópico de la conductividad. Consideremos un modelo muy sencillo que trata los electrones como partículas clásicas e ignora su comportamiento ondulatorio en los sólidos según los postulados de la mecánica cuántica. Con este modelo, obtendremos una expresión para la resistividad de un metal. Aun cuando este modelo no es del todo correcto en términos conceptuales, sirve para desarrollar una idea intuitiva de las bases microscópicas de la conducción.

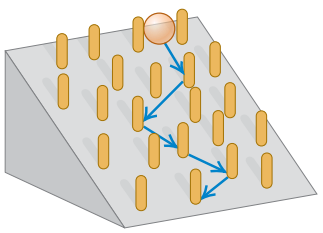
En el modelo microscópico más sencillo de la conducción en un metal, cada átomo del cristal metálico cede uno o más de sus electrones externos. Luego, estos electrones quedan en libertad para moverse a través del cristal y colisionan a intervalos con los iones estacionarios positivos. El movimiento de los electrones es análogo al de las moléculas de un gas que se trasladan a través de un lecho poroso de arena, por lo que es frecuente referirse a ellos como "gas de electrones".

Si no hay campo eléctrico, los electrones se mueven en línea recta entre las colisiones, las direcciones de sus velocidades son aleatorias y, en promedio, nunca llegan a ninguna parte (figura 22.27a). Pero si está presente un campo eléctrico, las trayectorias se curvan ligeramente en virtud de la aceleración causada por las fuerzas del campo eléctrico. La figura 25.27b ilustra algunas trayectorias de un electrón en un campo eléctrico dirigido de derecha a izquierda. Como se dijo en la sección 25.1, la rapidez media del movimiento aleatorio es del orden de 10^6 m/s, mientras que la rapidez media de deriva es *mucho* más baja, del orden de 10^{-4} m/s. El tiempo medio entre las

25.27 Movimientos aleatorios de un electrón en un cristal metálico a) con un campo eléctrico igual a cero, y b) con un campo eléctrico que provoca deriva. Las curvaturas de las trayectorias se han exagerado mucho.



25.28 El movimiento de una pelota que rueda por un plano inclinado y rebota en las estacas que encuentra en su camino es análogo al movimiento de un electrón en un conductor metálico con un campo eléctrico presente.



colisiones se denomina **tiempo libre medio**, y se denota con τ. La figura 25.28 muestra una analogía mecánica de este movimiento de electrones.

A partir de este modelo se obtendrá una expresión para la resistividad ρ de un material, definido por la ecuación (25.5):

$$\rho = \frac{E}{J} \tag{25.21}$$

donde E y J son las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente. La densidad de corriente $\vec{J}$ a su vez está dada por la ecuación (25.4):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \tag{25.22}$$

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen, q es la carga de cada uno, y $\vec{v}_d$ es su velocidad media de deriva. (También sabemos que en un metal ordinario $q = -e$; esto se usará más adelante.)

Es necesario relacionar la velocidad de deriva $\vec{v}_d$ con el campo eléctrico $\vec{E}$. El valor de $\vec{v}_d$ está determinado por una condición de estado estable (estacionario) en la que, en promedio, las *ganancias* de velocidad de las cargas debidas a la fuerza del campo $\vec{E}$ se equilibran exactamente con las *pérdidas* de velocidad debidas a las colisiones.

Para aclarar este proceso, imaginemos que se ponen en marcha los dos efectos, uno a la vez. Suponga que antes del momento $t = 0$ no existe un campo. De esta forma, el movimiento de los electrones es completamente al azar. Un electrón común tiene velocidad $\vec{v}_0$ en el momento $t = 0$, y el valor de $\vec{v}_0$ promediado con respecto a muchos electrones (es decir, la velocidad inicial de un electrón promedio) es igual a cero: $(\vec{v}_0)_{prom} = \mathbf{0}$. Así, en el momento $t = 0$, activamos un campo eléctrico constante $\vec{E}$. El campo ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cada carga, lo que ocasiona una aceleración $\vec{a}$ en dirección de la fuerza que está dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

donde m es la masa del electrón. *Todos* los electrones tienen esta aceleración.

Esperamos un tiempo τ, el tiempo medio entre colisiones, y en seguida "ponemos en marcha" las colisiones. Un electrón que en el tiempo $t = 0$ tiene velocidad $\vec{v}_0$, en el tiempo τ tendrá una velocidad igual a

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\tau$$

La velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{med}}$ de un electrón *promedio* en ese momento es la suma de los promedios de los dos términos de la derecha. Como se dijo, la velocidad inicial $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ es igual a cero para un electrón promedio, por lo que

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{med}} = \vec{\boldsymbol{a}}\tau = \frac{q\tau}{m}\vec{\boldsymbol{E}} \tag{25.23}$$

Después del tiempo $t = \tau$, la tendencia de las colisiones a disminuir la velocidad de un electrón promedio (con las colisiones aleatorias) equilibra con exactitud la tendencia del campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ a incrementar su velocidad. Así, la velocidad de un electrón promedio, dada por la ecuación (25.23), se mantiene con el tiempo y es igual a la velocidad de deriva $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{d}}$:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{d}} = \frac{q\tau}{m}\vec{\boldsymbol{E}}$$

Ahora, se sustituye esta ecuación para la velocidad de deriva $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{d}}$ en la ecuación (25.22):

$$\vec{\boldsymbol{J}} = nq\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{d}} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{\boldsymbol{E}}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación (25.21), que puede rescribirse como $\vec{\boldsymbol{J}} = \vec{\boldsymbol{E}}/\rho$, y al sustituir $q = -e$, se observa que la resistividad ρ está dada por

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \tag{25.24}$$

Si n y τ son independientes de $\vec{\boldsymbol{E}}$, entonces la resistividad es independiente de $\vec{\boldsymbol{E}}$ y el material conductor obedece la ley de Ohm.

Quizá parezca artificial iniciar las interacciones una a la vez, pero el resultado sería el mismo si cada electrón tuviera su propio reloj y los tiempos $t = 0$ fueran diferentes para distintos electrones. Si τ es el tiempo medio entre las colisiones, entonces $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{d}}$ aún es la velocidad media de deriva de los electrones, aun cuando los movimientos de éstos no estén correlacionados en realidad en la manera en que se postuló.

¿Qué pasa con la dependencia que tiene la resistividad con respecto a la temperatura? En un cristal perfecto sin átomos fuera de su lugar, un análisis cuántico correcto supondría que los electrones libres se mueven a través del cristal sin ninguna colisión. Pero los átomos vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. Conforme la temperatura se incrementa, las amplitudes de esas vibraciones aumentan, las colisiones se hacen más frecuentes y el tiempo libre medio τ disminuye. Por lo tanto, esta teoría predice que la resistividad de un metal aumenta con la temperatura. En general, en un superconductor no hay colisiones inelásticas, τ es infinito y la resistividad ρ es igual a cero.

En un semiconductor puro como el silicio o el germanio, el número de portadores de carga por unidad de volumen, n, no es constante, sino que incrementa con mucha rapidez al aumentar la temperatura. Este aumento de n supera con creces la reducción del tiempo libre medio, y en un semiconductor la resistividad siempre decrece con rapidez al aumentar la temperatura. A temperaturas bajas, n es muy pequeña, y la resistividad se hace tan grande que el material se considera aislante.

Los electrones ganan energía entre las colisiones en virtud del trabajo que el campo eléctrico realiza sobre ellos. Durante las colisiones, transfieren algo de esta energía a los átomos del material del conductor. Esto lleva a un aumento de la energía interna y la temperatura del material; ésa es la razón por la que los alambres que conducen corriente se calientan. Si el campo eléctrico en el material es suficientemente grande, un electrón puede ganar energía suficiente entre las colisiones para desprender electrones que normalmente están ligados a los átomos del material. Después, los electrones así lanzados pueden desprender a la vez otros electrones, y así sucesivamente, lo que posiblemente desate una avalancha de corriente. Ésta es la base microscópica de la ruptura del dieléctrico en los aislantes.

Ejemplo 25.12 Tiempo libre medio en el cobre

Calcule el tiempo libre medio entre las colisiones en el cobre a temperatura ambiente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se basa en las ideas desarrolladas en esta sección.

PLANTEAR: Es posible encontrar una expresión para el tiempo libre medio τ en términos de n, ρ, e y m, si se reacomoda la ecuación (25.24). Del ejemplo 25.1 y la tabla 25.1, se sabe que para el cobre $n = 8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$ y $\rho = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Asimismo, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C y $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg para los electrones.

EJECUTAR: De la ecuación (25.24) se obtiene

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.4 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

EVALUAR: Al tomar el recíproco de este tiempo, se encuentra que cada electrón experimenta en promedio ¡alrededor de 4×10^{13} colisiones cada segundo!

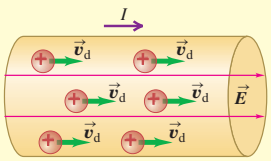
Evalúe su comprensión de la sección 25.6 ¿Cuál de los siguientes factores, al incrementarse, hará que sea más difícil producir cierta cantidad de corriente en un conductor? (Puede haber más de una respuesta correcta.) i) La masa de las partículas con carga en movimiento en el conductor; ii) el número de las partículas con carga en movimiento por metro cúbico; iii) la cantidad de carga en cada partícula en movimiento; iv) el tiempo medio entre las colisiones para una partícula cualquiera con carga y en movimiento.

CAPÍTULO 25 RESUMEN

Corriente y densidad de corriente: Corriente es la cantidad de carga que fluye a través de un área especificada, por unidad de tiempo. La unidad del SI para la corriente es el ampere, que es igual a un coulomb por segundo (1 A = 1 C/s). La corriente I a través de un área A depende de la concentración n y la carga q de los portadores de carga, así como de la magnitud de su velocidad de deriva $\vec{v}_d$. La densidad de corriente es corriente por unidad de área de la sección transversal. La corriente se describe convencionalmente en términos de un flujo de carga positiva, aun cuando los portadores de carga real sean negativos o de ambos signos. (Véase el ejemplo 25.1.)

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A \qquad (25.2)$$

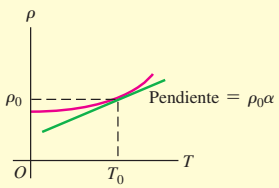
$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \qquad (25.4)$$



Resistividad: La resistividad ρ de un material es la razón de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente. Los buenos conductores tienen poca resistividad; los buenos aislantes tienen alta resistividad. La ley de Ohm, que obedecen en forma aproximada muchos materiales, establece que ρ es una constante independiente del valor de E. La resistividad por lo general se incrementa con la temperatura; para cambios pequeños de temperatura, esta variación queda representada aproximadamente por la ecuación (25.6), donde α es el coeficiente de temperatura de la resistividad.

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad (25.5)$$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (25.6)$$

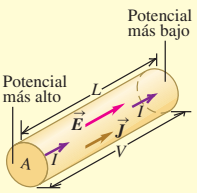


Metal: ρ aumenta con el incremento de T

Resistores: Para los materiales que obedecen la ley de Ohm, la diferencia de potencial V a través de una muestra particular de material es proporcional a la corriente I a través del material. La razón $V/I = R$ es la resistencia de la muestra. La unidad del SI para la resistencia es el ohm (1 Ω = 1 V/A). La resistencia de un conductor cilíndrico se relaciona con su resistividad ρ, longitud L y área de sección transversal A. (Véanse los ejemplos 25.2 a 25.4.)

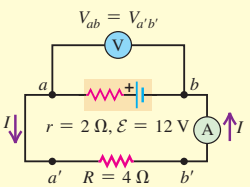
$$V = IR \qquad (25.11)$$

$$R = \frac{\rho L}{A} \qquad (25.10)$$



Circuitos y fem: Un circuito completo tiene una trayectoria continua por la que circula corriente. Un circuito completo que lleva una corriente constante debe contener una fuente de fuerza electromotriz (fem) $\mathcal{E}$. La unidad del SI para la fuerza electromotriz es el volt (1 V). Una fuente ideal de fem mantiene una diferencia de potencial constante, independiente de la corriente que pasa a través del dispositivo, pero toda fuente real de fem tiene alguna resistencia interna r. Por consiguiente, la diferencia de potencial terminal V_{ab} depende de la corriente. (Véanse los ejemplos 25.5 a 25.8.)

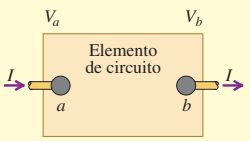
$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \qquad (25.15)$$
(fuente con resistencia interna)



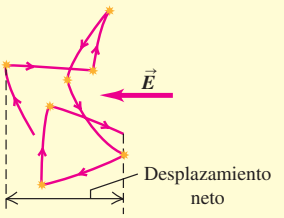
Energía y potencia en los circuitos: Un elemento de circuito con diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ y corriente I introduce energía al circuito si la dirección de la corriente es del potencial más bajo al más alto en el dispositivo, y extrae energía del circuito si la corriente es la opuesta. La potencia P (tasa de transferencia de energía) es igual al producto de la diferencia de potencial por la corriente. Un resistor siempre extrae energía eléctrica del circuito. (Véanse los ejemplos 25.9 a 25.11.)

$$P = V_{ab}I \qquad (25.17)$$
(elemento general de circuito)

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \qquad (25.18)$$
(potencia que entra en un resistor)



Conducción en los metales: La base microscópica de la conducción en los metales es el movimiento de los electrones que se desplazan con libertad por el cristal metálico, chocando con los centros iónicos del cristal. En un modelo clásico aproximado de este movimiento, la resistividad del material se relaciona con la masa del electrón, la carga, la rapidez de movimiento aleatorio, la densidad y el tiempo libre medio entre las colisiones. (Véase el ejemplo 25.12.)



Términos clave

corriente, *847*
velocidad de deriva, *847*
corriente convencional, *848*
ampere, *848*
concentración, *848*
densidad de corriente, *849*
ley de Ohm, *850*
resistividad, *851*
conductividad, *851*
coeficiente de temperatura de la resistividad, *852*
resistencia, *853*
ohm, *854*
resistor, *854*
circuito completo, *857*
fuerza electromotriz (fem), *857*
fuente de fem, *857*
resistencia interna, *859*
voltaje terminal, *859*
voltímetro, *860*
amperímetro, *860*
tiempo libre medio, *868*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La corriente que sale es igual a la corriente que entra. En otras palabras, la carga debe entrar a la bombilla con la misma rapidez con la que sale. Conforme fluye por la bombilla no "se gasta" ni se consume.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

25.1 Respuesta: v) Al duplicarse el diámetro se incrementa el área de la sección transversal A en un factor de 4. Por lo tanto, la magnitud de la densidad de corriente $J = I/A$ se reduce a $\frac{1}{4}$ del valor del ejemplo 25.1, y la magnitud de la velocidad de deriva $v_d = J/|n|q|$ se reduce en el mismo factor. La nueva magnitud es $v_d = (0.15\ \text{mm/s})/4 = 0.038\ \text{mm/s}$. Este comportamiento es el mismo que el de un fluido incompresible, que disminuye cuando pasa de un tubo estrecho a otro más ancho (véase la sección 14.4).

25.2 Respuesta: ii) La figura 25.6b indica que la resistividad ρ de un semiconductor se incrementa conforme disminuye la temperatura. De la ecuación (25.5), la magnitud de la densidad de corriente es $J = E/\rho$, por lo que la densidad de corriente disminuye a medida que la temperatura se reduce y la resistividad aumenta.

25.3 Respuesta: iii) La solución de la ecuación (25.11) para la corriente indica que $I = V/R$. Si la resistencia R del alambre permanece sin cambio, la duplicación del voltaje V haría que la corriente I también se duplicara. Sin embargo, en el ejemplo 25.3 se vio que la resistencia *no* es constante: a medida que la corriente aumenta y la temperatura se eleva, R también aumenta. Así que la duplicación del voltaje produce una corriente *menor* que el doble de la corriente original. Un conductor óhmico es aquél para el que $R = V/I$ tiene el mismo valor sin importar cuál sea el voltaje; así pues, el alambre es *no óhmico*. (En muchos problemas prácticos, el cambio de temperatura del alambre es tan pequeño que se ignora, por lo que se puede considerar sin problema que el alambre es óhmico. En casi todos los ejemplos del libro se hace así.)

25.4 Respuestas: iii), ii), i) Para el circuito i), se calcula la corriente con la ecuación (25.16): $I = \mathcal{E}/(R + r) = (1.5\ \text{V})/(1.4\ \Omega + 0.10\ \Omega) = 1.0\ \text{A}$. Para el circuito ii), se observa que el voltaje terminal $V_{ab} = 3.6\ \text{V}$ es igual al voltaje IR a través del resistor de 1.8 Ω: $V_{ab} = IR$, por lo que $I = V_{ab}/R = (3.6\ \text{V})/(1.8\ \text{V}) = 2.0\ \text{A}$. Para el circuito iii), se utiliza la ecuación (25.15) para determinar el voltaje terminal: $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$, por lo que $I = (\mathcal{E} - V_{ab})/r = (12.0\ \text{V} - 11.0\ \text{V})/(0.20\ \Omega) = 5.0\ \text{A}$.

25.5 Respuestas: iii), ii), i) Éstos son los mismos circuitos que se analizaron en Evalúe su comprensión de la sección 25.4. En cada caso, la potencia neta de salida de la batería es $P = V_{ab}I$, donde V_{ab} es el voltaje terminal de la batería. Para el circuito i), se vio que $I = 1.0\ \text{A}$, por lo que $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 1.5\ \text{V} - (1.0\ \text{A})(0.10\ \Omega) = 1.4\ \text{V}$, de manera que $P = (1.4\ \text{V})\ (1.0\ \text{A}) = 1.4\ \text{W}$. Para el circuito ii), se tiene que $V_{ab} = 3.6\ \text{V}$ y se encontró que $I = 2.0\ \text{A}$, por lo que $P = (3.6\ \text{V})\ (2.0\ \text{A}) = 7.2\ \text{W}$. Para el circuito iii), se tiene que $V_{ab} = 11.0\ \text{V}$ y se determinó que $I = 5.0\ \text{A}$, así que $P = (11.0\ \text{V})\ (5.0\ \text{A}) = 55\ \text{A}$.

25.6 Respuesta: i) La dificultad de producir cierta cantidad de corriente se incrementa conforme aumenta la resistividad ρ. De la ecuación (25.24), $\rho = m/ne^2\tau$, por lo que al aumentar la masa m se incrementará la resistividad. Esto es así porque una partícula más masiva con carga responderá con más lentitud ante la aplicación de un campo eléctrico, por lo que la deriva será más lenta. Para generar la misma corriente se necesitaría un campo eléctrico más intenso. (El aumento de n, e o τ haría que la resistividad disminuyera y sería más fácil producir una corriente dada.)

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

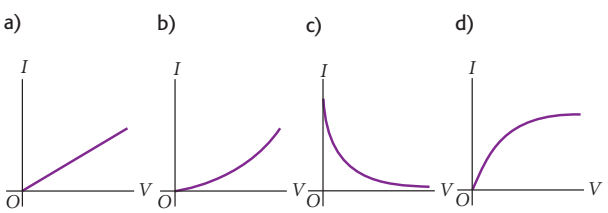
Preguntas para análisis

P25.1. La definición de resistividad ($\rho = E/J$) implica que existe un campo eléctrico dentro de un conductor. Pero en el capítulo 21 se vio que en el interior de un conductor no puede haber ningún campo eléctrico. ¿Hay alguna contradicción en esto? Dé una explicación.

P25.2. Una varilla cilíndrica tiene resistencia R. Si se triplica su longitud y diámetro, ¿cuál será su resistencia en términos de R?

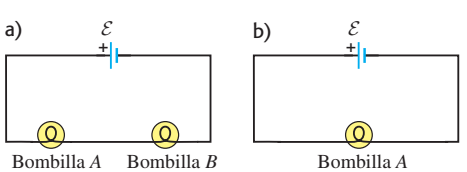
P25.3. Una varilla cilíndrica tiene una resistividad ρ. Si se triplica su longitud y diámetro, ¿cuál será su resistividad en términos de ρ?
P25.4. Dos alambres de cobre de distintos diámetros se unen por los extremos. Si una corriente fluye por la combinación de alambres, ¿qué sucede con los electrones cuando se mueven del alambre de mayor diámetro al alambre de menor diámetro? Su rapidez de deriva, ¿aumenta, disminuye o permanece sin cambio? Si la velocidad de deriva cambia, ¿cuál es la fuerza que origina el cambio? Explique su razonamiento.
P25.5. ¿Cuándo una batería AAA de 1.5 V *no* es en realidad de 1.5 V? Es decir, ¿cuándo proporcionan sus terminales una diferencia de potencial menor de 1.5 V?
P25.6. La diferencia de potencial entre las terminales de una batería, ¿puede alguna vez ser en dirección opuesta a la de la fem? Si es así, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.
P25.7. Una regla práctica que se utiliza para determinar la resistencia interna de una fuente es que ésta es igual al resultado de dividir el voltaje de circuito abierto entre la corriente del cortocircuito. ¿Esto es cierto? ¿Por qué?
P25.8. Las baterías siempre tienen rotulada su fem; por ejemplo, una batería de tamaño AA para linterna dice "1.5 volts". ¿Sería apropiado etiquetarlas también con la corriente que producen? ¿Por qué?
P25.9. Hemos visto que un coulomb es una cantidad enorme de carga; es prácticamente imposible colocar una carga de 1 C en un objeto. Sin embargo, una corriente de 10 A, o 10 C/s, es muy razonable. Explique esta discrepancia aparente.
P25.10. Los electrones en un circuito eléctrico pasan a través de un resistor. El alambre a ambos lados del resistor tiene el mismo diámetro. *a*) ¿Cómo es la rapidez de deriva de los electrones antes de que entren al resistor, en comparación con la rapidez que tienen al salir de éste? Explique su razonamiento. *b*) ¿Cómo es la energía potencial de un electrón antes de entrar en el resistor, en comparación con la que tiene después de salir del resistor? Explique su razonamiento.
P25.11. La corriente ocasiona que la temperatura de un resistor real se incremente. ¿Por qué? ¿Qué efecto tiene el calentamiento sobre la resistencia? Explique.
P25.12. ¿Cuál de las gráficas que aparecen en la figura 25.29 ilustra mejor la corriente I en un resistor real como función de la diferencia de potencial V a través suyo? Explique. (*Sugerencia:* vea la pregunta para análisis P25.11.)

Figura 25.29 Pregunta P25.12.



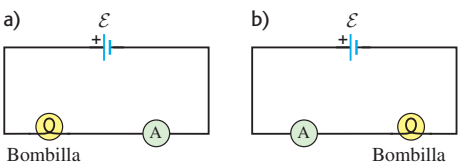
P25.13. ¿Por qué una bombilla casi siempre se funde en el momento de encender la luz, y rara vez mientras ya está encendido?
P25.14. Una bombilla brilla porque tiene resistencia; su brillo aumenta con la potencia eléctrica que disipa. *a*) En el circuito que se ilustra en la figura 25.30a, las dos bombillas A y B son idénticas. En comparación con la bombilla A, ¿la bombilla B brilla más, igual o menos? Explique su razonamiento. *b*) Se retira la bombilla B del circuito y éste se completa como se ilustra en la figura 25.30b. En comparación con el brillo de la bombilla A en la figura 25.30a, ¿ahora la bombilla A brilla más, igual o menos? Explique su razonamiento.

Figura 25.30 Pregunta P25.14.



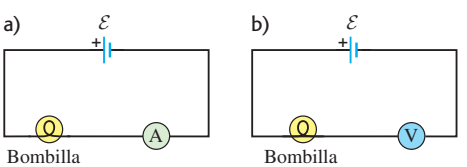
P25.15. (Véase la pregunta para análisis P25.14.) En un circuito se colocan un amperímetro ideal A, una batería y una bombilla, como se ilustra en la figura 25.31a, y se anota la lectura del amperímetro. Después, el circuito se vuelve a conectar como en la figura 23.31b, de manera que las posiciones del amperímetro y la bombilla se invierten. *a*) ¿Cómo se compara la lectura del amperímetro en la situación que se ilustra en la figura 25.31a con la de la figura 25.31b? Explique su razonamiento. *b*) ¿En qué situación brilla más la bombilla? Explique su razonamiento.

Figura 25.31 Pregunta P25.15.



P25.16. (Véase la pregunta para análisis P25.14.) ¿Brillará más una bombilla cuando se conecta a una batería como se ilustra en la figura 25.32a, con un amperímetro ideal A colocado en el circuito, o cuando se conecta como se representa en la figura 25.32b, con un voltímetro ideal V colocado en el circuito? Explique su razonamiento.

Figura 25.32 Pregunta P25.16.



P25.17. La energía que puede extraerse de una batería de almacenamiento siempre es menor que la que entra cuando se carga. ¿Por qué?
P25.18. Ocho baterías de linterna en serie tienen una fem aproximada de 12 V, como la de la batería de un automóvil. ¿Servirían para poner en marcha un vehículo cuya batería está sin carga? ¿Por qué?
P25.19. Es frecuente que los aviones pequeños tengan sistemas eléctricos de 24 V y no de 12 V como los automóviles, aun cuando los requerimientos de energía eléctrica sean aproximadamente los mismos para ambos tipos de vehículo. La explicación que dan los diseñadores de aeronaves es que un sistema de 24 V pesa menos que otro de 12 V porque en él pueden usarse alambres más delgados. Explique por qué es así.
P25.20. Las líneas de transmisión de energía eléctrica de larga distancia, siempre operan con un voltaje muy elevado, en ocasiones de hasta 750 kV. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de esto?
P25.21. Es común que las líneas eléctricas domésticas de Norteamérica operen a 120 V. ¿Por qué es deseable este voltaje en vez de otro considerablemente mayor o menor? Por otro lado, los automóviles

por lo general tienen sistemas de 12 V. ¿Por qué es conveniente este voltaje?

P25.22. Un fusible es un dispositivo diseñado para interrumpir un circuito eléctrico, por lo general haciendo que se funda cuando la corriente supera cierto valor. ¿Qué características debe tener el material con que se fabrica el fusible?

P25.23. Las fuentes de energía de alto voltaje en ocasiones se diseñan con la intención de que tengan una resistencia interna elevada, como medida de seguridad. ¿Por qué es más seguro una fuente de energía con una gran resistencia interna que una con el mismo voltaje pero con menos resistencia interna?

P25.24. En el libro se afirma que los buenos conductores térmicos también son buenos conductores eléctricos. Si esto es así, ¿por qué los cables que se utilizan para conectar tostadores, planchas y otros aparatos que producen calor, no se calientan por conducir el calor que genera el elemento calefactor?

Ejercicios

Sección 25.1 Corriente eléctrica

25.1. Una corriente de 3.6 A fluye a través de un faro de automóvil. ¿Cuántos coulombs de carga pasan por el faro en 3.0 h?

25.2. Un alambre de plata de 2.6 mm de diámetro transfiere una carga de 420 C en 80 min. La plata contiene 5.8×10^{28} electrones libres por metro cúbico. *a*) ¿Cuál es la corriente en el alambre? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de deriva de los electrones en el alambre?

25.3. Una corriente de 5.00 A corre a través de un alambre de cobre de calibre 12 (diámetro, 2.05 mm) y de una bombilla. El cobre tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico. *a*) ¿Cuántos electrones pasan por la bombilla cada segundo? *b*) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? *c*) ¿Con qué rapidez un electrón común pasa por cualquier punto dado del alambre? *d*) Si fuera a usarse un alambre con el doble del diámetro, ¿cuáles de las respuestas anteriores cambiarían? ¿Los valores aumentarían o disminuirían?

25.4. Un alambre de calibre 18 (diámetro de 1.02 mm) transporta una corriente con densidad de $1.50 \times 10^6\ \text{A/m}^2$. Calcule *a*) la corriente en el alambre y *b*) la velocidad de deriva de los electrones en el alambre.

25.5. El cobre tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico. Un alambre de cobre de calibre 12, equivalente a 2.05 mm de diámetro, y longitud de 71.0 cm, conduce 4.85 A de corriente. *a*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que un electrón recorra la longitud del alambre? *b*) Repita el inciso *a*) para un alambre de cobre de calibre 6 (diámetro, 4.12 mm) de la misma longitud y que conduce la misma corriente. *c*) En general, ¿cómo afecta a la velocidad de deriva de los electrones del alambre el cambio del diámetro de un alambre que transporta una cantidad dada de corriente?

25.6. Considere el alambre de calibre 18 del ejemplo 25.1. ¿Cuántos átomos hay en 1.00 m^3 de cobre? Con la densidad de los electrones libres dada en el ejemplo, ¿cuántos electrones libres hay por átomo de cobre?

25.7. La corriente en un alambre varía con el tiempo de acuerdo con la relación $I = 55\ \text{A} - (0.65\ \text{A/s}^2)t^2$. *a*) ¿Cuántos coulombs de carga cruzan la sección transversal del alambre en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ s y $t = 8.0$ s? *b*) ¿Qué corriente constante transportaría la misma carga en el mismo intervalo de tiempo?

25.8. Una corriente pasa a través de una solución de cloruro de sodio. En 1.00 s, llegan al electrodo negativo 2.68×10^{16} iones de Na^+, y al electrodo positivo arriban 3.92×10^{16} iones de Cl^-. *a*) ¿Cuál es la corriente que pasa entre los electrodos? *b*) ¿Cuál es la dirección de la corriente?

25.9. Suponga que en la plata metálica hay un electrón libre por átomo de plata. Calcule la densidad de los electrones libres en la plata y compárela con el valor dado en el ejercicio 25.2.

Sección 25.2 Resistividad y Sección 25.3 Resistencia

25.10. *a*) A temperatura ambiente, ¿cuál es la intensidad del campo eléctrico que se necesita generar en un alambre de cobre calibre 12 (2.05 mm de diámetro) para que fluya una corriente de 2.75 A? *b*) ¿Qué campo sería necesario si el alambre estuviera hecho de plata?

25.11. Una varilla cilíndrica de 1.50 m de largo y 0.500 cm de diámetro se conecta a una fuente de potencia que mantiene una diferencia de potencial constante de 15.0 V entre sus extremos, en tanto que un amperímetro mide la corriente que la cruza. Se observa que a temperatura ambiente (20.0 °C) el amperímetro da una lectura de 18.5 A, en tanto que a 92.0 °C arroja una lectura de 17.2 A. Se puede ignorar la expansión térmica de la varilla. Calcule *a*) la resistividad y *b*) el coeficiente de temperatura de la resistividad a 20 °C para el material de la varilla.

25.12. Un alambre de cobre tiene una sección transversal cuadrada de 2.3 mm por lado. El alambre mide 4.0 m de longitud y conduce una corriente de 3.6 A. La densidad de los electrones libres es $8.5 \times 10^{28}/\text{m}^3$. Calcule las magnitudes de *a*) la densidad de la corriente en el alambre y *b*) el campo eléctrico en el alambre. *c*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que un electrón recorra la longitud del alambre?

25.13. En un experimento realizado a temperatura ambiente, una corriente de 0.820 A fluye a través de un alambre de 3.26 mm de diámetro. Calcule la magnitud del campo eléctrico en el alambre si éste es de *a*) tungsteno y *b*) aluminio.

25.14. Un alambre de 6.50 m de largo y 2.05 mm de diámetro tiene una resistencia de 0.0290 Ω. ¿De qué material es probable que esté hecho el alambre?

25.15. Un filamento cilíndrico de tungsteno de 15.0 cm de largo y 1.00 mm de diámetro va a usarse en una máquina cuya temperatura de operación variará entre 20 °C y 120 °C. Conducirá una corriente de 12.5 A en todas las temperaturas (consulte las tablas 25.1 y 25.2). *a*) ¿Cuál será el máximo campo eléctrico en este filamento? *b*) ¿Cuál será su resistencia con ese campo? *c*) ¿Cuál será la máxima caída de potencial a todo lo largo del filamento?

25.16. ¿Qué longitud de alambre de cobre de 0.462 mm de diámetro tiene una resistencia de 1.00 Ω?

25.17. Es frecuente que en las instalaciones eléctricas domésticas se utilice alambre de cobre de 2.05 mm de diámetro. Determine la resistencia de un alambre de ese tipo con longitud de 24.0 m.

25.18. ¿Qué diámetro debe tener un alambre de cobre si su resistencia ha de ser la misma que la de uno de aluminio de la misma longitud con diámetro de 3.26 mm?

25.19. Se necesita producir un conjunto de alambres de cobre cilíndricos de 3.50 m de largo con una resistencia de 0.125 Ω cada uno. ¿Cuál será la masa de cada alambre?

25.20. Un resorte muy apretado con 75 vueltas, cada una de 3.50 cm de diámetro, está hecho de alambre metálico aislado de 3.25 mm de diámetro. Un óhmetro conectado a través de sus extremos opuestos da una lectura de 1.74 Ω. ¿Cuál es la resistividad del metal?

25.21. Un cubo de aluminio tiene lados cuya longitud es de 1.80 m. ¿Cuál es la resistencia entre dos de las caras opuestas del cubo?

25.22. Una bombilla que recibe energía de una batería tiene filamento de tungsteno. Cuando el interruptor que conecta la bombilla con la batería se enciende por primera vez y la temperatura de la bombilla es de 20 °C, la corriente en la bombilla es de 0.860 A. Una vez que la bombilla ha estado encendida durante 30 s, la corriente es de 0.220 A. Pasado ese tiempo, ¿cuál es la temperatura del filamento?

25.23. Un sólido rectangular de germanio puro mide 12 cm × 12 cm × 25 cm. Si cada una de sus caras es una superficie equipotencial, ¿cuál es la resistencia entre las caras opuestas que están separadas por *a*) la distancia más grande y *b*) la distancia más corta?

25.24. Se aplica una diferencia de potencial de 4.50 V entre los extremos de un alambre de 2.50 m de longitud y 0.654 mm de radio. La corriente resultante a través del alambre es de 17.6 A. ¿Cuál es la resistividad del alambre?

25.25. Un alambre de oro de 0.84 mm de diámetro conduce una corriente eléctrica. El campo eléctrico en el alambre es de 0.49 V/m. ¿Cuáles son *a*) la corriente que conduce el alambre; *b*) la diferencia de potencial entre dos puntos del alambre separados por una distancia de 6.4 m; *c*) la resistencia de un trozo de ese alambre de 6.4 m de longitud?

25.26. La diferencia de potencial entre puntos de un alambre separados por una distancia de 75.0 cm es de 0.938 V cuando la densidad de corriente es de 4.40×10^7 A/m^2. ¿Cuáles son *a*) la magnitud de $\vec{E}$ en el alambre y *b*) la resistividad del material con el que está hecho el alambre?

25.27. *a*) ¿Cuál es la resistencia de un alambre de nicromel a 0.0 °C si su resistencia es de 100.00 Ω a 11.5 °C? *b*) ¿Cuál es la resistencia de una varilla de carbono a 25.8 °C si su resistencia es de 0.0160 Ω a 0.0 °C?

25.28. Se va a utilizar un resistor de carbono como termómetro. En un día de invierno en el que la temperatura es de 4.0 °C, la resistencia del resistor de carbono es de 217.3 Ω. ¿Cuál es la temperatura en un día de primavera cuando la resistencia es de 215.8 Ω? (Como temperatura de referencia, tome T_0 igual a 4.0 °C.)

25.29. Un hilo de alambre tiene una resistencia de 5.60 μΩ. Calcule la resistencia neta de 120 de tales hilos *a*) si se colocan lado a lado para formar un cable de la misma longitud que un solo hilo, y *b*) si se conectan por sus extremos para formar un alambre 120 veces más largo que uno solo de los hilos.

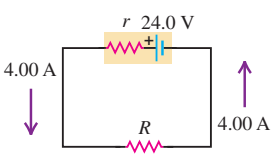
25.30. Un cilindro hueco de aluminio mide 2.50 m de largo y tiene un radio interior de 3.20 cm y un radio exterior de 4.60 cm. Considere cada superficie (interna, externa y las dos caras de los extremos) como equipotenciales. A temperatura ambiente, ¿cuál será la lectura de un óhmetro si se conecta entre *a*) las caras opuestas y *b*) las superficies interior y exterior?

Sección 25.4 Fuerza electromotriz y circuitos

25.31. Un cable de transmisión de cobre de 100 km de largo y 10.0 cm de diámetro transporta una corriente de 125 A. *a*) ¿Cuál es la caída de potencial a través del cable? *b*) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa por hora en forma de energía térmica?

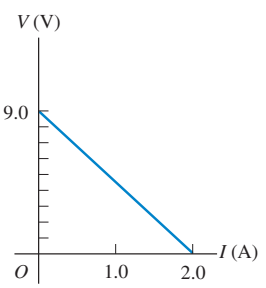
25.32. Considere el circuito que se ilustra en la figura 25.33. El voltaje terminal de la batería de 24.0 V es de 21.2 V. ¿Cuáles son *a*) la resistencia interna *r* de la batería y *b*) la resistencia *R* del resistor en el circuito?

Figura **25.33** Ejercicio 25.32.



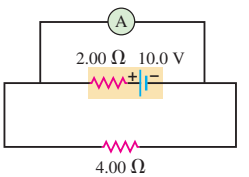
25.33. Un voltímetro idealizado se conecta a través de las terminales de una batería mientras se hace variar la corriente. La figura 25.34 muestra una gráfica de la lectura del voltímetro *V* como función de la corriente *I* a través de la batería. Calcule *a*) la fem $\mathcal{E}$ y *b*) la resistencia interna de la batería.

Figura **25.34** Ejercicio 25.33.



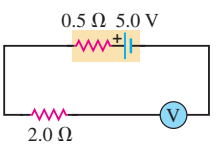
25.34. Se conecta un amperímetro idealizado a una batería, como se ilustra en la figura 25.35. Determine *a*) la lectura del amperímetro, *b*) la corriente a través del resistor de 4.00 Ω y *c*) el voltaje terminal de la batería.

Figura **25.35** Ejercicio 25.34.



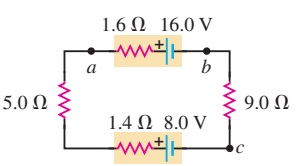
25.35. Se conecta un voltímetro ideal V a un resistor de 2.0 Ω y una batería con una fem de 5.0 V y resistencia interna de 0.5 Ω, como se indica en la figura 25.36. *a*) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 2.0 Ω? *b*) ¿Cuál es el voltaje terminal de la batería? *c*) ¿Cuál es la lectura en el voltímetro? Explique sus respuestas.

Figura **25.36** Ejercicio 25.35.



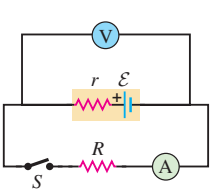
25.36. El circuito que se ilustra en la figura 25.37 incluye dos baterías, cada una con fem y resistencia interna, y dos resistores. Determine *a*) la corriente en el circuito (magnitud *y* dirección); *b*) el voltaje terminal V_{ab} de la batería de 16.0 V; *c*) la diferencia de potencial V_{ac} del punto *a* con respecto al punto *c*. *d*) Con base en la figura 25.21 como modelo, elabore la gráfica de los aumentos y las caídas del potencial en este circuito.

Figura **25.37** Ejercicios 25.36, 25.38, 25.39 y 25.48.



25.37. Cuando se abre el interruptor *S* de la figura 25.38, el voltímetro V de la batería da una lectura de 3.08 V. Cuando se cierra el interruptor, la lectura del voltímetro cae a 2.97 V, y la del amperímetro es de 1.65 A. Determine la fem, la resistencia interna de la batería y la resistencia del circuito *R*. Suponga que los dos instrumentos son ideales, por lo que no afectan el circuito.

Figura **25.38** Ejercicio 25.37.



25.38. En el circuito de la figura 25.37, el resistor de 5.0 Ω se sustituye por otro de

resistencia R desconocida. Cuando se hace esto, se conecta un voltímetro ideal a través de los puntos b y c cuya lectura es de 1.9 V. Calcule *a*) la corriente en el circuito y *b*) la resistencia R. *c*) Grafique los aumentos y las caídas de potencial en este circuito (véase la figura 25.21).

25.39. En el circuito que se ilustra en la figura 25.37, la batería de 16.0 V se retira y se vuelve a instalar con la polaridad invertida, de manera que ahora su terminal negativa está cercana al punto a. Calcule *a*) la corriente en el circuito (magnitud y dirección); *b*) el voltaje terminal V_{ab} de la batería de 16.0 V; *c*) la diferencia de potencial V_{ac} del punto a con respecto al punto c. *d*) Construya la gráfica de los aumentos y las caídas del potencial en este circuito (véase la figura 25.21).

25.40. Las siguientes mediciones se efectuaron en un resistor de Thyrite:

I (A)	0.50	1.00	2.00	4.00
V_{ab} (V)	2.55	3.11	3.77	4.58

(*a*) Grafique V_{ab} como función de I. *b*) ¿El Thyrite obedece la ley de Ohm? ¿Cómo podría saberse? *c*) Elabore la gráfica de la resistencia $R = V_{ab}/I$ como función de I.

25.41. Se efectuaron las siguientes mediciones de corriente y diferencia de potencial en un resistor hecho con alambre de nicromel:

I (A)	0.50	1.00	2.00	4.00
V_{ab} (V)	1.94	3.88	7.76	15.52

a) Grafique V_{ab} como función de I. *b*) ¿El nicromel obedece la ley de Ohm? ¿Cómo se puede saber? *c*) ¿Cuál es la resistencia del resistor expresada en ohms?

Sección 25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos

25.42. Un resistor con diferencia de potencial de 15.0 V a través de sus extremos desarrolla energía térmica a una tasa de 327 W. *a*) ¿Cuál es su resistencia? *b*) ¿Cuál es la corriente en el resistor?

25.43. Bombillas eléctricas. La especificación de la potencia de una bombilla eléctrica (como las comunes de 100 W) es la potencia que disipa cuando se conecta a través de una diferencia de potencial de 120 V. ¿Cuál es la resistencia de *a*) una bombilla de 100 W y *b*) una bombilla de 60 W? *c*) ¿Cuánta corriente pasa por cada tipo de bombilla en su uso normal?

25.44. Si se conecta una bombilla eléctrica de "75 W" (véase el problema 25.43) a través de una diferencia de potencial de 220 V (como en Europa), ¿cuánta potencia disipa?

25.45. Bombilla eléctrica europea. En Europa el voltaje estándar doméstico es de 220 V y no de 120 V, como en Estados Unidos. Por consiguiente, se entiende que una bombilla europea de "100 W" se usaría con una diferencia de potencial de 220 V (véase el problema 25.44). *a*) Si se lleva una bombilla europea de "100 W" a un hogar estadounidense, ¿cuál debería ser su especificación en Estados Unidos? *b*) ¿Cuánta corriente tomaría la bombilla europea de 100 W al usarse normalmente en Estados Unidos?

25.46. El receptor de un sistema de posicionamiento global (GPS), que funciona con baterías, opera a 9.0 V y toma una corriente de 0.13 A. ¿Cuánta energía eléctrica consume en 1.5 h?

25.47. Considere un resistor con longitud L, sección transversal A uniforme, y resistividad ρ uniforme, que conduce una corriente con densidad uniforme J. Use la ecuación (25.18) para calcular la energía eléctrica disipada por unidad de volumen, ρ. Exprese el resultado en términos de *a*) E y J; *b*) J y ρ; *c*) E y ρ.

25.48. Considere el circuito de la figura 25.37. *a*) ¿Cuál es la tasa total a la que se disipa la energía eléctrica en los resistores de 5.00 Ω y 9.00 Ω? *b*) ¿Cuál es la potencia de salida de la batería de 16.0 V? *c*) ¿A qué tasa se convierte la energía eléctrica en otras formas en la batería de 8.0 V? *d*) Demuestre que la potencia de salida de la batería de 16.0 V es igual a la tasa total de disipación de energía eléctrica en el resto del circuito.

25.49. La capacidad de un acumulador, como los que se utilizan en los sistemas eléctricos de los automóviles, se especifica en amperes-hora (A · h). Un acumulador de 50 A · h puede suministrar una corriente de 50 A durante 1.0 h, o de 25 A durante 2.0 h, y así sucesivamente. *a*) ¿Cuál es el total de energía que puede suministrar un acumulador de 12 V y 60 A · h si su resistencia interna es insignificante? *b*) ¿Qué volumen de gasolina (en litros) tiene un calor total de combustión que es igual a la energía obtenida en el inciso *a*)? (Consulte la sección 17.6; la densidad de la gasolina es 900 kg/m^3.) *c*) Si un generador con potencia de salida eléctrica media de 0.45 kW se conecta al acumulador, ¿cuánto tiempo se requerirá para que el acumulador se cargue por completo?

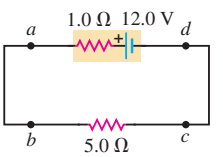
25.50. En el circuito analizado en el ejemplo 25.9, se sustituye el resistor de 4.0 Ω por otro de 8.0 Ω, como en el ejemplo 25.10. *a*) Calcule la tasa de conversión de energía química a energía eléctrica en la batería. ¿Cómo se compara su respuesta con el resultado obtenido en el ejemplo 25.9? *b*) Calcule la tasa de disipación de energía eléctrica en la resistencia interna de la batería. ¿Cómo se compara su respuesta con el resultado que obtuvo en el ejemplo 25.9? *c*) Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para calcular la potencia de salida neta de la batería. ¿Cómo se compara el resultado con la energía eléctrica disipada en el resistor de 8.0 Ω, según se calculó para este circuito en el ejemplo 25.10?

25.51. Se conecta una bombilla de 25.0 Ω a través de las terminales de una batería de 12.0 V que tiene una resistencia interna de 3.50 Ω. ¿Qué porcentaje de la potencia de la batería se disipa a través de la resistencia interna, por lo que no está disponible para la bombilla?

25.52. Se conecta un voltímetro ideal a través de las terminales de una batería de 15.0 V, y también un aparato con resistencia de 75.0 Ω, a través de las terminales. Si el voltímetro da una lectura de 11.3 V: *a*) ¿cuánta potencia disipa el aparato y *b*) cuál es la resistencia interna de la batería?

25.53. En el circuito de la figura 25.39, calcule *a*) la tasa de conversión de la energía interna (química) a energía eléctrica dentro de la batería; *b*) la tasa de disipación de la energía eléctrica en la batería; *c*) la tasa de disipación de la energía eléctrica en el resistor externo.

Figura **25.39**
Ejercicio 25.53.



25.54. Una pequeña linterna común contiene dos baterías, cada una con fem de 1.5 V, conectadas en serie con una bombilla que tiene resistencia de 17 Ω. *a*) Si la resistencia interna de las baterías es despreciable, ¿cuánta energía se entrega a la bombilla? *b*) Si las baterías duran 5.0 horas, ¿cuál es la energía total que se proporciona a la bombilla? *c*) La resistencia de las baterías reales se incrementa a medida que se consumen. Si la resistencia interna inicial es despreciable, ¿cuál es la resistencia interna combinada de ambas baterías cuando la energía que va a la bombilla ha disminuido a la mitad de su valor inicial? (Suponga que la resistencia de la bombilla es constante. En realidad, cambiará algo cuando cambie la corriente que pasa por el filamento, ya que esto altera la temperatura del filamento y, por lo tanto, su resistividad.)

25.55. Un calentador eléctrico de "540 W" está diseñado para operar en líneas de 120 V. *a*) ¿Cuál es su resistencia? *b*) ¿Cuál es la corriente que toma? *c*) Si el voltaje en la línea disminuye a 110 V, ¿cuánta energía toma el calentador? (Suponga que la resistencia es constante. La realidad es que se modificará debido al cambio de temperatura.) *d*) Las bobinas del calentador son metálicas, por lo que la resistencia del calentador se reduce al disminuir la temperatura. Si se toma en cuenta el cambio de la resistencia con la temperatura, ¿la energía eléctrica consumida por el calentador será mayor o menor de lo que se calculó en el inciso *c*)? Explique su respuesta.

*Sección 25.6 Teoría de la conducción metálica

***25.56.** El silicio puro contiene aproximadamente 1.0×10^{16} electrones libres por metro cúbico. *a*) Consulte la tabla 25.1 para calcular el tiempo libre medio τ del silicio a temperatura ambiente. *b*) Su respuesta para el inciso *a*) es un valor mucho mayor que el tiempo libre medio del cobre dado en el ejemplo 25.12. Entonces, ¿por qué el silicio puro tiene una resistividad tan grande en comparación con la del cobre?

Problemas

25.57. Un conductor eléctrico diseñado para transportar corrientes grandes tiene una sección transversal circular de 2.50 mm de diámetro y 14.0 m de longitud. La resistencia entre sus extremos es de 0.104 Ω. *a*) ¿Cuál es la resistividad del material? *b*) Si la magnitud del campo eléctrico en el conductor es de 1.28 V/m, ¿cuál es la corriente total? *c*) Si el material tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico, calcule la rapidez de deriva media en las condiciones descritas en el inciso *b*).

25.58. Un tubo de plástico de 25.0 m de longitud y 4.00 cm de diámetro se sumerge en una solución de plata, y se deposita una capa uniforme de plata de 0.100 mm de espesor sobre la superficie exterior del tubo. Si este tubo recubierto se conecta a través de una batería de 12.0 V, ¿cuál será la corriente?

25.59. En su primer día de trabajo como técnico electricista, se le pide que determine la resistencia por metro de un elemento largo de alambre. La compañía que lo emplea tiene poco equipo. Usted encuentra una batería, un voltímetro y un amperímetro, pero no un instrumento que mida la resistencia directamente (un óhmetro). Usted conecta los alambres del voltímetro a las terminales de la batería y la lectura es de 12.6 V. Corta 20.0 m del alambre y lo conecta a la batería, con un amperímetro en serie para medir la corriente en el alambre. El amperímetro da una lectura de 7.00 A. Después corta un trozo de alambre de 40.0 m de longitud y lo conecta a la batería, de nuevo con el amperímetro en serie para medir la corriente, y la lectura que se obtiene es de 4.20 A. Aun cuando el equipo de que dispone es muy limitado, su jefe le asegura que es de alta calidad: la resistencia del amperímetro es muy pequeña y la del voltímetro muy grande. ¿Cuál es la resistencia de 1 metro de alambre?

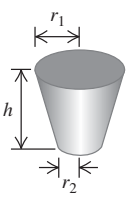
25.60. Se fabrica un trozo de 2.0 m de alambre soldando el extremo de un alambre de plata de 120 cm de largo con el extremo de un alambre de cobre de 80 cm. Cada pieza de alambre tiene 0.60 mm de diámetro. El alambre está a temperatura ambiente, por lo que sus resistividades son las que se dan en la tabla 25.1. Entre los extremos del alambre compuesto de 2.0 m de largo se mantiene una diferencia de potencial de 5.0 V. *a*) ¿Cuál es la corriente en la sección de cobre? *b*) ¿Cuál es la corriente en la sección de plata? *c*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en el cobre? *d*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la plata? *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la sección de plata del alambre?

25.61. Un alambre de cobre de 3.00 m de longitud a 20 °C está compuesto por dos secciones: una de 1.20 m de largo con diámetro de 1.60 mm, y otra de 1.80 m de longitud con diámetro de 0.80 mm. En la sección de 1.60 mm de diámetro, hay una corriente de 2.5 mA. *a*) ¿Cuál es la corriente en la sección de 0.80 mm de diámetro? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la sección con diámetro de 1.60 mm? *c*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la sección con 0.80 mm de diámetro? *d*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos del alambre de 3.00 m de longitud?

25.62. Densidad crítica de corriente en los superconductores. Un problema con algunos de los superconductores de alta temperatura más recientes es obtener una densidad de corriente suficientemente grande para el uso práctico sin que reaparezca la resistencia. La densidad máxima de corriente para la que el material seguirá siendo superconductor se llama densidad crítica de corriente del material. En 1987 los laboratorios de investigación de IBM produjeron películas delgadas con densidades críticas de corriente de 1.0×10^5 A/cm^2. *a*) ¿Cuánta corriente podría conducir un alambre de calibre 18 (véase el ejemplo 25.1 de la sección 25.1) de este material sin dejar de ser superconductor? *b*) Los investigadores intentan desarrollar superconductores con densidades críticas de corriente de 1.0×10^6 A/cm^2. ¿Qué diámetro de alambre cilíndrico de ese material se necesitaría para conducir 1000 A sin que se pierda la superconductividad?

25.63. Un material con resistividad ρ tiene forma de cono truncado sólido de altura h y radios r_1 y r_2 en los extremos (figura 25.40). *a*) Calcule la resistencia del cono entre las dos caras planas. (*Sugerencia:* imagine que rebana el cono en discos muy delgados y calcula la resistencia de uno.) *b*) Demuestre que su resultado concuerda con la ecuación (25.10) cuando $r_1 = r_2$.

Figura **25.40** Problema 25.63.



25.64. La región entre dos esferas conductoras concéntricas con radios a y b se encuentra llena de un material conductor cuya resistividad es ρ. *a*) Demuestre que la resistencia entre las esferas está dada por

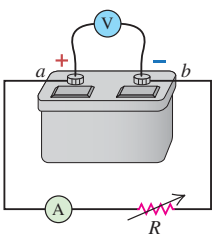
$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b) Obtenga una expresión para la densidad de corriente como función del radio, en términos de la diferencia de potencial V_{ab} entre las esferas. *c*) Demuestre que el resultado del inciso *a*) se reduce a la ecuación (25.10) cuando la separación $L = b - a$ entre las esferas es pequeña.

25.65. Fuga en un dieléctrico. Dos placas paralelas de un capacitor tienen cargas iguales y opuestas Q. El dieléctrico tiene una constante dieléctrica K y resistividad ρ. Demuestre que la "fuga" de corriente I conducida por el dieléctrico está dada por $I = Q/K\epsilon_0\rho$.

25.66. En el circuito que se ilustra en la figura 25.41, R es un resistor variable cuyo valor varía entre 0 y ∞, y a y b son las terminales de una batería con fem $\mathcal{E} =$ 15.0 V y resistencia interna de 4.00 Ω. El amperímetro y el voltímetro son instrumentos idealizados. Si R varía en todo el intervalo de valores, ¿cuáles serían las lecturas máxima y mínima de *a*) el voltímetro y *b*) el amperímetro? *c*) Elabore gráficas cualitativas de las lecturas de los dos instrumentos como funciones de R conforme R varía de 0 a ∞.

Figura **25.41** Problema 25.66.

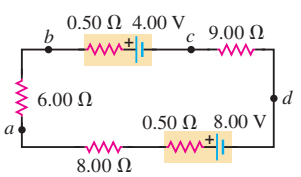


25.67. El coeficiente de temperatura de la resistencia α en la ecuación (25.12) es igual al coeficiente de temperatura de la resistividad α en la ecuación (25.6) sólo si el coeficiente de expansión térmica es pequeño. Una columna cilíndrica de mercurio está en un tubo vertical de vidrio. A 20 °C su altura es de 12.0 cm. El diámetro de la columna de mercurio es de 1.6 mm y no cambia con la temperatura porque el vidrio tiene

un coeficiente pequeño de expansión térmica. El coeficiente de expansión volumétrica del vidrio se da en la tabla 17.2, su resistividad a 20 °C se especifica en la tabla 25.1, y su coeficiente de temperatura de la resistividad se encuentra en la tabla 25.2. *a*) A 20 °C, ¿cuál es la resistencia entre los extremos de la columna de mercurio? *b*) La columna de mercurio se calienta a 60 °C. ¿Cuál es el cambio en su resistividad? *c*) ¿Cuál es el cambio en su longitud? Explique por qué es el coeficiente de expansión volumétrica, y no el coeficiente de expansión lineal, el que determina el cambio en la longitud. *d*) ¿Cuál es el cambio en su resistencia? [*Sugerencia:* como los cambios porcentuales en ρ y L son pequeños, sería de ayuda obtener de la ecuación (25.10) una ecuación para ΔR en términos de $\Delta\rho$ y ΔL.] *e*) ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistencia α para la columna de mercurio, como se define en la ecuación (25.12)? ¿Cómo se compara este valor con el coeficiente de temperatura de la resistividad? ¿Es importante el efecto del cambio en la longitud?

25.68. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{ad} en el circuito de la figura 25.42? *b*) ¿Cuál es el voltaje terminal de la batería de 4.00 V? *c*) En el punto *d* del circuito se insertan una batería con fem de 10.30z V y una resistencia interna de 0.50 Ω, con su terminal negativa conectada a la terminal negativa de la batería de 8.00 V. Ahora, ¿cuál es la diferencia de potencial V_{bc} entre las terminales de la batería de 4.00 V?

Figura 25.42 Problema 25.68.



25.69. La diferencia de potencial a través de las terminales de una batería es 8.4 V cuando en ésta hay una corriente de 1.50 A de la terminal negativa a la positiva. Cuando la corriente es 3.50 A en la dirección inversa, la diferencia de potencial es de 9.4 V. *a*) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? *b*) ¿Cuál es la fem de la batería?

25.70. Una persona cuya resistencia corporal medida entre sus manos es de 10 kΩ toma por accidente las terminales de una fuente de energía de 14 kV. *a*) Si la resistencia interna de la fuente de energía es 2000 Ω, ¿cuál es la corriente a través del cuerpo de la persona? *b*) ¿Cuál es la potencia disipada en su cuerpo? *c*) Si la fuente de energía debe hacerse segura incrementando su resistencia interna, ¿de cuánto debe ser la resistencia interna para que la máxima corriente en la situación anterior sea de 1.00 mA o menos?

25.71. La resistividad general media del cuerpo humano (aparte de la resistencia superficial de la piel) es alrededor de 5.0 Ω · m. La trayectoria de conducción entre las manos puede representarse aproximadamente como un cilindro de 1.6 m de largo y 0.10 m de diámetro. La resistencia de la piel se vuelve despreciable si se sumergen las manos en agua salada. *a*) ¿Cuál es la resistencia entre las manos si la resistencia de la piel es despreciable? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial que se necesita entre las manos para que haya una descarga de corriente letal de 100 mA? (Observe que el resultado demuestra que las pequeñas diferencias de potencial producen corrientes peligrosas si la piel está húmeda.) *c*) Con la corriente que se calculó en el inciso *b*), ¿cuánta potencia se disipa en el cuerpo?

25.72. El costo común de la energía eléctrica es de $0.12 por kilowatt-hora. *a*) Algunas personas mantienen encendido todo el tiempo una lámpara cerca de la puerta de entrada. ¿Cuál es el costo anual de tener encendida una bombilla de 75 W día y noche? *b*) Suponga que su refrigerador utiliza 400 W de potencia cuando está en operación, y que funciona 8 horas al día. ¿Cuál es su costo anual de operación?

25.73. La batería de 12.6 V de un automóvil tiene una resistencia interna despreciable y se conecta a una combinación en serie de un resistor de 3.2 Ω que obedece la ley de Ohm y a un termistor que no obedece la ley de Ohm, sino que sigue la relación $V = \alpha I + \beta I^2$ entre la corriente y el voltaje, con $\alpha = 3.8\ \Omega$ y $\beta = 1.3\ \Omega/\text{A}$. ¿Cuál es la corriente a través del resistor de 3.2 Ω?

25.74. Un cable cilíndrico de cobre que mide 1.50 km de longitud está conectado a través de una diferencia de potencial de 220.0 V. *a*) ¿Cuál debería ser el diámetro de manera que genere calor a una tasa de 50.0 W? *b*) En estas condiciones, ¿cuál es el campo eléctrico en el interior de un cable?

25.75. Amperímetro no ideal. A diferencia del amperímetro idealizado descrito en la sección 25.4, cualquier amperímetro real tiene una resistencia distinta de cero. *a*) Un amperímetro con resistencia R_A se conecta en serie con un resistor R y una batería con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r. La corriente medida por el amperímetro es I_A. Calcule la corriente a través del circuito si se retira el amperímetro de manera que la batería y el resistor formen un circuito completo. Exprese su respuesta en términos de I_A, r, R_A y R. Cuanto más "ideal" sea el amperímetro, menor será la diferencia entre esta corriente y la corriente I_A. *b*) Si $R = 3.80\ \Omega$, $\mathcal{E} = 7.50$ V y $r = 0.45\ \Omega$, calcule el valor máximo de la resistencia del amperímetro R_A, de manera que I_A esté dentro del 1.0% de la corriente en el circuito cuando no hay amperímetro. *c*) Explique por qué la respuesta del inciso *b*) representa un valor *máximo*.

25.76. Un cilindro de 1.50 m de largo y 1.10 cm de radio está hecho de una complicada mezcla de materiales. Su resistividad depende de la distancia x desde el extremo izquierdo, y obedece a la fórmula $\rho(x) = a + bx^2$, donde a y b son constantes. En el extremo de la izquierda, la resistividad es de $2.25 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, en tanto que en el extremo derecho es de $8.50 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. ¿Cuál es la resistencia de esta varilla? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en su punto medio si conduce una corriente de 1.75 A? *c*) Si se corta la varilla en dos mitades de 75.0 cm, ¿cuál es la resistencia de cada una?

25.77. De acuerdo con el Código Eléctrico Nacional de Estados Unidos, no está permitido que el alambre de cobre que se utiliza en las instalaciones interiores de viviendas, hoteles, oficinas y plantas industriales conduzca más de cierta cantidad máxima de corriente especificada. La siguiente tabla indica la corriente máxima $I_{\text{máx}}$ para varios calibres de alambre con aislador de cambray barnizado. El "calibre del alambre" es una especificación utilizada para describir el diámetro de los alambres. Observe que cuanto mayor es el diámetro, *menor* es el calibre.

Calibre del alambre	Diámetro (cm)	$I_{\text{máx}}$ (A)
14	0.163	18
12	0.205	25
10	0.259	30
8	0.326	40
6	0.412	60
5	0.462	65
4	0.519	85

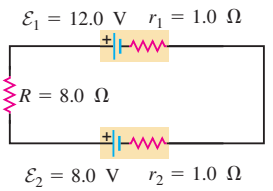
a) ¿Qué consideraciones determinan la capacidad máxima de conducción de corriente de una instalación doméstica? *b*) A través del cableado de una vivienda va a suministrarse un total de 4200 W de potencia a los aparatos eléctricos del hogar. Si la diferencia de potencial a través del conjunto de aparatos es de 120 V, determine el calibre del alambre más delgado permisible que puede utilizarse. *c*) Suponga que el alambre usado en esta casa es del calibre que se calculó en el inciso *b*) y tiene longitud total de 42.0 m. ¿A qué tasa se disipa la energía en el cableado? *d*) La casa está construida en una comunidad en la que el costo de la energía eléctrica es de $0.11 por kilowatt-hora. Si la vivienda se equipa con alambre del calibre más grande siguiente que el

calculado en el inciso *b*), ¿cuáles serían los ahorros en el costo de la electricidad durante un año? Suponga que los aparatos se mantienen encendidos un promedio de 12 horas al día.

25.78. Un tostador que usa un elemento calefactor de nicromel opera a 120 V. Cuando la temperatura ambiente es de 20 °C y el aparato está conectado, el elemento calefactor conduce una corriente inicial de 1.35 A. Algunos segundos más tarde, la corriente alcanza un valor estable de 1.23 A. *a*) ¿Cuál es la temperatura final del elemento? El valor medio del coeficiente de temperatura de la resistividad para el nicromel en el intervalo de temperatura es de $4.5 \times 10^{-4}\ (\text{C°})^{-1}$. *b*) ¿Cuál es la energía que se disipa en el elemento calefactor al inicio y cuando la corriente alcanza un valor estable?

25.79. En el circuito de la figura 25.43, calcule *a*) la corriente a través del resistor de 8.0 Ω y *b*) la tasa total de disipación de energía eléctrica en el resistor de 8.0 Ω y en la resistencia interna de las baterías. *c*) En una de las baterías, la energía química se convierte en energía eléctrica. ¿En cuál pasa esto y con qué rapidez? *d*) En una de las baterías la energía eléctrica se convierte en energía química. ¿En cuál ocurre esto y con qué rapidez? *e*) Demuestre que en el circuito la tasa total de producción de energía eléctrica es igual a la tasa total de consumo de energía eléctrica.

Figura **25.43** Problema 25.79.



25.80. Un relámpago azota el extremo de un pararrayos de acero y produce una corriente de 15,000 A que dura 65 μs. El pararrayos mide 2.0 m de altura y 1.8 cm de diámetro, y su extremo inferior está conectado a tierra por medio de un alambre de cobre de 8.0 mm de diámetro. *a*) Calcule la diferencia de potencial entre la parte superior del pararrayos de acero y el extremo inferior del alambre de cobre durante la corriente. *b*) Determine la energía total que se deposita en el pararrayos y en el alambre por la corriente.

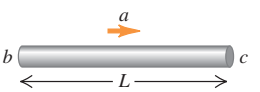
25.81. Una batería de 12.0 V tiene una resistencia interna de 0.24 Ω y capacidad de 50.0 A · h (véase el ejercicio 25.49). La batería se carga haciendo pasar una corriente de 10 A a través de ella durante 5.0 h. *a*) ¿Cuál es el voltaje terminal durante el proceso de carga? *b*) ¿Cuál es el total de energía eléctrica que se suministra a la batería durante la carga? *c*) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en la resistencia interna mientras se carga la batería? *d*) Se descarga por completo la batería a través de un resistor, de nuevo con una corriente constante de 10 A. ¿Cuál es la resistencia externa del circuito? *e*) ¿Cuánta energía eléctrica se suministra en total al resistor externo? *f*) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en total en la resistencia interna? *g*) ¿Por qué no son iguales las respuestas a los incisos *b*) y *e*)?

25.82. Repita el problema 25.81 con corrientes de carga y descarga de 30 A. Los tiempos de carga y descarga ahora son de 1.7 h en vez de 5.0 h. ¿Cuáles son las diferencias que observa en el rendimiento?

Problemas de desafío

25.83. En 1916 el *experimento Tolman-Stewart* demostró que las cargas libres en un metal tienen carga negativa y proporcionan una medición cuantitativa de su razón carga-masa, $|q|/m$. El experimento consistió en detener en forma abrupta un carrete de alambre que giraba con rapidez y medir la diferencia de potencial que esto producía entre los extremos del alambre. En un modelo simplificado de este experimento, considere una varilla metálica de longitud L a la que se imparte una aceleración uniforme $\vec{a}$ a la derecha. Al inicio, las cargas libres en el metal se retrasan con respecto al movimiento de la varilla y crean un campo eléctrico $\vec{E}$ en la varilla. En el estado estable, este campo ejerce una fuerza sobre las cargas libres que las acelera junto con la varilla. *a*) Aplique la expresión $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a las cargas libres con la finalidad de obtener una expresión para $|q|/m$ en términos de las magnitudes del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ y la aceleración $\vec{a}$. *b*) Si todas las cargas libres en la varilla metálica tienen la misma aceleración, el campo eléctrico $\vec{E}$ es el mismo en todos los puntos de la varilla. Con base en este hecho, reescriba la expresión para $|q|/m$ en términos del potencial V_{bc} entre los extremos de la varilla (figura 25.44). *c*) Si las cargas libres son negativas, ¿cuál extremo de la varilla, *b* o *c*, está a un potencial mayor? *d*) Si la varilla mide 0.50 m de largo y las cargas libres son electrones (carga $q = -1.60 \times 10^{-19}$ C, masa de 9.11×10^{-31} kg), ¿cuál es la magnitud de la aceleración que se requiere para producir una diferencia de potencial de 1.0 mV entre los extremos de la varilla? *e*) Analice por qué en el experimento real se utilizó un carrete giratorio de alambre delgado y no una varilla móvil como en nuestro análisis simplificado.

Figura **25.44** Problema de desafío 25.83.

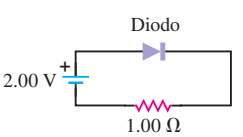


25.84. La relación entre la corriente y el voltaje de un diodo semiconductor está dada por

$$I = I_S\left[\exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1\right]$$

donde I y V son respectivamente la corriente y el voltaje a través del diodo. I_s es una constante característica del dispositivo, e es la magnitud de la carga del electrón, k es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura Kelvin. El diodo está conectado en serie con un resistor con $R = 1.00\ \Omega$ y una batería con $\mathcal{E} = 2.00$ V. La polaridad de la batería es tal que la corriente que pasa por el diodo va hacia delante (figura 25.45). La batería tiene resistencia interna despreciable. *a*) Obtenga una ecuación para V. Observe que no es posible despejar V algebraicamente. *b*) El valor de V debe obtenerse con métodos numéricos. Un enfoque es probar un valor de V y observar lo que ocurre en los lados izquierdo y derecho de la ecuación, luego se usa esto para mejorar la selección de V. Con $I_s = 1.50$ mA y $T = 293$ K, obtenga una solución (exacta hasta tres cifras significativas) para la caída del voltaje V a través del diodo y la corriente I que pasa por éste.

Figura **25.45** Problema de desafío 25.84.



25.85. La resistividad de un semiconductor se puede modificar si se agregan diferentes cantidades de impurezas. Una varilla de material semiconductor de longitud L y área de sección transversal A se localiza sobre el eje x, entre $x = 0$ y $x = L$. El material obedece la ley de Ohm, y su resistividad varía a lo largo de la varilla según la expresión $\rho(x) = \rho_0 \exp(-x/L)$. El extremo de la varilla en $x = 0$ está a un potencial V_0 mayor que el extremo en $x = L$. *a*) Calcule la resistencia total de la varilla y la corriente en ella. *b*) Encuentre la magnitud del campo eléctrico

$E(x)$ en la varilla como función de x. *c*) Determine el potencial eléctrico $V(x)$ en la varilla como función de x. *d*) Elabore la gráfica de las funciones $\rho(x)$, $E(x)$ y $V(x)$ para valores de x entre $x = 0$ y $x = L$.

25.86. Una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r está conectada a un circuito externo. *a*) Demuestre que la potencia de salida de la fuente es máxima cuando la corriente en el circuito es la mitad de la corriente de cortocircuito de la fuente. *b*) Si el circuito externo consiste en una resistencia R, demuestre que la potencia de salida es máxima cuando $R = r$ y que la potencia máxima es $\mathcal{E}^2/4r$.

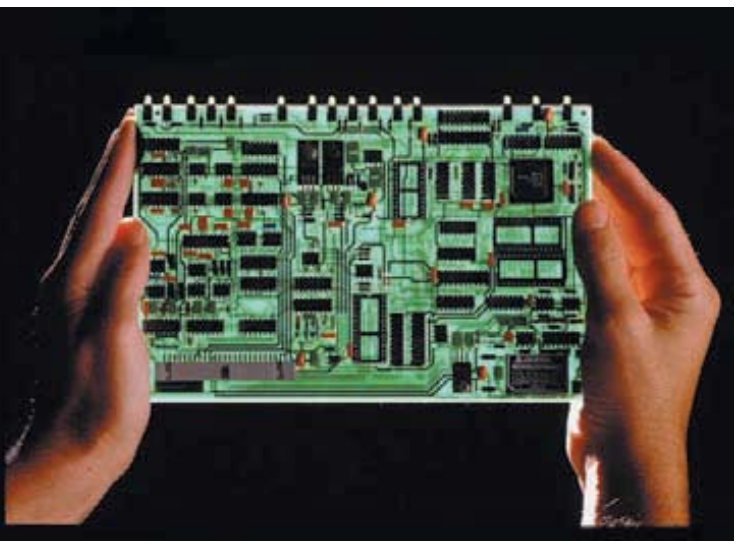
25.87. El coeficiente de temperatura de la resistividad α está dado por

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

donde ρ es la resistividad a la temperatura T. Por lo tanto, se cumple la ecuación (25.6) si se supone que α es constante y mucho más pequeña que $(T - T_0)^{-1}$. *a*) Si α no es constante, pero está dada por $\alpha = -n/T$, donde T es la temperatura Kelvin y n es una constante, demuestre que la resistividad está dada por $\rho = a/T^n$, donde a es una constante. *b*) En la figura 25.10, se observa que esa relación puede usarse como una aproximación para un semiconductor. Utilizando los valores de ρ y α que se dan para el carbono en las tablas 25.1 y 25.2, determine a y n. (En la tabla 25.1, suponga que "temperatura ambiente" significa 293 K.) *c*) Con base en el resultado del inciso *b*), determine la resistividad del carbono a -196 °C y 300 °C. (Recuerde expresar T en kelvin.)

CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

26



? En un circuito complejo como el de esta tarjeta de circuito, ¿es posible conectar varios resistores con diferentes resistencias de manera que todos tengan la misma diferencia de potencial? De ser así, ¿la corriente será la misma a través de todos los resistores?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- A analizar circuitos con resistores múltiples conectados en serie o en paralelo.
- Las reglas aplicables a cualquier circuito con más de una espira.
- A utilizar amperímetros, voltímetros, óhmetros o potenciómetros en un circuito.
- A analizar circuitos que incluyan tanto un resistor como un capacitor.
- Cómo se distribuye la energía en eléctrica en el hogar.

Si mira el interior de su televisor, computadora o equipo estereofónico, o bajo el capó de un automóvil, encontrará circuitos mucho más complejos que los que se estudiaron en el capítulo 25. Ya sea que estén conectados mediante alambres o integrados en un chip, es frecuente que estos circuitos incluyan varias fuentes, resistores y otros elementos, como capacitores, transformadores y motores, interconectados en una *red*.

En este capítulo estudiaremos métodos generales para analizar esas redes, incluso cómo calcular voltajes, corrientes y propiedades de elementos de circuito. Aprenderemos a determinar la resistencia equivalente para varios resistores conectados en serie o en paralelo. Para redes más generales necesitamos dos reglas llamadas *reglas de Kirchhoff*. Una se basa en el principio de conservación de la carga aplicado a una unión o confluencia de dos o más vías; la otra se deriva de la conservación de la energía para una carga que se desplaza por una espira cerrada. Se estudiarán instrumentos para medir varias cantidades eléctricas. También se analizará un circuito que contiene resistencia y capacitancia, en el que la corriente varía con el tiempo.

Nuestro objetivo principal en este capítulo se centra en los circuitos de **corriente directa** (cd), en los que el sentido de la corriente no cambia con el tiempo. Las linternas y los sistemas eléctricos de automóviles son ejemplos de circuitos de corriente directa. La energía eléctrica doméstica se suministra en forma de **corriente alterna** (ca), en la que la corriente oscila hacia delante y atrás. Los mismos principios para analizar redes se aplican a ambas clases de circuitos. El capítulo concluye con una mirada a los sistemas de cableado doméstico. En el capítulo 31 se estudiarán con detalle los circuitos de corriente alterna.

26.1 Resistores en serie y en paralelo

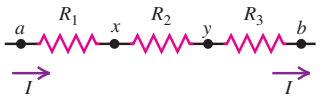
Los resistores se encuentran en toda clase de circuitos, desde secadoras para el cabello y calentadores espaciales hasta circuitos que limitan o dividen la corriente, o reducen o dividen un voltaje. Es frecuente que tales circuitos contengan varios resistores, por lo que es apropiado considerarlos como *combinaciones* de resistores. Un ejemplo sencillo es una guirnalda de bombillas eléctricas de las que se usan en la decoración

Activ Physics ONLINE

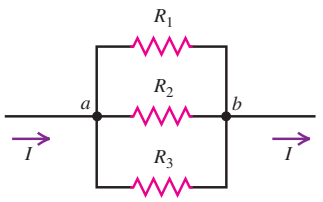
12.1 Circuitos de CD en serie (cualitativos)

26.1 Cuatro diferentes formas de conectar tres resistores.

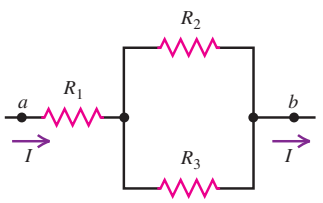
a) R_1, R_2 y R_3 en serie



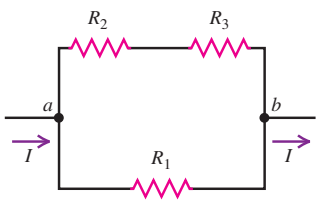
b) R_1, R_2 y R_3 en paralelo



c) R_1 en serie con una combinación en paralelo de R_2 y R_3



d) R_1 en paralelo con una combinación en serie de R_2 y R_3



navideña; cada bombilla actúa como resistor, y desde la perspectiva del análisis de circuitos una guirnalda de bombillas tan sólo es una combinación de resistores.

Suponga que se tienen tres resistores con resistencias R_1, R_2 y R_3. La figura 26.1 muestra cuatro formas diferentes en que éstos se pueden conectar entre los puntos a y b. Cuando se conectan en secuencia varios elementos de circuito, como resistores, baterías y motores —como en la figura 26.1a— con una sola trayectoria de corriente entre los puntos, se dice que están conectados **en serie**. En la sección 24.2 se estudiaron los *capacitores* en serie; vimos que, en virtud del principio de conservación de la carga, todos tenían la misma carga si al principio se hallaban descargados. Es frecuente que al estudiar circuitos estemos más interesados en la *corriente*, que es el flujo de carga por unidad de tiempo.

Se dice que los resistores de la figura 26.1b están conectados **en paralelo** entre los puntos a y b. Cada resistor ofrece una trayectoria alternativa entre los puntos. Para los elementos de circuito conectados en paralelo, la *diferencia de potencial* es la misma a través de cada elemento. En la sección 24.2 se estudiaron los capacitores en paralelo.

En la figura 26.1c, los resistores R_2 y R_3 están en paralelo, y esta combinación está en serie con R_1. En la figura 26.1d, R_2 y R_3 están en serie, y esta combinación está en paralelo con R_1.

Para cualquier combinación de resistores siempre es posible encontrar un resistor *único* que podría remplazar la combinación y dar como resultado la misma corriente y diferencia de potencial totales. Por ejemplo, una guirnalda de bombillas navideñas podría remplazarse por una sola bombilla elegida de manera apropiada para que tomara la misma corriente y tuviera la misma diferencia de potencial entre sus terminales que la guirnalda original. La resistencia de este resistor único se llama **resistencia equivalente** de la combinación. Si se remplazara cualquiera de las redes de la figura 26.1 por su resistencia equivalente R_{eq}, se podría escribir

$$V_{ab} = IR_{eq} \quad \text{o bien,} \quad R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I}$$

donde V_{ab} es la diferencia de potencial entre las terminales a y b de la red, e I es la corriente en el punto a o b. Para calcular una resistencia equivalente, se supone una diferencia de potencial V_{ab} a través de la red real, se calcula la corriente I correspondiente y se obtiene la razón V_{ab}/I.

Resistores en serie

Es posible determinar ecuaciones generales para la resistencia equivalente de una combinación de resistores en serie o en paralelo. Si los resistores están en *serie*, como en la figura 26.1a, la corriente I debe ser la misma en todos ellos. (Como se vio en la sección 25.4, la corriente *no* "se gasta" cuando pasa a través de un circuito.) Al aplicar $V = IR$ a cada resistor, se obtiene

$$V_{ax} = IR_1 \qquad V_{xy} = IR_2 \qquad V_{yb} = IR_3$$

Las diferencias de potencial a través de cada resistor no necesitan ser las mismas (excepto para el caso especial en que las tres resistencias son iguales). La diferencia de potencial V_{ab} a través de toda la combinación es la suma de estas diferencias de potencial individuales:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

por lo que

$$\frac{V_{ab}}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

La razón V_{ab}/I es, por definición, la resistencia equivalente R_{eq}. Por lo tanto,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Es fácil generalizar esto a cualquier número de resistores:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \text{(resistores en serie)} \qquad (26.1)$$

La resistencia equivalente de *cualquier número* de resistores en serie es igual a la suma de sus resistencias individuales.

La resistencia equivalente es *mayor que* cualquiera de las resistencias individuales.

Comparemos este resultado con la ecuación (24.5) para *capacitores* en serie. Los resistores en serie se suman directamente porque el voltaje a través de cada uno es directamente proporcional a su resistencia y a la corriente común. Los capacitores en serie se suman en forma recíproca porque el voltaje es directamente proporcional a la carga común, pero *inversamente* proporcional a la capacitancia individual.

Resistores en paralelo

Si los resistores están en *paralelo*, como en la figura 26.1b, la corriente a través de cada resistor no necesita ser la misma. Pero la diferencia de potencial entre las terminales de cada resistor debe ser la misma e igual a V_{ab} (figura 26.2). (Recuerde que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera no depende de la trayectoria tomada entre los puntos.) Denotemos las corrientes en los tres resistores con I_1, I_2 e I_3. Luego, de $I = V/R$,

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

En general, la corriente es diferente a través de cada resistor. Como la carga no se acumula o escapa del punto a, la corriente total I debe ser la suma de las tres corrientes en los resistores:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \quad \text{o bien,}$$

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Pero por definición de resistencia equivalente, R_{eq}, $I/V_{ab} = 1/R_{eq}$, por lo que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

De nuevo, es fácil generalizar a *cualquier número* de resistores en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \text{(resistores en paralelo)} \qquad (26.2)$$

Para *cualquier número* de resistores en paralelo, el *recíproco* de la resistencia equivalente es igual a la *suma de los recíprocos* de sus resistencias individuales.

La resistencia equivalente siempre es *menor que* cualquier resistencia individual.

Se puede comparar este resultado con la ecuación (24.7) para *capacitores* en paralelo. Los resistores en paralelo se suman recíprocamente porque la corriente en cada uno es proporcional al voltaje común a través de ellos, e *inversamente* proporcional a la resistencia de cada uno. Los capacitores en paralelo se suman directamente porque la carga en cada uno es proporcional al voltaje común a través de ellos y *directamente* proporcional a la capacitancia de cada uno.

Para el caso especial de *dos* resistores en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{y}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{(dos resistores en paralelo)} \qquad (26.3)$$

26.2 Los faros de un automóvil están conectados en paralelo. De ahí que cada uno esté expuesto a toda la diferencia de potencial suministrada por el sistema eléctrico del vehículo, lo que da el máximo brillo. Otra ventaja es que si un faro se funde, el otro sigue funcionando (véase el ejemplo 26.2).

Activ Online Physics
12.2 Circuitos de CD en paralelo

Como $V_{ab} = I_1R_1 = I_2R_2$, se deduce que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(dos resistores en paralelo)} \tag{26.4}$$

Esto demuestra que las corrientes conducidas por dos resistores en paralelo son *inversamente proporcionales* a sus resistencias. Por la trayectoria de menor resistencia circula más corriente.

Estrategia para resolver problemas 26.1 Resistores en serie y en paralelo

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Muchas redes de resistores están constituidas por resistores en serie, en paralelo o una combinación de ambos. El concepto clave es que una red de ese tipo se puede sustituir por un solo resistor equivalente.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo de la red de resistores.
2. Determine si los resistores están conectados en serie o en paralelo. Observe que es frecuente considerar redes como las de las figuras 26.1c y 26.1d, como combinaciones de arreglos en serie y en paralelo.
3. Determine cuáles son las variables que se buscan. Éstas podrían incluir la resistencia equivalente de la red, la diferencia de potencial a través de cada resistor, o la corriente que cruza cada resistor.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Utilice la ecuación (26.1) o (26.2) para encontrar la resistencia equivalente para una combinación en serie o en paralelo, respectivamente.
2. Si la red es más compleja, trate de reducirla a combinaciones en serie y en paralelo. Por ejemplo, en la figura 26.1c primero se reemplaza la combinación en paralelo de R_2 y R_3 con su resistencia equivalente; esto forma una combinación en serie con R_1. En la figura 26.1d, la combinación de R_2 y R_3 en serie forma una combinación en paralelo con R_1.
3. Cuando se calculen diferencias de potencial, recuerde que cuando los resistores están conectados en serie, la diferencia de potencial total a través de la combinación es igual a la suma de las diferencias de potencial individuales. Cuando los resistores están conectados en paralelo, la diferencia de potencial es la misma para cada resistor, e igual a la diferencia de potencial a través de la combinación en paralelo.
4. Recuerde los enunciados análogos para la corriente. Cuando los resistores se conectan en serie, la corriente es la misma a través de cada resistor e igual a la que pasa a través de la combinación en serie. Cuando los resistores se conectan en paralelo, la corriente total a través de la combinación es igual a la suma de corrientes a través de los resistores individuales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe si los resultados son congruentes. Si los resistores están conectados en serie, la resistencia equivalente debe ser mayor que la de cualquier resistor individual; si están en paralelo, la resistencia equivalente debe ser menor que la de cualquier resistor individual.

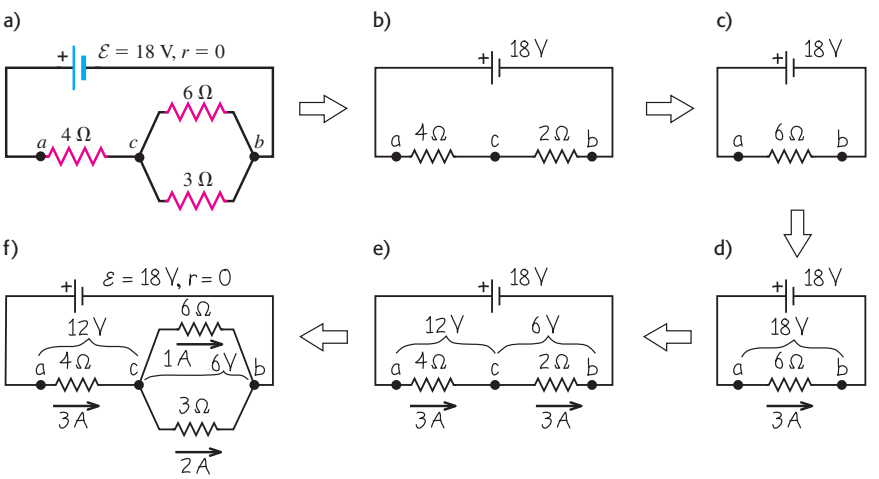
Ejemplo 26.1 Resistencia equivalente

Calcule la resistencia equivalente de la red que se ilustra en la figura 26.3a, y obtenga la corriente en cada resistor. La fuente de fem tiene resistencia interna insignificante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Esta red de tres resistores es una *combinación* de resistencias en serie y en paralelo, como la de la figura 26.1c. Los resis-

26.3 Etapas para reducir una combinación de resistores a un solo resistor equivalente y calcular la corriente en cada resistor.



tores de 6 Ω y 3 Ω están en paralelo, y su combinación está en serie con el resistor de 4 Ω.

PLANTEAR: Primero se determina la resistencia equivalente R_{eq} de esta red en su conjunto. Dado este valor, se calcula la corriente en la fem, que es la misma que la corriente en el resistor de 4 Ω. Esta misma corriente se divide entre los resistores de 6 Ω y 3 Ω; se determina cuánta corriente va hacia cada resistor utilizando el principio de que la diferencia de potencial debe ser la misma a través de estos dos resistores (porque están conectados en paralelo).

EJECUTAR: Las figuras 26.3b y 26.3c muestran los pasos sucesivos para reducir la red a una sola resistencia equivalente. De acuerdo con la ecuación (26.2), los resistores de 6 Ω y 3 Ω en paralelo de la figura 26.3a equivalen al resistor único de 2 Ω de la figura 26.3b:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{1}{2\ \Omega}$$

[El mismo resultado se obtiene mediante la ecuación (26.3).] De la ecuación (26.1), la combinación en serie de este resistor de 2 Ω con el resistor de 4 Ω es equivalente al resistor único de 6 Ω de la figura 26.3c.

Para encontrar la corriente en cada resistor de la red original, se invierten los pasos con los que se redujo la red. En el circuito que se muestra en la figura 26.3d (idéntico al de la figura 26.3c), la corriente es $I = V_{ab}/R = (18\ \text{V})/(6\ \Omega) = 3$ A. Así que la corriente en los resistores de 4 Ω y 2 Ω de la figura 26.3e (idéntica a la figura 26.3b) también es de 3 A. Por lo tanto, la diferencia de potencial V_{cb} a través del resistor de 2 Ω es $V_{cb} = IR = (3\ \text{A})(2\ \Omega) = 6$ V. Esta diferencia de potencial también debe ser de 6 V en la figura 26.3f (idéntica a la figura 26.3a). Con $I = V_{cb}/R$, las corrientes en los resistores de 6 Ω y 3 Ω de la figura 26.3f son $(6\ \text{V})/(6\ \Omega) = 1$ A y $(6\ \text{V})/(3\ \Omega) = 2$ A, respectivamente.

EVALUAR: Observe que para los dos resistores en paralelo entre los puntos *c* y *b* de la figura 26.3f, hay el doble de corriente a través del resistor de 3 Ω que a través del resistor de 6 Ω, es decir, pasa más corriente por la trayectoria de menos resistencia, de acuerdo con la ecuación (26.4). También note que la corriente total a través de estos dos resistores es de 3 A, la misma que pasa a través del resistor de 4 Ω entre los puntos *a* y *c*.

Ejemplo 26.2 Combinaciones en serie contra combinaciones en paralelo

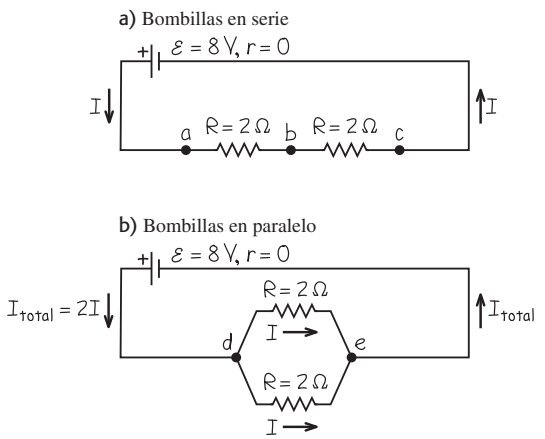
Dos bombillas idénticas se conectan a una fuente con $\mathcal{E} = 8$ V y resistencia interna despreciable. Cada bombilla tiene una resistencia $R = 2\ \Omega$. Calcule la corriente a través de cada bombilla, la diferencia de potencial a través de ésta y la potencia que se le entrega, y haga lo mismo para toda la red si las bombillas están conectadas *a*) en serie y *b*) en paralelo. *c*) Suponga que una de las bombillas se funde, es decir, su filamento se rompe y la corriente ya no puede fluir a través de él. ¿Qué pasa con la otra bombilla, para el caso de conexión en serie? ¿Y en el de conexión en paralelo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las bombillas son resistores conectados en serie y en paralelo.

PLANTEAR: Las figuras 26.4a y 26.4b muestran los diagramas de los circuitos en serie y en paralelo, respectivamente. Una vez que se ha calculado la corriente a través de cada bombilla, se obtiene la potencia entregada a cada una por medio de la ecuación (25.18), $P = I^2R = V^2/R$.

26.4 Diagramas para este problema.



EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (26.1), la resistencia equivalente de las dos bombillas entre los puntos *a* y *c* en la figura 26.4a es la suma de sus resistencias individuales.

$$R_{eq} = 2R = 2(2\ \Omega) = 4\ \Omega$$

La corriente es la misma a través de cada bombilla en serie:

$$I = \frac{V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{8\ \text{V}}{4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Como las bombillas tienen la misma resistencia, la diferencia de potencial es la misma a través de cada una:

$$V_{ab} = V_{bc} = IR = (2\ \text{A})(2\ \Omega) = 4\ \text{V}$$

Ésta es la mitad del voltaje terminal de 8 V de la fuente. De acuerdo con la ecuación (25.18), la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = I^2R = (2\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 8\ \text{W} \qquad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{V_{bc}^2}{R} = \frac{(4\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 8\ \text{W}$$

La energía total entregada a las dos bombillas es $P_{total} = 2P = 16$ W. De manera alternativa, la potencia total se puede calcular utilizando la resistencia equivalente $R_{eq} = 4\ \Omega$, a través de la cual la corriente es $I = 2$ A y la diferencia de potencial es $V_{ac} = 8$ V:

$$P_{total} = I^2R_{eq} = (2\ \text{A})^2(4\ \Omega) = 16\ \text{W} \qquad \text{o bien,}$$

$$P_{total} = \frac{V_{ac}^2}{R_{eq}} = \frac{(8\ \text{V})^2}{4\ \Omega} = 16\ \text{W}$$

b) Si las bombillas están en paralelo, como en la figura 26.4b, la diferencia de potencial V_{de} a través de cada bombilla es la misma e igual

continúa

a 8 V, el voltaje terminal de la fuente, por lo que la corriente a través de cada bombilla es

$$I = \frac{V_{de}}{R} = \frac{8\ \text{V}}{2\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

y la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = I^2R = (4\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 32\ \text{W} \qquad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 32\ \text{W}$$

Tanto la diferencia de potencial como la corriente a través de cada bombilla son el doble de grandes que en el caso de la conexión en serie. Por lo tanto, la potencia entregada a cada bombilla es *cuatro* veces mayor, y cada bombilla brilla más que en el caso en serie. Si la meta es producir la máxima cantidad de luz por cada bombilla, el arreglo en paralelo es superior a la conexión en serie.

La potencia total entregada a la red en paralelo es $P_{\text{total}} = 2P = 64$ W, cuatro veces mayor que para el caso en serie. El incremento en la potencia en comparación con la conexión en serie no se obtiene "gratis", ya que la energía se extrae cuatro veces más rápido de la fuente en la conexión en paralelo que en la conexión en serie. Si la fuente es una batería, se agotará cuatro veces más rápido.

También se puede encontrar la potencia total mediante la resistencia equivalente R_{eq} dada en la ecuación (26.2):

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = 2\left(\frac{1}{2\ \Omega}\right) = 1\ \Omega^{-1} \qquad \text{o bien,} \qquad R_{\text{eq}} = 1\ \Omega$$

La corriente total a través del resistor equivalente es $I_{\text{total}} = 2I = 2(4\ \text{A}) = 8$ A, y la diferencia de potencial a través del resistor equivalente es de 8 V. Así, la potencia total es

$$P_{\text{total}} = I^2R_{\text{eq}} = (8\ \text{A})^2(1\ \Omega) = 64\ \text{W} \qquad \text{o bien,}$$

$$P_{\text{total}} = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{1\ \Omega} = 64\ \text{W}$$

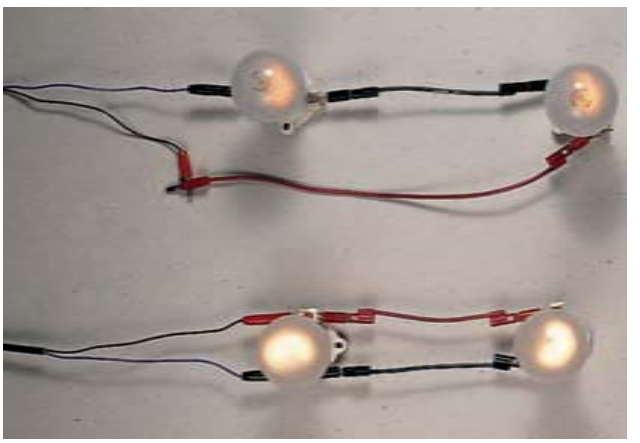
La diferencia de potencial a través de la resistencia equivalente es la misma para ambos casos, en serie y en paralelo, pero para este último caso el valor de R_{eq} es menor, por lo que $P_{\text{total}} = V^2/R_{\text{eq}}$ es mayor.

c) En el caso en serie, fluye la misma corriente a través de las dos bombillas. Si una de éstas se fundiera no habría corriente en todo el circuito, y ninguna bombilla brillaría.

En el caso en paralelo, la diferencia de potencial a través de cualquier bombilla permanecería igual a 8 V, aun si una de las bombillas se fundiera. De ahí que la corriente a través de la bombilla en funcionamiento sería igual a 4 A, y la potencia entregada a esa bombilla seguiría igual a 32 W, como antes de que la bombilla se fundiera. Ésta es otra ventaja de un arreglo en paralelo de bombillas: si una de ellas falla, las demás no se ven afectadas. Este principio se utiliza en los sistemas de distribución domésticos, que se estudiarán en la sección 26.5.

EVALUAR: Nuestro cálculo no es completamente exacto porque la resistencia $V = RI$ de bombillas reales *no* es una constante independiente de la diferencia de potencial V a través de la bombilla. (La resistencia del filamento aumenta con la temperatura de funcionamiento creciente y, por lo tanto, con V en aumento.) Pero es verdad que las bombillas conectadas en serie a través de una fuente, brillan menos que cuando se conectan en paralelo con la misma fuente (figura 26.5).

26.5 Cuando se conectan a la misma fuente, dos bombillas en serie (imagen superior) consumen menos potencia y brillan menos que si se conectan en paralelo (imagen inferior).



Evalúe su comprensión de la sección 26.1 Suponga que los tres resistores que se ilustran en la figura 26.1 tienen la misma resistencia, por lo que $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Clasifique los cuatro arreglos que se muestran en los incisos *a*) a *d*) de la figura 26.1, en orden decreciente de su resistencia equivalente.

26.2 Reglas de Kirchhoff

Muchas redes de resistores prácticas no se pueden reducir a combinaciones sencillas en serie y en paralelo. La figura 26.6a ilustra una fuente de potencia de cd con fem $\mathcal{E}_1$ que carga una batería con fem menor $\mathcal{E}_2$ y que alimenta corriente a una bombilla con resistencia R. La figura 26.6b es un circuito "puente", que se utiliza en muchos tipos diferentes de medición y sistemas de control. (Una aplicación importante de un circuito "puente" se describe en el problema 26.79.) No se necesitan principios nuevos para calcular las corrientes en esa clase de redes, pero existen algunas técnicas que ayudan a manejar en forma sistemática los problemas que plantean. A continuación se describen los métodos desarrollados por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

En primer lugar, hay dos términos que usaremos con frecuencia. Una **unión** en un circuito es el punto en que se unen tres o más conductores. Las uniones también reciben el nombre de *nodos* o *puntos de derivación*. Una **espira** es cualquier trayectoria cerrada de conducción. En la figura 26.6a los puntos a y b son uniones, pero los puntos c y d no lo son; en la figura 26.6b, los puntos a, b, c y d son uniones, pero los puntos e y f no lo son. Las líneas en color azul de las figuras 26.6a y 26.6b ilustran algunas espiras posibles en estos circuitos.

Las reglas de Kirchhoff consisten en los dos siguientes enunciados:

Regla de Kirchhoff de las uniones: *la suma algebraica de las corrientes en cualquier unión es igual a cero*. Es decir,

$$\sum I = 0 \qquad \text{(regla de las uniones, válida en cualquier unión)} \qquad (26.5)$$

Regla de Kirchhoff de las espiras: *la suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier espira,* incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, *debe ser igual a cero*. Es decir,

$$\sum V = 0 \qquad \text{(regla de las espiras, válida para cualquier espira cerrada)} \qquad (26.6)$$

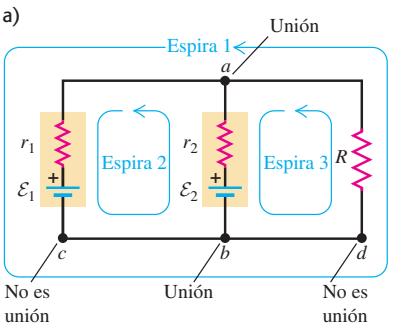
La regla de las uniones se basa en la *conservación de la carga eléctrica*. En una unión no se puede acumular carga eléctrica, por lo que la carga total que entra a ella por unidad de tiempo debe ser igual a la carga total que sale por unidad de tiempo (véase la figura 26.7a). La carga por unidad de tiempo es corriente, por lo que si consideramos como positivas las corrientes que entran a una unión y negativas las que salen, la suma algebraica de las corrientes en la unión debe ser igual a cero. Es como un ramal T en una tubería de agua (figura 26.7b); si entra 1 litro por minuto en un tubo, no pueden salir 3 litros por minuto de los otros dos tubos. Hemos de confesar que se usó la regla de las uniones (sin decirlo) en la sección 26.1 con la finalidad de obtener la ecuación (26.2) para los resistores en paralelo.

La regla de las espiras es el enunciado de que la fuerza electrostática es *conservativa*. Suponga que recorre una espira y mide las diferencias de potencial entre los extremos de elementos sucesivos del circuito. Al regresar al punto de partida, debería de encontrar que la *suma algebraica* de esas diferencias es igual a cero; de lo contrario, no se podría afirmar que el potencial en ese punto tiene un valor definido.

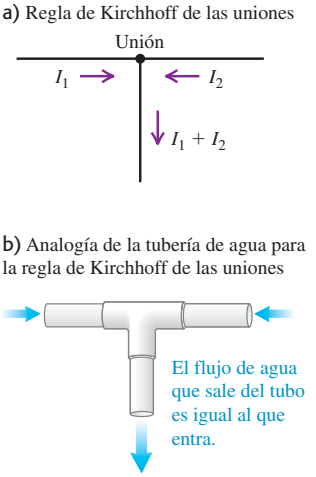
Convenciones de signo para la regla de la espiras

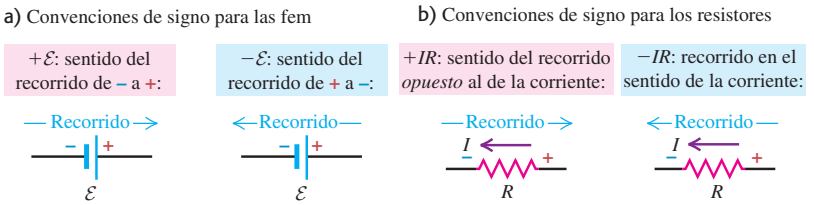
Para aplicar la regla de las espiras, se necesitan algunas convenciones de signos. La Estrategia para resolver problemas 26.2 describe en detalle cómo utilizarlas, pero a continuación se da una descripción rápida. Primero suponga un sentido de la corriente en cada ramal del circuito e indíquelo en el diagrama correspondiente. En seguida, a partir de cualquier punto del circuito, realice un recorrido imaginario de la espira sumando las fem y los IR conforme los encuentre. Cuando se pasa a través de una fuente en la dirección de $-$ a $+$, la fem se considera *positiva*; cuando se va de $+$ a $-$, la fem se considera *negativa* (figura 26.8a). Cuando se va a través de un resistor en el *mismo* sentido que el que se supuso para la corriente, el término IR es *negativo* porque la corriente avanza en el sentido del potencial decreciente. Cuando se pasa a través de un resistor en el sentido *opuesto* a la corriente que se supuso, el término IR es *positivo* porque representa un aumento de potencial (figura 26.8b).

26.6 Dos redes que no pueden reducirse a combinaciones simples de resistores en serie o en paralelo.



26.7 a) La regla de Kirchhoff de las uniones dice que la cantidad de corriente que llega a una unión es igual a la que sale. b) Analogía con una tubería de agua.





26.8 Uso de las convenciones de signos cuando se aplica la regla de Kirchhoff de las espiras. En cada parte de la figura "Recorrido" es el sentido en que imaginamos ir alrededor de la espira, que no necesariamente es el sentido de la corriente.

Las dos reglas de Kirchhoff son todo lo que se necesita para resolver una amplia variedad de problemas de redes. Por lo general, algunas de las fem, corrientes y resistencias son conocidas y otras no. Siempre se debe obtener de las reglas de Kirchhoff cierto número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas, de manera que sea posible resolverlas simultáneamente. A menudo, la parte más difícil de la solución suele ser, no la comprensión de los principios básicos, ¡sino seguir la pista de los signos algebraicos!

Estrategia para resolver problemas 26.2 Reglas de Kirchhoff

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las reglas de Kirchhoff son herramientas importantes para analizar cualquier circuito más complicado que una sola espira.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

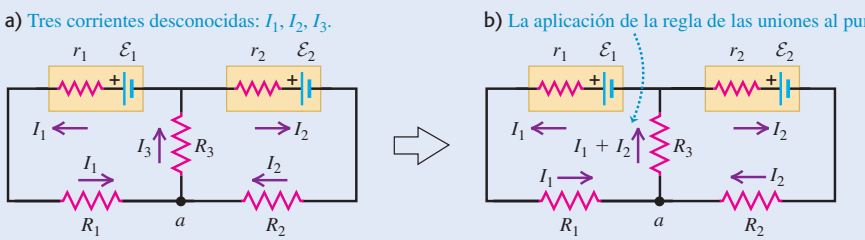
1. Elabore un diagrama *grande* del circuito, de manera que haya espacio para escribir leyendas. Identifique todas las cantidades, conocidas y desconocidas, incluidos el sentido supuesto para cada corriente y fem desconocidas. Es frecuente que no se conozca de antemano el sentido real de una corriente o fem, pero esto no importa. Si el sentido real de una cantidad particular es opuesto al que se supuso, el resultado tendrá signo negativo. Si las reglas de Kirchhoff se utilizan correctamente, darán tanto los sentidos como las magnitudes de las corrientes y fem desconocidas.
2. Al escribir las leyendas para las corrientes, por lo general es mejor usar de inmediato la regla de las uniones para expresar las corrientes en términos del menor número posible de cantidades. Por ejemplo, la figura 26.9a muestra un circuito con las leyendas correctas, y la figura 26.9b representa el mismo circuito con otras leyendas después de aplicar la reglas de las uniones al punto a para eliminar I_3.
3. Determine cuáles cantidades son las variables que se buscan.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Elija cualquier espira cerrada en la red y designe un sentido (horario o antihorario) para recorrer la espira cuando se aplique la regla de las espiras. El sentido no tiene que ser el mismo que el que se supuso para la corriente.
2. Recorra la espira en el sentido elegido, sumando las diferencias de potencial a medida que se atraviesen. Recuerde que una diferencia de potencial positiva corresponde a un incremento en el potencial, y una negativa indica una disminución en el potencial. Una fem se considera positiva si se atraviesa de $(-)$ a $(+)$, y negativa si se va de $(+)$ a $(-)$. Un término IR es negativo si se pasa por el resistor en el mismo sentido de la corriente supuesta, y positivo si se atraviesa en sentido opuesto. La figura 26.8 resume estas convenciones de signo.
3. Iguale a cero la suma del paso 2.
4. Si es necesario elija otra espira para obtener una relación diferente entre las incógnitas, y continúe así hasta que tenga tantas ecuaciones independientes como incógnitas, o hasta que cada elemento de circuito haya quedado incluido en al menos una de las espiras elegidas.
5. Resuelva simultáneamente las ecuaciones para determinar las incógnitas. Este paso implica álgebra, no física, pero a veces es muy complejo. Tenga cuidado con las manipulaciones algebraicas, pues un error de signo resulta fatal para toda la solución.
6. Este mismo sistema de registro se usa para encontrar el potencial V_{ab} de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b. Comience en b y sume los cambios de potencial que encuentre al ir de b a a, usando las mismas reglas de los signos del paso 2. La suma algebraica de estos cambios es $V_{ab} = V_a - V_b$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe todos los pasos algebraicos. Una estrategia útil es considerar una espira distinta de las utilizadas para resolver el problema; si la suma de las caídas de potencial alrededor de la espira no es igual a cero se cometió un error en alguno de los cálculos. Como siempre, pregúntese si las respuestas tienen sentido.

26.9 Al aplicar la regla de las uniones al punto a, se reduce el número de corrientes desconocidas, de tres a dos.



Ejemplo 26.3 Circuito de una sola espira

El circuito mostrado en la figura 26.10a contiene dos baterías, cada una con una fem y una resistencia interna, y dos resistores. Calcule *a*) la corriente en el circuito, *b*) la diferencia de potencial V_{ab} y *c*) la salida de potencia de la fem de cada batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este circuito de una sola espira no tiene uniones, por lo que no se necesita la regla de Kirchhoff de las uniones para determinar el valor de las variables buscadas.

PLANTEAR: Para aplicar la regla de las espiras a la única espira que hay, primero se supone el sentido de la corriente; supongamos un sentido antihorario, como se ilustra en la figura 26.10a.

EJECUTAR: *a*) Se comienza en a y se va en sentido contrahorario, se suman los incrementos y disminuciones de potencial y se iguala la suma a cero, como en la ecuación (26.6). La ecuación resultante es

$$-I(4\ \Omega) - 4\ \text{V} - I(7\ \Omega) + 12\ \text{V} - I(2\ \Omega) - I(3\ \Omega) = 0$$

Al reducir los términos que contienen a I y despejar esta variable, se obtiene:

$$8\ \text{V} = I(16\ \Omega) \qquad \text{e} \qquad I = 0.5\ \text{A}$$

El resultado para I es positivo, lo que demuestra que el sentido elegido para la corriente es correcto. Como ejercicio, suponga para I el sentido opuesto; debería obtener $I = -0.5$ A, lo que indica que la corriente real es opuesta a esa suposición.

b) Para encontrar V_{ab}, el potencial de a con respecto a b, se comienza en b y se suman los cambios de potencial a medida que se avanza hacia a. Hay dos trayectorias posibles de b a a; primero se toma la inferior y se obtiene:

$$V_{ab} = (0.5\ \text{A})(7\ \Omega) + 4\ \text{V} + (0.5\ \text{A})(4\ \Omega) = 9.5\ \text{V}$$

El punto a tiene un potencial 9.5 V más alto que el b. Todos los términos de esta suma, incluidos los IR, son positivos porque cada uno representa un *incremento* de potencial conforme se pasa de b a a. Si en vez de lo anterior se utiliza la trayectoria superior, la ecuación resultante es:

$$V_{ab} = 12\ \text{V} - (0.5\ \text{A})(2\ \Omega) - (0.5\ \text{A})(3\ \Omega) = 9.5\ \text{V}$$

Aquí, los términos IR son negativos porque nuestra trayectoria va en el sentido de la corriente, con disminuciones de potencial a través de los resistores. El resultado es el mismo que con la trayectoria inferior, como debe ser para que el cambio total de potencial alrededor de la espira completa sea igual a cero. En cada caso, los aumentos de potencial se toman como positivos, y las caídas como negativas.

c) La salida de potencia de la fem de la batería de 12 V es

$$P = \mathcal{E}I = (12\ \text{V})(0.5\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$

Y la salida de potencia de la fem de la batería de 4 V es

$$P = \mathcal{E}I = (-4\ \text{V})(0.5\ \text{A}) = -2\ \text{W}$$

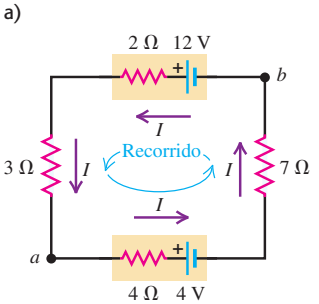
El signo negativo de $\mathcal{E}$ para la batería de 4 V se debe a que la corriente en realidad va del lado de mayor potencial de la batería al de menor potencial. El valor negativo de P significa que en la batería se está *almacenando* energía, y que se está *recargando* mediante la batería de 12 V.

EVALUAR: Al aplicar la expresión $P = I^2R$ a cada uno de los cuatro resistores de la figura 26.10a, usted debe ser capaz de demostrar que la potencia total disipada en los cuatro resistores es igual a 4 W. De los 6 W que provee la fem de la batería de 12 V, 2 W van al almacenamiento de energía en la batería de 4 V, y 4 W se disipan en las resistencias.

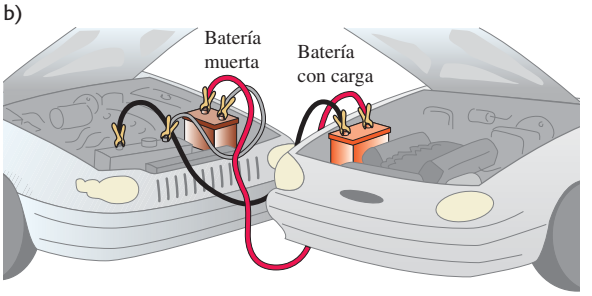
El circuito de la figura 26.10a es muy parecido al que se utiliza cuando se emplea un acumulador de automóvil de 12 V para recargar la batería sin carga de otro vehículo (figura 26.10b). Los resistores de 3 Ω y 7 Ω de la figura 26.10a representan las resistencias de los cables para pasar corriente y de la trayectoria de conducción a través del automóvil con la batería descargada. (Los valores de las resistencias de los automóviles y cables reales para pasar corriente son distintos de los que se utilizan en este ejemplo.)

26.10 a) En este ejemplo la espira se recorre en el mismo sentido que el que se supuso para la corriente, por lo que todos los términos IR son negativos. El potencial disminuye a medida que se pasa de + a − a través de la fem inferior, pero se incrementa al ir de − a + a través de la fem superior. b) Ejemplo de la vida real de un circuito de esta clase.

a)



b)



Ejemplo 26.4 Carga de una batería

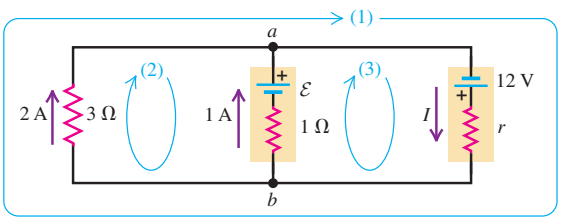
En el circuito que se ilustra en la figura 26.11, una fuente de energía eléctrica de 12 V con resistencia interna desconocida r está conectada a una batería recargable descargada con fem $\mathcal{E}$ desconocida y resistencia interna de 1 Ω, y a una bombilla indicadora con resistencia de 3 Ω que transporta una corriente de 2 A. La corriente a través de la batería descargada es igual a 1 A en el sentido que se indica. Calcule la corriente desconocida I, la resistencia interna r y la fem $\mathcal{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este circuito tiene más de una espira, por lo que se debe aplicar tanto la regla de las uniones como la regla de las espiras.

PLANTEAR: El sentido de la corriente a través de la fuente de poder de 12 V se supone como se ilustra. Hay tres variables que se buscan, por lo que se necesitan tres ecuaciones.

26.11 En este circuito, una fuente de energía eléctrica carga una batería que se quedó sin carga y enciende una bombilla. Se ha hecho una suposición acerca de la polaridad de la fem $\mathcal{E}$ de la batería agotada. ¿Es correcta esa suposición?



EJECUTAR: Primero se aplica la regla de las uniones, ecuación (26.5), al punto a. Se obtiene

$$-I + 1\ \text{A} + 2\ \text{A} = 0 \qquad \text{por lo que} \qquad I = 3\ \text{A}$$

continúa

Para determinar r se aplica la regla de las espiras, ecuación (26.6), a la espira exterior marcada con (1); se obtiene:

$$12\ \text{V} - (3\ \text{A})r - (2\ \text{A})(3\ \Omega) = 0 \qquad \text{por lo que} \qquad r = 2\ \Omega$$

Los términos que contienen las resistencias r y 3 Ω son negativos porque nuestra espira atraviesa esos elementos en el mismo sentido que la corriente, por lo que encuentra *caídas* de potencial. Si se hubiera elegido recorrer la espira (1) en sentido opuesto, cada término habría tenido el signo contrario, y el resultado para r habría sido el mismo.

Para determinar $\mathcal{E}$ se aplica la regla de las espiras a la espira (2):

$$-\mathcal{E} + (1\ \text{A})(1\ \Omega) - (2\ \text{A})(3\ \Omega) = 0 \qquad \text{por lo que} \qquad \mathcal{E} = -5\ \text{V}$$

El término para el resistor de 1 Ω es positivo porque al atravesarlo en sentido opuesto al de la corriente se encuentra una *subida* de potencial. El valor negativo para $\mathcal{E}$ demuestra que la polaridad real de esta fem es opuesta a la que se supuso en la figura 26.11; la terminal positiva de esta fuente está en realidad en el lado derecho. Igual que en el ejemplo 26.3, la batería se está recargando.

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado de $\mathcal{E}$ utilizando la espira (3) para obtener la ecuación

$$12\ \text{V} - (3\ \text{A})(2\ \Omega) - (1\ \text{A})(1\ \Omega) + \mathcal{E} = 0$$

de donde se obtiene $\mathcal{E} = -5\text{V}$.

Como comprobación adicional de congruencia, note que $V_{ba} = V_b - V_a$ es igual al voltaje a través de la resistencia de 3 Ω, que es (2 A)(3 Ω) = 6 V. Al ir de a a b por el ramal superior, se encuentran diferencias de potencial $+12\ \text{V} - (3\ \text{A})(2\ \Omega) = +6\ \text{V}$, y al ir por el ramal intermedio, se obtiene $-(-5\ \text{V}) + (1\ \text{A})(1\ \Omega) = +6\ \text{V}$. Las tres formas de obtener V_{ba} dan los mismos resultados. Asegúrese de que comprende todos los signos en estos cálculos.

Ejemplo 26.5 Potencia en un circuito de carga de una batería

En el circuito del ejemplo 26.4 (representado en la figura 26.11), calcule la potencia entregada por la fuente de 12 V y por la batería que se recarga, y encuentre la potencia disipada en cada resistor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se usan los resultados de la sección 25.5, donde se obtuvo que la potencia entregada *desde* una fem a un circuito es $\mathcal{E}I$ y la entregada *a* un resistor desde un circuito es $V_{ab}I = I^2R$.

PLANTEAR: Del ejemplo 26.4, se conocen los valores de cada fem, corriente y resistencia.

EJECUTAR: La salida de potencia desde la fem de la fuente de energía eléctrica es

$$P_{\text{fuente}} = \mathcal{E}_{\text{fuente}} I_{\text{fuente}} = (12\ \text{V})(3\ \text{A}) = 36\ \text{W}$$

La potencia disipada en la resistencia interna de la fuente r es

$$P_{r\text{-fuente}} = I_{\text{fuente}}{}^2 r_{\text{fuente}} = (3\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 18\ \text{W}$$

por lo que la salida de potencia *neta* de la fuente de energía eléctrica es $P_{\text{neta}} = 36\ \text{W} - 18\ \text{W} = 18\ \text{W}$. De manera alternativa, del ejemplo 26.4, el voltaje terminal de la batería es $V_{ba} = 6\text{V}$, por lo que la potencia de salida neta es

$$P_{\text{neta}} = V_{ba} I_{\text{fuente}} = (6\ \text{V})(3\ \text{A}) = 18\ \text{W}$$

La potencia de salida de la fem $\mathcal{E}$ de la batería que se carga es

$$P_{\text{fem}} = \mathcal{E} I_{\text{batería}} = (-5\ \text{V})(1\ \text{A}) = -5\ \text{W}$$

Ésta es negativa porque la corriente de 1 A corre a través de la batería, del lado del mayor potencial al del menor potencial. (Como se mencionó en el ejemplo 26.4, la polaridad que se supuso para esta batería en la figura 26.11 era incorrecta.) En la batería se almacena energía a medida que se carga. Se disipa más potencia en la resistencia interna de la batería; esta potencia es

$$P_{r\text{-batería}} = I^2{}_{\text{batería}}\, r_{\text{batería}} = (1\ \text{A})^2(1\ \Omega) = 1\ \text{W}$$

Por lo tanto, la potencia de alimentación total a la batería es $1\ \text{W} + |-5\ \text{W}| = 6\ \text{W}$. De éstos, 5 W representan energía útil almacenada en la batería; el resto se desperdicia en su resistencia interna.

La potencia disipada en la bombilla es

$$P_{\text{bombilla}} = I_{\text{bombilla}}{}^2 R_{\text{bombilla}} = (2\ \text{A})^2(3\ \Omega) = 12\ \text{W}$$

EVALUAR: Como comprobación, observe que se explica toda la potencia de la fuente. De los 18 W de potencia neta de la fuente de energía eléctrica, 5 W se destinan a la recarga de la batería, 1 W se disipa en la resistencia interna de la batería, y 12 W se disipan en la bombilla.

Ejemplo 26.6 Una red compleja

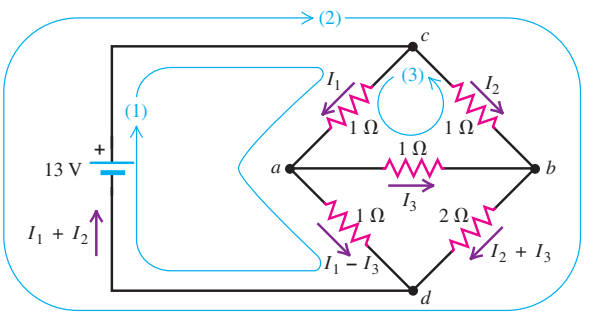
La figura 26.12 muestra un circuito "puente" del tipo descrito al principio de esta sección (véase la figura 26.6b). Calcule la corriente en cada resistor y la resistencia equivalente de la red de cinco resistores.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Esta red no se puede representar en términos de combinaciones en serie y en paralelo. De ahí que se deben utilizar las reglas de Kirchhoff para encontrar los valores de las variables buscadas.

PLANTEAR: Hay que calcular cinco diferentes corrientes, pero aplicando la regla de las uniones a los nodos a y b, es posible representarlas en términos de tres corrientes desconocidas, como se aprecia en la figura. La corriente en la batería es $I_1 + I_2$.

26.12 Circuito con varios resistores.



EJECUTAR: Se aplica la regla de las espiras a las tres espiras que se indican, con lo que se obtienen las siguientes tres ecuaciones:

$$13\ \text{V} - I_1(1\ \Omega) - (I_1 - I_3)(1\ \Omega) = 0 \qquad (1)$$
$$-I_2(1\ \Omega) - (I_2 + I_3)(2\ \Omega) + 13\ \text{V} = 0 \qquad (2)$$
$$-I_1(1\ \Omega) - I_3(1\ \Omega) + I_2(1\ \Omega) = 0 \qquad (3)$$

Éste es un conjunto de tres ecuaciones simultáneas para las tres corrientes desconocidas. Se pueden resolver con varios métodos; un procedimiento muy directo es despejar I_2 en la tercera ecuación, con lo que se obtiene $I_2 = I_1 + I_3$, y luego se sustituye esta expresión en la segunda para eliminar I_2. Al hacer esto quedan dos ecuaciones:

$$13\ \text{V} = I_1(2\ \Omega) - I_3(1\ \Omega) \qquad (1')$$
$$13\ \text{V} = I_1(3\ \Omega) + I_3(5\ \Omega) \qquad (2')$$

Ahora se elimina I_3 multiplicando la ecuación (1′) por 5 y sumando las dos ecuaciones, para obtener

$$78\ \text{V} = I_1(13\ \Omega) \qquad I_1 = 6\ \text{A}$$

Este resultado se sustituye en la ecuación (1′) para obtener $I_3 = -1$ A; finalmente, de la ecuación (3) se obtiene $I_2 = 5$ A. El valor negativo de I_3 indica que su sentido es opuesto a nuestra suposición inicial.

La corriente total a través de la red es $I_1 + I_2 = 11$ A y la caída de potencial a través de ella es igual a la fem de la batería, es decir, 13 V. La resistencia equivalente de la red es

$$R_{\text{eq}} = \frac{13\ \text{V}}{11\ \text{A}} = 1.2\ \Omega$$

EVALUAR: Los resultados de $I_1 = 6$ A, $I_2 = 5$ A e $I_3 = -1$ A se revisan sustituyendo estos valores en las tres ecuaciones (1), (2) y (3). ¿Qué es lo que observa?

Ejemplo 26.7 Diferencia de potencial dentro de una red compleja

En el circuito del ejemplo 26.6 (figura 26.12), calcule la diferencia de potencial V_{ab}.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La variable buscada es $V_{ab} = V_a - V_b$, que es el potencial en el punto a con respecto al punto b.

PLANTEAR: Para encontrar V_{ab}, se comienza en el punto b y se sigue una trayectoria hacia a, sumando las subidas y bajadas de potencial a medida que se avanza. Podemos seguir cualquiera de varias trayectorias posibles de b a a; el valor de V_{ab} debe ser independiente de la trayectoria que se elija, lo que brinda una forma natural de comprobar nuestro resultado.

EJECUTAR: La trayectoria más sencilla de seguir es a través del resistor central de 1 Ω. Hemos encontrado que $I_3 = -1$ A, lo que demuestra que el sentido real de la corriente en este ramal es de derecha a izquierda. Así, al ir de b a a hay una *caída* de potencial con magnitud $IR = (1\ \text{A})(1\ \Omega) = 1$ V, y $V_{ab} = -1$ V. Es decir, el potencial en el punto a es 1 V menor que en el punto b.

EVALUAR: Para comprobar el resultado, se prueba una trayectoria de b a a que pase por los dos resistores inferiores. Las corrientes a través de ellos son:

$$I_2 + I_3 = 5\ \text{A} + (-1\ \text{A}) = 4\ \text{A} \quad \text{e}$$
$$I_1 - I_3 = 6\ \text{A} - (-1\ \text{A}) = 7\ \text{A}$$

por lo que

$$V_{ab} = -(4\ \text{A})(2\ \Omega) + (7\ \text{A})(1\ \Omega) = -1\ \text{V}$$

Se sugiere al lector que pruebe otras trayectorias de b a a para verificar que también dan este resultado.

Evalúe su comprensión de la sección 26.2 En el ejemplo 26.6, reste la ecuación (1) de la (2). ¿Para cuál espira de la figura 26.12 corresponde esta ecuación? ¿Habría simplificado esta ecuación la solución del ejemplo 26.6?

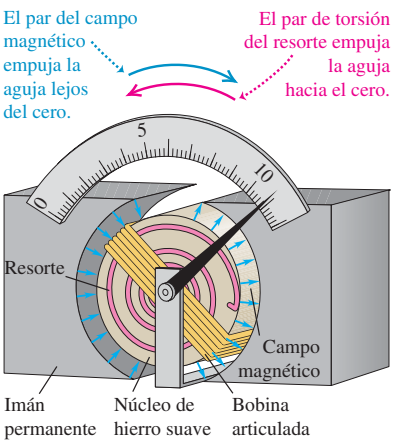
26.3 Instrumentos de medición eléctrica

En los dos últimos capítulos hemos hablado de la diferencia de potencial, corriente y resistencia, ahora es tiempo de decir algo acerca de cómo *medir* estas cantidades. Existen muchos dispositivos comunes, que incluyen tableros de automóviles, cargadores de baterías e instrumentos eléctricos de bajo costo, que miden la diferencia de potencial (voltaje), corriente o resistencia mediante un **galvanómetro de d'Arsonval** (figura 26.13). En la siguiente exposición será frecuente que lo llamemos simplemente *medidor*. En el campo magnético de un imán permanente se coloca una bobina de pivote de alambre delgado (figura 26.14). Unido a la bobina está un resorte, similar a la espiral del volante de un reloj. En la posición de equilibrio, sin corriente en la bobina, la aguja está en el cero. Cuando hay una corriente en la bobina, el campo magnético ejerce un par de torsión sobre la bobina que es proporcional a la corriente. (En el capítulo 27 se verá en detalle esta interacción magnética.) A medida que la bobina gira, el resorte ejerce un par de torsión restaurador que es proporcional al desplazamiento angular.

Así, la desviación angular de la bobina y la ajuga es directamente proporcional a la corriente en la bobina, y el dispositivo se puede calibrar para que mida corriente. La desviación máxima, lo común es de 90°, se denomina *desviación de escala completa*. Las características eléctricas esenciales del medidor son la corriente I_{fs} (por las siglas

26.13 Este amperímetro (arriba) y el voltímetro (abajo) son galvanómetros de d'Arsonval. La diferencia tiene que ver con sus conexiones internas (véase la figura 26.15).

26.14 Galvanómetro de d'Arsonval con una bobina de pivote o articulada a la que está adherida una aguja; un imán permanente suministra un campo magnético de magnitud uniforme, y el resorte proporciona un par de torsión restaurador que se opone al par de torsión del campo magnético.



Activ ONLINE Physics

12.4 Uso de amperímetros y voltímetros

de *full scale* o escala completa) que se requiere para la desviación de escala completa (lo común es del orden de 10 μA a 10 mA) y la resistencia R_c (por la inicial de *coil*, bobina) de la bobina (lo normal es del orden de 10 a 1000 Ω).

La desviación del medidor es proporcional a la corriente en la bobina. Si ésta obedece la ley de Ohm, la corriente es proporcional a la *diferencia de potencial* entre las terminales de la bobina, y la desviación también es proporcional a esta diferencia de potencial. Por ejemplo, considere un medidor cuya bobina tenga una resistencia $R_c = 20.0\ \Omega$ y que se desvía la escala completa cuando la corriente en la bobina es $I_{fs} = 1.00$ mA. La diferencia de potencial correspondiente para la desviación de escala completa es

$$V = I_{fs}R_c = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega) = 0.0200\ \text{V}$$

Amperímetros

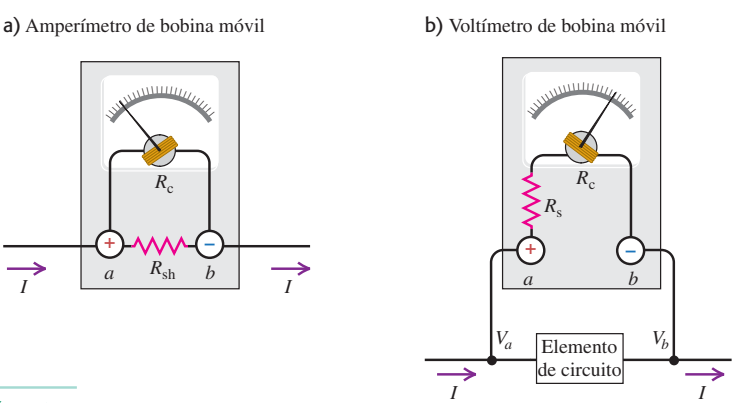
Un instrumento medidor de corriente por lo general se conoce como **amperímetro** (o miliamperímetro, microamperímetro, etcétera, según su escala). Un *amperímetro siempre mide la corriente que pasa a través de él*. Un *amperímetro* ideal, como el que se estudió en la sección 25.4, tendría una resistencia *igual a cero*, por lo que si se incluyera en un ramal de un circuito no se afectaría a la corriente que circula por el ramal. Los amperímetros reales siempre tienen una resistencia finita, pero es deseable que sea tan pequeña como sea posible.

Un medidor puede adaptarse para medir corrientes mayores que su lectura de escala completa si se conecta a él un resistor en paralelo (figura 26.15a) que desvíe parte de la corriente de la bobina del medidor. El resistor en paralelo se llama **resistor de derivación** o simplemente *derivación*, y se denota como R_{sh} (por las iniciales de *shunt*, que en inglés significa derivación).

Suponga que se desea convertir un medidor con corriente de escala completa I_{fs} y resistencia de bobina R_c en un amperímetro con lectura de escala completa I_a. Para determinar la resistencia de derivación R_{sh} que se necesita, observe que, con la desviación de escala completa, la corriente total a través de la combinación en paralelo es I_a, la corriente a través de la bobina del medidor es I_{fs}, y la corriente que pasa a través de la derivación es la diferencia $I_a - I_{fs}$. La diferencia de potencial V_{ab} es la misma para ambas trayectorias; por lo tanto,

$$I_{fs}R_c = (I_a - I_{fs})R_{sh} \qquad \text{(para un amperímetro)} \tag{26.7}$$

26.15 Uso del mismo medidor para medir **a)** corriente y **b)** voltaje.



Ejemplo 26.8 Diseño de un amperímetro

¿Qué resistencia de derivación se requiere para hacer que el medidor de 1.00 mA y 20.0 Ω descrito antes sea un amperímetro con una escala de 0 a 50.0 mA?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como el medidor se emplea como amperímetro, sus conexiones internas se ilustran en la figura 26.15a. La variable buscada es la resistencia de derivación R_{sh}.

PLANTEAR: Se desea que el amperímetro sea capaz de manejar una corriente máxima $I_s = 50.0$ mA $= 50.0 \times 10^{-3}$ A. La resistencia de la bobina es $R_c = 20.0\ \Omega$, y el medidor presenta una desviación de escala completa cuando la corriente a través de la bobina es $I_{fs} = 1.00 \times 10^{-3}$ A. La resistencia de derivación se calcula con la ecuación (26.7).

EJECUTAR: Se despeja R_{sh} en la ecuación (26.7) para obtener

$$R_{sh} = \frac{I_{fs}R_c}{I_a - I_{fs}} = \frac{(1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega)}{50.0 \times 10^{-3}\ \text{A} - 1.00 \times 10^{-3}\ \text{A}}$$
$$= 0.408\ \Omega$$

EVALUAR: Es útil considerar como un todo la resistencia equivalente R_{eq} del amperímetro. De la ecuación (26.2),

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_{sh}} = \frac{1}{20.0\ \Omega} + \frac{1}{0.408\ \Omega}$$
$$R_{eq} = 0.400\ \Omega$$

La resistencia de derivación es tan pequeña en comparación con la resistencia del medidor, que la resistencia equivalente está muy cerca de ser igual a la de derivación. El resultado es un instrumento de baja resistencia con la escala deseada de 0 a 50.0 mA. Con desviación de escala completa, $I = I_a = 50.0$ mA, la corriente a través del galvanómetro es de 1.00 mA, la corriente a través del resistor de derivación es de 49.0 mA, y $V_{ab} = 0.0200$ V. Si la corriente I fuera *menor* que 50.0 mA, la corriente en la bobina y la desviación serían proporcionalmente menores, pero la resistencia R_{eq} seguiría siendo de 0.400 Ω.

Voltímetros

Este mismo medidor básico también se puede utilizar para medir la diferencia de potencial o *voltaje*. El dispositivo que mide el voltaje se llama **voltímetro** (o milivoltímetro, entre otros nombres, según sea su escala de medición). Un voltímetro siempre mide la diferencia de potencial entre dos puntos a los que deben conectarse sus terminales. (El ejemplo 25.7 de la sección 25.4 describió lo que puede pasar si un voltímetro se conecta de manera incorrecta.) Como se vio en la sección 25.4, un voltímetro ideal tendría resistencia *infinita*, por lo que si se lo conectara entre dos puntos de un circuito no se alteraría ninguna de las corrientes. Los voltímetros reales siempre tienen resistencia finita, pero un voltímetro debería tener resistencia suficientemente grande como para que al conectar el aparato a un circuito, las otras corrientes no cambien de manera apreciable.

Para el medidor descrito en el ejemplo 26.8, el voltaje a través de la bobina del medidor con desviación de escala completa es de sólo $I_{fs}R_c = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega) = 0.0200$ V. Esta escala se puede extender si se conecta un resistor R_s *en serie* con la bobina (figura 26.15b). Entonces, sólo una fracción de la diferencia de potencial total parece cruzar la bobina, y el resto parece atravesar R_s. Para un voltímetro con lectura de escala completa V_V se necesita un resistor en serie R_s en la figura 26.15b, de manera que

$$V_V = I_{fs}(R_c + R_s) \qquad \text{(para un voltímetro)} \qquad (26.8)$$

Ejemplo 26.9 Diseño de un voltímetro

¿Cómo se puede convertir un galvanómetro con $R_c = 20.0\ \Omega$ e $I_{fs} = 1.00$ mA en un voltímetro con una escala máxima de 10.0 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como este medidor se va a usar como voltímetro, sus conexiones internas se ilustran en la figura 26.15b. La variable que se busca es la resistencia en serie R_s.

PLANTEAR: El voltaje máximo permisible a través del voltímetro es $V_V = 10.0$ V. Queremos que esto suceda cuando la corriente a través de la bobina (de resistencia $R_c = 20.0\ \Omega$) es $I_{fs} = 1.00 \times 10^{-3}$ A. La resistencia en serie R_s se obtiene con la ecuación (26.8).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (26.8),

$$R_s = \frac{V_V}{I_{fs}} - R_c = \frac{10.0\ \text{V}}{0.00100\ \text{A}} - 20.0\ \Omega = 9980\ \Omega$$

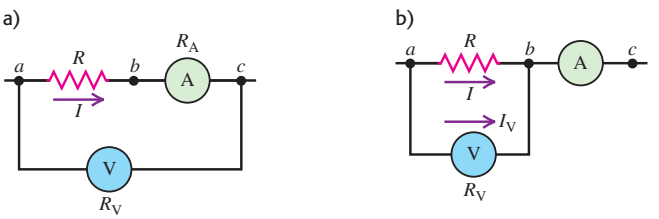
EVALUAR: Con desviación de escala completa, $V_{ab} = 10.0$ V, el voltaje a través del medidor es de 0.0200 V, el voltaje que cruza R_s es de 9.98 V, y la corriente que pasa por el voltímetro es de 0.00100 A. En este caso, la mayor parte del voltaje aparece entre los extremos del resistor en serie. La resistencia equivalente del medidor es $R_{eq} = 20.0\ \Omega + 9980\ \Omega = 10{,}000\ \Omega$. Un medidor como éste se describe como "un medidor de 1000 ohms por volt", en referencia a la razón entre la resistencia y la desviación de escala completa. En operación normal, la corriente que cruza el elemento de circuito que se mide (I en la figura 26.15b) es mucho mayor que 0.00100 A, y la resistencia entre los puntos a y b en el circuito es mucho menor que 10,000 Ω. Así, el voltímetro sólo retira una pequeña fracción de la corriente y casi no interfiere con el circuito sujeto a medición.

Amperímetros y voltímetros en combinación

Es posible utilizar un voltímetro y un amperímetro juntos para medir la *resistencia* y la *potencia*. La resistencia R de un resistor es igual a la diferencia de potencial V_{ab} entre sus terminales, dividida entre la corriente I; es decir, $R = V_{ab}/I$. La potencia de alimentación P a cualquier elemento de circuito es el producto de la diferencia de potencial que lo cruza y la corriente que pasa por él: $P = V_{ab}I$. En principio, la forma más directa de medir R o P es con la medición simultánea de V_{ab} e I.

Con amperímetros y voltímetros prácticos esto no es tan sencillo como parece. En la figura 26.16a, el amperímetro A lee la corriente I en el resistor R. El voltímetro V, sin embargo, lee la *suma* de la diferencia de potencial V_{ab} a través del resistor y la diferencia de potencial V_{bc} a través del amperímetro. Si se transfiere la terminal del voltímetro de c a b, como en la figura 26.16b, entonces el voltímetro lee correctamente la diferencia de potencial V_{ab}, pero ahora el amperímetro lee la *suma* de la corriente I en el resistor y la corriente I_V en el voltímetro. De cualquier forma, se tiene que corregir la lectura de uno u otro instrumento a menos que las correcciones sean tan pequeñas que se puedan ignorar.

26.16 Método del amperímetro-voltímetro para medir la resistencia.



Ejemplo 26.10 Medición de la resistencia I

Suponga que queremos medir una resistencia desconocida R utilizando el circuito de la figura 26.16a. Las resistencias del medidor son $R_V = 10{,}000\ \Omega$ (para el voltímetro) y $R_A = 2.00\ \Omega$ (para el amperímetro). Si el voltímetro da una lectura de 12.0 V y el amperímetro otra de 0.100 A, ¿cuáles son la resistencia R y la potencia disipada en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El amperímetro da una lectura de la corriente $I = 0.100$ A a través del resistor, y el voltímetro da la lectura de la diferencia de potencial entre los puntos a y c. Si el amperímetro fuera *ideal* (es decir, si $R_A = 0$), habría una diferencia de potencial igual a cero entre b y c, y la lectura del voltímetro $V = 12.0$ V sería igual a la diferencia de potencial V_{ab} a través del resistor, y la resistencia simplemente sería igual a $R = V/I = (12.0\ \text{V})/(0.100\ \text{A}) = 120\ \Omega$. Sin embargo, el amperímetro *no* es ideal (su resistencia es $R_A = 2.00\ \Omega$), por lo que la lectura del voltímetro V en realidad es la suma de las diferencias de potencial V_{bc} (a través del amperímetro) más V_{ab} (a través del resistor).

PLANTEAR: Para obtener el voltaje V_{bc} a través del amperímetro a partir de su corriente y resistencia conocidas, se utiliza la ley de Ohm. Después se despejan V_{ab} y la resistencia R. Así, se estará en posibilidad de calcular la potencia P que alimenta al resistor.

EJECUTAR: De acuerdo con la ley de Ohm, $V_{bc} = IR_A = (0.100\ \text{A})(2.00\ \Omega) = 0.200$ V y $V_{ab} = IR$. La suma de éstas es $V = 12.0$ V, por lo que la diferencia de potencial a través del resistor es $V_{ab} = V - V_{bc} = (12.0\ \text{V}) - (0.200\ \text{V}) = 11.8$ V. Por lo tanto, la resistencia es

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{11.8\ \text{V}}{0.100\ \text{A}} = 118\ \Omega$$

La potencia disipada en este resistor es

$$P = V_{ab}I = (11.8\ \text{V})(0.100\ \text{A}) = 1.18\ \text{W}$$

EVALUAR: Se puede confirmar este resultado de la potencia si se utiliza la fórmula alternativa $P = I^2R$. ¿Obtiene usted la misma respuesta?

Ejemplo 26.11 Medición de la resistencia II

Suponga que los medidores del ejemplo 26.10 están conectados a un resistor diferente en el circuito que se ilustra en la figura 26.16b, y que las lecturas obtenidas en ellos son las mismas que las del ejemplo 26.10. ¿Cuáles son los valores de esta nueva resistencia R y de la potencia disipada en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 26.10 el amperímetro leía la corriente real a través del resistor, pero la lectura del voltímetro no era la misma que la diferencia de potencial a través del resistor. Ahora la situación es la contraria: la lectura del voltímetro $V = 12.0$ V indica la diferencia de potencial real V_{ab} a través del resistor, pero la lectura del amperímetro $I_A = 0.100$ A *no* es igual a la corriente I a través del resistor?

PLANTEAR: La aplicación de la regla de las uniones en b en la figura 26.16b indica que $I_A = I + I_V$, donde I_V es la corriente a través del voltímetro, y se calcula a partir de los valores dados de V y la resistencia del voltímetro R_V, y ese valor se utiliza para determinar la corriente I en el resistor. Después, se determina la resistencia R a partir de I y la lectura del voltímetro, y se calcula la potencia como en el ejemplo 26.10.

EJECUTAR: Se tiene $I_V = V/R_V = (12.0\ \text{V})/(10{,}000\ \Omega) = 1.20$ mA. La corriente real I en el resistor es $I = I_A - I_V = 0.100\ \text{A} - 0.0012\ \text{A} = 0.0988$ A, y la resistencia es

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{12.0\ \text{V}}{0.0988\ \text{A}} = 121\ \Omega$$

La potencia disipada en el resistor es

$$P = V_{ab}I = (12.0\ \text{V})(0.0988\ \text{A}) = 1.19\ \text{W}$$

EVALUAR: Nuestros resultados para R y P no son demasiado distintos de los resultados del ejemplo 26.10, en que los medidores estaban conectados en forma diferente. Eso es porque el amperímetro y el voltímetro son casi ideales: en comparación con la resistencia R en estudio, la resistencia del amperímetro R_A es muy pequeña, y la del voltímetro R_V es muy grande. No obstante, los resultados de los dos ejemplos *son* diferentes, lo que demuestra que al interpretar las lecturas de amperímetros y voltímetros, se debe tomar en cuenta el modo en que se utilizan.

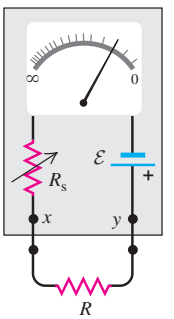
Óhmetros

Un método alternativo para medir la resistencia es utilizar un medidor de d'Arsonval en la configuración conocida como **óhmetro**, que consiste en un medidor, un resistor y una fuente (con frecuencia, una batería de linterna) conectados en serie (figura 26.17). La resistencia R que se va a medir se conecta entre las terminales x y y.

La resistencia en serie R_s es variable; se ajusta de manera que cuando las terminales x y y están en cortocircuito (es decir, cuando $R = 0$), el medidor muestre una desviación de escala completa. Cuando no hay nada conectado a las terminales x y y, de manera que el circuito entre tales puntos está *abierto* (es decir, cuando $R \to \infty$), no hay corriente y, por consiguiente, tampoco hay desviación. Para cualquier valor intermedio de R, la desviación del medidor depende del valor de R, y su escala se puede calibrar para leer en forma directa la resistencia R. Corrientes mayores corresponden a resistencias más pequeñas, por lo que esta escala lee hacia atrás en comparación con la escala que muestra la corriente.

En las situaciones en las que se requiere mucha precisión, los instrumentos con medidores de d'Arsonval se sustituyen por instrumentos electrónicos que dan lecturas digitales directas. Éstos son más precisos, estables y confiables mecánicamente que los medidores de d'Arsonval. Los voltímetros digitales se fabrican con resistencia interna muy elevada, del orden de 100 MΩ. La figura 26.18 muestra un *multímetro* digital, un instrumento capaz de medir voltaje, corriente o resistencia en un intervalo muy amplio.

26.17 Circuito del óhmetro. El resistor R_s tiene una resistencia variable, como indica la flecha a través del símbolo del resistor. Para emplear el óhmetro, primero se conecta x directamente con y y se ajusta R_s hasta que la lectura del instrumento sea de cero. Después se conectan x y y a través del resistor R y se lee la escala.



El potenciómetro

El *potenciómetro* es un instrumento que se utiliza para medir la fem de una fuente sin extraer corriente de ésta; también tiene otras aplicaciones útiles. En esencia, un potenciómetro compensa una diferencia de potencial desconocida contra una diferencia de potencial ajustable y mensurable.

El principio del potenciómetro se ilustra en la figura 26.19a. Un alambre de resistencia ab con resistencia total R_{ab} está conectado permanentemente a las terminales de una fuente de fem conocida $\mathcal{E}_1$. Se conecta un contacto deslizante c a través del galvanómetro G a una segunda fuente cuya fem $\mathcal{E}_2$ habrá de medirse. A medida que el contacto c se desliza a lo largo del alambre de resistencia, varía la resistencia R_{cb} entre los puntos c y b; si el alambre de resistencia es uniforme, R_{cb} es proporcional a la longitud del alambre entre los puntos c y b. Para determinar el valor de $\mathcal{E}_2$, se desliza el contacto c hasta que se encuentra una posición en la que el galvanómetro no muestra desviación; esto corresponde a una corriente nula a través de $\mathcal{E}_2$. Con $I_2 = 0$, la regla de Kirchhoff de las espiras da

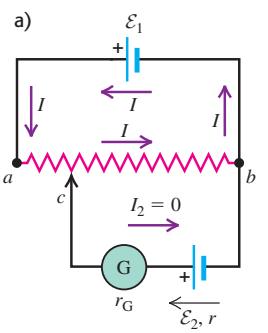
$$\mathcal{E}_2 = IR_{cb}$$

Con $I_2 = 0$, la corriente I producida por la fem $\mathcal{E}_1$ tiene el mismo valor sin importar cuál sea el valor de la fem $\mathcal{E}_2$. El dispositivo se calibra sustituyendo $\mathcal{E}_2$ por una fuente de fem conocida; después, es posible encontrar cualquier fem $\mathcal{E}_2$ desconocida midiendo la longitud del alambre cb con la cual $I_2 = 0$ (véase el ejercicio 26.35). Note que para que esto funcione, V_{ab} debe ser mayor que $\mathcal{E}_2$.

El término *potenciómetro* también se utiliza para cualquier resistor variable, por lo general con un elemento de resistencia circular y un contacto deslizable controlado mediante un eje giratorio y una perilla. En la figura 26.19b se ilustra el símbolo para un potenciómetro.

26.18 Este multímetro digital puede usarse como voltímetro (escala en color rojo), amperímetro (escala amarilla) y óhmetro (escala verde).

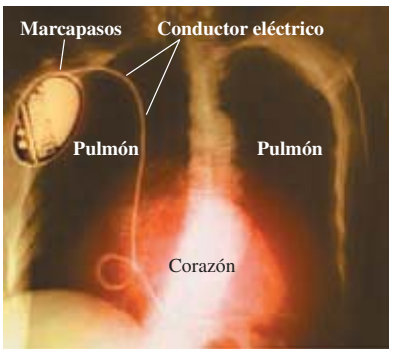
26.19 a) Circuito del potenciómetro. b) Símbolo que en un circuito representa un potenciómetro (resistor variable).



Evalúe su comprensión de la sección 26.3 Se desea medir la corriente y la diferencia de potencial a través del resistor de 2 Ω que se ilustra en la figura 26.12 (ejemplo 26.6 en la sección 26.2). *a*) Para hacer eso, ¿cómo se deben conectar un amperímetro y un voltímetro? i) El amperímetro y el voltímetro se conectan en serie con el resistor de 2 Ω; ii) el amperímetro se conecta en serie con el resistor de 2 Ω y el voltímetro se conecta entre los puntos *b* y *d*; iii) el amperímetro se conecta entre los puntos *b* y *d* y el voltímetro en serie con el resistor de 2 Ω; iv) el amperímetro y el voltímetro se conectan entre los puntos *b* y *d*. *b*) ¿Cuáles son los valores de resistencia que deben tener estos instrumentos? i) Las resistencias del amperímetro y el voltímetro deben ser mucho mayores que 2 Ω; ii) la resistencia del amperímetro debe ser mucho mayor que 2 Ω y la del voltímetro mucho menor que 2 Ω; iii) la resistencia del amperímetro debe ser mucho menor que 2 Ω y la del voltímetro mucho mayor que 2 Ω; iv) las resistencias de ambos instrumentos deben ser mucho menores que 2 Ω.

26.4 Circuitos *R-C*

26.20 Esta imagen a colores obtenida con rayos X muestra un marcapasos implantado quirúrgicamente en un paciente con un problema en el nodo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica para generar los latidos. Para compensarlo, el marcapasos (localizado cerca de la clavícula) envía pulsos eléctricos a lo largo del conductor para mantener los latidos a intervalos regulares.



En los circuitos que hemos analizado hasta este momento hemos supuesto que todas las fem y resistencias son *constantes* (independientes del tiempo), por lo que los potenciales, las corrientes y las potencias también son independientes del tiempo. Pero en el simple acto de cargar o descargar un capacitor se encuentra una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias *sí* cambian con el tiempo.

Muchos dispositivos importantes incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga alternativamente. Éstos incluyen marcapasos cardiacos (figura 26.20), semáforos intermitentes, luces de emergencia de los automóviles y unidades de flash electrónico. Comprender lo que pasa en esa clase de circuitos tiene gran importancia práctica.

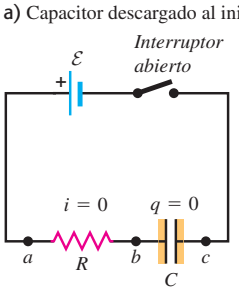
Carga de un capacitor

La figura 26.21 muestra un circuito simple para cargar un capacitor. Un circuito como éste, que tiene un resistor y un capacitor conectados en serie, se llama **circuito *R-C***. Se ha idealizado la batería (o fuente de energía eléctrica) para que tenga una fem $\mathcal{E}$ constante y una resistencia eléctrica igual a cero ($r = 0$), y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión.

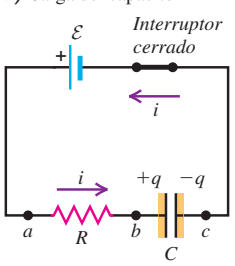
Se comienza con el capacitor descargado (figura 26.21a); después, en cierto momento inicial, $t = 0$, se cierra el interruptor, lo que completa el circuito y permite que la corriente alrededor de la espira comience a cargar el capacitor (figura 26.21b). Para todos los efectos prácticos, la corriente comienza en el mismo instante en todas las partes conductoras del circuito, y en todo momento la corriente es la misma en todas ellas.

26.21 Carga de un capacitor. a) Antes de que se cierre el circuito, la carga q es igual a cero. b) Cuando el interruptor se cierra (en $t = 0$), la corriente pasa de cero a $\mathcal{E}/R$. A medida que transcurre el tiempo, q se acerca a Q_f, y la corriente i se acerca a cero.

a) Capacitor descargado al inicio



b) Carga del capacitor



Cuando el interruptor se cierra, a medida que transcurre el tiempo, la carga en el capacitor se incrementa y la corriente disminuye.

CUIDADO **Las letras minúsculas significan que hay variación con el tiempo** Hasta este momento hemos trabajado con diferencias de potencial (voltajes), corrientes y cargas constantes, y hemos utilizado letras *mayúsculas* V, I y Q, respectivamente, para denotar esas cantidades. Para diferenciar entre cantidades que varían con el tiempo y aquellas que son contantes, usaremos letras *minúsculas*, v, i y q para voltajes, corrientes y cargas, respectivamente, que varían con el tiempo. Se sugiere al lector que en su trabajo siga esta convención.

Como el capacitor de la figura 26.21 al principio está descargado, la diferencia de potencial v_{bc} a través suyo es igual a cero en $t = 0$. En ese momento, según la regla de Kirchhoff de las espiras, el voltaje v_{ab} a través del resistor R es igual a la fem de la batería $\mathcal{E}$. La corriente inicial ($t = 0$) a través del resistor, que llamaremos I_0, está dada por la ley de Ohm: $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

A medida que el capacitor se carga, su voltaje v_{bc} aumenta y la diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor disminuye, lo que corresponde a una baja de la corriente. La suma de estos dos voltajes es constante e igual a $\mathcal{E}$. Después de un periodo largo, el capacitor está cargado por completo, la corriente baja a cero y la diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor se vuelve cero. En ese momento aparece la totalidad de la fem $\mathcal{E}$ de la batería a través del capacitor y $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Sea q la carga en el capacitor e i la corriente en el circuito al cabo de cierto tiempo t después de haberse cerrado el interruptor. Asignamos el sentido positivo a la corriente en correspondencia al flujo de carga positiva hacia la placa izquierda del capacitor, como se aprecia en la figura 26.21b. Las diferencias de potencial instantáneas v_{ab} y v_{bc} son

$$v_{ab} = iR \qquad v_{bc} = \frac{q}{C}$$

Con la regla de Kirchhoff de las espiras, se obtiene

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \tag{26.9}$$

El potencial cae en una cantidad iR conforme se va de a a b, y en q/C al pasar de b a c. Al despejar i en la ecuación (26.9), se encuentra que:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \tag{26.10}$$

En el momento $t = 0$, cuando el interruptor se encuentra cerrado, el capacitor está descargado y $q = 0$. Al sustituir $q = 0$ en la ecuación (26.10), se encuentra que la corriente *inicial* I_0 está dada por $I_0 = \mathcal{E}/R$, como ya se había dicho. Si el capacitor no estuviera en el circuito, el último término de la ecuación (26.10) no estaría presente, por lo que la corriente sería *constante* e igual a $\mathcal{E}/R$.

Conforme la carga se incrementa, el término q/RC se hace más grande y la carga del capacitor tiende a su valor final, al que llamaremos Q_f. La corriente disminuye y finalmente se vuelve cero. Cuando $i = 0$, la ecuación (26.10) da

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q_f}{RC} \qquad Q_f = C\mathcal{E} \tag{26.11}$$

Observe que la carga final Q_f no depende de R.

En la figura 26.22, la corriente y la carga del capacitor se ilustran como funciones del tiempo. En el instante en que el interruptor se cierra ($t = 0$), la corriente pasa de cero a su valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; después de eso, tiende gradualmente a cero. La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final dado por la ecuación (26.11), $Q_f = C\mathcal{E}$.

Es posible obtener expresiones generales para la carga q y la corriente i como funciones del tiempo. Con la elección del sentido positivo para la corriente (figura 26.21b), i es igual a la tasa a la que la carga positiva llega a la placa izquierda (positiva) del capacitor, por lo que $i = dq/dt$. Al sustituir esta expresión en la ecuación (26.10), se tiene

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

Al reordenar, se obtiene

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

y luego se integran ambos lados. Podemos cambiar las variables de integración a q' y t' con la finalidad de utilizar q y t para los límites superiores. Los límites inferiores son $q' = 0$ y $t' = 0$:

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

Se efectúa la integración y se obtiene:

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Se aplica la función exponencial (es decir, se toma el logaritmo inverso) y se despeja q, para obtener:

$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC}$$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, con capacitor en carga)} \tag{26.12}$$

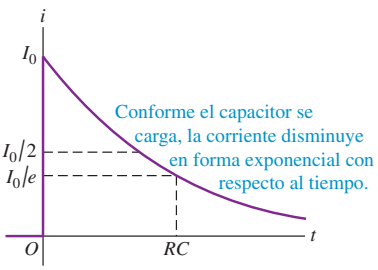
La corriente instantánea i tan sólo es la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (26.12):

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor en carga)} \tag{26.13}$$

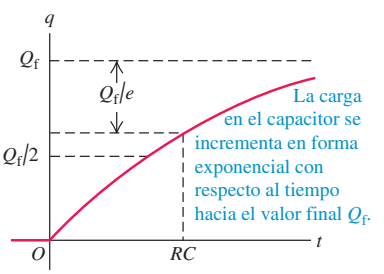
La carga y la corriente son ambas funciones *exponenciales* del tiempo. La figura 26.22a es la gráfica de la ecuación (26.13), y la figura 26.22b es la gráfica de la ecuación (26.12).

26.22 Corriente i y carga del capacitor q como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.21. Al principio, la corriente inicial es I_0 y la carga del capacitor vale cero. La corriente tiende a cero en forma asintótica, y la carga del capacitor se aproxima en forma asintótica a su valor final Q_f.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga

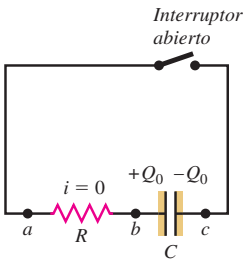


b) Gráfica de la carga de un capacitor contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga

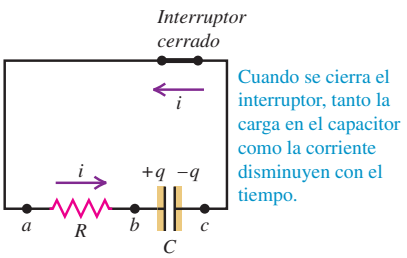


26.23 Descarga de un capacitor. a) Antes de que el interruptor esté cerrado en el momento $t = 0$, la carga del capacitor es Q_0 y la corriente es igual a cero. b) En el momento t, una vez que el interruptor se ha cerrado, la carga del capacitor es q y la corriente es i. El sentido real de la corriente es opuesto al sentido que se ilustra; i es negativa. Después de un tiempo prolongado, tanto q como i tienden a cero.

a) Capacitor inicialmente cargado

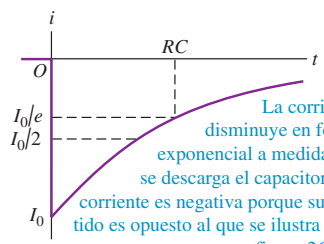


b) Descarga del capacitor

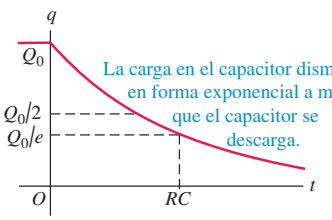


26.24 La corriente i y la carga q del capacitor como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.23. La corriente inicial es I_0 y la carga inicial del capacitor es Q_0. Tanto i como q tienden a cero de manera asintótica.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga



Constante de tiempo

Una vez que el tiempo es igual a RC, la corriente en el circuito R-C ha disminuido a $1/e$ (alrededor de 0.368) de su valor inicial. En ese momento la carga del capacitor ha alcanzado el $(1 - 1/e) = 0.632$ de su valor final $Q_f = C\mathcal{E}$. Por lo tanto, el producto RC es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor. El término RC recibe el nombre de **constante de tiempo**, o **tiempo de relajación**, del circuito, y se denota por τ:

$$\tau = RC \qquad \text{(constante de tiempo para un circuito } R\text{-}C\text{)} \tag{26.14}$$

Cuando τ es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo. Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido. Si R está en ohms y C en farads, τ está en segundos.

En la figura 26.22a, el eje horizontal es una *asíntota* de la curva. En sentido estricto, i nunca llegará exactamente a cero. Pero cuanto más tiempo transcurra, más se acercará a ese valor. Después de que pasa un tiempo igual a $10RC$, la corriente ha bajado a 0.000045 de su valor inicial. De manera similar, la curva de la figura 26.22b se acerca a la asíntota, la recta horizontal punteada Q_f. La carga q nunca toma ese valor exacto, pero después de un tiempo igual a 10 RC, la diferencia entre q y Q_f sólo es de 0.000045 veces el valor de Q. Se invita al lector a comprobar que el producto RC está expresado en unidades de tiempo.

Descarga de un capacitor

Ahora suponga que después de que el capacitor de la figura 26.21b ha adquirido una carga Q_0, se retira la batería del circuito R-C y se conectan los puntos a y c a un interruptor abierto (figura 26.23a). Después se cierra el interruptor y en el mismo instante se reajusta el cronómetro a $t = 0$; en ese momento, $q = Q_0$. Luego, el capacitor se *descarga* a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.

Otra vez, i y q representan la corriente y la carga como función del tiempo en cierto instante después de que se hizo la conexión. En la figura 26.23b se hace la misma elección del sentido positivo para la corriente que en la figura 26.21b. Entonces, la regla de Kirchhoff de las espiras da la ecuación (26.10) pero con $\mathcal{E} = 0$; es decir,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \tag{26.15}$$

La corriente i ahora es negativa; esto se debe a que la carga positiva q está saliendo de la placa izquierda del capacitor de la figura 26.23b, por lo que la corriente va en sentido opuesto al que se ilustra en la figura. En el momento $t = 0$, cuando $q = Q_0$, la corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.

Para encontrar q como función del tiempo se reordena la ecuación (26.15), de nuevo se cambian los nombres de las variables a q' y t', y se procede a integrar. Esta vez los límites para q' son de Q_0 a q. Se obtiene

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor en descarga)} \tag{26.16}$$

La corriente instantánea i es la derivada de ésta con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor en descarga)} \tag{26.17}$$

En la figura 26.24 están graficadas la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo. Al comparar los resultados con las ecuaciones (26.12) y (26.13), se observa que las expresiones para la corriente son idénticas, aparte del signo de I_0. En la ecuación (26.16), la carga del capacitor tiende a

cero de manera asintótica, en tanto que en la ecuación (26.12) es la *diferencia* entre q y Q la que tiende a cero en forma asintótica.

Hay consideraciones sobre la energía que amplían nuestra comprensión del comportamiento de un circuito *R-C*. Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$. La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es i^2R, y la tasa a que la energía se almacena en el capacitor es $i\,v_{bc} = iq/C$. Al multiplicar la ecuación (26.9) por i se obtiene:

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C} \tag{26.18}$$

Esto significa que de la potencia $\mathcal{E}i$ suministrada por la batería, una parte (i^2R) se disipa en el resistor y otra parte (iq/C) se almacena en el capacitor.

La energía *total* suministrada por la batería durante la carga del capacitor es igual a la fem de la batería $\mathcal{E}$ multiplicada por el total de la carga Q_f, o $\mathcal{E}Q_f$. La energía total almacenada en el capacitor, según la ecuación (24.9), es $Q_f\,\mathcal{E}/2$. Así, *exactamente la mitad* de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor. Es un poco sorprendente que esta división por la mitad de la energía no dependa de C, R o $\mathcal{E}$. Este resultado también se puede verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia en la ecuación (26.18). Se deja ese cálculo para entretenimiento del lector (véase el problema 26.87).

Activ Online Physics
- 12.6 Capacitancia
- 12.7 Capacitores en serie y en paralelo
- 12.8 Constantes de tiempo de circuitos

Ejemplo 26.12 Carga de un capacitor

Un resistor con resistencia 10 MΩ está conectado en serie con un capacitor cuya capacitancia es 1.0 μF y una batería con fem de 12.0 V. Antes de cerrar el interruptor en el momento $t = 0$, el capacitor se descarga. *a*) ¿Cuál es la constante de tiempo? *b*) ¿Qué fracción de la carga final hay en las placas en el momento $t = 46$ s? *c*) ¿Qué fracción de la corriente inicial permanece en $t = 46$ s?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ésta es la misma situación que se ilustra en la figura 26.21, con $R = 10$ MΩ, $C = 1.0$ μF y $\mathcal{E} = 12.0$ V. La carga y la corriente varían con el tiempo, según se ilustra en la figura 26.22. Las variables que se buscan son *a*) la constante de tiempo, *b*) la carga q en $t = 46$ s dividida entre la carga final Q_f y *c*) la corriente i en $t = 46$ s dividida entre la corriente inicial i_0.

PLANTEAR: La carga para un capacitor que se está cargando está dada por la ecuación (26.12), y la corriente por la ecuación (26.13). La ecuación (26.14) da la constante de tiempo.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (26.14), la constante de tiempo es

$$\tau = RC = (10 \times 10^6\,\Omega)(1.0 \times 10^{-6}\,\text{F}) = 10\,\text{s}$$

b) A partir de la ecuación (26.12),

$$\frac{q}{Q_f} = 1 - e^{-t/RC} = 1 - e^{-(46\,\text{s})/(10\,\text{s})} = 0.99$$

El capacitor está cargado al 99% después de un tiempo igual a 4.6 RC, o 4.6 constantes de tiempo.

c) De acuerdo con la ecuación (26.13),

$$\frac{i}{I_0} = e^{-4.6} = 0.010$$

Después de 4.6 constantes de tiempo, la corriente ha disminuido al 1.0% de su valor inicial.

EVALUAR: La constante de tiempo es relativamente grande porque la resistencia es muy grande. El circuito cargará con más rapidez si se utiliza una resistencia más pequeña.

Ejemplo 26.13 Descarga de un capacitor

El resistor y el capacitor descritos en el ejemplo 26.12 se reconectan como se ilustra en la figura 26.23. Originalmente, se da al capacitor una carga de 5.0 μF y luego se descarga al cerrar el interruptor en $t = 0$. *a*) ¿En qué momento la carga será igual a 0.50 μC? *b*) ¿Cuál es la corriente en ese momento?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ahora el capacitor se descarga, por lo que la carga q y corriente i varían con el tiempo como se ilustra en la figura 26.24. Las variables que se buscan son *a*) el valor de t en el que $q = 0.50$ μC y *b*) el valor de i en ese momento.

PLANTEAR: La carga está dada por la ecuación (26.16), y la corriente por la ecuación (26.17).

EJECUTAR: *a*) Al despejar el momento t en la ecuación (26.16) , se obtiene:

$$t = -RC \ln \frac{q}{Q_0}$$

$$= -(10 \times 10^6\,\Omega)(1.0 \times 10^{-6}\,\text{F}) \ln \frac{0.50\,\mu\text{C}}{5.0\,\mu\text{C}} = 23\,\text{s}$$

continúa

Esto es 2.3 veces la constante de tiempo $\tau = RC = 10$ s.

b) De la ecuación (26.17), con $Q_0 = 5.0\ \mu\text{C} = 5.0 \times 10^{-6}$ C,

$$i = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = -\frac{5.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{10\ \text{s}}e^{-2.3} = -5.0 \times 10^{-8}\ \text{A}$$

Cuando el capacitor se está descargando, la corriente tiene el signo opuesto del que tiene cuando el capacitor se está cargando.

EVALUAR: Hubiéramos podido evitar el trabajo de calcular $e^{-t/RC}$ advirtiendo que, en el tiempo en cuestión, $q = 0.10\ Q_0$; según la ecuación (26.16) esto significa que $e^{-t/RC} = 0.10$.

Evalúe su comprensión de la sección 26.4 La energía almacenada en un capacitor es igual a $q^2/2C$. Cuando se descarga un capacitor, ¿qué fracción de la energía inicial permanece después de transcurrido un tiempo igual a una constante de tiempo? i) $1/e$; ii) $1/e^2$; iii) $1 - 1/e$, iv) $(1 - 1/e)^2$; v) la respuesta depende de cuánta energía haya almacenada inicialmente.

26.5 Sistemas de distribución de energía

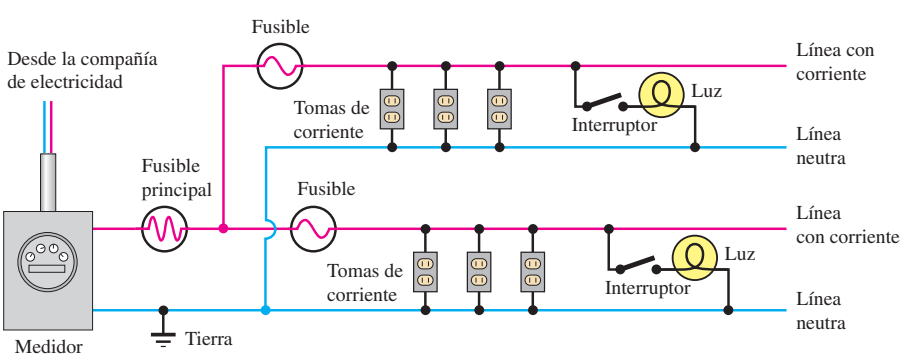
Este capítulo termina con un análisis breve de los sistemas prácticos de distribución de energía eléctrica en hogares y automóviles. Los automóviles emplean corriente directa (cd), en tanto que casi todos los sistemas domésticos, comerciales e industriales usan corriente alterna (ca) por la facilidad para elevar y reducir el voltaje mediante transformadores. La mayoría de los conceptos básicos de cableado se aplican a ambos tipos de sistemas. En el capítulo 31 hablaremos con más detalle de los circuitos de corriente alterna.

Las lámparas, los motores y otros aparatos que operan en el interior de una casa siempre están conectados en *paralelo* a la fuente de energía eléctrica (los cables provenientes de la compañía que suministra la electricidad a los hogares, o los cables de la batería y el alternador de un automóvil). Si los aparatos estuvieran conectados en serie, al apagarse uno se apagarían todos los demás (véase el ejemplo 26.2 de la sección 26.1). La figura 26.25 ilustra la idea básica del cableado de una casa. Un lado de la "línea", como se le llama al par de conductores, se designa como el lado *neutro*; siempre está conectado a "tierra" en el tablero de servicio. Para las viviendas, la *tierra* es un electrodo real insertado en el terreno (que por lo general es un buen conductor) o, en ocasiones, está conectado a la tubería hidráulica de la casa. Los electricistas hablan de los lados "con corriente" y "neutro" de la línea. La mayoría de los sistemas de cableado modernos domésticos tienen *dos* líneas con corriente de polaridad opuesta con respecto a la neutra. Más adelante regresaremos a este detalle.

En Estados Unidos y Canadá, el voltaje doméstico es nominalmente de 120 V, y en Europa con frecuencia es de 240 V. (En el caso de la corriente alterna, que varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo, estos números representan el voltaje *medio cuadrático*, o voltaje eficaz, que es $1/\sqrt{2}$ del voltaje máximo. Esto se estudiará con más detalle en la sección 31.1.) La cantidad de corriente I establecida por un aparato dado está determinada por su potencia de alimentación P, dada por la ecuación (25.17): $P = VI$. De ahí que $I = P/V$. Por ejemplo, la corriente en una bombilla de 100 W es

$$I = \frac{P}{V} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.83\ \text{A}$$

26.25 Diagrama de las partes de un sistema de cableado de una casa. Sólo se ilustran dos circuitos del ramal; un sistema real podría tener de cuatro a 30 circuitos de ramal. Las bombillas y los aparatos se conectan en las tomas de corriente. No aparecen los alambres de conexión a tierra, que normalmente no conducen corriente.



La potencia de alimentación a esta bombilla en realidad está determinada por su resistencia R. Con base en la ecuación (25.18), que dice que $P = VI = I^2R = V^2/R$ para un resistor, la resistencia de la bombilla a su temperatura de operación es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120\ \text{V}}{0.83\ \text{A}} = 144\ \Omega \qquad \text{o bien,} \qquad R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

De manera similar, una *waflera* de 1500 W toma una corriente de (1500 W)/(120 V) = 12.5 A, y tiene una resistencia, a su temperatura de operación, de 9.6 Ω. Puesto que la temperatura depende de la resistividad, las resistencias de estos aparatos son considerablemente menores cuando se encuentran fríos. Si se mide con un óhmetro la resistencia de una bombilla de 100 W (cuya pequeña corriente ocasiona muy poco aumento de la temperatura), es probable que se obtenga un valor cercano a 10 Ω. Cuando se enciende una bombilla, esa baja resistencia ocasiona una oleada inicial de corriente hasta que el filamento se calienta. Por eso, una bombilla que está cerca de fundirse casi siempre lo hace en el momento de encenderse.

Sobrecargas en el circuito y cortocircuitos

La corriente máxima disponible desde un circuito individual está limitada por la resistencia de los alambres. Como se dijo en la sección 25.5, la pérdida de potencia I^2R en los alambres eleva la temperatura de éstos, y en casos extremos esto puede provocar un incendio o fundir los alambres. Es común que los cables para las bombillas y tomas de corriente empleen alambres de calibre 12, que tienen un diámetro de 2.05 mm y pueden conducir en forma segura una corriente máxima de 20 A (sin sobrecalentarse). Se emplean calibres mayores, como el 8 (3.26 mm) o 6 (4.11 mm), para aparatos que toman mucha corriente, como estufas eléctricas y secadoras de ropa, y el calibre 2 (6.54 mm) o más grueso se utiliza para los cables principales de entrada a la vivienda.

Los fusibles y los interruptores de circuito, también llamados disyuntores o *breakers*, brindan protección contra sobrecargas y calentamiento excesivo. Un *fusible* contiene un enlace de aleación de plomo y estaño que se funde a temperatura muy baja; el enlace se funde y rompe el circuito cuando se rebasa su corriente nominal (figura 26.26a). Un *interruptor de circuito* es un dispositivo electromecánico que realiza la misma función por medio de una tira electromagnética o bimetálica para "disparar" el interruptor e interrumpir el circuito cuando la corriente excede un valor específico (figura 26.26b). Los interruptores de circuito tienen la ventaja de que se pueden reconectar después de haberse disparado, mientras que un fusible fundido debe sustituirse. Sin embargo, a veces es más confiable la operación de los fusibles que la de los interruptores de circuito.

Si el sistema tiene fusibles y se conectan a una misma toma demasiados aparatos que toman mucha corriente, el fusible se quemará. *Nunca* sustituya un fusible por otro de mayor capacidad, pues se arriesga a que los cables se calienten en exceso y provoquen un incendio. La única solución segura es distribuir los equipos en varios circuitos. Es frecuente que las cocinas modernas tengan tres o cuatro circuitos separados de 20 A.

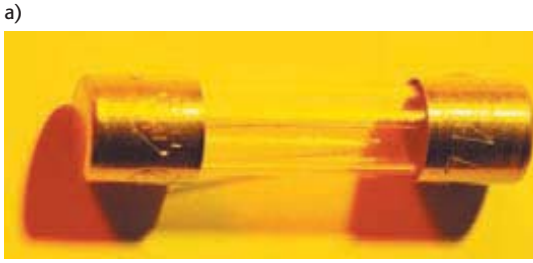
El contacto entre los lados con corriente y neutral de la línea provoca un *cortocircuito*. Esa situación, que puede originarse por un aislamiento defectuoso o por algún tipo de desperfecto mecánico, ofrece una trayectoria de muy baja resistencia a la corriente y permite que fluya una corriente muy grande que rápidamente fundiría los alambres y quemaría su aislamiento si un fusible o un interruptor de circuito no interrumpiera la corriente (véase el ejemplo 25.11 en la sección 25.5). Una situación igualmente peligrosa es un cable roto que interrumpa la trayectoria de la corriente, lo que crearía un *circuito abierto*. Esto es peligroso ya que en el punto de contacto intermitente se producen chispas.

En las prácticas aceptadas de cableado, un fusible o interruptor *sólo* se coloca en el lado con corriente de la línea, nunca en el neutral, pues de otro modo si ocurriera un cortocircuito debido a un mal aislamiento u otro desperfecto, el fusible del lado de tierra podría quemarse. El lado con corriente seguiría en operación y representaría un peligro de descarga eléctrica si se toca el conductor vivo y un objeto conectado a tierra, como un tubo de agua. Por razones similares, el interruptor de pared de un elemento de iluminación siempre está en el lado cargado de la línea, nunca en el neutro.

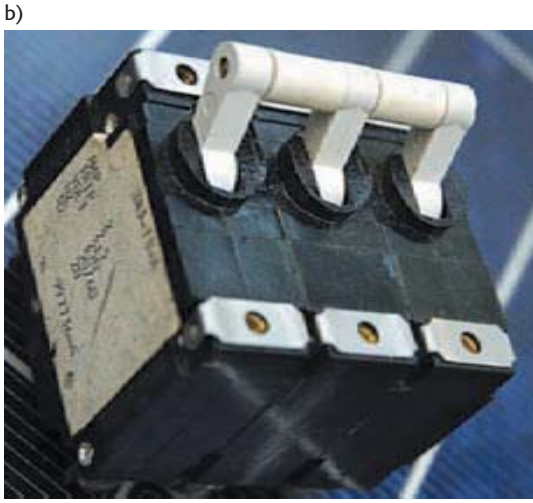
Se tiene protección adicional contra los accidentes provocados por descargas, si se emplea un tercer conductor llamado *alambre de conexión a tierra*, que se incluye en

26.26 a) Un exceso de corriente fundiría el alambre delgado hecho de una aleación de plomo y estaño que corre a lo largo de un fusible, en el interior de la carcasa transparente. b) El interruptor de este disyuntor se disparará si se excede la corriente máxima permisible.

a)



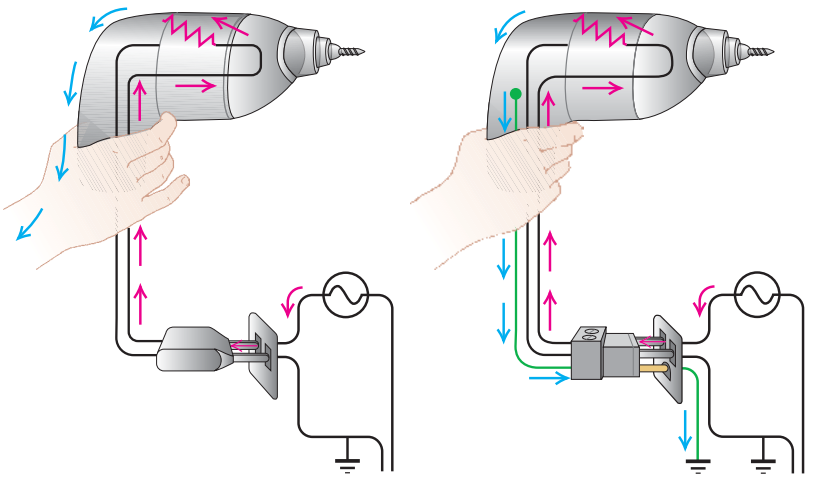
b)



26.27 a) Si un taladro que funciona mal se conecta a un enchufe de pared con una clavija de dos puntas, el operador podría recibir una descarga. b) Cuando el taladro defectuoso se conecta con una clavija de tres puntas, el operador no recibiría descarga porque la carga eléctrica fluiría a través del alambre de conexión a tierra (en color verde) hacia la tercera punta para luego pasar al terreno y no al cuerpo de la persona. Si la corriente a tierra es apreciable, el fusible se quema.

a) Clavija de dos puntas

b) Clavija de tres puntas



todos los sistemas de cableado actuales. Este conductor corresponde a la punta larga y redonda o con forma de U de la clavija de tres puntas de un aparato o de una herramienta eléctrica. Se conecta al lado neutro de la línea en el tablero de servicio. Normalmente, el alambre de conexión a tierra no conduce corriente, sino que conecta a tierra la carcasa o el bastidor metálico del dispositivo. Si un conductor del lado con corriente de la línea hace contacto de manera accidental con el bastidor o la carcasa, el conductor de conexión a tierra provee una trayectoria para la corriente y el fusible se quema. Sin el alambre de conexión a tierra, el bastidor estaría "cargado", es decir, a un potencial de 120 V más alto con respecto a la tierra. En esas condiciones, si una persona toca el bastidor y un tubo de agua (o incluso el piso húmedo de un sótano) al mismo tiempo, podría recibir una descarga peligrosa (figura 26.27). En ciertas situaciones, en especial cuando las tomas se localizan en el exterior o cerca de un grifo o de tuberías de agua, se utiliza un tipo especial de interruptor de circuito llamado *interruptor de falla de tierra* (FGI o GFCI, por las siglas de *ground-fault interrupter*). Este dispositivo detecta la diferencia en la corriente entre los conductores con corriente y neutro (que normalmente es igual a cero), y se dispara cuando esta diferencia supera un valor muy pequeño, comúnmente de 5 mA.

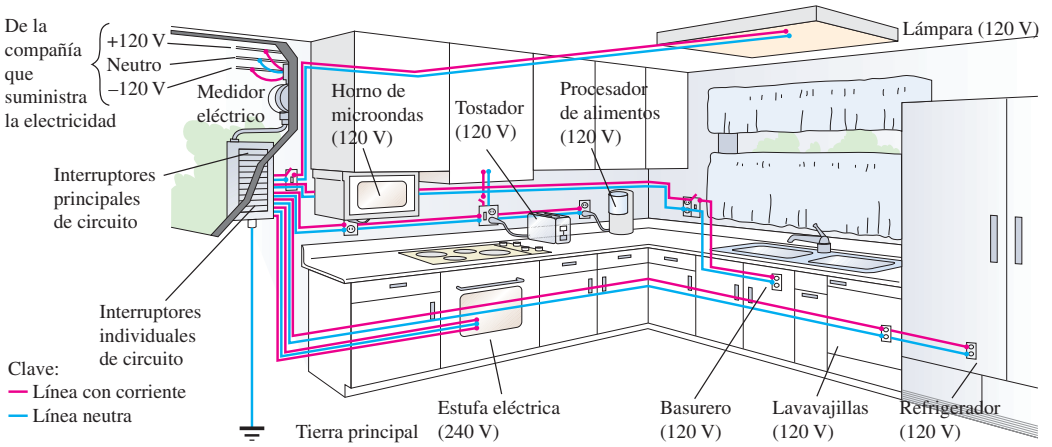
Cableado de viviendas y automóviles

La mayoría de los sistemas modernos de cableado doméstico en realidad utilizan una versión un poco distinta del que se acaba de describir. La compañía que suministra la electricidad proporciona *tres* conductores (figura 26.28). Uno es neutro y los otros dos están a 120 V con respecto al neutro pero con polaridad opuesta, lo que da un voltaje de 240 V entre ellos. La compañía llama a esto una *línea de tres hilos*, en contraste con la línea de 120 V de dos hilos (más uno de conexión a tierra) ya descrita. Con una línea de tres hilos es posible conectar lámparas y aparatos de 120 V entre el conductor neutro y cualquiera de los conductores con carga, y los dispositivos de alta potencia que requieran 240 V, como estufas eléctricas y secadoras de ropa, se conectan entre los dos alambres con carga.

Para ayudar a evitar los errores de cableado, los sistemas domésticos utilizan un código estandarizado de colores en el que el lado con corriente de una línea tiene aislamiento negro (negro y rojo para los dos lados de una línea de 240 V), el lado neutro tiene aislamiento blanco y el conductor de conexión a tierra está desnudo o tiene aislamiento verde. Pero en los aparatos y equipos electrónicos, los lados de las líneas a tierra y neutro por lo general son negros. ¡Cuidado! (Nuestras ilustraciones no siguen este código, sino que usan el rojo para la línea con carga y azul para la neutra.)

Todo el análisis anterior se aplica directamente al cableado de los automóviles. El voltaje es de aproximadamente 13 V (corriente directa); la potencia la suministran la batería y el alternador, que carga la batería cuando el motor está en marcha. El lado

26.28 Diagrama de un sistema de cableado común de 120-240 V en una cocina. No se ilustran los alambres de conexión a tierra. Para cada línea, el lado con corriente es de color rojo, y el lado neutro se muestra en azul. (En los sistemas reales de cableado doméstico se emplea un código de colores distinto.)



neutro de cada circuito se conecta a la carrocería y al bastidor del vehículo. Para este voltaje tan bajo no se requiere un conductor adicional de conexión a tierra como medida de seguridad. La disposición de los fusibles o interruptores de circuito es la misma, en principio, que en el cableado doméstico. A causa del bajo voltaje (menos energía por carga), se requiere más corriente (mayor número de cargas por segundo) para obtener la misma potencia; un faro de 100 W requiere una corriente de alrededor de (100 W)/(13 V) = 8 A.

Aunque en el análisis anterior hablamos de *potencia*, lo que compramos a la compañía de electricidad en realidad es *energía*. La potencia es energía transferida por unidad de tiempo; esto significa que la energía es la potencia media multiplicada por tiempo. La unidad habitual de la energía que vende la empresa es el kilowatt-hora $(1\ \text{kW}\cdot\text{h})$:

$$1\ \text{kW}\cdot\text{h} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3.6\times10^6\ \text{W}\cdot\text{s} = 3.6\times10^6\ \text{J}$$

Lo normal es que un kilowatt-hora cueste de 2 a 10 centavos de dólar, en función de la localidad y cantidad de energía consumida. Para operar continuamente una waflera de 1500 W (1.5 kW) durante 1 hora se requieren 1.5 kW · h de energía; a 10 centavos por kilowatt-hora, el costo de la energía es de 15 centavos de dólar. El costo de operar una lámpara o un aparato durante un tiempo específico se calcula del mismo modo si se conoce la tarifa eléctrica. Sin embargo, muchos utensilios de cocina (incluidas las wafleras) se encienden y se apagan para mantener una temperatura constante, por lo que el consumo medio de potencia suele ser menor que la potencia nominal indicada en el aparato.

Ejemplo 26.14 Circuito en la cocina

En el mismo circuito de 20 A y 120 V se conectan un tostador de 1800 W, un sartén eléctrico de 1.3 kW y una lámpara de 100 W. *a*) ¿Cuánta corriente toma cada aparato y cuál es su resistencia correspondiente? *b*) ¿Esta combinación hará que se queme el fusible?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Cuando se conectan en el mismo circuito, los tres aparatos están en paralelo. El voltaje a través de cada uno es $V = 120$ V.

PLANTEAR: Se calcula la corriente I en cada equipo por medio de la relación $P = VI$, donde P es la potencia de alimentación del dispositivo. Para obtener la resistencia R de cada uno se usa la expresión $P = V^2/R$.

EJECUTAR: *a*) Para simplificar los cálculos de la corriente y resistencia se observa que $I = P/V$ y $R = V^2/P$. Entonces,

$$I_{\text{tostador}} = \frac{1800\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 15\ \text{A} \qquad R_{\text{tostador}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1800\ \text{W}} = 8\ \Omega$$

$$I_{\text{sartén}} = \frac{1300\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 11\ \text{A} \qquad R_{\text{sartén}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1300\ \text{W}} = 11\ \Omega$$

$$I_{\text{lámpara}} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.83\ \text{A} \qquad R_{\text{lámpara}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

Para un voltaje constante, el dispositivo con la *menor* resistencia (el tostador en este caso) toma la mayor cantidad de corriente y recibe la mayor potencia.

continúa

b) La corriente total a través de la línea es la suma de las corrientes tomadas por los tres aparatos:

$$I = I_{\text{tostador}} + I_{\text{sartén}} + I_{\text{lámpara}} = 15\ \text{A} + 11\ \text{A} + 0.83\ \text{A} = 27\ \text{A}$$

Esto rebasa la capacidad nominal de 20 A en la línea, por lo que el fusible se quemará.

EVALUAR: También se podría calcular la corriente si primero se obtiene la resistencia equivalente de los tres aparatos en paralelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_{\text{tostador}}} + \frac{1}{R_{\text{sartén}}} + \frac{1}{R_{\text{lámpara}}}$$

$$= \frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{11\ \Omega} + \frac{1}{144\ \Omega} = 0.22\ \Omega^{-1}$$

$$R_{\text{eq}} = 4.5\ \Omega$$

Entonces, el total de corriente es $I = V/R_{\text{eq}} = (120\ \text{V})/(4.5\ \Omega) = 27\ \text{A}$, como antes. Un tercer modo de determinar el valor de I es usar la expresión $I = P/V$ y simplemente dividir la potencia total entregada a los tres aparatos entre el voltaje.

$$I = \frac{P_{\text{tostador}} + P_{\text{sartén}} + P_{\text{lámpara}}}{V} = \frac{1800\ \text{W} + 1300\ \text{W} + 100\ \text{W}}{120\ \text{V}}$$

$$= 27\ \text{A}$$

Demandas de corriente como ésta se encuentran a diario en las cocinas; por esa razón, las cocinas modernas tienen más de un circuito de 20 A. En la práctica real, el tostador y el sartén eléctrico deberían conectarse en circuitos distintos, de manera que la corriente en cada uno estaría con seguridad por debajo de la capacidad nominal de 20 A.

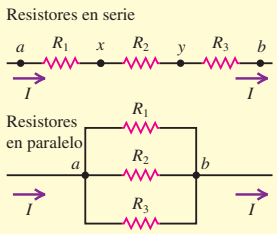
Evalúe su comprensión de la sección 26.5 Para impedir que se queme el fusible del ejemplo 26.14, un técnico electricista lo sustituye por otro de 40 A. ¿Es razonable hacer esto?

CAPÍTULO 26 RESUMEN

Resistores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie varios resistores R_1, R_2, R_3, . . . , la resistencia equivalente R_{eq} es la suma de las resistencias individuales. En una conexión en serie fluye la misma *corriente* a través de todos los resistores. Cuando se conectan en paralelo varios resistores, el recíproco de la resistencia equivalente R_{eq} es la suma del recíproco de las resistencias individuales. Todos los resistores en una conexión en paralelo tienen la misma *diferencia de potencial* entre sus terminales. (Véanse los ejemplos 26.1 y 26.2.)

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \quad \text{(resistores en serie)} \tag{26.1}$$

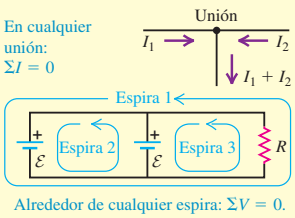
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \quad \text{(resistores en paralelo)} \tag{26.2}$$



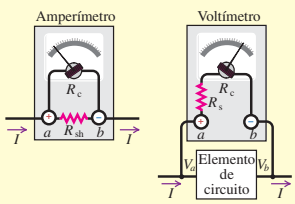
Reglas de Kirchhoff: La regla de Kirchhoff de las uniones se basa en la conservación de la carga. Establece que la suma algebraica de las corrientes en una unión debe ser igual a cero. La regla de Kirchhoff de las espiras se basa en la conservación de la energía y la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos. Dice que la suma algebraica de las diferencias de potencial alrededor de una espira debe ser igual a cero. Al aplicar las reglas de Kirchhoff es esencial tener cuidado con los signos. (Véanse los ejemplos 26.3 a 26.7.)

$$\sum I = 0 \quad \text{(regla de las uniones)} \tag{26.5}$$

$$\sum V = 0 \quad \text{(regla de las espiras)} \tag{26.6}$$



Instrumentos de medición eléctrica: En un galvanómetro de d'Arsonval, la desviación es proporcional a la corriente en la bobina. Para tener una escala de corriente más amplia se agrega un resistor de derivación, de manera que parte de la corriente se desvíe de la bobina del medidor. Un instrumento de este tipo se llama amperímetro. Si la bobina y cualquier resistencia adicional en serie obedecen la ley de Ohm, el instrumento también se puede calibrar para que lea diferencias de potencial o voltaje, en cuyo caso recibe el nombre de voltímetro. Un buen amperímetro tiene resistencia muy baja; un buen voltímetro tiene resistencia muy alta. (Véanse los ejemplos 26.8 a 26.11.)



Circuitos *R-C*: Cuando un capacitor se carga mediante una batería en serie con un resistor, la corriente y la carga en el capacitor no son constantes. La carga tiende a su valor final de manera asintótica, y la corriente tiende a cero del mismo modo. La carga y la corriente en el circuito están dadas por las ecuaciones (26.12) y (26.13). Después del tiempo $\tau = RC$, la carga se ha acercado a menos de $1/e$ de su valor final. Este tiempo se llama constante de tiempo o tiempo de relajación del circuito. Cuando se descarga el capacitor, la carga y la corriente están dadas como función del tiempo por las ecuaciones (26.16) y (26.17). La constante de tiempo es la misma en la carga y en la descarga. (Véanse los ejemplos 26.12 y 26.13.)

Capacitor en carga:

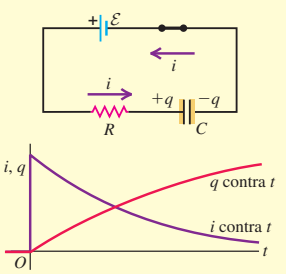
$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \tag{26.12}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \tag{26.13}$$

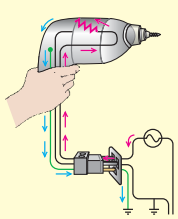
Capacitor en descarga:

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \tag{26.16}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \tag{26.17}$$



Cableado de una casa: En los sistemas de cableado doméstico, los distintos aparatos eléctricos están conectados en paralelo a través de la línea de energía, que consiste en un par de conductores, uno "con corriente" y otro "neutro". Además, por seguridad se incluye un alambre "a tierra". La corriente máxima permisible en un circuito está determinada por el tamaño de los alambres y la temperatura máxima que pueden tolerar. Los fusibles e interruptores de circuito dan seguridad contra un exceso de corriente y el incendio que podría resultar. (Véase el ejemplo 26.14.)



Términos clave

corriente directa, *881*
corriente alterna, *881*
en serie, *882*
en paralelo, *882*
resistencia equivalente, *882*
unión, *887*
espira, *887*
regla de Kirchhoff de las uniones, *887*
regla de Kirchhoff de las espiras, *887*
galvanómetro de d'Arsonval, *891*
amperímetro, *892*
resistor de derivación, *892*
voltímetro, *893*
óhmetro, *895*
circuito *R-C*, *896*
constante de tiempo (tiempo de relajación), *898*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La diferencia de potencial es la misma a través de resistores conectados en paralelo. Sin embargo, si las resistencias R son diferentes, hay una corriente distinta I a través de cada resistor: $I = V/R$.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

26.1 Respuesta: *a*), *c*), *d*), *b*) He aquí por qué: los tres resistores en la figura 26.1 están conectados en serie, por lo que $R_{eq} = R + R + R = 3R$. En la figura 26.1b, los tres resistores están en paralelo, de manera que $1/R_{eq} = 1/R + 1/R + 1/R = 3/R$ y $R_{eq} = 3R$. En la figura 26.1c los resistores segundo y tercero están en paralelo, por lo que su resistencia equivalente R_{23} está dada por $1/R_{23} = 1/R + 1/R = 2/R$; por lo tanto, $R_{23} = R/2$. Esta combinación está en serie con el primer resistor, por lo que los tres resistores juntos tienen resistencia equivalente $R_{eq} = R + R/2 = 3R/2$. En la figura 26.1d, los resistores segundo y tercero están en serie, de manera que su resistencia equivalente es $R_{23} = R + R = 2R$. Esta combinación está en paralelo con el primer resistor, por lo que la resistencia equivalente de la combinación de los tres resistores está dada por $1/R_{eq} = 1/R + 1/2R = 3/2R$. De ahí que $R_{eq} = 2R/3$.

26.2 Respuesta: espira *cbdac* La ecuación (2) menos la (1) da $-I_2(1\ \Omega) - (I_2 + I_3)(2\ \Omega) + (I_1 - I_3)(1\ \Omega) + I_1(1\ \Omega) = 0$. Esta ecuación se puede obtener si se aplica la regla de las espiras alrededor de la trayectoria de c a b a d a a y a c en la figura 26.12. Ésta no es una ecuación nueva, por lo que no habría ayudado en la solución del ejemplo 26.6.

26.3 Respuestas: *a*) ii), *b*) iii) Un amperímetro siempre debe colocarse en serie con el elemento de interés en el circuito, y un voltímetro siempre debe estar en paralelo. Idealmente, el amperímetro tendría una resistencia de cero y el voltímetro tendría una resistencia infinita con la finalidad de que su presencia no tuviera efecto ni en la corriente ni el voltaje a través del resistor. Ninguna de estas idealizaciones es posible, pero la resistencia del amperímetro debe ser mucho menor de 2 Ω y la resistencia del voltímetro debe ser mucho mayor de 2 Ω.

26.4 Respuesta: ii) Después de una constante de tiempo, $t = RC$, y la carga inicial Q_0 ha disminuido a $Q_0e^{-t/RC} = Q_0e^{-RC/RC} = Q_0e^{-1} = Q_0/e$. De ahí que la energía almacenada haya decrecido de $Q_0^2/2C$ a $(Q_0/e)^2/2C = Q_0^2/2Ce^2$, una fracción $1/e^2 = 0.135$ de su valor inicial. Este resultado no depende del valor inicial de la energía.

26.5 Respuesta: no Esto es algo muy peligroso de hacer. El fusible permitiría que hubiera corrientes de hasta 40 A, lo doble del valor nominal del cableado. La cantidad de potencia $P = I^2R$ disipada en una sección de cable podría ser en ese caso de hasta cuatro veces el valor nominal, por lo que los alambres se calentarían mucho y provocarían un incendio.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

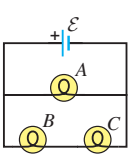
P26.1. ¿En cuál bombilla de 120 V el filamento tiene mayor resistencia: en una de 60 W o en una de 120 W? Si las dos bombillas se conectan en serie a una línea de 120 V, ¿a través de cuál bombilla habrá una mayor caída de voltaje? ¿Y si se conectan en paralelo? Explique su razonamiento.

P26.2. Dos bombillas de 120 V, una de 25 W y otra de 200 W, se conectaron en serie a través de una línea de 240 V. En ese momento parecía una buena idea, pero una bombilla se fundió casi de inmediato. ¿Cuál fue y por qué?

P26.3. Se conecta un número de bombillas idénticas a una batería de linterna. *a*) ¿Qué pasa con el brillo de cada bombilla a medida que se agregan más y más de ellas al circuito, si se conectan i) en serie, y ii) en paralelo? *b*) ¿La batería durará más si las bombillas están en serie o en paralelo? Explique su razonamiento.

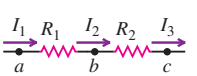
P26.4. En el circuito que se ilustra en la figura 26.29 se conectan tres bombillas idénticas a una batería de linterna. ¿Cómo se compara la luminosidad de las bombillas? ¿Cuál es la más luminosa? ¿A través de cuál bombilla pasa la mayor corriente? ¿Cuál bombilla tiene la mayor diferencia de potencial entre sus terminales? ¿Qué pasa si la bombilla A se desenrosca de su entrada? ¿Y si lo mismo se hace con la bombilla B? ¿Y con la C? Explique su razonamiento.

Figura 26.29 Pregunta P26.4.



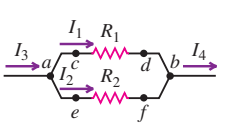
P26.5. Si dos resistores R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) están conectados en serie como se ilustra en la figura 26.30, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? Dé una justificación para su respuesta. *a*) $I_1 = I_2 = I_3$. *b*) La corriente es mayor en R_1 que en R_2. *c*) El consumo de potencia eléctrica es el mismo para ambos resistores. *d*) El consumo de potencia eléctrica es mayor en R_2 que en R_1. *e*) La caída de potencial es la misma a través de ambos resistores. *f*) El potencial en el punto a es el mismo que en el punto c. *g*) El potencial en el punto b es menor que en el punto c. *h*) El potencial en el punto c es menor que en el punto b.

Figura 26.30 Pregunta P26.5.



P26.6. Si dos resistores R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) se conectan en paralelo como se ilustra en la figura 26.31, ¿cuál de los siguientes enunciados debe ser verdad? En cada caso justifique su respuesta. *a*) $I_1 = I_2$. *b*) $I_3 = I_4$. *c*) La corriente es mayor en R_1 que en R_2. *d*) La tasa de consumo de energía eléctrica es la misma para ambos resistores. *e*) La tasa de consumo de energía eléctrica es mayor en R_2 que en R_1. *f*) $V_{cd} = V_{ef} = V_{ab}$. *g*) El punto c está a un potencial mayor que el punto d. *h*) El punto f está a un potencial mayor que el punto e. *i*) El punto c está a un potencial mayor que el punto e.

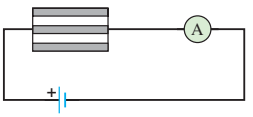
Figura 26.31 Pregunta P26.6.



P26.7. ¿Por qué baja la intensidad de la luz de los faros de un automóvil cuando éste se enciende?

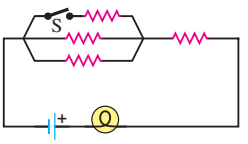
P26.8. Un resistor consiste en tres tiras de metal idénticas conectadas como se ilustra en la figura 26.32. Si se corta una de ellas, ¿la lectura del amperímetro registra un incremento, una disminución o permanece sin cambio? ¿Por qué?

Figura **26.32** Pregunta P26.8.



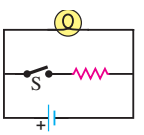
P26.9. Se conecta una bombilla en el circuito que se ilustra en la figura 26.33. Si se cierra el interruptor S, ¿la luminosidad de la bombilla aumenta, disminuye o permanece igual? Explique por qué.

Figura **26.33** Pregunta P26.9.



P26.10. Una batería real con resistencia interna que no es despreciable se conecta a través de una bombilla, como se indica en la figura 26.34. Cuando se cierra el interruptor S, ¿qué pasa con la luminosidad del foco? ¿Por qué?

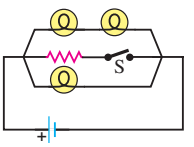
Figura **26.34** Pregunta P26.10.



P26.11. Si la batería de la pregunta para análisis P26.10 es ideal sin resistencia interna, ¿qué ocurrirá con la luminosidad de la bombilla cuando se cierre S? ¿Por qué?

P26.12. Para el circuito que se ilustra en la figura 26.35, ¿qué le sucede a la brillantez de las bombillas cuando se cierra el interruptor S si la batería *a*) no tiene resistencia interna y *b*) tiene resistencia interna que no es despreciable? Explique por qué.

Figura **26.35** Pregunta P26.12



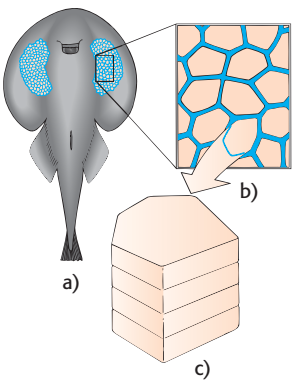
P26.13. ¿Es posible conectar juntos resistores en forma que no se puedan reducir a alguna combinación de conexiones en serie y en paralelo? Si es así, dé ejemplos, y si no, diga por qué.

P26.14. El sentido de la corriente en una batería se invierte si se conecta a una segunda batería de mayor fem con las terminales positivas de las dos baterías juntas. Cuando el sentido de la corriente de una batería se invierte, ¿su fem también lo hace? ¿Por qué?

P26.15. En un flash de dos celdas, las baterías por lo general están conectadas en serie. ¿Por qué no se conectan en paralelo? ¿Qué posible ventaja habría si se conectaran varias baterías idénticas en paralelo?

P26.16. Las rayas eléctricas (peces del género *Torpedo*) disparan descargas eléctricas para aturdir a sus presas y disuadir a sus depredadores. (En la antigua Roma, los médicos practicaban una forma primitiva de terapia de electrochoques colocando rayas sobre sus pacientes para curar jaquecas y gota.) La figura 26.36a muestra una *Torpedo* vista desde abajo. El voltaje se produce en celdas delgadas, parecidas a obleas, llamadas *electrocitos*, cada una de las cuales actúa como batería con fem de alrededor de 10^{-4} V. En la parte inferior de la raya (figura 26.36b) están apilados lado a lado los electrocitos; en ese arreglo, la cara positiva de cada electrocito toca la cara negativa del siguiente electrocito (figura 26.36c). ¿Cuál es la ventaja de que los electrocitos estén apilados así? ¿Y de que esas pilas estén una al lado de otras?

Figura **26.36** Pregunta P26.16.



P26.17. La fem de una batería de linterna se mantiene aproximadamente constante con el tiempo, pero su resistencia interna se incrementa con el tiempo y el uso. ¿Qué clase de instrumento se emplearía para probar qué tan nueva es una batería?

P26.18. ¿Es posible tener un circuito en el que la diferencia de potencial a través de las terminales de una batería en el circuito sea igual a cero? Si así fuera, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.

P26.19. Verifique que la constante de tiempo RC tiene unidades de tiempo.

P26.20. Para resistencias muy grandes es fácil construir circuitos *R-C* que tengan constantes de tiempo de varios segundos o minutos. ¿Cómo se utilizaría este hecho para medir resistencias muy grandes, del tipo que son demasiado grandes como para medirlas con métodos más convencionales?

P26.21. Cuando un capacitor, una batería y un resistor se conectan en serie, ¿el resistor afecta la carga máxima que se almacena en el capacitor? ¿Por qué? ¿Qué finalidad tiene el resistor?

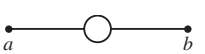
P26.22. Cuanto más grande es el diámetro del alambre utilizado en los sistemas de cableado domésticos, mayor es la corriente máxima que puede transportar con seguridad. ¿Por qué? ¿La corriente máxima permisible depende de la longitud del alambre? ¿Depende del material del que esté hecho el alambre? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 26.1 Resistores en serie y en paralelo

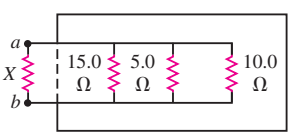
26.1. Un alambre uniforme de resistencia R se corta en tres piezas de igual longitud. Una de ellas se dobla en círculo y se conecta entre las otras dos (figura 26.37). ¿Cuál es la resistencia entre los extremos opuestos a y b?

Figura **26.37** Ejercicio 26.1.



26.2. Una parte de máquina tiene un resistor X que sobresale a través de una abertura lateral. Este resistor está conectado a otros tres resistores, como se ilustra en la figura 26.38. Un óhmetro conectado a través de a y b da una lectura de 2.00 Ω. ¿Cuál es la resistencia de X?

Figura **26.38** Ejercicio 26.2.

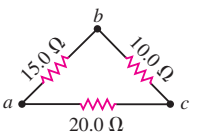


26.3. *a*) Demuestre que cuando dos resistores se conectan en paralelo, la resistencia equivalente de la combinación siempre es menor que la del resistor más pequeño. *b*) Generalice el resultado del inciso *a*) para *N* resistores.

26.4. Un resistor de 32 Ω y otro de 20 Ω están conectados en paralelo, y la combinación se conecta a través de una línea de 240 V de cd. *a*) ¿Cuál es la resistencia de la combinación en paralelo? *b*) ¿Cuál es la corriente total a través de la combinación en paralelo? *c*) ¿Cuál es la corriente que pasa a través de cada resistor?

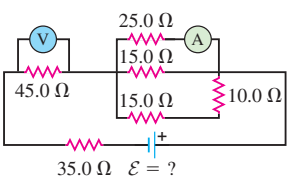
26.5. En la figura 26.39 se muestra un arreglo triangular de resistores. ¿Qué corriente tomaría este arreglo desde una batería de 35.0 V con resistencia interna despreciable, si se conecta a través de *a*) *ab*; *b*) *bc*; *c*) *ac*? *d*) Si la batería tiene una resistencia interna de 3.00 Ω, ¿qué corriente tomaría el arreglo si la batería se conectara a través de *bc*?

Figura **26.39** Ejercicio 26.5.



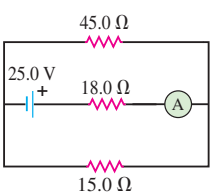
26.6. Para el circuito que se presenta en la figura 26.40, los dos medidores son ideales, la batería no tiene resistencia interna apreciable y el amperímetro da una lectura de 1.25 A. *a*) ¿Cuál es la lectura del voltímetro? *b*) ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ de la batería?

Figura **26.40** Ejercicio 26.6.



26.7. Para el circuito que se ilustra en la figura 26.41, determine la lectura del amperímetro ideal si la batería tiene una resistencia interna de 3.26 Ω.

Figura **26.41** Ejercicio 26.7.



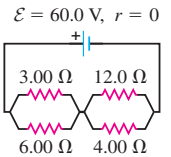
26.8. Tres resistores con resistencias de 1.60 Ω, 2.40 Ω y 4.80 Ω están conectados en paralelo a una batería de 28.0 V que tiene resistencia interna despreciable. Calcule *a*) la resistencia equivalente de la combinación; *b*) la corriente en cada resistor; *c*) la corriente total a través de la batería; *d*) el voltaje a través de cada resistor; *e*) la potencia disipada en cada resistor. *f*) ¿Cuál resistor disipa la mayor cantidad de potencia: el de mayor resistencia o el de menor resistencia? Explique por qué debería ser así.

26.9. Ahora, los tres resistores del ejercicio 26.8 están conectados en serie a la misma batería. Responda las mismas preguntas para esta situación.

26.10. Potencia nominal de un resistor. La *potencia nominal* de un resistor es la potencia máxima que éste puede disipar de forma segura sin que se eleve demasiado la temperatura para no causar daño al resistor. *a*) Si la potencia nominal de un resistor de 15 kΩ es de 5.0 W, ¿cuál es la diferencia de potencial máxima permisible a través de las terminales del resistor? *b*) Un resistor de 9.0 kΩ va a conectarse a través de una diferencia de potencial de 120 V. ¿Qué potencia nominal se requiere? *c*) A través de una diferencia de potencial variable se conectan en serie dos resistores, uno de 100.0 Ω y otro de 150.0 Ω, ambos con potencia nominal de 2.00 W. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que se puede establecer sin que se caliente en exceso ninguno de los resistores, y cuál es la tasa de calentamiento generado en cada uno en estas condiciones?

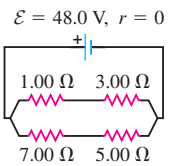
26.11. Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura 26.42, y obtenga la corriente en cada resistor. La batería tiene una resistencia interna despreciable.

Figura **26.42** Ejercicio 26.11.



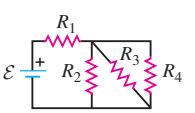
26.12. Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura 26.43, y determine la corriente en cada resistor. La batería tiene una resistencia interna despreciable.

Figura **26.43** Ejercicio 26.12.



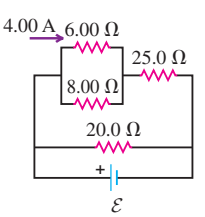
26.13. En el circuito de la figura 26.44, cada resistor representa una bombilla. Sea $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4.50\ \Omega$, y $\mathcal{E} = 9.00$ V. *a*) Calcule la corriente en cada bombilla. *b*) Encuentre la potencia disipada por cada bombilla. ¿Cuál, o cuáles, de éstas es la más brillante? *c*) Ahora se retira la bombilla R_4 del circuito y deja un hueco en el alambre en la posición en que estaba. Ahora, ¿cuál es la corriente en cada una de las bombillas restantes R_1, R_2 y R_3? *d*) Sin la bombilla R_4, ¿cuál es la potencia disipada en cada una de las bombillas restantes? *e*) Como resultado de la remoción de R_4, ¿cuál(es) bombilla(s) brilla(n) más? ¿Cuál(es) brilla(n) menos? Analice por qué hay diferentes efectos en las distintas bombillas.

Figura **26.44** Ejercicio 26.13.



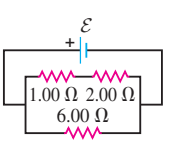
26.14. Considere el circuito de la figura 26.45. La corriente a través del resistor de 6.00 Ω es de 4.00 A, en el sentido que se indica. ¿Cuáles son las corrientes a través de los resistores de 25.0 Ω y 20.0 Ω?

Figura **26.45** Ejercicio 26.14.



26.15. En el circuito que se aprecia en la figura 26.46, el voltaje a través del resistor de 2.00 Ω es de 12.0 V. ¿Cuáles son los valores de la fem de la batería y de la corriente a través del resistor de 6.00 Ω?

Figura **26.46** Ejercicio 26.15.



26.16. Bombillas de tres intensidades. Una bombilla de tres intensidades tiene tres niveles de luminosidad (baja, media y alta), pero sólo dos filamentos. *a*) Una bombilla de tres intensidades particular conectada a través de una línea de 120 V puede disipar 60 W, 120 W o 180 W. Describa cómo están arreglados los dos filamentos de la bombilla y calcule la resistencia de cada una. *b*) Suponga que se funde el filamento con la resistencia mayor. ¿Cuánta potencia se disipará en cada una de las tres modalidades de luminosidad

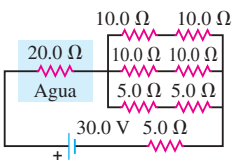
(baja, media y alta)? *c*) Repita el inciso *b*) para la situación en que se funde el filamento con la menor resistencia.

26.17. Bombillas en serie y en paralelo. Dos bombillas tienen resistencias de 400 Ω y 800 Ω. Si están conectadas en serie a través de una línea de 120 V, calcule *a*) la corriente que pasa por cada bombilla; *b*) la potencia disipada por cada una; *c*) el total de potencia disipada en ambas bombillas. Ahora las bombillas se conectan en paralelo a través de la línea de 120 V. Obtenga *d*) la corriente a través de cada bombilla; *e*) la potencia disipada en cada bombilla; *f*) la potencia total que se disipa en las dos bombillas. *g*) En cada situación, ¿cuál es la bombilla más luminosa? *h*) ¿En cuál situación hay una salida total mayor de luz de ambas bombillas combinadas?

26.18. Bombillas en serie. Un bombilla de 60 W y 120 V está conectada en serie con otra de 200 W y 120 V, a través de una línea de 240 V. Suponga que la resistencia de cada bombilla no varía con la corriente (*Nota:* esta descripción de una bombilla da la potencia que disipa cuando se conecta a una diferencia de potencial dada; es decir, una bombilla de 25 W y 120 V disipa 25 W cuando está conectada a una línea de 120 V.) *a*) Obtenga la corriente a través de las bombillas. *b*) Encuentre la potencia disipada en cada bombilla. *c*) Una de las bombillas se funde rápido. ¿Cuál fue y por qué?

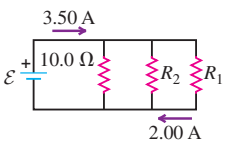
26.19. En el circuito de la figura 26.47, un resistor de 20.0 Ω está dentro de 100 g de agua pura rodeada por espuma de poliestireno. Si el agua inicialmente está a 10.0 °C, ¿cuánto tiempo tomará que su temperatura suba a 58.0 °C?

Figura 26.47 Ejercicio 26.19.



26.20. En el circuito que se muestra en la figura 26.48, la tasa a la que R_1 disipa energía eléctrica es 20.0 W. *a*) Obtenga R_1 y R_2. *b*) ¿Cuál es la fem de la batería? *c*) Encuentre la corriente a través tanto de R_2 como del resistor de 10.0 Ω. *d*) Calcule el consumo total de energía eléctrica en todos los resistores y la que entrega la batería. Demuestre que sus resultados son congruentes con la conservación de la energía.

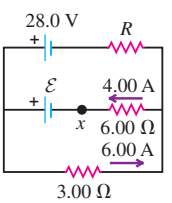
Figura 26.48 Ejercicio 26.20.



Sección 26.2 Reglas de Kirchhoff

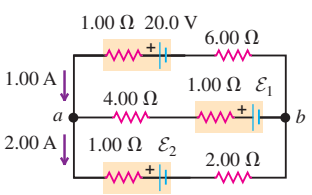
26.21. En el circuito que se aprecia en la figura 26.49, obtenga *a*) la corriente en el resistor *R*; *b*) la resistencia *R*; *c*) la fem desconocida ℰ. *d*) Si el circuito se rompe en el punto *x*, ¿cuál es la corriente en el resistor *R*?

Figura 26.49 Ejercicio 26.21.



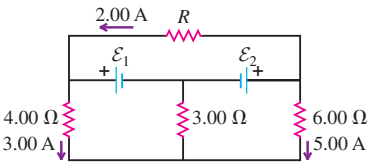
26.22. Encuentre las fem $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en el circuito de la figura 26.50, y obtenga la diferencia de potencial del punto *b* en relación con el punto *a*.

Figura 26.50 Ejercicio 26.22.



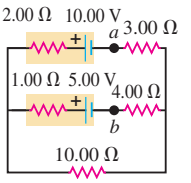
26.23. En el circuito que se ilustra en la figura 26.51, encuentre *a*) la corriente en el resistor de 3.00 Ω; *b*) las fem desconocidas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$; *c*) la resistencia *R*. Note que se dan tres corrientes.

Figura 26.51 Ejercicio 26.23.



26.24. En el circuito que se ilustra en la figura 26.52, obtenga *a*) la corriente en cada ramal y *b*) la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* en relación con el punto *b*.

Figura 26.52 Ejercicios 26.24, 26.25 y 26.26.

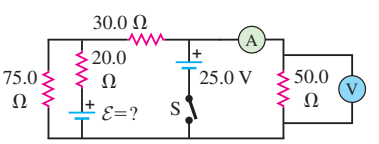


26.25. La batería de 10.00 V de la figura 26.52 se retira del circuito y se vuelve a colocar con la polaridad opuesta, de manera que ahora su terminal positiva está junto al punto *a*. El resto del circuito queda como en la figura. Encuentre *a*) la corriente en cada ramal y *b*) la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* con respecto al punto *b*.

26.26. La batería de 5.00 V de la figura 26.52 se retira del circuito y se sustituye por otra de 20.00 V, con su terminal negativa próxima al punto *b*. El resto del circuito queda como en la figura. Calcule *a*) la corriente en cada ramal y *b*) la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* en relación con el punto *b*.

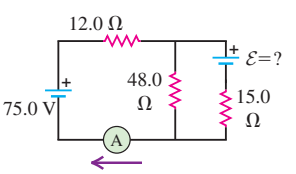
26.27. En el circuito que se presenta en la figura 26.53, las baterías tienen resistencias internas despreciables y los dos medidores son ideales. Con el interruptor S abierto, el voltímetro da una lectura de 15.0 V. *a*) Calcule la fem ℰ de la batería. *b*) ¿Cuál será la lectura del amperímetro cuando se cierre el interruptor?

Figura 26.53 Ejercicio 26.27.



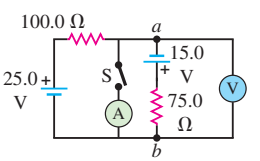
26.28. En el circuito que se muestra en la figura 26.54, ambas baterías tienen resistencia interna insignificante y el amperímetro ideal lee 1.50 A en el sentido que se ilustra. Encuentre la fem ℰ de la batería. ¿Es correcta la polaridad que se indica?

Figura 26.54 Ejercicio 26.28.



26.29. En la figura 26.55 se ilustra un circuito en el que todos los medidores son ideales y las baterías no tienen resistencia interna apreciable. *a*) Diga cuál será la lectura del voltímetro con el interruptor S abierto. ¿Cuál punto está a un potencial mayor: *a* o *b*? *b*) Con el interruptor cerrado, obtenga la lectura del voltímetro y del amperímetro. ¿Cuál trayectoria (superior o inferior) sigue la corriente a través del interruptor?

Figura 26.55 Ejercicio 26.29.



26.30. En el circuito de la figura 26.12 (ejemplo 26.6), el resistor de 2 Ω se sustituye por otro de 1 Ω, y el resistor central de 1 Ω (por el que pasa la corriente I_3) se sustituye por un resistor de resistencia *R* desconocida. El resto del circuito es como se indica en la figura. *a*) Calcule la corriente en cada resistor. Dibuje un diagrama del circuito y anote

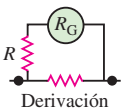
junto a cada resistor la corriente que pasa a través de él. *b*) Calcule la resistencia equivalente de la red. *c*) Calcule la diferencia de potencial V_{ab}. *d*) Las respuestas que dio para los incisos *a*), *b*) y *c*) no dependen del valor de R; explique por qué.

Sección 26.3 Instrumentos de medición eléctrica

26.31. La resistencia de una bobina de galvanómetro es de 25.0 Ω, y la corriente requerida para la desviación de escala completa es de 500 μA. *a*) Muestre en un diagrama la manera de convertir el galvanómetro en un amperímetro que lea 20.0 mA a escala completa, y calcule la resistencia de derivación. *b*) Demuestre el modo de convertir el galvanómetro en un voltímetro con lectura de 500 mV a escala completa, y calcule la resistencia en serie.

26.32. La resistencia de la bobina de un galvanómetro con bobina articulada es de 9.36 Ω, y una corriente de 0.0224 A ocasiona una desviación de escala completa. Queremos convertir este galvanómetro en un amperímetro con una lectura de escala completa de 20.0 A. La única derivación disponible tiene una resistencia de 0.0250 Ω. ¿Cuál es la resistencia R que debe conectarse en serie con la bobina (figura 26.56)?

Figura 26.56
Ejercicio 26.32.



26.33. Un circuito consiste en una combinación en serie de resistores de 6.00 kΩ y 5.00 kΩ conectados a través de una batería de 50.0 V con resistencia interna despreciable. Se desea medir la diferencia de potencial verdadera (es decir, la diferencia de potencial sin el medidor presente) a través del resistor de 5.00 kΩ con un voltímetro cuya resistencia interna es de 10.0 kΩ. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial que mide el voltímetro a través del resistor de 5.00 kΩ? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial *verdadera* a través de este resistor cuando el medidor no está presente? *c*) ¿Qué porcentaje de error tiene la lectura del voltímetro con respecto a la diferencia de potencial verdadera?

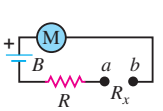
26.34. Un galvanómetro con resistencia de 25.0 Ω tiene una resistencia de derivación de 1.00 Ω instalada para convertirlo en un amperímetro. Después se utiliza para medir la corriente en un circuito que consiste en un resistor de 15.0 Ω conectado a través de las terminales de una batería de 25.0 V que no tiene resistencia interna apreciable. *a*) ¿Cuál es la corriente que mide el amperímetro? *b*) ¿Cuál debe ser la corriente *verdadera* en el circuito (es decir, la corriente sin el amperímetro presente)? *c*) ¿Qué porcentaje de error tiene la lectura del amperímetro con respecto a la corriente *verdadera*?

26.35. Considere el circuito del potenciómetro de la figura 26.19a. El resistor entre a y b es un alambre uniforme con longitud l, con un contacto deslizante c a una distancia x de b. Se lee una fem $\mathcal{E}_2$ desconocida deslizando el contacto hasta que la lectura del galvanómetro G es igual a cero. *a*) Demuestre que en estas condiciones la fem desconocida está dada por $\mathcal{E}_2 = (x/l)\mathcal{E}_1$. *b*) ¿Por qué no es importante la resistencia interna del galvanómetro? *c*) Suponga que $\mathcal{E}_1 = 9.15$ V y $l = 1.000$ m. La lectura del galvanómetro G es de cero cuando $x = 0.365$ m. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}_2$?

26.36. En el óhmetro de la figura 26.17, la bobina del medidor tiene una resistencia $R_c = 15.0$ Ω, y la corriente requerida para una desviación de escala completa es $I_{fs} = 3.60$ mA. La fuente es una batería de linterna con $\mathcal{E} = 1.50$ V y resistencia interna insignificante. El óhmetro va a presentar una desviación del medidor de media escala completa cuando se conecte a un resistor con $R = 600$ Ω. ¿Cuál es la resistencia R_s que se requiere?

26.37. En el óhmero de la figura 26.57, M es un medidor de 2.50 mA con una resistencia de 65.0 Ω. (Un medidor de 2.50 mA sufre una desviación de escala completa cuando la corriente a través de él es de 2.50 mA.) La batería B tiene una fem de 1.52 V y resistencia interna despreciable. Se elige R de manera que cuando las terminales a y b estén en cortocircuito ($R_x = 0$), la lectura del medidor es la escala completa. Cuando a y b están abiertos ($R_x = \infty$), la lectura del medidor es cero. *a*) ¿Cuál es la resistencia del resistor R? *b*) ¿Qué corriente indica una resistencia R_x de 200 Ω? *c*) ¿Qué valores de R_x corresponden a desviaciones del medidor de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de la escala completa si la desviación es proporcional a la corriente que pasa por el galvanómetro?

Figura 26.57
Ejercicio 26.37.



Sección 26.4 Circuitos *R-C*

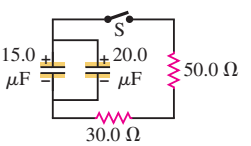
26.38. Un capacitor de 4.60 μF, que al inicio está descargado, se conecta en serie con un resistor de 7.50 kΩ y una fuente de fem con $\mathcal{E} =$ 125 V y resistencia interna insignificante. Justo después que el circuito se completa, ¿cuáles son *a*) la caída de voltaje a través del capacitor; *b*) la caída de voltaje a través del resistor; *c*) la carga en el capacitor; *d*) la corriente que pasa por el resistor? *e*) Mucho tiempo después de completar el circuito (después de muchas constantes de tiempo), ¿cuáles son los valores de los incisos *a*) a *d*)?

26.39. Un capacitor se carga a un potencial de 12.0 V y luego se conecta a un voltímetro que tiene una resistencia interna de 3.40 MΩ. Después de un tiempo de 4.00 s, el voltímetro da una lectura de 3.0 V. ¿Cuáles son *a*) la capacitancia y *b*) la constante de tiempo del circuito?

26.40. Un capacitor de 12.4 μF se conecta a través de un resistor de 0.895 MΩ a una diferencia de potencial constante de 60.0 V. *a*) Calcule la carga en el capacitor en los siguientes tiempos después de haber hecho la conexión: 0, 5.0 s, 10.0 s, 20.0 s y 100.0 s. *b*) Determine las corrientes de carga en los mismos instantes citados. *c*) Elabore una gráfica de los resultados de los incisos *a*) y *b*) para t entre 0 y 20 s.

26.41. En el circuito de la figura 26.58, los dos capacitores están cargados al principio a 45.0 V. *a*) ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor S el potencial a través de cada capacitor se reducirá a 10.0 V? *b*) En ese momento, ¿cuál será la corriente?

Figura 26.58
Ejercicio 26.41.



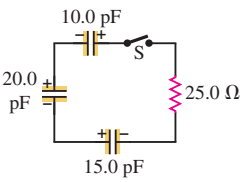
26.42. Un resistor y un capacitor se conectan en serie con una fuente de fem. La constante de tiempo para el circuito es de 0.870 s. *a*) Se agrega en serie un segundo capacitor, idéntico al primero. ¿Cuál es la constante de tiempo para este nuevo circuito? *b*) En el circuito original, un segundo capacitor, idéntico al primero, se conecta en paralelo con el primer capacitor. ¿Cuál es la constante de tiempo para este nuevo circuito?

26.43. Están conectados en serie una fuente de fem con $\mathcal{E} = 120$ V, un resistor con $R = 80.0$ Ω y un capacitor con $C = 4.00$ μF. A medida que el capacitor carga, cuando la corriente en el resistor es de 0.900 A, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada placa del capacitor?

26.44. Un capacitor de 1.50 μF se carga a través de un resistor de 12.0 Ω por medio de una batería de 10.0 V. ¿Cuál será la corriente cuando el capacitor haya adquirido $\frac{1}{4}$ de su carga máxima? ¿Será $\frac{1}{4}$ de la corriente máxima?

26.45. En el circuito que se ilustra en la figura 26.59, cada capacitor tiene inicialmente una carga de magnitud 3.50 nC en sus placas. Después de que el interruptor S se cierra, ¿cuál será la corriente en el circuito en el instante en que los capacitores hayan perdido el 80.0% de su energía almacenada inicialmente?

Figura 26.59
Ejercicio 26.45.

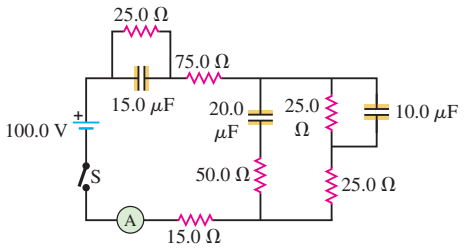


26.46. Se carga un capacitor de 12.0 μF a un potencial de 50.0 V, y luego se descarga a través de un resistor de 175 Ω. ¿Cuánto tiempo se requiere para que el capacitor pierda *a*) la mitad de su carga y *b*) la mitad de su energía almacenada?

26.47. En el circuito de la figura 26.60, todos los capacitores están descargados al principio, la batería no tiene resistencia interna y el ampe-

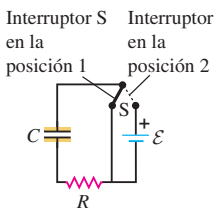
rímetro es ideal. Calcule la lectura del amperímetro *a*) inmediatamente después de haber cerrado el interruptor S y *b*) mucho tiempo después de que se cerró el interruptor.

Figura 26.60 Ejercicio 26.47.



26.48. En el circuito que se ilustra en la figura 26.61, $C = 5.90\ \mu$F, $\mathcal{E} = 28.0$ V, y la fem tiene una resistencia despreciable. Inicialmente, el capacitor está descargado y el interruptor S está en la posición 1. Luego, el interruptor se mueve a la posición 2, por lo que el capacitor comienza a cargarse. *a*) ¿Cuál será la carga en el capacitor mucho tiempo después de que el interruptor se movió a la posición 2? *b*) Después de haber movido el interruptor a la posición 2 durante 3.00 ms se mide la carga en el capacitor y resulta ser de 110 μC. ¿Cuál es el valor de la resistencia *R*? *c*) ¿Cuánto tiempo después de haber movido el interruptor a la posición 2, la carga en el capacitor será igual al 99.0% del valor final calculado en el inciso *a*)?

Figura 26.61 Ejercicios 28.49 y 26.49.



26.49. Un capacitor con $C = 1.50 \times 10^{-5}$ se conecta como se aprecia en la figura 26.61, con un resistor con $R = 980\ \Omega$ y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 18.0$ V y resistencia interna despreciable. Inicialmente, el capacitor está descargado y el interruptor S se encuentra en la posición 1. Luego, el interruptor se mueve a la posición 2, por lo que el capacitor comienza a cargarse. Después de que el interruptor ha estado en la posición 2 durante 10.0 ms, el interruptor se lleva de regreso a la posición 1, por lo que el capacitor comienza a descargarse. *a*) Calcule la carga en el capacitor justo *antes* de que el interruptor se lleve de la posición 2 a la 1. *b*) Calcule la caída del voltaje a través del resistor y el capacitor en el instante descrito en el inciso *a*). *c*) Calcule las caídas de voltaje a través del resistor y el capacitor justo *después* de que el interruptor se lleve de la posición 2 a la 1. *d*) Calcule la carga en el capacitor 10.0 ms después de haber llevado el interruptor de la posición 2 de regreso a la 1.

Sección 26.5 Sistemas de distribución de energía

26.50. El elemento calentador de una secadora eléctrica tiene una potencia nominal de 4.1 kW cuando se conecta a una línea de 240 V. *a*) ¿Cuál es la corriente en el elemento calentador? ¿El alambre de calibre 12 es suficiente para suministrar esa corriente? *b*) ¿Cuál es la resistencia del elemento calentador de la secadora a su temperatura de operación? *c*) ¿Cuánto cuesta operar la secadora durante una hora si la tarifa vigente es de 11 centavos por kWh?

26.51. Se enchufa un calentador eléctrico de 1500 W a la toma de un circuito de 120 V que tiene un interruptor de circuito o disyuntor de 20 A. En la misma toma se conecta una secadora eléctrica, la cual tiene ajustes de potencia de 600 W, 900 W, 1200 W y 1500 W. Se enciende la secadora para el cabello en el ajuste de 600 W y se incrementa hasta que se dispara el interruptor de circuito. ¿Cuál fue el ajuste de potencia que hizo que se disparara?

26.52. ¿Cuántas bombillas de 90 W y 120 V se pueden conectar en un circuito de 20 A y 120 V sin que se dispare el interruptor de circuito? (Consulte la nota del ejercicio 26.18.)

26.53. El elemento calentador de una estufa eléctrica consiste en un conductor incrustado dentro de un material aislante, que a su vez está dentro de una cubierta metálica. El alambre del calentador tiene una resistencia de 20 Ω a temperatura ambiente (23.0 °C) y un coeficiente de temperatura de la resistividad $\alpha = 2.8 \times 10^{-3}\ (\text{C°})^{-1}$. El elemento calentador opera desde una línea de 120 V. *a*) Cuando se enciende el elemento calentador por primera vez, ¿cuánta corriente toma y cuánta energía eléctrica disipa? *b*) Cuando el elemento calentador ha alcanzado su temperatura de operación de 280 °C (536 °F), ¿cuánta corriente toma y cuánta energía eléctrica disipa?

Problemas

26.54. Se necesita un resistor de 400 Ω y 2.4 W, pero sólo se dispone de varios resistores de 400 Ω y 1.2 W (véase el ejercicio 26.10). *a*) ¿Cuáles dos diferentes combinaciones de las unidades disponibles dan la resistencia y potencia nominal requeridas? *b*) Para cada una de las redes de resistores del inciso *a*), ¿qué potencia se disipa en cada resistor cuando la combinación disipa 2.4 W?

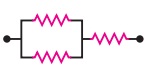
26.55. Un cable de 20.0 m de largo consiste en un núcleo interior sólido de níquel, cilíndrico, de 10.0 cm de diámetro, y rodeado por una coraza exterior sólida y cilíndrica de cobre con diámetro interno de 10.0 cm y diámetro externo de 20.0 cm. La resistividad del níquel es de $7.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. *a*) ¿Cuál es la resistencia de este cable? *b*) Si se piensa en este cable como en un solo material, ¿cuál es su resistividad equivalente?

26.56. Dos cables idénticos de 1.00 Ω se colocan lado a lado y se sueldan de manera que cada uno toca la mitad del otro. ¿Cuál es la resistencia equivalente de esta combinación?

26.57. Las dos bombillas idénticas del ejemplo 26.2 (sección 26.1) están conectadas en paralelo a una fuente diferente, una con $\mathcal{E} = 8.0$ V y resistencia interna de 0.8 Ω. Cada bombilla tiene una resistencia $R = 2.0\ \Omega$ (se supone independiente de la corriente que pasa por la bombilla). *a*) Encuentre la corriente que fluye por cada bombilla, la diferencia de potencial en cada bombilla, y la potencia que se suministra a cada una. *b*) Suponga que una de las bombillas se funde, por lo que su filamento se rompe y deja de fluir corriente por ella. La bombilla que queda, ¿ilumina más o menos que antes que la bombilla se fundiera?

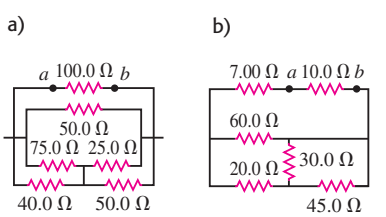
26.58. Cada uno de los tres resistores de la figura 26.62 tiene una resistencia de 2.4 Ω y disipa un máximo de 36 W sin calentarse en exceso. ¿Cuál es la potencia máxima que el circuito puede disipar?

Figura 26.62 Problema 26.58.



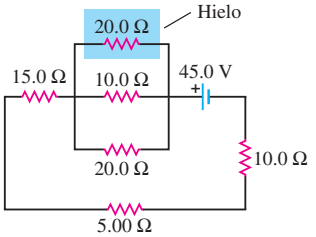
26.59. Si se conecta un óhmetro entre los puntos *a* y *b* en cada uno de los circuitos que se ilustran en la figura 26.63, ¿cuál será la lectura que dé?

Figura 26.63 Problema 26.59.



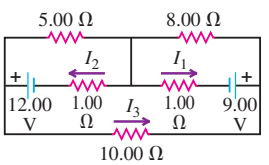
26.60. En el circuito que se ilustra en la figura 26.64, hay un resistor de 20.0 Ω incrustado en un bloque grande de hielo a 0.00 °C, y la batería tiene una resistencia interna insignificante. ¿A qué tasa (en g/s) el circuito derrite el hielo? (El calor latente de fusión para el hielo es de 3.34×10^5 J/kg.)

Figura 26.64 Problema 26.60.



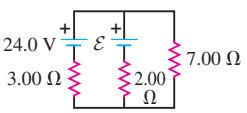
26.61. Calcule las tres corrientes I_1, I_2 e I_3 que se indican en el diagrama de circuito en la figura 26.65.

Figura 26.65 Problema 26.61.



26.62. ¿Cuál debe ser la fem $\mathcal{E}$ en la figura 26.66 para que la corriente a través del resistor de 7.00 Ω sea 1.80 A? Cada fuente de fem tiene resistencia interna despreciable.

Figura 26.66 Problema 26.62.



26.63. Determine la corriente que pasa por cada uno de los tres resistores del circuito que se ilustran en la figura 26.67. Las fuentes de fem tienen resistencia interna insignificante.

26.64. *a*) Encuentre la corriente a través de la batería y de cada uno de los resistores en el circuito ilustrado en la figura 26.68. *b*) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la red de resistores?

Figura 26.67
Problema 26.63.

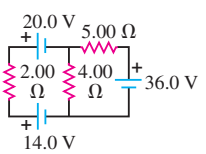
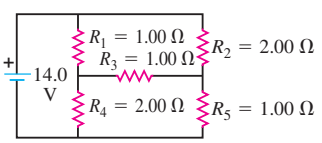
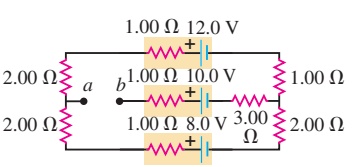


Figura 26.68 Problema 26.64.



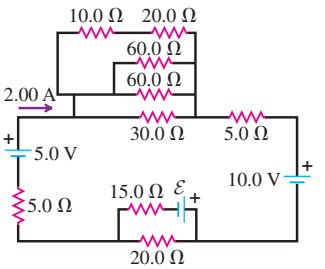
26.65. *a*) Calcule el potencial del punto *a* con respecto al punto *b*, en la figura 26.69. *b*) Si los puntos *a* y *b* se conectan con un alambre con resistencia insignificante, determine la corriente en la batería de 12.0 V.

Figura 26.69 Problema 26.65.



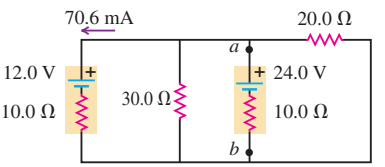
26.66. Considere el circuito que se ilustra en la figura 26.70. *a*) ¿Cuál debe ser la fem $\mathcal{E}$ de la batería para que una corriente de 2.00 A fluya a través de la batería de 5.00 V, como se muestra? La polaridad de la batería, ¿es correcta como se indica? *b*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que se produzcan 60.0 J de energía térmica en el resistor de 10.0 Ω?

Figura 26.70 Problema 26.66.



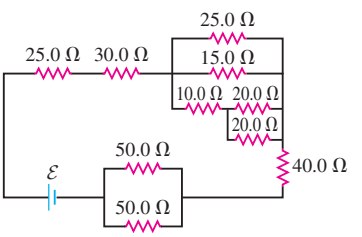
26.67. En el circuito de la figura 26.71, se mide la corriente que pasa a través de la batería de 12.0 V y resulta ser de 70.6 mA en el sentido que se indica. ¿Cuál es el voltaje terminal V_{ab} de la batería de 24.0 Ω?

Figura 26.71 Problema 26.67.



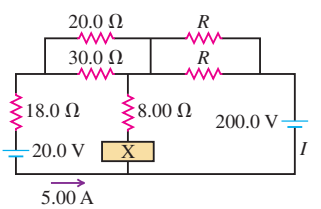
26.68. En el circuito que se ilustra en la figura 26.72, todos los resistores tienen potencia nominal máxima de 1.00 W. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ máxima que la batería puede tener sin que se queme ninguno de los resistores?

Figura 26.72 Problema 26.68.



26.69. En el circuito de la figura 26.73, la corriente en la batería de 20.0 V es de 5.00 A en el sentido que se indica, y el voltaje a través del resistor de 8.00 Ω es de 16.0 V, con el extremo inferior del resistor a un potencial mayor. Calcule *a*) la fem (incluida su polaridad) de la batería X; *b*) la corriente *I* a través de la batería de 200.0 V (incluido su sentido); *c*) la resistencia *R*.

Figura 26.73 Problema 26.69.

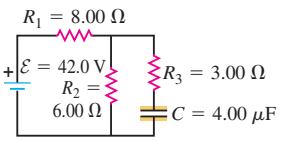


26.70. Se conectan en serie tres resistores idénticos. Cuando se aplica cierta diferencia de potencial a través de la combinación, la potencia total disipada es de 27 W. ¿Qué potencia se disiparía si los tres resistores se conectaran en paralelo a través de la misma diferencia de potencial?

26.71. Un resistor R_1 consume una energía eléctrica P_1 cuando se conecta a una fem $\mathcal{E}$. Cuando el resistor R_2 se conecta a la misma fem consume una energía eléctrica P_2. En términos de P_1 y P_2, ¿cuál es la energía eléctrica total consumida cuando los dos están conectados a esta fuente de fem *a*) en paralelo y *b*) en serie?

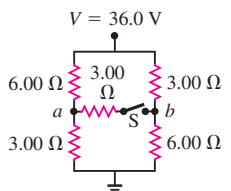
26.72. El capacitor de la figura 26.74 está inicialmente descargado. El interruptor se cierra en $t = 0$. *a*) Inmediatamente después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente a través de cada resistor? *b*) ¿Cuál es la carga final en el capacitor?

Figura 26.74 Problema 26.72.



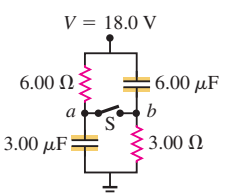
26.73. La figura 26.75 emplea una convención que se utiliza con frecuencia en los diagramas de circuito. La batería (u otra fuente de potencia) no se muestra de manera explícita. Se entiende que el punto en la parte superior, con la leyenda "36.0 V", está conectado a la terminal positiva de una batería de 36.0 V que tiene resistencia interna despreciable, y que el símbolo de "tierra" en la parte inferior está conectado a la terminal negativa de la batería. El circuito se completa a través de la batería, aun cuando ésta no aparezca en el diagrama. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* con respecto al punto *b*, cuando se abre el interruptor S? *b*) ¿Cuál es la corriente que pasa a través del interruptor S cuando está cerrado? *c*) ¿Cuál es la resistencia equivalente cuando el interruptor S está cerrado?

Figura 26.75
Problema 26.73.



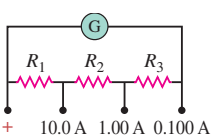
26.74. (Véase el problema 26.73). *a*) En la figura 26.76, ¿cuál es el potencial del punto *a* con respecto al punto *b* cuando el interruptor S está abierto? *b*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está a un mayor potencial? *c*) ¿Cuál es el potencial final del punto *b* con respecto a tierra cuando el interruptor S está cerrado? *d*) ¿Cuánto cambia la carga en cada capacitor cuando S está cerrado?

Figura 26.76
Problema 26.74.



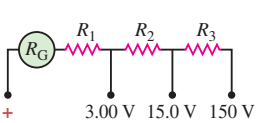
26.75. Amperímetro de escalas múltiples. La resistencia de la bobina móvil del galvanómetro G en la figura 26.77 es de 48.0 Ω, y el galvanómetro sufre una desviación de escala completa con una corriente de 0.0200 A. Cuando se conecta el medidor al circuito que se va a medir, se hace una conexión con el poste marcado con + y la otra con el poste marcado con la escala de corriente deseada. Calcule las magnitudes de las resistencias R_1, R_2 y R_3 que se requieren para convertir el galvanómetro en un amperímetro de escalas múltiples que se desvíe la escala completa con corrientes de 10.0 A, 1.00 A y 0.100 A.

Figura 26.77
Problema 26.75.



26.76. Voltímetro de escalas múltiples. La figura 26.78 muestra el cableado interior de un voltímetro de "tres escalas" cuyos postes de conexión están marcados con +, 3.00 V, 15.0 V y 150 V. Cuando el medidor se conecta al circuito por medir, se establece una conexión con el poste marcado como + y la otra con el poste marcado con la escala de voltaje deseada. La resistencia de la bobina móvil, R_G, es de 40.0 Ω, y una corriente de 1.00 mA en la bobina provoca una desviación de escala completa. Encuentre las resistencias R_1, R_2 y R_3, y la resistencia conjunta del medidor en cada una de sus escalas.

Figura 26.78
Problema 26.76.



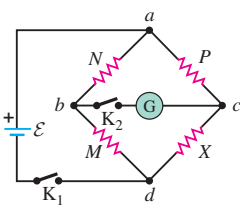
26.77. En la figura 26.79, el punto *a* se mantiene a potencial constante de 400 V más alto con respecto a la tierra. (Véase el problema 26.73.) *a*) ¿Cuál es la lectura del voltímetro con la escala apropiada y con una resistencia de $5.00 \times 10^4\ \Omega$, cuando se conecta entre el punto *b* y la tierra? *b*) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con resistencia de $5.00 \times 10^6\ \Omega$? *c*) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con resistencia infinita?

Figura 26.79
Problema 26.77.

26.78. Un voltímetro de 150 V tiene una resistencia de 30,000 Ω. Cuando se conecta en serie con una resistencia R grande a través de una línea de 110 V, el medidor da una lectura de 68 V. Calcule la resistencia R.

26.79. El puente de Wheatstone. El circuito que se aprecia en la figura 26.80, conocido como *puente de Wheatstone*, se utiliza para determinar el valor de un resistor desconocido X por comparación con tres resistores M, N y P cuyas resistencias se pueden modificar. Para cada arreglo, la resistencia de cada resistor se conoce con precisión. Con los interruptores K_1 y K_2 cerrados, estos resistores se modifican hasta que la corriente en el galvanómetro G sea igual a cero; entonces, se dice que el puente está *equilibrado*. *a*) Demuestre que en esta condición la resistencia desconocida está dada por $X = MP/N$. (Este método permite una precisión muy elevada al comparar resistores.) *b*) Si el galvanómetro G muestra una desviación nula cuando $M = 850.0\ \Omega$, $N = 15.00\ \Omega$ y $P = 33.48\ \Omega$, ¿cuál es la resistencia desconocida X?

Figura 26.80
Problema 26.79.



26.80. Cierto galvanómetro tiene una resistencia de 65.0 Ω y sufre una desviación de escala completa con una corriente de 1.50 mA en su bobina. Ésta se remplaza con un segundo galvanómetro que tiene una resistencia de 38.0 Ω y sufre una desviación de escala completa con una corriente de 3.60 μA en su bobina. Diseñe un circuito que incorpore al segundo galvanómetro de manera que la resistencia equivalente del circuito sea igual a la resistencia del primer galvanómetro, y el segundo galvanómetro sufra una desviación de escala completa cuando la corriente a través del circuito sea igual a la corriente de escala completa del primer galvanómetro.

26.81. Un resistor de 224 Ω y otro de 589 Ω están conectados en serie a través de una línea de 90.0 V. *a*) ¿Cuál es el voltaje a través de cada resistor? *b*) Un voltímetro conectado a través del resistor de 224 Ω da una lectura de 23.8 V. Calcule la resistencia del voltímetro. *c*) Determine la lectura del mismo voltímetro si se conecta a través del resistor de 589 Ω. *d*) Las lecturas de este voltímetro son menores que los voltajes "verdaderos" (es decir, sin el voltímetro presente). ¿Sería posible diseñar un voltímetro que diera lecturas *mayores* que los voltajes "verdaderos"? Explique su respuesta.

26.82. Un capacitor de 2.36 μF inicialmente descargado se conecta en serie con un resistor de 4.26 Ω y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 120$ V y resistencia interna despreciable. *a*) Inmediatamente después de hacer la conexión, ¿cuáles son i) la tasa a la que se disipa la energía eléctrica en el resistor; ii) la tasa a la que la energía eléctrica almacenada en el capacitor se incrementa; iii) la potencia de salida eléctrica de la fuente? ¿Cómo se comparan las respuestas i), ii) y iii)? *b*) Responda las mismas preguntas que en el inciso *a*) para un tiempo más largo después de hacer la conexión. *c*) Conteste las mismas preguntas que en el inciso *a*) en el momento en que la carga en el capacitor es la mitad de su valor final.

26.83. Un capacitor que inicialmente está descargado se conecta en serie con un resistor y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 110$ V y resistencia interna insignificante. Apenas completado el circuito, la corriente que pasa por el resistor es de 6.5×10^{-5} A. La constante de tiempo para el circuito es de 6.2 s. ¿Cuáles son los valores de la resistencia del resistor y de la capacitancia del capacitor?

26.84. Un resistor con $R = 850\ \Omega$ está conectado a las placas de un capacitor cargado con capacitancia $C = 4.62\ \mu$F. Justo antes de hacer la conexión, la carga en el capacitor es de 8.10 mC. *a*) ¿Cuál es la energía almacenada inicialmente en el capacitor? *b*) ¿Cuál es la potencia eléctrica disipada en el resistor justo después de hacer la conexión? *c*) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en el resistor en el instante en que la energía almacenada en el capacitor ha disminuido a la mitad del valor calculado en el inciso *a*)?

26.85. En sentido estricto, la ecuación (26.16) implica que se requiere una cantidad *infinita* de tiempo para descargar por completo un capacitor. Pero para fines prácticos, puede considerarse que está descargado completamente después de un lapso finito de tiempo. Para ser más específicos, considere que un capacitor con capacitancia C conectado a un resistor R está descargado totalmente si su carga q difiere de cero en no más de la carga de un electrón. *a*) Calcule el tiempo que se requiere para alcanzar ese estado si $C = 0.920\ \mu$F, $R = 670\ \text{k}\Omega$ y $Q_0 = 7.00\ \mu$F. ¿A cuántas constantes de tiempo equivale el resultado? *b*) Para una Q_0 dada, ¿el tiempo requerido para alcanzar ese estado siempre es el mismo número de constantes de tiempo, independientemente de los valores de C y R? ¿Por qué?

26.86. Un circuito R-C tiene una constante de tiempo RC. *a*) Si el circuito está descargándose, ¿cuánto tiempo tomará que la energía almacenada se reduzca a $1/e$ de su valor inicial? *b*) Si se está cargando, ¿cuánto tiempo se necesita para que la energía almacenada alcance $1/e$ de su valor máximo?

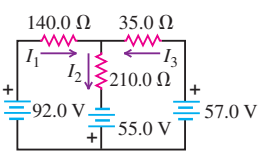
26.87. En un capacitor en proceso de carga la corriente está dada por la ecuación (26.13). *a*) La potencia instantánea suministrada por la batería es $\mathcal{E}i$. Intégrela para calcular la energía total suministrada por la batería. *b*) La potencia instantánea disipada en el resistor es i^2R. Intégrela para obtener la energía total disipada en el resistor. *c*) Encuentre la energía final almacenada en el capacitor y demuestre que es igual a la energía total suministrada por la batería menos la energía disipada en el resistor, como se obtuvo en los incisos *a*) y *b*). *d*) ¿Qué fracción de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor? ¿Cómo depende de R esta fracción?

26.88. *a*) Empleando la ecuación (26.17) para la corriente en un capacitor en proceso de descarga, obtenga una expresión para la potencia instantánea $P = i^2R$ disipada en el resistor. *b*) Integre la expresión para P con la finalidad de encontrar la energía total que se disipa en el resistor, y demuestre que es igual a la energía total inicialmente almacenada en el capacitor.

Problemas de desafío

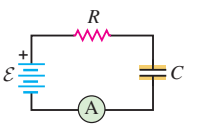
26.89. De acuerdo con el teorema de superposición, la respuesta (corriente) en un circuito es proporcional al estímulo (voltaje) que la produce. Esto es verdad aun si hay fuentes múltiples en un circuito. Este teorema sirve para analizar un circuito sin recurrir a las reglas de Kirchhoff considerando que las corrientes en el circuito son la superposición de corrientes causadas por cada fuente de manera independiente. De esta forma, el circuito puede analizarse calculando las resistencias equivalentes en vez de utilizar el (a veces) complicado método de las reglas de Kirchhoff. Además, con el teorema de superposición es posible examinar cómo la modificación de una fuente en una parte del circuito afectará las corrientes en todas las demás partes del circuito, sin tener que utilizar las reglas de Kirchhoff para volver a calcular todas las corrientes. Considere el circuito de la figura 26.81. Si se dibujara de nuevo el circuito sustituyendo las fuentes de 55.0 V y 57.0 V por cortocircuitos, podría analizarse con el método de las resistencias equivalentes sin recurrir a las reglas de Kirchhoff, y podría encontrarse la corriente en cada ramal de una forma más sencilla. De manera similar, si el circuito con las fuentes de 92.0 V y 55.0 V fuera remplazado por cortocircuitos, podría analizarse de nuevo en una forma más fácil. Por último, si se remplazaran las fuentes de 92.0 V y 57.0 V con un cortocircuito, el circuito podría otra vez analizarse fácilmente. Al superponer las corrientes respectivas encontradas en cada uno de los ramales utilizando los tres circuitos simplificados, es posible encontrar la corriente real en cada ramal. *a*) Con base en las reglas de Kirchhoff, encuentre las corrientes de ramal de los resistores de 140.0 Ω, 210.0 Ω y 35.0 Ω. *b*) Con base en un circuito similar al de la figura 26.81, pero con un cortocircuito en vez de las fuentes de 55.0 V y 57.0 V, determine las corrientes en cada resistencia. *c*) Repita el inciso *b*) sustituyendo las fuentes de 92.0 V y 55.0 V por cortocircuitos y dejando intacta la fuente de 57.0 V. *d*) Repita el inciso *b*) sustituyendo las fuentes de 92.0 V y 57.0 V por cortocircuitos y dejando intacta la fuente de 55.0 V. *e*) Verifique el teorema de superposición comparando las corrientes calculadas en los incisos *b*), *c*) y *d*) con las corrientes calculadas en el inciso *a*). *f*) Si la fuente de 57.0 V se sustituye por otra de 80.0 V, ¿cuáles serán las nuevas corrientes en todos los ramales del circuito? [*Sugerencia:* con base en el teorema de superposición, vuelva a calcular las corrientes parciales obtenidas en el inciso *c*), considerando el hecho de que esas corrientes son proporcionales a la fuente que se sustituye. Después superponga las nuevas corrientes parciales con aquellas calculadas en los incisos *b*) y *d*).]

Figura **26.81** Problema de desafío 26.89.



26.90. Alarma de capacitores contra robo. La capacitancia de un capacitor puede verse afectada por el material dieléctrico que, aunque no esté dentro del capacitor, esté suficientemente cerca de éste como para ser polarizado por la curvatura del campo eléctrico que existe cerca de un capacitor con carga. Este efecto por lo general es del orden de picofarads (pF), pero, con la ayuda de circuitos electrónicos apropiados, permite detectar un cambio en el material dieléctrico que rodea al capacitor. Ese material dieléctrico puede ser el cuerpo humano, y el efecto descrito es de utilidad para diseñar una alarma contra robo. Considere el circuito simplificado que se ilustra en la figura 26.82. La fuente de voltaje tiene una fem $\mathcal{E} = 1000$ V, y el capacitor tiene una capacitancia $C = 10.0$ pF. Los circuitos electrónicos para detectar la corriente, representados como un amperímetro en el diagrama, tienen una resistencia despreciable y son capaces de detectar una corriente que persista en un nivel de al menos $1.00\ \mu$A durante al menos $200\ \mu$s después de que la capacitancia haya cambiado abruptamente de C a C'. La alarma contra robo está diseñada para activarse si la capacitancia cambia en un 10%. *a*) Determine la carga en el capacitor de 10.0 pF cuando está cargado por completo. *b*) Si el capacitor está completamente cargado antes de detectar al intruso, y suponiendo que el tiempo que tarda la capacitancia en cambiar en un 10% es suficientemente corto como para ser ignorado, obtenga una ecuación que exprese la corriente a través del resistor R como función del tiempo t, a partir de que la capacitancia cambia. *c*) Determine el intervalo de valores de la resistencia R que cumplirá las especificaciones de diseño de la alarma contra robo. ¿Qué pasa si R es demasiado pequeña? ¿O demasiado grande? (*Sugerencia:* no podrá resolver este inciso en forma analítica, por lo que tendrá que usar métodos numéricos. Exprese R como una función logarítmica de R más las cantidades conocidas. Utilice un valor tentativo para R y calcule un nuevo valor a partir de la expresión. Siga haciendo esto hasta que los valores de alimentación y salida de R coincidan con tres cifras significativas.)

Figura **26.82** Problema de desafío 26.90.

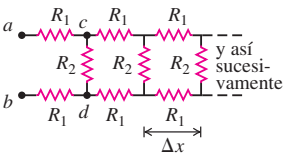


26.91. Red infinita. Como se muestra en la figura 26.83, una red de resistores de resistencias R_1 y R_2 se extiende infinitamente hacia la derecha. Demuestre que la resistencia total R_T de la red infinita es igual a

$$R_T = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$$

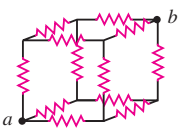
(*Sugerencia:* como la red es infinita, su resistencia a la derecha de los puntos c y d también es igual a R_T.)

Figura **26.83** Problemas de desafío 26.91 y 26.93.



26.92. Suponga que un resistor R está a lo largo de cada arista de un cubo (12 resistores en total) con conexiones en las esquinas. Encuentre la resistencia equivalente entre dos esquinas del cubo opuestas diagonalmente (puntos a y b, en la figura 26.84).

Figura **26.84** Problema de desafío 26.92.



26.93. Cadenas atenuadoras y axones. La red infinita de resistores en la figura 26.83 se conoce como *cadena atenuadora*, porque esta cadena de resistores reduce, o atenúa, la diferencia de potencial entre los alambres superior e inferior a todo lo largo de la cadena. *a*) Demuestre que si la diferencia de potencial entre los puntos a y b de la figura 26.83 es V_{ab}, entonces la diferencia de potencial entre los puntos c y d es $V_{cd} = V_{ab}/(1 + \beta)$, donde $\beta = 2R_1(R_T + R_2)/R_T R_2$ y R_T, la resistencia total de la red, está dada en el problema de desafío 26.91. (Véase la sugerencia en ese problema.) *b*) Si la diferencia de potencial entre las terminales a y b en el extremo izquierdo de la red infinita es V_0, demuestre que la diferencia de potencial entre los alambres superior e inferior a n segmentos del extremo izquierdo es $V_n = V_0/(1 + \beta)^n$. Si $R_1 = R_2$, ¿cuántos segmentos se necesitan para que la diferencia de potencial V_n disminuya a menos del 1.0% de V_0? *c*) Una cadena atenuadora infinita ofrece un modelo de propagación de un pulso de voltaje a lo largo de una fibra nerviosa o axón. Cada segmento de la red en la figura 26.83 representa un segmento corto del axón con longitud Δx. Los resistores R_1 representan la resistencia del fluido adentro y afuera de la membrana de la pared del axón. La resistencia de la membrana al flujo de corriente a través de la pared se representa con R_2. Para un segmento de axón de longitud $\Delta x = 1.0\ \mu$m, $R_1 = 6.4 \times 10^3\ \Omega$ y $R_2 = 8.0 \times 10^8\ \Omega$ (la membrana de la pared es un buen aislante). Calcule la resistencia total R_T y β para un axón infinitamente largo. (Ésta es una buena aproximación, ya que la longitud de un axón es mucho mayor que su ancho; los axones más largos en el sistema nervioso humano son mayores de 1 m pero sólo miden 10^{-7} m de radio.) *d*) ¿En qué fracción disminuye la diferencia de potencial entre el interior y el exterior del axón a lo largo de una distancia de 2.0 mm? *e*) La atenuación de la diferencia de potencial calculada en el inciso *d*) muestra que el axón no es un cable pasivo portador de corriente eléctrica; la diferencia de potencial debe reforzarse periódicamente a lo largo del axón. Este mecanismo de refuerzo es lento, por lo que una señal se propaga a lo largo del axón a sólo 30 m/s. En situaciones en que se requiere una respuesta más rápida, los axones están cubiertos con una película grasosa de mielina. Los segmentos miden alrededor de 2 mm de largo y están separados por espacios llamados *nodos de Ranvier*. La mielina incrementa la resistencia de un segmento de la membrana de 1.0 μm de largo a $R_2 = 3.3 \times 10^{12}\ \Omega$. En el caso de un axón mielinizado de este tipo, ¿en qué fracción disminuye la diferencia de potencial entre el interior y el exterior del axón a lo largo de la distancia de un nodo de Ranvier al siguiente? Esta menor atenuación significa que la velocidad de propagación aumenta.

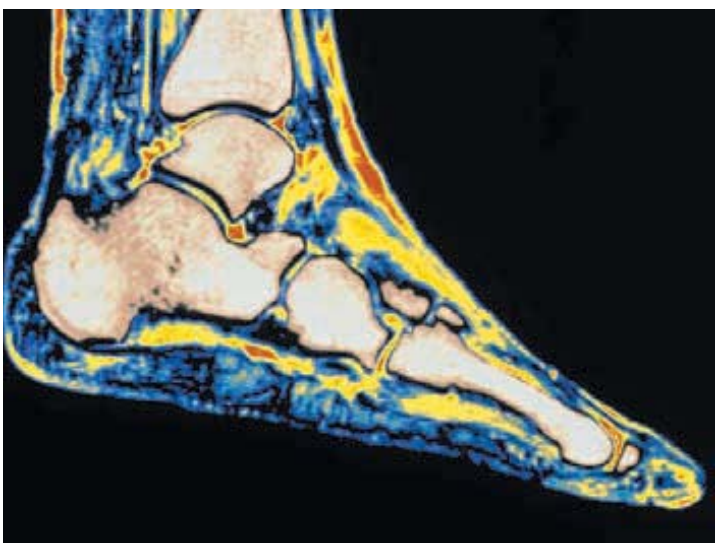
27 CAMPO MAGNÉTICO Y FUERZAS MAGNÉTICAS

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Las propiedades de los imanes y cómo interactúan entre sí.
- La naturaleza de la fuerza que una partícula cargada en movimiento experimenta en un campo magnético.
- En qué se diferencian las líneas de campo magnético de aquellas del campo eléctrico.
- A analizar el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético.
- Algunas aplicaciones prácticas de los campos magnéticos en química y física.
- A estudiar las fuerzas magnéticas en conductores que llevan corriente.
- Cómo se comportan las espiras de corriente cuando están en un campo magnético.

? Las imágenes de resonancia magnética (IRM) hacen posible ver detalles de los tejidos suaves (como los del pie en la fotografía) que no son visibles en las imágenes de rayos x. No obstante, el tejido suave no es un material magnético (no lo atrae un imán). ¿Cómo funcionan las IRM?



Todos utilizamos fuerzas magnéticas. Están en el corazón de los motores eléctricos, cinescopios de televisión, hornos de microondas, altavoces (bocinas), impresoras y unidades lectoras de discos. Los aspectos más familiares del magnetismo son aquellos asociados con los imanes permanentes, que atraen objetos de fierro que no son magnéticos, y que atraen o repelen otros imanes. Ejemplo de esta interacción es la aguja de una brújula que se alinea con el magnetismo terrestre. No obstante, la naturaleza *fundamental* del magnetismo es la interacción de las cargas eléctricas en movimiento. A diferencia de las fuerzas eléctricas, que actúan sobre las cargas eléctricas estén en movimiento o no, las fuerzas magnéticas sólo actúan sobre cargas que *se mueven*.

Aunque las fuerzas eléctricas y magnéticas son muy diferentes unas de otras, para describir ambos tipos usaremos la idea de *campo*. En el capítulo 21 vimos que las fuerzas eléctricas ocurren en dos etapas: 1) una carga produce un campo eléctrico en el espacio que la rodea, y 2) una segunda carga responde a este campo. Las fuerzas magnéticas también ocurren en dos etapas. En primer lugar, una carga o conjunto de cargas *en movimiento* (es decir, una corriente eléctrica) producen un campo *magnético*. A continuación, una segunda corriente o carga en movimiento responde a ese campo magnético, con lo que experimenta una fuerza magnética.

En este capítulo estudiaremos la segunda etapa de la interacción magnética —es decir, el modo en que las cargas y corrientes *responden* a los campos magnéticos. En particular, veremos la forma de calcular fuerzas y pares de torsión magnéticos, y descubriremos por qué los imanes son capaces de levantar objetos de hierro, como clips para sujetar papeles. En el capítulo 28 terminaremos el panorama de la interacción magnética con el estudio de cómo las cargas y corrientes en movimiento *producen* campos magnéticos.

27.1 Magnetismo

Los fenómenos magnéticos fueron observados por primera vez al menos hace 2500 años, con fragmentos de mineral de hierro magnetizado cerca de la antigua ciudad de Magnesia (hoy Manisa, en Turquía occidental). Esos trozos eran ejemplos de lo que

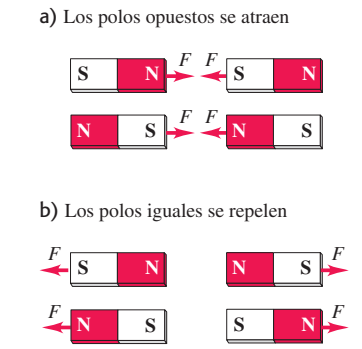
ahora llamamos **imanes permanentes**; es probable que en la puerta del refrigerador de su hogar haya varios imanes permanentes. Vimos que los imanes permanentes ejercían fuerza uno sobre otro y sobre trozos de hierro que no estaban magnetizados. Se descubrió que cuando una varilla de hierro entraba en contacto con un imán natural, aquélla también se magnetizaba, y si la varilla flotaba en agua o se suspendía de un hilo por su parte central, tendía a alinearse con la dirección norte-sur. La aguja de una brújula ordinaria no es más que un trozo de hierro magnetizado.

Antes de que se entendiera la relación que había entre las interacciones magnéticas y las cargas en movimiento, las interacciones de los imanes permanentes y las agujas de las brújulas se describían en términos de *polos magnéticos*. Si un imán permanente en forma de barra, o *imán de barra*, tiene libertad para girar, uno de sus extremos señalará al norte. Este extremo se llama *polo norte* o *polo N*; el otro extremo es el *polo sur* o *polo S*. Los polos opuestos se atraen y los polos iguales se rechazan (figura 27.1). Un objeto que contenga hierro pero no esté magnetizado (es decir, que no tenga tendencia a señalar al norte o al sur) será atraído por *cualquiera* de los polos de un imán permanente (figura 27.2). Ésta es la atracción que actúa entre un imán y la puerta de acero no magnetizada de un refrigerador. Por analogía con las interacciones eléctricas, describimos las interacciones en las figuras 27.1 y 27.2 como un imán de barra que genera un *campo magnético* en el espacio que la rodea y un segundo cuerpo responde a dicho campo. La aguja de una brújula tiende a alinearse con el campo magnético en la posición de la aguja.

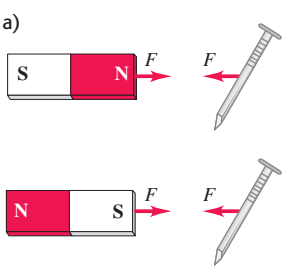
La Tierra misma es un imán. Su polo norte geográfico está cerca del polo *sur* magnético, lo cual es la razón por la que el polo norte de la aguja de una brújula señala al norte terrestre. El eje magnético de nuestro planeta no es del todo paralelo a su eje geográfico (el eje de rotación), así que la lectura de una brújula se desvía un poco del norte geográfico. Tal desviación, que varía con la ubicación, se llama *declinación magnética* o *variación magnética*. Asimismo, el campo magnético no es horizontal en la mayoría de los puntos de la superficie terrestre; su ángulo hacia arriba o hacia abajo se denomina *inclinación magnética*. En los polos magnéticos, el campo magnético es vertical.

La figura 27.3 es un esquema del campo magnético terrestre. Las líneas, llamadas *líneas de campo magnético*, muestran la dirección que señalaría una brújula que estuviera en cada sitio; en la sección 27.3 se analizan con detalle. La dirección del campo

27.1 a) Dos imanes de barra se atraen cuando sus polos opuestos (N y S, o S y N) están cerca uno del otro. b) Los imanes de barra se repelen cuando sus polos iguales (N y N, o S y S) se aproximan entre sí.

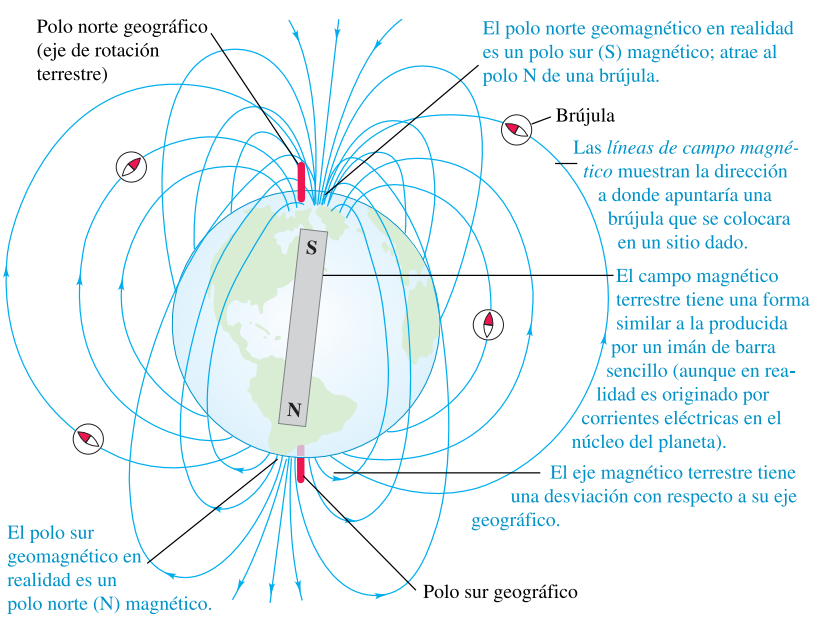


27.2 a) Cualquiera de los polos de un imán de barra atrae a un objeto no magnetizado que contenga hierro, como un clavo. b) Ejemplo de este efecto en la vida real.



b)

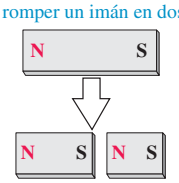
27.3 Esquema del campo magnético terrestre. El campo, que es generado por corrientes en el núcleo fundido del planeta, cambia con el tiempo; hay evidencia geológica que demuestra que invierte por completo su dirección en intervalos de alrededor de medio millón de años.



27.4 Ruptura de un imán de barra. Cada trozo tiene un polo norte y un polo sur, aun cuando los trozos sean de distinto tamaño. (Cuanto más pequeños sean, más débil será su magnetismo.)

Al contrario de lo que sucede con las cargas eléctricas, los polos magnéticos siempre ocurren en pares y no es posible aislarlos.

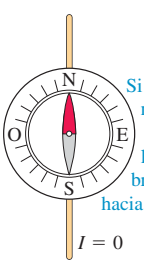
Al romper un imán en dos …



… se producen dos imanes, no dos polos aislados.

27.5 En el experimento de Oersted, se coloca una brújula directamente sobre un alambre horizontal (visto aquí desde arriba). Cuando la brújula se coloca directamente bajo el alambre, los movimientos de la brújula se invierten.

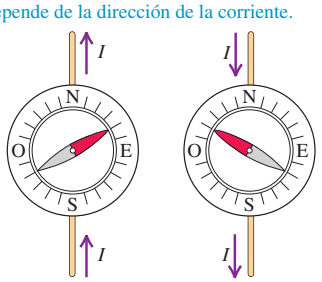
a)



Si el alambre no conduce corriente, la aguja de la brújula apunta hacia el norte.

b)

Si el alambre lleva corriente, la aguja de la brújula tiene una desviación, cuya dirección depende de la dirección de la corriente.



en cualquier punto se define como la dirección de la fuerza que el campo ejercería sobre un polo norte magnético. En la sección 27.2 daremos una definición más fundamental de la dirección y la magnitud de un campo magnético.

Polos magnéticos contra carga eléctrica

Tal vez el concepto de polos magnéticos parezca similar al de carga eléctrica, y los polos norte y sur parezcan análogos a la carga positiva y a la carga negativa. No obstante, tal analogía puede ser errónea. Si bien las cargas positiva y negativa existen aisladas, *no* hay evidencia experimental de que exista un polo magnético aislado; los polos siempre ocurren por pares. Si un imán de barra se parte en dos, cada extremo se convierte en un polo (figura 27.4). La existencia de un polo magnético aislado, o **monopolo magnético**, tendría implicaciones significativas para la física teórica. Se han efectuado búsquedas intensas de monopolos magnéticos, pero hasta ahora muy alejadas del éxito.

La primera evidencia de la relación que hay entre el magnetismo y las cargas en movimiento la descubrió, en 1820, el científico danés Hans Christian Oersted, quien encontró que un alambre conductor de corriente desviaba la aguja de una brújula, como se ilustra en la figura 27.5. Investigaciones similares fueron llevadas a cabo en Francia por André Ampère. Unos años más tarde, Michael Faraday, en Inglaterra, y Joseph Henry, en Estados Unidos, descubrieron que un imán que se moviera cerca de una espira conductora generaría una corriente en la espira. Ahora sabemos que las fuerzas magnéticas entre dos cuerpos como los que se muestran en las figuras 27.1 y 27.2 se deben fundamentalmente a interacciones entre los electrones en movimiento en los átomos de los cuerpos. (También hay interacciones *eléctricas* entre los dos cuerpos, pero éstas son más débiles que las interacciones magnéticas debido a que los dos cuerpos son eléctricamente neutros.) En el interior de un cuerpo magnetizado, como un imán permanente, hay un movimiento *coordinado* de algunos electrones atómicos; en un cuerpo no magnetizado los movimientos no están coordinados. (En la sección 27.7 describiremos con más detalle dichos movimientos, y veremos cómo surgen las interacciones que se muestran en las figuras 27.1 y 27.2.)

Las interacciones eléctricas y magnéticas están íntimamente relacionadas. En los siguientes capítulos se desarrollarán los principios unificadores del electromagnetismo, culminando con la expresión de tales principios en las *ecuaciones de Maxwell*, las cuales representan la síntesis del electromagnetismo, del mismo modo que las leyes de Newton son la síntesis de la mecánica, e igual que éstas representan un logro cumbre del intelecto humano.

Evalúe su comprensión de la sección 27.1 Suponga que en la figura 27.5a corta la parte de la aguja de la brújula que está pintada de color gris. Se deshace de esta parte y conserva la roja, en la cual perfora un agujero para colocarla sobre el pivote del centro de la brújula. La parte roja, ¿se seguirá balanceando hacia el este y el oeste cuando se aplique una corriente como en la figura 27.5b?

27.2 Campo magnético

Para introducir el concepto de campo magnético de manera adecuada repasaremos nuestra formulación de las interacciones *eléctricas* del capítulo 21, donde introdujimos el concepto de campo *eléctrico*. Representamos las interacciones eléctricas en dos etapas:

1. Una distribución de carga eléctrica en reposo crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en el espacio circundante.
2. El campo eléctrico ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cualquier otra carga q que esté presente en el campo.

Describimos las interacciones magnéticas de manera similar:

1. Una carga o corriente móvil crea un **campo magnético** en el espacio circundante (además de su campo *eléctrico*).
2. El campo magnético ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre cualquier otra carga o corriente en movimiento presente en el campo.

En este capítulo nos centraremos en el *segundo* aspecto de la interacción: dada la presencia de un campo magnético, ¿qué fuerza ejerce éste sobre una carga o una corriente en movimiento? En el capítulo 28 volveremos al problema de cómo las cargas y las corrientes móviles *crean* los campos magnéticos.

Al igual que el campo eléctrico, el magnético es un *campo vectorial* —es decir, una cantidad vectorial asociada con cada punto del espacio. Usaremos el símbolo $\vec{B}$ para representar el campo magnético. En cualquier posición, la dirección de $\vec{B}$ se define como aquella en la que tiende a apuntar el polo norte de la aguja de una brújula. En la figura 27.3, las flechas sugieren la dirección del campo magnético terrestre; para cualquier imán, $\vec{B}$ apunta hacia fuera de su polo norte y hacia adentro de su polo sur.

Fuerzas magnéticas sobre cargas móviles

La fuerza magnética ejercida sobre una carga en movimiento tiene cuatro características esenciales. La primera es que su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga. Los experimentos demuestran que, si en un campo magnético dado una carga de 1 μC y otra de 2 μC se mueven con la misma velocidad, la fuerza sobre la carga de 2 μC es del doble de magnitud que la que se ejerce sobre la carga de 1 μC. La segunda característica es que la magnitud de la fuerza también es proporcional a la magnitud, o "intensidad", del campo; si duplicamos la magnitud del campo (por ejemplo, usando dos imanes de barra en vez de uno solo) sin cambiar la carga o su velocidad, la fuerza se duplicará.

La tercera característica es que la fuerza magnética depende de la velocidad de la partícula. Esto es muy diferente de lo que sucede con la fuerza del campo eléctrico, que es la misma sin que importe si la carga se mueve o no. Una partícula cargada en reposo *no* experimenta fuerza magnética. Y la cuarta característica es que los experimentos indican que la fuerza magnética $\vec{F}$ *no* tiene la misma dirección que el campo magnético $\vec{B}$, sino que siempre es *perpendicular* tanto a $\vec{B}$ como a la velocidad $\vec{v}$. La magnitud F de la fuerza es proporcional a la componente de $\vec{v}$ perpendicular al campo; cuando esa componente es igual a cero (es decir, cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelas o antiparalelas), la fuerza es igual a cero.

La figura 27.6 ilustra estas relaciones. La dirección de $\vec{F}$ siempre es perpendicular al plano que contiene $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Su magnitud está dada por

$$F = |q|v_\perp B = |q|vB\,\text{sen}\,\phi \tag{27.1}$$

donde $|q|$ es la magnitud de la carga y ϕ es el ángulo medido desde la dirección de $\vec{v}$ hacia la dirección de $\vec{B}$, como se muestra en la figura.

Esta descripción no especifica por completo la dirección de $\vec{F}$; siempre hay dos direcciones, opuestas entre sí, que son perpendiculares al plano de $\vec{v}$ y de $\vec{B}$. Para completar la descripción se utiliza la misma regla de la mano derecha que se empleó para definir el producto vectorial en la sección 1.10 (sería una buena idea repasar esa sección antes de proseguir). Dibuje los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ con sus orígenes unidos, como en la figura 27.7a. Imagine que gira $\vec{v}$ hasta que apunta en dirección de $\vec{B}$ (gire por el más pequeño de los dos ángulos posibles). Doble los dedos de su mano derecha en torno a la línea perpendicular al plano de $\vec{v}$ y $\vec{B}$, de modo que se enrosquen con el sentido de rotación de $\vec{v}$ a $\vec{B}$. Entonces, su pulgar apunta en dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre una carga *positiva.* (En forma alternativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre una carga positiva es aquella en que un tornillo de rosca derecha avanzaría si se girara del mismo modo.)

Este análisis indica que la fuerza sobre una carga q que se moviera con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ está dada, tanto en magnitud como en dirección, por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{(fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento)} \tag{27.2}$$

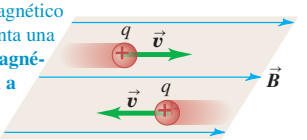
Éste es el primero de varios productos vectoriales que encontraremos al estudiar las relaciones del campo magnético. Es importante notar que la ecuación (27.2) *no* se deduce teóricamente, sino que es una observación basada en *experimentos*.

Activ ONLINE Physics
13.4 Fuerza magnética sobre una partícula

27.6 La fuerza magnética $\vec{F}$ que actúa sobre una carga positiva q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como al campo magnético $\vec{B}$. Para valores dados de la velocidad v y la intensidad del campo magnético B, la fuerza es mayor cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

a)

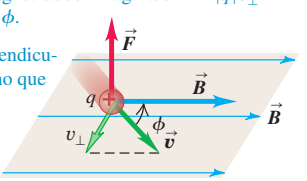
Una carga que se mueve en forma **paralela** al campo magnético experimenta una **fuerza magnética igual a cero**.



b)

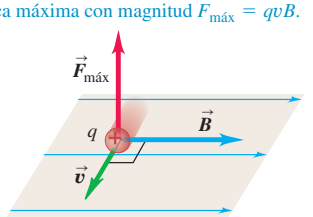
Una carga que se mueva con un ángulo ϕ con respecto a un campo magnético experimenta una fuerza magnética con magnitud $F = |q|v_\perp B = |q|vB\,\text{sen}\,\phi$.

$\vec{F}$ es perpendicular al plano que contiene $\vec{v}$ y $\vec{B}$.



c)

Una carga que se mueva de manera perpendicular a un campo magnético experimenta una fuerza magnética máxima con magnitud $F_{\text{máx}} = qvB$.

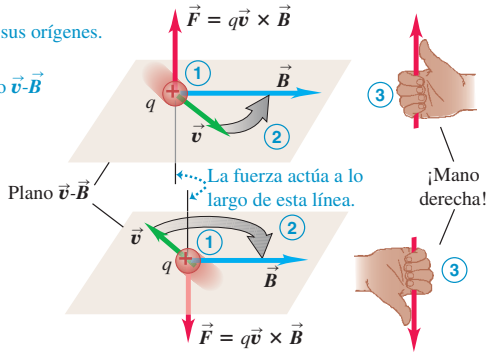


27.7 Cálculo de la dirección de la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento.

a)

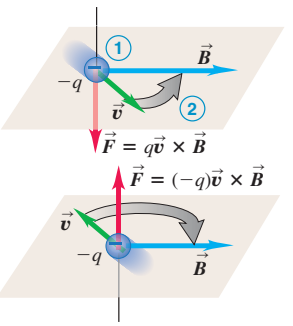
Regla de la mano derecha para la dirección de la fuerza magnética sobre una carga **positiva** que se mueve en un campo magnético:

1. Coloque los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ unidos en sus orígenes.
2. Imagine que gira $\vec{v}$ hacia $\vec{B}$ en el plano $\vec{v}$-$\vec{B}$ (en el menor ángulo).
3. La fuerza actúa a lo largo de una línea perpendicular al plano $\vec{v}$-$\vec{B}$. Enrolle los dedos de su mano derecha en torno a esta línea en la misma dirección que giró a $\vec{v}$. Ahora, su pulgar apunta en la dirección que actúa la fuerza.



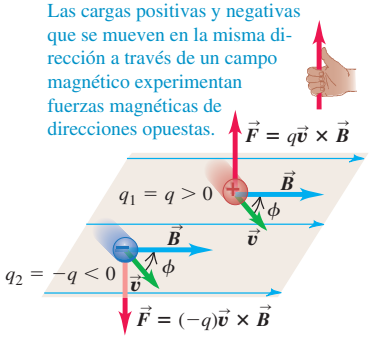
b)

Si la carga es negativa, la dirección de la fuerza es ***opuesta*** a la que da la regla de la mano derecha.



27.8 Dos cargas de la misma magnitud, pero signos contrarios que se mueven con la misma velocidad en el mismo campo magnético. Las fuerzas magnéticas sobre las cargas son iguales en magnitud, pero opuestas en dirección.

Las cargas positivas y negativas que se mueven en la misma dirección a través de un campo magnético experimentan fuerzas magnéticas de direcciones opuestas.



La ecuación (27.2) es válida tanto para cargas positivas como negativas. Cuando q es negativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ es opuesta a la de $\vec{v} \times \vec{B}$ (figura 27.7b). Si dos cargas con magnitud igual y signos contrarios se mueven con la misma velocidad en el mismo campo $\vec{B}$ (figura 27.8), las fuerzas tienen igual magnitud y dirección opuesta. Las figuras 27.6, 27.7 y 27.8 presentan varios ejemplos de las relaciones entre las direcciones de $\vec{F}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ para cargas tanto positivas como negativas; asegúrese de que las entiende.

La ecuación (27.1) da la magnitud de la fuerza magnética $\vec{F}$ en la ecuación (27.2). Tal magnitud se puede expresar en una forma distinta pero equivalente. Puesto que ϕ es el ángulo entre la dirección de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, se puede interpretar al producto $B \operatorname{sen} \phi$ como la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}$, es decir, $B_\perp$. Con esta notación, la magnitud de la fuerza es

$$F = |q| v B_\perp \tag{27.3}$$

Hay veces en que esta forma es más conveniente, en especial en problemas que incluyen *corrientes* en vez de partículas individuales. Más adelante, en este capítulo estudiaremos fuerzas sobre corrientes.

De la ecuación (27.1) se desprende que las *unidades* de B deben ser las mismas que las unidades de F/qv. Por lo tanto, la unidad del SI para B es equivalente a 1 N · s/C · m, o bien, ya que un ampere es un coulomb por segundo (1 A = 1 C/s), 1 N/A · m. Esta unidad recibe el nombre de **tesla** (se abrevia T), en honor a Nikola Tesla (1857-1943), prominente científico e inventor serbio-estadounidense:

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

Otra unidad de B que también es de uso común es el **gauss** (1 G = 10^{-4} T). Los instrumentos para medir campos magnéticos en ocasiones se llaman *gausímetros*.

El campo magnético de la Tierra es del orden de 10^{-4} T, o bien, 1 G. En el interior de los átomos ocurren campos magnéticos del orden de 10 T, los cuales son importantes en el análisis de los espectros atómicos. El campo magnético más estable que se haya producido hasta el presente en un laboratorio es de aproximadamente 45 T. Algunos electroimanes de pulsos de corriente generan campos de 120 T, aproximadamente, durante intervalos breves de tiempo de alrededor de 1 milisegundo. Se cree que el campo magnético en la superficie de una estrella de neutrones es de unos 10^8 T.

Medición de campos magnéticos con cargas de prueba

Para explorar un campo magnético desconocido, se mide la magnitud y duración de la fuerza sobre una carga de prueba *en movimiento*, y luego se emplea la ecuación (27.2) para determinar $\vec{B}$. El haz de electrones de un tubo de rayos catódicos, como

el de los televisores, es un dispositivo conveniente para realizar tales mediciones. El cañón de electrones dispara un haz de electrones estrecho a una velocidad conocida. Si ninguna fuerza ocasiona una desviación en el haz, éste golpea el centro de la pantalla.

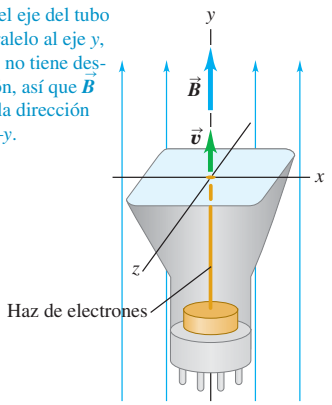
Si está presente un campo magnético, en general el haz de electrones sufre una desviación. Pero si el haz es paralelo o antiparalelo al campo, entonces $\phi = 0$ o π en la ecuación (27.1), por lo que $F = 0$; no hay fuerza ni desviación. Si se encuentra que el haz de electrones no tiene desviación cuando su dirección es paralela a cierto eje, como en la figura 27.9, el vector $\vec{B}$ debe apuntar hacia arriba o hacia abajo de ese eje.

Entonces, si el tubo se gira 90° (figura 27.9b), $\phi = \pi/2$ en la ecuación (27.1), y la fuerza magnética es máxima; el haz tiene una desviación que es perpendicular al plano de $\vec{B}$ y $\vec{v}$. La dirección y la magnitud de la deflexión determinan la dirección y la magnitud de $\vec{B}$. Para confirmar la ecuación (27.1) o la (27.3) y el análisis respectivo, podemos realizar experimentos adicionales en los cuales el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{v}$ esté entre cero y 90°. Note que el electrón tiene carga negativa; en la figura 27.9b la fuerza tiene dirección opuesta a la fuerza de una carga positiva.

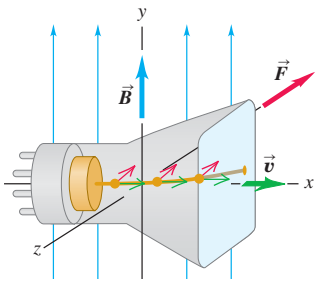
Cuando una partícula cargada se mueva a través de una región del espacio en que estén presentes los campos eléctrico y magnético, ambos ejercerán fuerzas sobre la partícula. La fuerza total $\vec{F}$ es la suma vectorial de las fuerzas eléctrica y magnética:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{27.4}$$

a) Si el eje del tubo es paralelo al eje y, el haz no tiene desviación, así que $\vec{B}$ tiene la dirección $+y$ o $-y$.



b) Si el eje del tubo es paralelo al eje x, el haz sufre una desviación en la dirección $-z$ por lo que $\vec{B}$ tiene la dirección $+y$.



27.9 Determinación de la dirección de un campo magnético usando un tubo de rayos catódicos. Como los electrones tienen carga negativa, la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ en el inciso *b*) apunta en contra de la dirección dada por la regla de la mano derecha (véase la figura 27.7b).

Estrategia para resolver problemas 27.1 Fuerzas magnéticas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La regla de la mano derecha permite determinar la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Dibuje el vector de velocidad $\vec{v}$ y el campo magnético $\vec{B}$ con sus orígenes juntos, con la finalidad de visualizar el plano donde se encuentran.
2. Identifique el ángulo ϕ entre los dos vectores.
3. Identifique las incógnitas. Éstas pueden ser la magnitud y dirección de la fuerza, o la magnitud o dirección de $\vec{v}$ o de $\vec{B}$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Exprese la fuerza magnética usando la ecuación (27.2), $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. La magnitud de la fuerza está dada por la ecuación (27.1), $F = qvB \operatorname{sen} \phi$.
2. Recuerde que $\vec{F}$ es perpendicular al plano de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. La dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$ está determinada por la regla de la mano derecha; mientras no esté seguro de entender esta regla, consulte la figura 27.7. Si q es negativa, la fuerza es *opuesta* a $\vec{v} \times \vec{B}$.

EVALUAR *la respuesta:* Siempre que se pueda, resuelva el problema de dos formas. Hágalo directamente con la definición geométrica del producto vectorial. Después encuentre las componentes de los vectores en algún sistema de ejes conveniente y calcule el producto vectorial en forma algebraica a partir de las componentes. Compruebe que los resultados concuerden.

Ejemplo 27.1 Fuerza magnética sobre un protón

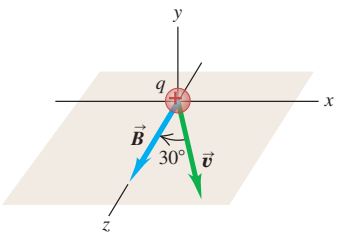
Un haz de protones ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ C) se mueve a 3.0×10^5 m/s a través de un campo magnético uniforme, con magnitud 2.0 T dirigido a lo largo del eje z positivo, como se indica en la figura 27.10. La velocidad de cada protón se encuentra en el plano xz con un ángulo de 30° con respecto al eje $+z$. Calcule la fuerza sobre un protón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la expresión para la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento.

PLANTEAR: La figura 27.10 muestra que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ están en el plano xz. El ángulo entre estos vectores es de 30°. Las incógnitas son la magnitud y dirección de la fuerza $\vec{F}$.

27.10 Direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{B}$ para un protón en un campo magnético.



EJECUTAR: La carga es positiva, por lo que la fuerza está en la misma dirección que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$. Según la regla de la mano derecha, esta dirección es a lo largo del eje y negativo. De acuerdo con la ecuación (27.1), la magnitud de la fuerza es:

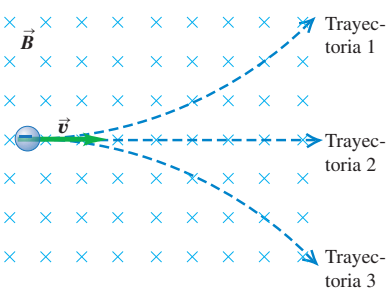
$$\begin{aligned} F &= qvB\,\text{sen}\,\phi \\ &= (1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(3.0 \times 10^5\,\text{m/s})(2.0\,\text{T})(\text{sen}\,30°) \\ &= 4.8 \times 10^{-14}\,\text{N} \end{aligned}$$

EVALUAR: El resultado se comprueba evaluando la fuerza con el lenguaje de vectores y la ecuación (27.2):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (3.0 \times 10^5\,\text{m/s})(\text{sen}\,30°)\hat{\imath} + (3.0 \times 10^5\,\text{m/s})(\cos 30°)\hat{k} \\ \vec{B} &= (2.0\,\text{T})\hat{k} \\ \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ &= (1.6 \times 10^{-19}\,\text{C})(3.0 \times 10^5\,\text{m/s})(2.0\,\text{T}) \\ &\quad \times (\text{sen}\,30°\,\hat{\imath} + \cos 30°\hat{k}) \times \hat{k} \\ &= (-4.8 \times 10^{-14}\,\text{N})\hat{\jmath} \end{aligned}$$

(Recuerde que $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ y $\hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$.) De nuevo resulta que la fuerza está en la dirección negativa del eje y, con magnitud de 4.8×10^{-14} N.

Si el haz fuera de *electrones* en vez de protones, la carga sería negativa ($q = -1.6 \times 10^{-19}$ C) y la dirección de la fuerza se invertiría, para estar dirigida ahora a lo largo del eje y positivo, pero su magnitud sería la misma que antes, $F = 4.8 \times 10^{-14}$ N.



Pruebe su comprensión de la sección 27.2 La figura de la izquierda ilustra un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia el plano del papel (que se muestra con símbolos × azules); en tal plano se mueve una partícula con carga negativa. ¿Cuál de las tres trayectorias sigue la partícula: 1, 2 o 3?

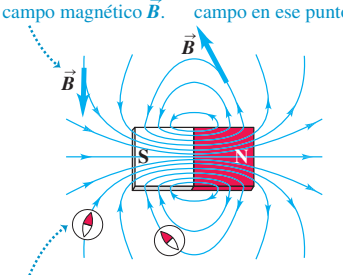
27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético

Cualquier campo magnético se representa usando **líneas de campo magnético**, del mismo modo que hicimos para el campo magnético terrestre en la figura 27.3. La idea es la misma que para las líneas de campo eléctrico estudiadas en la sección 21.6. Se dibujan las líneas de modo que la línea que pasa a través de cualquier punto sea tangente al vector del campo magnético $\vec{B}$ en ese punto (figura 27.11). Igual que hicimos con las líneas de campo eléctrico, tan sólo dibujamos unas cuantas líneas que sean representativas pues, de otra manera, ocuparían todo el espacio. Donde las líneas de campo adyacentes están cerca entre sí, la magnitud del campo es grande; donde tales líneas están separadas, la magnitud del campo es pequeña. Asimismo, debido a que la dirección de $\vec{B}$ en cada punto es única, las líneas de campo nunca se cruzan.

27.11 Líneas de campo magnético de un imán permanente. Observe que las líneas de campo pasan por el interior del imán.

En cada punto, la línea de campo es tangente al vector del campo magnético $\vec{B}$.

Cuanto más saturadas estén las líneas de campo, más intenso será el campo en ese punto.



En cada punto, las líneas de campo apuntan en la misma dirección en que lo haría una brújula . . .

. . . por lo tanto, las líneas de campo magnético *siempre* señalan *hacia fuera* de los polos N y *en dirección* a los polos S.

CUIDADO **Las líneas de campo magnético no son "líneas de fuerza"** En ocasiones, a las líneas de campo magnético se les llama "líneas magnéticas de fuerza", aunque éste no es un nombre adecuado; a diferencia de las líneas de campo eléctrico, *no apuntan* en dirección de la fuerza que se ejerce sobre la carga (figura 27.12). La ecuación (27.2) muestra que la fuerza sobre una partícula con carga en movimiento siempre es perpendicular al campo magnético y, por lo tanto, a la línea de éste que pasa por la posición donde se halla la partícula. La dirección de la fuerza depende

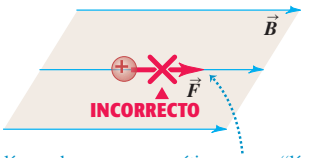
de la velocidad de la partícula y del signo de la carga, de modo que una simple mirada a las líneas de campo magnético no basta para indicar la dirección de la fuerza sobre una partícula cargada que se mueva arbitrariamente. Las líneas de campo magnético *sí* tienen la dirección en que apuntaría la aguja de una brújula colocada en cada sitio; tal vez esto lo ayude a visualizar las líneas.

Las figuras 27.11 y 27.13 muestran líneas de campo magnético producidas por varias fuentes comunes de campo magnético. En el espacio entre los polos del imán de la figura 27.13a, las líneas de campo son aproximadamente rectas y paralelas, y están igualmente espaciadas, lo cual demuestra que el campo magnético en esta región es aproximadamente *uniforme* (es decir, tiene magnitud y dirección constantes).

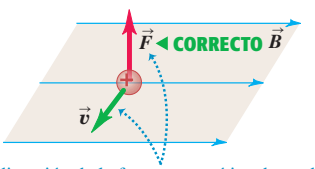
Como los patrones de campo magnético son tridimensionales, con frecuencia es necesario dibujar líneas de campo magnético que apunten hacia dentro o hacia fuera del plano de un dibujo. Para hacer esto se usa un punto (·) que representa un vector dirigido hacia fuera del plano, y una cruz (×) que denota que el vector se dirige hacia el plano (figura 27.13b). Veamos una manera adecuada de recordar tales convenciones: el punto semeja la cabeza de una flecha que se dirige hacia usted; en tanto que la cruz representa las plumas de una flecha que se aleja de usted.

Las limaduras de hierro, como las agujas de brújula, tienden a alinearse con las líneas de campo magnético, por lo que brindan una forma sencilla de visualizar las líneas de campo magnético (figura 27.14).

27.12 Las líneas de campo magnético *no* son "líneas de fuerza".



Las líneas de campo magnético *no* son "líneas de fuerza". La fuerza sobre una partícula cargada no se ejerce a lo largo de la dirección de una línea de campo.

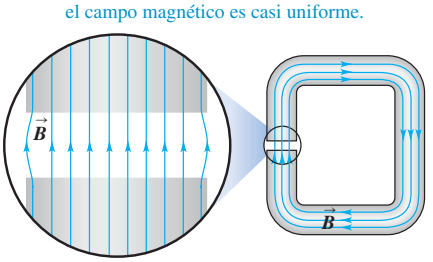


La dirección de la fuerza magnética depende de la velocidad $\vec{v}$, según se expresa en la ley de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

27.13 Líneas de campo magnético producidas por varias fuentes comunes de campo magnético.

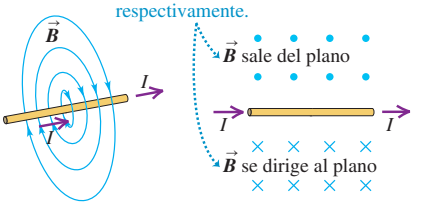
a) Campo magnético de un imán en forma de C

Entre polos magnéticos paralelos y planos, el campo magnético es casi uniforme.



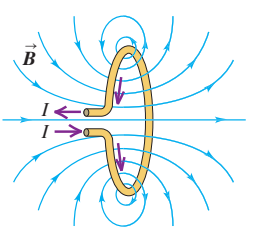
b) Campo magnético de un alambre recto que conduce corriente

Para representar un campo que sale del plano del papel o llega a éste se usan puntos y cruces, respectivamente.

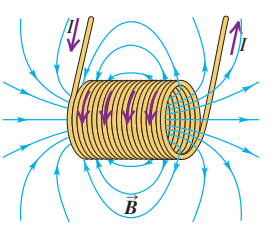


Vista en perspectiva *El alambre está en el plano del papel*

c) Campos magnéticos de una espira y una bobina (solenoide) que conducen corriente

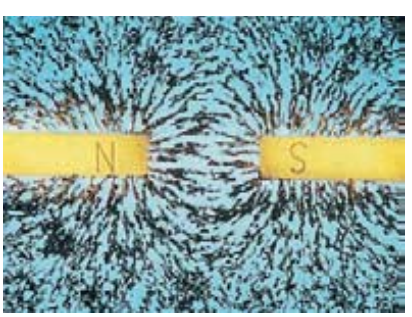


Observe que el campo de la espira y, especialmente, de la bobina, se parecen al campo de un imán de barra (véase la figura 27.11).

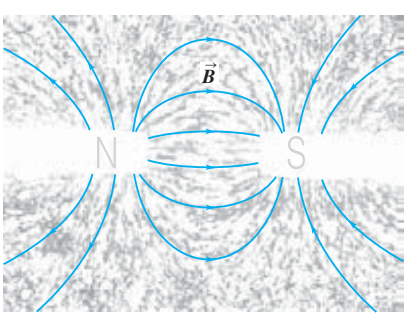


27.14 a) Similares a pequeñas agujas de brújula, las limaduras de hierro se alinean tangentes a las líneas de campo magnético. b) Dibujo de las líneas de campo para la situación que se ilustra en el inciso a).

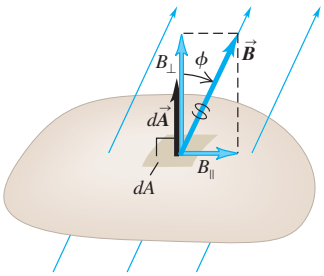
a)



b)



27.15 El flujo magnético a través de un elemento de área dA se define como $d\Phi_B = B_\perp dA$.



Flujo magnético y ley de Gauss del magnetismo

Definimos el **flujo magnético** Φ_B a través de una superficie al igual que definimos el flujo eléctrico en relación con la ley de Gauss, en la sección 22.2. Se puede dividir cualquier superficie en elementos de área dA (figura 27.15). Para cada elemento se determina $B_\perp$, la componente de $\vec{B}$ normal a la superficie en la posición de ese elemento, como se ilustra. De la figura, $B_\perp = B\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de $\vec{B}$ y una línea perpendicular a la superficie. (Hay que tener cuidado de no confundir ϕ con Φ_B.) En general, esta componente varía de un punto a otro de la superficie. Definimos el flujo magnético $d\Phi_B$ a través de esta área como normal

$$d\Phi_B = B_\perp dA = B\cos\phi\, dA = \vec{B}\cdot d\vec{A} \tag{27.5}$$

El flujo magnético *total* a través de la superficie es la suma de las contribuciones desde los elementos de área individuales:

$$\Phi_B = \int B_\perp dA = \int B\cos\phi\, dA = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} \quad \text{(flujo magnético a través de una superficie)} \tag{27.6}$$

(Esta ecuación utiliza los conceptos de área vectorial e integral de superficie, que se presentaron en la sección 22.2; el lector quizá desee repasar aquel análisis.)

El flujo magnético es una cantidad *escalar*. En el caso especial en que $\vec{B}$ es uniforme sobre la superficie de un plano con área total A, $B_\perp$ y ϕ son los mismos en todos los puntos de la superficie, y

$$\Phi_B = B_\perp A = BA\cos\phi \tag{27.7}$$

Si $\vec{B}$ fuera perpendicular a la superficie, entonces $\cos\phi = 1$ y la ecuación (27.7) se reduce a $\Phi_B = BA$. Al estudiar la inducción electromagnética en el capítulo 29, usaremos mucho el concepto de flujo magnético.

La unidad del SI para el flujo magnético es igual a la unidad del campo magnético (1 T) multiplicada por la unidad de área (1 m^2). Esta unidad se llama **weber** (1 Wb), en honor del físico alemán Wilhelm Weber (1804-1891):

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2$$

Asimismo, $1\ \text{T} = 1\ \text{N/A}\cdot\text{m}$, por lo que

$$1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2 = 1\ \text{N}\cdot\text{m/A}$$

En la ley de Gauss, el flujo *eléctrico* total a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada por la superficie. Por ejemplo, si la superficie cerrada contiene un dipolo eléctrico, el flujo eléctrico total es igual a cero porque la carga total es cero. (Quizá usted desee repasar la sección 22.3 acerca de la ley de Gauss.) Por analogía, si existiera algo como una sola carga magnética (monopolo magnético), el flujo *magnético* total a través de la superficie cerrada sería proporcional a la carga magnética total encerrada. Pero ya dijimos que nunca se ha observado un monopolo magnético, a pesar de la intensa búsqueda que se hace de él. Se concluye lo siguiente:

El flujo magnético total a través de una superficie cerrada siempre es igual a cero.

Simbólicamente,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada)} \tag{27.8}$$

En ocasiones, esta ecuación recibe el nombre de *ley de Gauss del magnetismo*. Se puede comprobar analizando las figuras 27.11 y 27.13; si se dibuja una superficie cerrada en cualquier lugar de uno de los mapas de campo que se ilustran en las figuras, se verá que toda línea de campo que penetra la superficie también sale de ella; el flujo neto a través de la superficie es igual a cero. De la ecuación (27.8) también se sigue que las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerrados.

CUIDADO **Las líneas de campo no tienen extremos** A diferencia de las líneas de campo eléctrico, que comienzan y terminan en cargas eléctricas, las líneas de campo magnético *nunca* tienen puntos extremos; tales puntos indicarían la presencia de un monopolo. Quizás us-

ted se sienta tentado a dibujar líneas de campo magnético que comiencen en el polo norte de un imán y terminen en el polo sur . No obstante, como se observa en la figura 27.11, las líneas de campo de un imán en realidad pasan por el interior de éste. Al igual que todas las demás líneas de campo magnético, forman espiras cerradas.

Para la ley de Gauss, que siempre trata con superficies *cerradas*, el elemento de área vectorial $d\vec{A}$ en la ecuación (27.6) siempre apunta *hacia fuera* de la superficie. Sin embargo, ciertas aplicaciones del flujo *magnético* implican una superficie *abierta* con línea de frontera, lo cual produce una ambigüedad en el signo de la ecuación (27.6) porque hay dos posibilidades en elección de la dirección para $d\vec{A}$. En estos casos se elige uno de los dos lados de la superficie como "positivo" y se emplea así en forma consistente.

Si en la ecuación (27.5) el elemento de área dA forma ángulos rectos con las líneas de campo, entonces $B_\perp = B$; si se denota al área $dA_\perp$, tenemos

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_\perp} \tag{27.9}$$

Es decir, la magnitud del campo magnético es igual al *flujo por unidad de área* a través de un área que forma un ángulo recto con el campo magnético. Por esta razón, al campo magnético $\vec{B}$ en ocasiones se le llama **densidad de flujo magnético**.

Ejemplo 27.2 Cálculos del flujo magnético

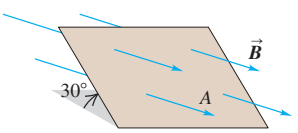
La figura 27.16a muestra una vista en perspectiva de una superficie plana con área de 3.0 cm^2 en un campo magnético uniforme. Si el flujo magnético a través de esta área es de 0.90 mWb, calcule la magnitud del campo magnético y obtenga la dirección del vector de área.

SOLUCIÓN

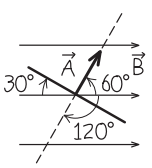
IDENTIFICAR: En muchos problemas, se pide calcular el flujo de un campo magnético dado a través de un área específica. Sin embargo, en este ejemplo se nos da el flujo, el área y la dirección del campo magnético. Nuestras incógnitas son la magnitud del campo y dirección del vector de área.

27.16 a) Superficie plana A en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. b) El vector de área $\vec{A}$ forma un ángulo de 60° con $\vec{B}$. (Si hubiéramos elegido que $\vec{A}$ apuntara en la dirección opuesta, ϕ tendría que ser de 120° y el flujo magnético Φ_B tendría que ser negativo.)

a) Vista en perspectiva



b) Nuestro esquema del problema (vista de perfil)



PLANTEAR: Como el campo magnético es uniforme, B y ϕ tienen el mismo valor en todos los puntos de la superficie, por lo que es posible utilizar la ecuación (27.7): $\Phi_B = BA\cos\phi$. Nuestra incógnita es B.

EJECUTAR: El área A es 3.0×10^{-4} m^2; la dirección de $\vec{A}$ es perpendicular a la superficie, por lo que ϕ podría ser de 60° o 120°. Pero Φ_B, B y A son positivos, de modo que cos ϕ también debe ser positivo. Esto elimina los 120°, por lo cual $\phi = 60°$, y se obtiene:

$$B = \frac{\Phi_B}{A\cos\phi} = \frac{0.90 \times 10^{-3}\ \text{Wb}}{(3.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(\cos 60°)} = 6.0\ \text{T}$$

El vector de área $\vec{A}$ es perpendicular al área en la dirección que se ilustra en la figura 27.16b.

EVALUAR: Una buena forma de comprobar el resultado es calcular el producto $BA\cos\phi$ para estar seguros de que es igual al valor dado del flujo magnético Φ_B. ¿Lo es?

Evalúe su comprensión de la sección 27.3 Imagine que se mueve a lo largo del eje de la espira conductora de la figura 27.13c, comienza en un punto muy a la izquierda de la espira y termina en otro punto muy a la derecha de la espira. *a)* ¿Cómo variaría la intensidad del campo magnético a medida que usted se moviera a lo largo de dicha trayectoria? i) Sería la misma a todos los puntos de la trayectoria; ii) aumentaría y luego disminuiría; iii) disminuiría y luego aumentaría; *b)* ¿Variaría la dirección del campo magnético conforme usted se mueve por la trayectoria?

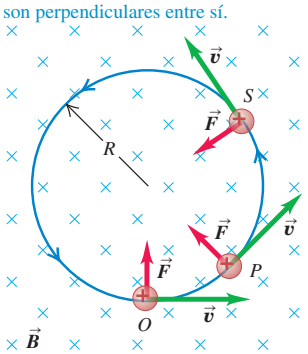
27.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

Cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético, sobre ella actúa la fuerza magnética dada por la ecuación (27.2), y su movimiento está determinado por las leyes de Newton. La figura 27.17 muestra un ejemplo sencillo. Una partícula con

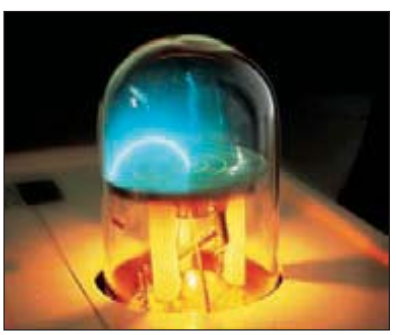
27.17 Una partícula cargada se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$.

a) Órbita de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

Una carga que se mueve con ángulos rectos con respecto a un campo $\vec{B}$ uniforme se mueve en círculo a rapidez constante, porque $\vec{F}$ y $\vec{v}$ siempre son perpendiculares entre sí.

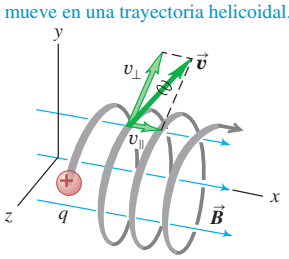


b) Haz de electrones (arco azul) que se curva en un campo magnético



27.18 El caso general de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. El campo magnético no hace trabajo sobre la partícula, por lo que su rapidez y la energía cinética permanecen constantes.

El movimiento de esta partícula tiene componentes tanto paralelos ($v_\parallel$) como perpendiculares ($v_\perp$) al campo magnético, por lo que se mueve en una trayectoria helicoidal.



carga positiva q está en el punto O, moviéndose con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia el plano de la figura. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ tiene una magnitud $F = qvB$ y la dirección que se indica en la figura. La fuerza *siempre* es perpendicular a $\vec{v}$, por lo que no puede cambiar la *magnitud* de la velocidad, únicamente su dirección. Para decirlo de manera diferente, la fuerza magnética nunca tiene una componente paralela al movimiento de la partícula, de modo que la fuerza magnética nunca realiza *trabajo* sobre la partícula. Esto se cumple aun si el campo magnético no es uniforme.

El movimiento de una partícula cargada bajo la sola influencia de un campo magnético siempre ocurre con rapidez constante.

Con este principio, se observa que para la situación ilustrada en la figura 27.17a la magnitud tanto de $\vec{F}$ como de $\vec{v}$ son constantes. En puntos tales como P y S, las direcciones de fuerza y velocidad han cambiado como se ilustra, pero sus magnitudes son las mismas. Por lo tanto, la partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza de magnitud constante que siempre forma ángulos rectos con la velocidad de la partícula. Si se comparan estas condiciones con el análisis del movimiento circular estudiado en las secciones 3.4 y 5.4, se observa que la trayectoria de la partícula es un *círculo*, trazado con constante v. La aceleración centrípeta es v^2/R, y la única fuerza que actúa es la fuerza magnética, por lo que de acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$F = |q|vB = m\frac{v^2}{R} \tag{27.10}$$

donde m es la masa de la partícula. Al despejar el radio R de la ecuación (27.10) para la trayectoria circular, se obtiene

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{(radio de una órbita circular en un campo magnético)} \tag{27.11}$$

Esto también se puede escribir como $R = p/|q|B$, donde $p = mv$ es la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula. Si la carga q es negativa, en la figura 27.17a la partícula se mueve en sentido horario alrededor de la órbita.

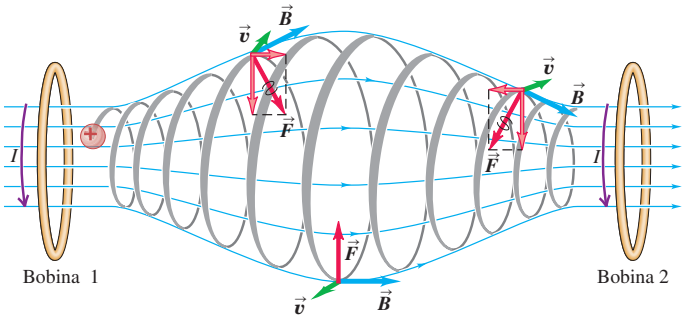
La rapidez angular ω de la partícula se calcula con la ecuación (9.13), $v = R\omega$. Al combinar ésta con la ecuación (27.11):

$$\omega = \frac{v}{R} = v\frac{|q|B}{mv} = \frac{|q|B}{m} \tag{27.12}$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo es $f = \omega/2\pi$. Esta frecuencia f es independiente del radio R de la trayectoria. Se denomina **frecuencia del ciclotrón**; en un acelerador de partículas llamado *ciclotrón*, las partículas que se mueven en trayectorias casi circulares reciben un impulso al doble en cada revolución, lo cual incrementa su energía y sus radios orbitales, pero no su rapidez angular o frecuencia. De manera similar, un tipo de *magnetrón*, fuente común de radiación de microondas en los hornos y en los sistemas de radar, emite radiación con una frecuencia igual a la frecuencia del movimiento circular de los electrones en una cámara de vacío entre los polos de un imán.

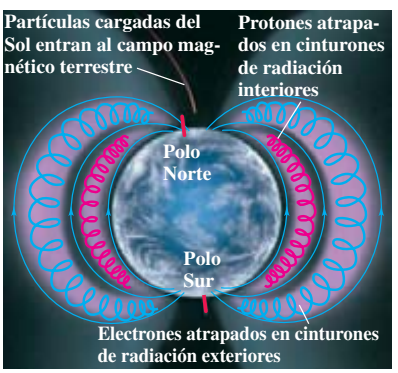
Si la dirección de la velocidad inicial *no* es perpendicular al campo, la *componente* de la velocidad paralela al campo es constante porque no hay fuerza paralela al campo. Así que la partícula se mueve en un patrón helicoidal (figura 27.18). El radio de la hélice está dado por la ecuación (27.11), donde v ahora es la componente de la velocidad perpendicular al campo $\vec{B}$.

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético no uniforme es más complejo. La figura 27.19 ilustra un campo producido por dos bobinas circulares separadas por cierta distancia. Las partículas cerca de la bobina experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región; las partículas con rapideces adecuadas describen repetidamente una espiral de uno a otro extremo de la región, y de regreso. Como las partículas cargadas pueden ser atrapadas en ese campo magnético, este recibe el nombre de *botella magnética*. Esta técnica se usa para confinar plasmas muy



27.19 Botella magnética. Las partículas cerca de cualquier extremo de la región experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región. Ésta es una forma de contener un gas ionizado con temperatura del orden de 10^6 K, que vaporizaría cualquier material para contenedores.

a)



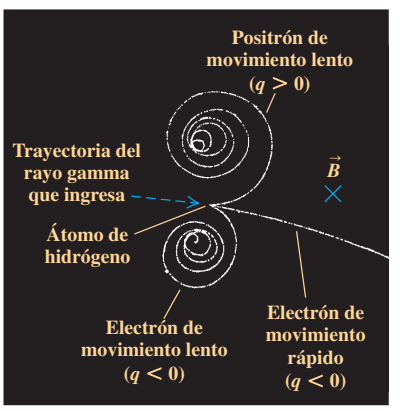
b)

27.20 a) Cinturones de radiación Van Allen alrededor de la Tierra. Cerca de los polos, partículas cargadas de estos cinturones ingresan a la atmósfera y producen auroras boreales ("luces del norte") y auroras australes ("luces del sur"). b) Fotografía de la aurora boreal.

calientes con temperaturas del orden de 10^6 K. En forma similar, el campo magnético no uniforme de la Tierra atrapa partículas cargadas provenientes del Sol, en regiones con forma de dona que rodean nuestro planeta, como se ilustra en la figura 27.20. Estas regiones se llaman *cinturones de radiación Van Allen* y fueron descubiertas en 1958 con datos obtenidos por instrumentos a bordo del satélite Explorer I.

Las fuerzas magnéticas sobre partículas cargadas juegan un papel importante en el estudio de las partículas elementales. La figura 27.21 muestra una cámara llena de hidrógeno líquido y con un campo magnético dirigido hacia el plano de la fotografía. Un rayo gamma de alta energía desprende un electrón de un átomo de hidrógeno y lo lanza con gran rapidez y crea un rastro visible en el hidrógeno líquido. El rastro muestra al electrón que se curva hacia abajo debido a la fuerza magnética. La energía de la colisión también produce otro electrón y un *positrón* (electrón con carga positiva). Debido a sus cargas opuestas, las trayectorias del electrón y el positrón se curvan en direcciones opuestas. A medida que estas partículas se abren paso a través del hidrógeno líquido, chocan contra otras partículas cargadas, con lo que pierden energía y rapidez. Como resultado, disminuye el radio de curvatura, como lo sugiere la ecuación (27.11). (La rapidez del electrón es comparable a la rapidez de la luz, por lo que la ecuación (27.11) no se aplica directamente aquí.) Experimentos similares permiten a los físicos determinar la masa y la carga de partículas recién descubiertas.

27.21 Esta imagen de cámara de burbujas muestra el resultado de la colisión de un rayo gamma de alta energía (que no deja rastro) contra un electrón en un átomo de hidrógeno. El electrón sale despedido hacia la derecha a alta rapidez. Algo de la energía de la colisión se transforma en un segundo electrón y un positrón (electrón con carga positiva). Un campo magnético se dirige hacia el plano de la imagen, que hace que las partículas positivas y negativas se curven en direcciones diferentes.



Estrategia para resolver problemas 27.2 Movimiento en campos magnéticos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Al analizar el movimiento de una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos, se aplica la segunda ley de Newton del movimiento, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, con la fuerza neta dada por $\Sigma\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Es frecuente que se ignoren otras fuerzas, como la gravedad. Muchos de los problemas son similares a los problemas de trayectoria y movimiento circular de las secciones 3.3, 3.4 y 5.4; sería buena idea repasar esas secciones.

PLANTEAR *el problema* usando los pasos siguientes:

1. Determine la(s) incógnita(s).
2. Con frecuencia, el uso de componentes es el enfoque más eficiente. Elija un sistema de coordenadas y después exprese todas las cantidades vectoriales (incluso $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$ y $\vec{a}$) en términos de sus componentes en este sistema.

continúa

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Si la partícula se mueve de manera perpendicular a un campo magnético uniforme, la trayectoria es un círculo con radio y rapidez angular dados por las ecuaciones (27.11) y (27.12), respectivamente.
2. Si su cálculo implica una trayectoria más compleja, use la ecuación $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ en forma de componentes: $\sum F_x = ma_x$, y así sucesivamente. Este enfoque es particularmente útil cuando están presentes campos tanto eléctricos como magnéticos.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe si sus resultados son razonables.

Ejemplo 27.3 Movimiento de electrones en un horno de microondas

El magnetrón de un horno de microondas emite ondas electromagnéticas con frecuencia $f = 2450$ MHz. ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere para que los electrones se muevan en trayectorias circulares con esta frecuencia?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema se refiere al movimiento circular según se ilustra en la figura 27.17a. Nuestra incógnita es la magnitud del campo B.

PLANTEAR: Utilice la ecuación (27.12) para relacionar la rapidez angular en movimiento circular con la masa y la carga de la partícula, y la intensidad del campo magnético B.

EJECUTAR: La rapidez angular que corresponde a la frecuencia f es $\omega = 2\pi f = (2\pi)(2450 \times 10^6\ \text{s}^{-1}) = 1.54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}$. De la ecuación (27.12),

$$B = \frac{m\omega}{|q|} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1})}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 0.0877\ \text{T}$$

EVALUAR: Ésta es una intensidad moderada de campo que un imán permanente genera con facilidad. A propósito, las ondas electromagnéticas de 2450 MHz son absorbidas fuertemente por las moléculas de agua, por lo que son útiles para calentar y cocinar alimentos.

Ejemplo 27.4 Movimiento helicoidal de partículas

En una situación como la que se ilustra en la figura 27.18, la partícula cargada es un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) y el campo magnético uniforme está dirigido a lo largo del eje x con magnitud de 0.500 T. Solo la fuerza magnética actúa sobre el protón. En $t = 0$, el protón tiene componentes de velocidad $v_x = 1.50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ y $v_z = 2.00 \times 10^5$ m/s. *a*) En $t = 0$, calcule la fuerza sobre el protón y su aceleración. *b*) Encuentre el radio de la trayectoria helicoidal, la rapidez angular del protón y el *avance* de la hélice (distancia recorrida a lo largo del eje de la hélice en cada revolución).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza está dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, y la aceleración la proporciona la segunda ley de Newton. La fuerza es perpendicular a la velocidad, por lo que la rapidez del protón no cambia. Entonces, el radio de la trayectoria helicoidal se obtiene de la ecuación (27.11) para el movimiento circular; no obstante, remplazando v por la componente de la velocidad perpendicular a $\vec{B}$. La velocidad angular está dada por la ecuación (27.12).

PLANTEAR: Se usa el sistema de coordenadas que se observa en la figura 27.18. Dada la rapidez angular, se determina el tiempo requerido para dar una revolución; dada la velocidad paralela al campo magnético, se determina la distancia recorrida a lo largo de la hélice en ese tiempo.

EJECUTAR: *a*) Como $v_y = 0$, el vector de velocidad es $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}$. Con la ecuación (27.2) y recordando que $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \mathbf{0}$ y $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$,

$$\begin{aligned}\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} &= q(v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}) \times B\hat{\imath} = qv_zB\hat{\jmath} \\ &= (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})(0.500\ \text{T})\hat{\jmath} \\ &= (1.60 \times 10^{-14}\ \text{N})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

(Para comprobar la consistencia de las unidades, de la sección 27.2 recuerde que $1\ \text{T} = 1\ \text{N/A} \cdot \text{m} = 1\ \text{N} \cdot \text{s/C} \cdot \text{m}$.) Ésta parece una fuerza muy débil, pero la aceleración resultante es enorme debido a que la masa del protón es muy pequeña:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1.60 \times 10^{-14}\ \text{N}}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}\hat{\jmath} = (9.58 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$

b) En $t = 0$ la componente de la velocidad perpendicular a $\vec{B}$ es v_z, así que

$$R = \frac{mv_z}{|q|B} = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.500\ \text{T})} = 4.18 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4.18\ \text{mm}$$

De la ecuación (27.12), la rapidez angular es

$$\omega = \frac{|q|B}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.500\ \text{T})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 4.79 \times 10^7\ \text{rad/s}$$

El tiempo requerido para una revolución (el periodo) es $T = 2\pi/\omega = 2\pi/(4.79 \times 10^7\ \text{s}^{-1}) = 1.31 \times 10^{-7}$ s. El avance es la distancia recorrida a lo largo del eje x durante este tiempo, es decir,

$$\begin{aligned}v_xT &= (1.50 \times 10^5\ \text{m/s})(1.31 \times 10^{-7}\ \text{s}) \\ &= 0.0197\ \text{m} = 19.7\ \text{mm}\end{aligned}$$

EVALUAR: El avance de la hélice es casi cinco veces mayor que el radio. Esta trayectoria helicoidal está mucho más "estirada" que la que se ilustra en la figura 27.18.

Evalúe su comprensión de la sección 27.4 *a*) Si se duplicara la rapidez de la partícula cargada de la figura 27.17a mientras el campo magnético (así como la carga y la masa) se mantiene(n) igual(es), ¿cómo se afectaría el radio de la trayectoria? i) El radio permanecería sin cambio; ii) el radio se duplicaría; iii) el radio se cuadruplicaría; iv) el radio disminuiría a la mitad; v) el radio se reduciría a la cuarta parte. *b*) ¿Cómo afectaría esto el tiempo requerido para que se completara una órbita circular? i) El tiempo no cambiaría; ii) el tiempo se duplicaría; iii) el tiempo se cuadruplicaría; iv) el tiempo se reduciría a la mitad; v) el tiempo disminuiría a la cuarta parte.

27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas

En esta sección se describen varias aplicaciones de los principios presentados en el capítulo. Estúdielas con cuidado, y observe las aplicaciones que se describen en la Estrategia para resolver problemas 27.2 (sección 27.4).

Selector de velocidad

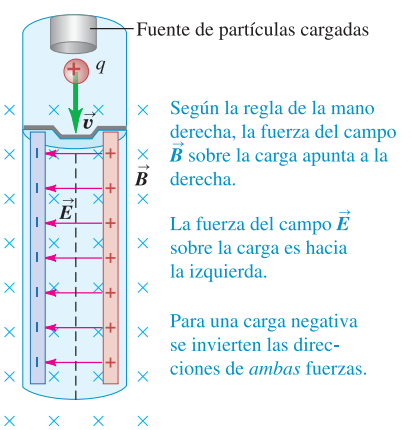
En un haz de partículas cargadas producidas por un cátodo caliente o cierto material radiactivo, no todas las partículas se mueven con la misma rapidez. Sin embargo, muchas aplicaciones requieren un haz en el cual la velocidad de todas las partículas sea la misma. En un haz es posible seleccionar partículas que tengan una velocidad específica usando un arreglo de campos eléctricos y magnéticos llamado *selector de velocidad*. En la figura 27.22a, una partícula cargada con masa m, carga q y rapidez v, ingresa a una región del espacio donde los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y con respecto a la velocidad de la partícula. El campo eléctrico $\vec{E}$ es hacia la izquierda, y el campo magnético $\vec{B}$ está en el plano de la figura. Si q es positiva, la fuerza eléctrica es a la izquierda con magnitud qE, en tanto que la fuerza magnética es a la derecha con magnitud qvB. Para magnitudes de campo dadas, E y B, para un valor particular de v, las fuerzas eléctricas y magnéticas serán iguales en magnitud; entonces, la fuerza total es igual a cero y la partícula viaja en línea recta con velocidad constante. Para una fuerza total de cero, $\sum F_y = 0$, se necesita que $-qE + qvB = 0$; al despejar la velocidad v, para la que no hay desviación, se tiene que

$$v = \frac{E}{B} \tag{27.13}$$

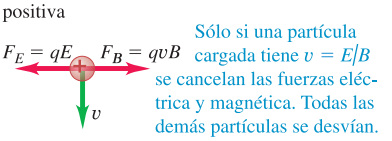
Solo las partículas con rapidez igual a E/B pasan sin ser desviadas por los campos (figura 27.22b). Al ajustar E y B de manera adecuada, es posible seleccionar partículas que tengan una rapidez específica para usarlas en otros experimentos. Como q se elimina en la ecuación (27.13), un selector de velocidad para partículas con carga positiva también funciona para electrones u otras partículas cargadas negativamente.

27.22 a) Un selector de velocidades para partículas cargadas utiliza campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ perpendiculares. Tan sólo partículas cargadas con $v = E/B$ lo cruzan sin sufrir desviación. b) Las fuerzas eléctrica y magnética sobre una carga positiva. Las fuerzas se invierten si la carga es negativa.

a) Diagrama esquemático del selector de velocidad



b) Diagrama de cuerpo libre para una partícula positiva



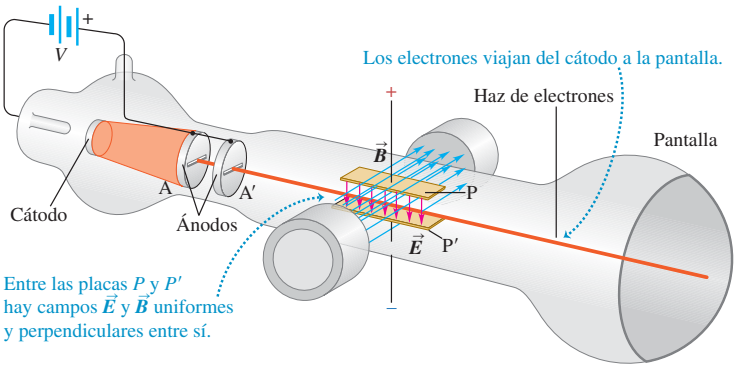
Activ Online Physics
13.8 Selector de velocidad

Experimento de e/m de Thomson

Al finalizar el siglo XIX se realizó uno de los experimentos cruciales de la física: J. J. Thomson (1856-1940) usó la idea que se acaba de describir para medir la razón que hay entre la carga y la masa del electrón. Para este experimento, efectuado en 1897 en el laboratorio Cavendish, en Cambridge, Inglaterra, Thomson utilizó el aparato que se ilustra en la figura 27.23. En un contenedor de vidrio al alto vacío se aceleraron electrones provenientes del cátodo caliente, para formar un haz mediante una diferencia de potencial V entre los dos ánodos A y A′. La rapidez v de los electrones estaba determinada por el potencial de aceleración V. La energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ es igual a la pérdida de energía potencial eléctrica eV, donde e es la magnitud de la carga del electrón:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \qquad \text{o bien,} \qquad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \tag{27.14}$$

27.23 Aparato de Thomson para medir la razón e/m del electrón.



Los electrones pasan entre las placas P y P′ y chocan contra la pantalla al final del tubo, que está recubierto de un material que emite fluorescencia (brilla) en el lugar del impacto. Cuando se satisface la ecuación (27.13), los electrones viajan en línea recta entre las placas; al combinar esto con la ecuación (27.14),

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} \tag{27.15}$$

Todas las cantidades en el lado derecho se pueden medir, así que se determina la razón e/m de la carga a la masa. Con este método *no* es posible medir e ni m por separado, solo su proporción.

El aspecto más significativo de la mediciones de e/m de Thomson fue que descubrió un *valor único* para tal cantidad, el cual no dependía del material del cátodo, del gas residual en el tubo ni de algo más en el experimento. Esta independencia demostró que las partículas en el haz, que ahora llamamos electrones, son un constituyente común de toda la materia. Así, a Thomson se le da el crédito por descubrir la primera partícula subatómica: el electrón. También descubrió que la *rapidez* de los electrones en el haz era cerca de un décimo de la rapidez de la luz, mucho mayor que cualquier otra rapidez que se hubiera medido antes para una partícula material.

El valor más preciso de e/m disponible hasta el momento de escribir este libro es

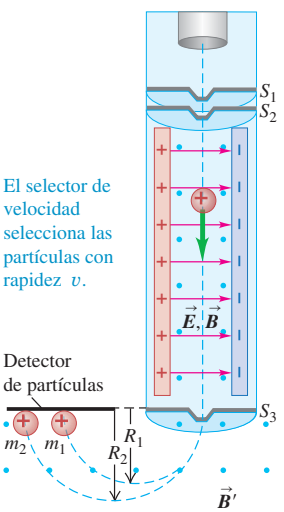
$$e/m = 1.75882012(15) \times 10^{11}\ \text{C/kg}$$

En esta expresión, el (15) indica la incertidumbre probable en los dos últimos dígitos, 12.

Quince años después de los experimentos de Thomson, el físico estadounidense Robert Millikan tuvo éxito en medir con precisión la carga del electrón (véase el problema de desafío 23.91). Este valor, junto con el valor de e/m nos permite determinar la *masa* del electrón. El valor más preciso disponible en la actualidad es

$$m = 9.1093826(16) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

27.24 El espectrómetro de masas de Bainbridge utiliza un selector de velocidad para generar partículas con rapidez uniforme v. En la región del campo magnético B', las partículas con mayor masa ($m_2 > m_1$) viajan en trayectorias con radio más grande ($R_2 > R_1$).



El campo magnético separa las partículas por masa; cuanto más grande sea la masa de una partícula, mayor será el radio de su trayectoria.

Espectrómetros de masa

Técnicas similares a las utilizadas por Thomson en su experimento para determinar e/m sirven para medir las masas de iones y así conocer masas atómicas y moleculares. En 1919 Francis Aston (1877-1945), un discípulo de Thomson, construyó la primera de una familia de instrumentos llamada **espectrómetros de masas.** En la figura 27.24 se ilustra una variante construida por Bainbridge. Los iones positivos forman una fuente que pasa a través de las ranuras S_1 y S_2 para formar un haz estrecho. Después, los iones pasan a través de un selector de velocidad con campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ cruzados, como ya se describió, para bloquear todos los iones, excepto aquellos con rapidez v igual a E/B. Por último, los iones pasan hacia una región con un campo magnético $\vec{B}'$ perpendicular a la figura, donde se mueven en arcos circulares con radio R determinado por la ecuación (27.11): $R = mv/qB'$. Los iones con masas dife-

rentes golpean al detector (que en el diseño de Bainbridge es una placa fotográfica) en diferentes puntos, y se miden los valores de R. Se supone que cada ion perdió un electrón, por lo que la carga neta de cada ion es simplemente $+e$. Con todos los parámetros conocidos en esta ecuación, excepto m, se calcula la masa m del ion.

Uno de los primeros resultados de este trabajo fue el descubrimiento de que el neón tiene dos especies de átomos, con masas atómicas de 20 y 22 g/mol. Ahora llamamos a estas especies **isótopos** del elemento. Experimentos posteriores han demostrado que muchos elementos tienen varios isótopos, es decir, átomos que son idénticos en cuanto a su comportamiento químico, pero diferentes en su masa debido a que tienen distinto número de neutrones en su núcleo. Ésta es tan sólo una de las múltiples aplicaciones de los espectrómetros de masa en química y física.

13.7 Espectrómetro de masa

Ejemplo 27.5 Un experimento de e/m

El lector intenta reproducir el experimento de Thomson para obtener e/m con un potencial de aceleración de 150 V y un campo eléctrico deflector con magnitud de 6.0×10^6 N/C. *a*) ¿A qué fracción de la rapidez de la luz se moverán los electrones? *b*) ¿Qué magnitud de campo magnético necesitará usted? *c*) Con este campo magnético, ¿qué pasaría con el haz de electrones si se incrementara el potencial de aceleración más allá de 150 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ésta es la misma situación que se ilustró en la figura 27.23.

PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (27.14) para determinar la rapidez de los electrones y la ecuación (27.13) para determinar el campo magnético que se requiere.

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (27.14), la velocidad de los electrones v se relaciona con el potencial de aceleración por medio de:

$$v = \sqrt{2(e/m)V} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11}\ \text{C/kg})(150\ \text{V})}$$
$$= 7.27 \times 10^6\ \text{m/s}$$
$$\frac{v}{c} = \frac{7.27 \times 10^6\ \text{m/s}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}} = 0.024$$

Los electrones se desplazan a 2.4% de la rapidez de la luz.

b) De la ecuación (27.13),

$$B = \frac{E}{v} = \frac{6.00 \times 10^6\ \text{N/C}}{7.27 \times 10^6\ \text{m/s}} = 0.83\ \text{T}$$

c) El incremento del potencial de aceleración V aumenta la rapidez de los electrones v. En la figura 27.23 esto no cambia la fuerza eléctrica dirigida hacia arriba eE, pero incrementa la fuerza magnética hacia abajo, evB. Por lo tanto, el haz de electrones se doblará *hacia abajo* y golpeará el extremo del tubo por debajo de la posición sin desviación.

EVALUAR: El campo magnético requerido es relativamente grande. Si el campo magnético máximo disponible B es menor que 0.83 T, la intensidad del campo eléctrico E tendría que reducirse para mantener la razón deseada E/B en la ecuación (27.15).

Ejemplo 27.6 Localización de las fugas en un sistema de vacío

Casi no existe helio en el aire ordinario, de manera que el helio que se rocíe cerca de una fuga en un sistema de vacío se detectará rápido en la salida de una bomba de vacío conectada a dicho sistema. Usted está diseñando un detector de fugas que usa un espectrómetro de masas para detectar iones He^+ (carga $+e = +1.60 \times 10^{-19}$ C, masa de 6.65×10^{-27} kg). Los iones emergen del selector de velocidad con una rapidez de 1.00×10^5 m/s. Un campo magnético B' los curva en una trayectoria semicircular y son detectados a una distancia de 10.16 cm de la ranura S_3 en la figura 27.24. Calcule la magnitud del campo magnético B'.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El movimiento del ion después de que pasa por la ranura S_3 en la figura 27.24 ocurre simplemente en una trayectoria circular, como se describió en la sección 27.4 (véase la figura 27.17).

PLANTEAR: Utilice la ecuación (27.11) para relacionar la intensidad del campo magnético B' (la incógnita) con el radio de curvatura de la trayectoria y con la masa, la carga y la rapidez del ion.

EJECUTAR: La distancia dada es el *diámetro* de la trayectoria semicircular que se ilustra en la figura 27.24, por lo que el radio es $R = \frac{1}{2}(10.16 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 5.08 \times 10^{-2}$ m. De la ecuación (27.11), $R = mv/qB'$, se obtiene

$$B' = \frac{mv}{qR} = \frac{(6.65 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.00 \times 10^5\ \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5.08 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 0.0817\ \text{T}$$

EVALUAR: Los detectores de fugas con base en helio son equipos reales que se usan mucho en el diagnóstico de problemas con sistemas de alto vacío. Nuestro resultado muestra que tan sólo se requiere un campo magnético pequeño, lo cual hace posible la construcción de detectores de fuga relativamente compactos.

Evalúe su comprensión de la sección 27.5 En el ejemplo 27.6, los iones He^+ con carga $+e$ se mueven en línea recta a 1.00×10^5 m/s a través de un selector de velocidad. Suponga que los iones He^+ se remplazan con iones He^{2+}, en los que ambos electrones se han eliminado del átomo de helio y la carga del ion es $+2e$. ¿A qué rapidez deben viajar los iones He^{2+} a través del mismo selector de velocidad para que se muevan en línea recta? i) aproximadamente de 4.00×10^5 m/s; ii) 2.00×10^5 m/s aproximados; iii) 1.00×10^5 m/s; iv) aproximadamente de 0.50×10^5 m/s; v) 0.25×10^5 m/s aproximados.

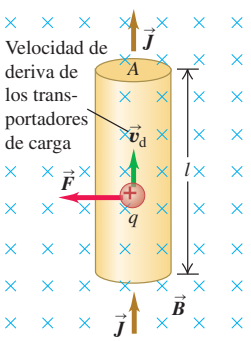
27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente

Activ ONLINE Physics
13.5 Fuerza magnética sobre un alambre

¿Qué es lo que hace funcionar un motor eléctrico? Las fuerzas que hacen que gire son las que ejerce un campo magnético sobre un conductor que lleva corriente. Las fuerzas magnéticas sobre las cargas en movimiento en el interior del conductor se transmiten al material del conductor, el cual en conjunto experimenta una fuerza distribuida en toda su longitud. El galvanómetro de bobina móvil que se describió en la sección 26.3 también emplea fuerzas magnéticas sobre conductores.

Se puede calcular la fuerza sobre un conductor que transporta corriente empezando con la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una sola carga en movimiento. La figura 27.25 muestra un segmento rectilíneo de un alambre conductor, con longitud l y área de sección transversal A; la corriente va de abajo hacia arriba. El alambre está en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano del diagrama y dirigido *hacia* el plano. En primer lugar, supondremos que las cargas móviles son positivas. Después, veremos lo que sucede cuando son negativas.

27.25 Fuerzas sobre una carga móvil positiva en un conductor que transporta corriente.



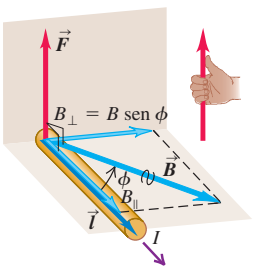
La velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es hacia arriba, perpendicular a $\vec{B}$. La fuerza media en cada carga es $\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$, dirigida a la izquierda, como se indica en la figura; como $\vec{v}_d$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud de la fuerza es $F = qv_dB$.

Es posible deducir una expresión para la fuerza *total* en todas las cargas móviles en una longitud l del conductor con área de sección transversal A, con el mismo lenguaje empleado en las ecuaciones (25.2) y (25.3) de la sección 25.1. El número de cargas por unidad de volumen es n; un segmento de conductor con longitud l tiene un volumen Al y contiene un número de cargas igual a nAl. La fuerza total $\vec{F}$ sobre *todas* las cargas en movimiento en este segmento tiene una magnitud

$$F = (nAl)(qv_dB) = (nqv_dA)(lB) \tag{27.16}$$

27.26 Segmento recto de alambre con longitud $\vec{l}$ que lleva una corriente I en la dirección de $\vec{l}$. La fuerza magnética en este segmento es perpendicular tanto a $\vec{l}$ como al campo magnético $\vec{B}$.

Fuerza $\vec{F}$ sobre un alambre recto que lleva corriente positiva y está orientado a un ángulo ϕ con respecto a un campo magnético $\vec{B}$:
- La magnitud es $F = IlB_\perp = IlB \operatorname{sen}\phi$.
- La dirección de $\vec{F}$ está dada por la regla de la mano derecha.



De la ecuación (25.3), la densidad de corriente es $J = nqv_d$. El producto JA es la corriente total I, por lo que rescribimos la ecuación (27.16) como:

$$F = IlB \tag{27.17}$$

Si el campo $\vec{B}$ no es perpendicular al alambre sino que forma un ángulo ϕ con él, la situación se maneja como se hizo en la sección 27.2 para una sola carga. Sólo la componente de $\vec{B}$ perpendicular al alambre (y a las velocidades de deriva de las cargas) ejerce una fuerza; tal componente es $B_\perp = B\operatorname{sen}\phi$. Entonces, la fuerza magnética sobre el segmento de alambre es

$$F = IlB_\perp = IlB\operatorname{sen}\phi \tag{27.18}$$

La fuerza siempre es perpendicular tanto al conductor como al campo, con la dirección determinada por la misma regla de la mano derecha que se usó para una carga móvil positiva (figura 27.26). Por lo tanto, esta fuerza se expresa como producto vectorial, al igual que la fuerza sobre una sola carga en movimiento. El segmento de

alambre se representa con un vector $\vec{l}$ a lo largo del alambre y en dirección de la corriente; entonces, la fuerza $\vec{F}$ sobre este segmento es

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{(fuerza magnética sobre un segmento recto de alambre)} \qquad (27.19)$$

La figura 27.27 ilustra las direcciones de $\vec{B}$, $\vec{l}$ y $\vec{F}$ para varios casos.

Si el conductor no fuera recto, se dividiría en segmentos infinitesimales $d\vec{l}$. La fuerza $d\vec{F}$ en cada segmento es

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{(fuerza magnética sobre una sección infinitesimal de alambre)} \qquad (27.20)$$

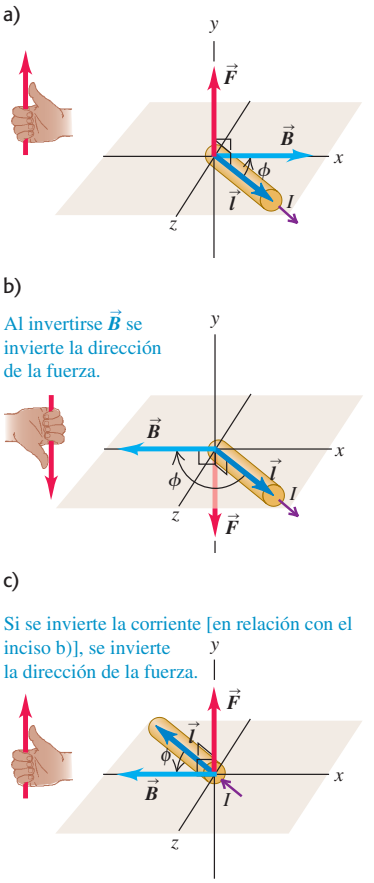
Esta expresión se integra a lo largo del alambre para obtener la fuerza total sobre un conductor de cualquier forma. La integral es una *integral de línea*, la misma operación matemática que se empleó para definir el trabajo (sección 6.3) y potencial eléctrico (sección 23.2).

CUIDADO **La corriente no es un vector** De la sección 25.1 recuerde que la corriente I no es un vector. La dirección del flujo de la corriente está descrito por $d\vec{l}$, no por I. Si el conductor es curvo, la corriente I es la misma en todos los puntos de su longitud, y $d\vec{l}$ cambia de dirección de manera que siempre es tangente al conductor.

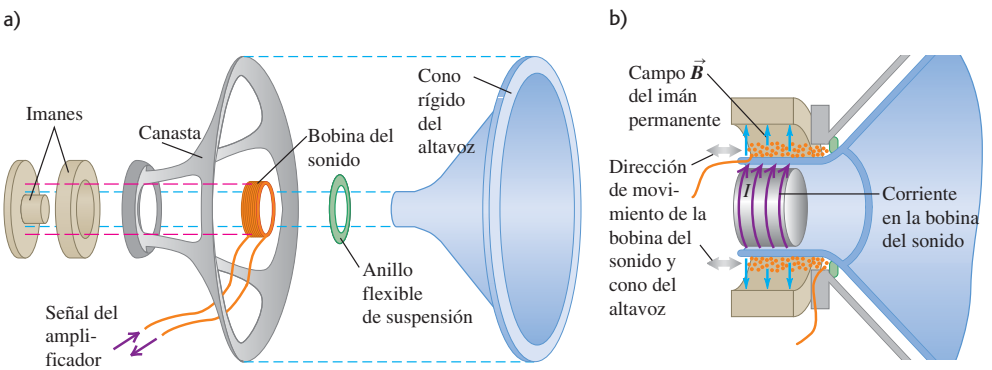
Por último, ¿qué sucede cuando las cargas móviles son negativas, como los electrones en un metal? Entonces, en la figura 27.25 una corriente ascendente corresponde a una velocidad de deriva descendente. Pero como q ahora es negativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ es la misma que antes. Así, las ecuaciones (27.17) a (27.20) son válidas *tanto* para cargas positivas *como* para negativas, e incluso cuando *los dos* signos de carga están presentes a la vez. Esto es lo que ocurre en ciertos materiales semiconductores y en soluciones iónicas.

Una aplicación común de las fuerzas magnéticas sobre un alambre que conduzca corriente es en los altavoces (bocinas) (figura 27.28). El campo magnético radial creado por el imán permanente ejerce una fuerza sobre la bobina del sonido, que es proporcional a la corriente en la bobina; la dirección de la fuerza es a la izquierda o la derecha, dependiendo de la dirección de la corriente. La señal del amplificador ocasiona que la corriente oscile en dirección y magnitud. La bobina y el cono del altavoz al que está sujeta responden con una oscilación, cuya amplitud es proporcional a la amplitud de la corriente en la bobina. Al girar la perilla del volumen el amplificador aumenta la amplitud de la corriente y, con ello, las amplitudes de la oscilación del cono y de la onda sonora producida por el cono móvil.

27.27 Vectores de campo magnético $\vec{B}$, longitud $\vec{l}$, y fuerza $\vec{F}$ para un alambre recto que transporta una corriente I.



27.28 a) Componentes de un altavoz. b) El imán permanente crea un campo magnético que ejerce fuerzas sobre la corriente en la bobina del sonido; para una corriente I en la dirección que se indica, la fuerza es hacia la derecha. Si la corriente eléctrica en la bobina del sonido oscila, el cono de altavoz unido a la bobina del sonido oscila con la misma frecuencia.



Ejemplo 27.7 Fuerza magnética sobre un conductor recto

Una varilla de cobre, recta y horizontal, transporta una corriente de 50.0 A de oeste a este, en una región entre los polos de un electroimán grande. En esta región hay un campo magnético horizontal dirigido hacia el noreste (es decir, a 45° al norte del este), con magnitud de 1.20 T. *a*) Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza sobre una sección de 1.00 m de longitud de la varilla. *b*) Si la varilla permanece horizontal, ¿cómo debería orientarse para maximizar la magnitud de la fuerza? En este caso, ¿cuál es la magnitud de la fuerza?

SOLUCIÓN

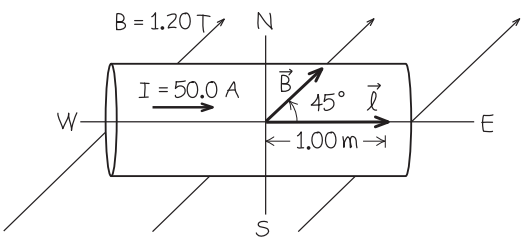
IDENTIFICAR: Éste es un segmento rectilíneo de alambre en un campo magnético uniforme, cuya situación es la misma que la de la figura 27.26. Nuestras incógnitas son la fuerza $\vec{F}$ sobre el segmento de varilla y el ángulo ϕ para el que es máxima la magnitud de la fuerza.

PLANTEAR: La figura 27.29 muestra la situación. Con la ecuación (27.18) encontramos la magnitud de la fuerza magnética, y la dirección de ésta con la regla de la mano derecha. De manera alternativa, el vector de fuerza (magnitud y dirección) se puede determinar con la ecuación (27.19).

EJECUTAR: *a*) El ángulo ϕ entre las direcciones de la corriente y el campo es de 45°. De la ecuación (27.18) se obtiene

$$F = IlB\,\text{sen}\,\phi = (50.0\text{ A})(1.00\text{ m})(1.20\text{ T})(\text{sen}\,45°) = 42.4\text{ N}$$

27.29 El diagrama de la varilla de cobre, vista desde arriba.



La *dirección* de la fuerza es perpendicular al plano de la corriente y el campo, los cuales están en el plano horizontal. Así, la fuerza debe ser vertical; la regla de la mano derecha indica que está dirigida verticalmente *hacia arriba* (sale del plano de la figura).

Alternativamente, podemos usar un sistema de coordenadas con el eje x dirigido hacia el este, el y hacia el norte, y el z hacia arriba. Entonces,

$$\vec{l} = (1.00\text{ m})\hat{\imath} \qquad \vec{B} = (1.20\text{ T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\text{sen}\,45°)\hat{\jmath}]$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= (50\text{ A})(1.00\text{ m})\hat{\imath} \times (1.20\text{ T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\text{sen}\,45°)\hat{\jmath}]$$

$$= (42.4\text{ N})\hat{k}$$

Si el conductor se encuentra en equilibrio mecánico bajo la acción de su peso y de la fuerza magnética hacia arriba, su peso es de 42.4 N y su masa es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{42.4\text{ N}}{9.8\text{ m/s}^2} = 4.33\text{ kg}$$

b) La magnitud de la fuerza es máxima si $\phi = 90°$, de modo que $\vec{l}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares. Para que la fuerza siga dirigida hacia arriba, la varilla se gira en el sentido horario, a 45° de la orientación que tiene en la figura 27.29, así que la corriente viaja en dirección sureste. Entonces, la fuerza magnética tiene una magnitud de área perpendicular.

$$F = IlB = (50.0\text{ A})(1.00\text{ m})(1.20\text{ T}) = 60.0\text{ N}$$

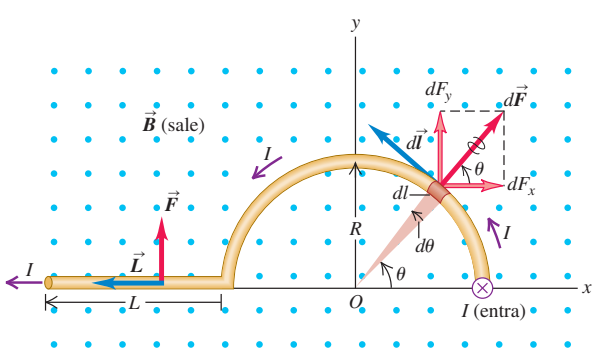
y la masa de una varilla que puede sostenerse contra la gravedad es $m = w/g = (60.0\text{ N})/(9.8\text{ m/s}^2) = 6.12\text{ kg}$.

EVALUAR: Éste es un ejemplo sencillo de la levitación magnética, que también se utiliza en trenes especiales de alta rapidez. Se emplea tecnología electromagnética convencional para mantener suspendido el tren sobre las vías; la eliminación de la fricción por rodamiento permite que el tren alcance rapideces superiores a 400 km/h (250 mi/h).

Ejemplo 27.8 Fuerza magnética en un conductor curvo

En la figura 27.30, el campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y perpendicular al plano de la figura, apuntando hacia fuera. El conductor tiene un segmento rectilíneo con longitud L perpendicular al plano de la figura a la derecha, con la corriente en sentido opuesto a $\vec{B}$; seguido de un semicírculo con radio R y, por último, otro segmento rectilíneo con longitud L paralelo al eje x (como se indica). El conductor transporta una corriente I. Obtenga la fuerza magnética total sobre estos tres segmentos de alambre.

27.30 ¿Cuál es la fuerza magnética total sobre el conductor?



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Dos de los tres segmentos del alambre son rectilíneos y el campo magnético es uniforme, por lo que la fuerza sobre éstos se encuentra usando las ideas de esta sección. Podemos analizar el segmento curvilíneo dividiéndolo, primero, en un gran número de segmentos rectilíneos infinitesimales. Calculamos la fuerza sobre uno de dichos segmentos y luego integramos para obtener la fuerza sobre todo el segmento curvo.

PLANTEAR: Calculamos la fuerza sobre los segmentos rectilíneos mediante la ecuación (27.19), y la fuerza sobre un elemento infinitesimal del segmento curvo con la ecuación (27.20). La fuerza magnética total sobre los tres segmentos es la suma vectorial de las fuerzas sobre cada segmento individual.

EJECUTAR: Hagamos primero lo fácil (los segmentos rectilíneos). Sobre el segmento de la derecha perpendicular al plano de la figura *no* hay fuerza porque es antiparalelo a $\vec{B}$; $\vec{L} \times \vec{B} = \mathbf{0}$, o bien, $\phi = 180°$ y $\text{sen}\,\phi = 0$. Para el segmento recto de la izquierda, $\vec{L}$ apunta hacia la izquierda (en dirección de la corriente), perpendicular a $\vec{B}$. La fuerza

tiene una magnitud $F = ILB$, y su dirección es hacia arriba (dirección $+y$ en la figura).

La parte divertida es el semicírculo. La figura muestra un segmento $d\vec{l}$ con longitud $dl = R\,d\theta$, con ángulo θ. La dirección de $d\vec{l} \times \vec{B}$ es radialmente hacia fuera del centro; asegúrese de verificar esta dirección. Como $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud dF de la fuerza sobre el segmento $d\vec{l}$ es $dF = I\,dl\,B$, por lo que se tiene

$$dF = I(R\,d\theta)B$$

Las componentes de la fuerza $d\vec{F}$ sobre el segmento $d\vec{l}$ son

$$dF_x = IR\,d\theta\,B\cos\theta \qquad dF_y = IR\,d\theta\,B\,\text{sen}\,\theta$$

Estas expresiones se integran para determinar las componentes de la fuerza total, haciendo que θ varíe de 0 a π con la finalidad de incluir todo el semicírculo. Se obtiene lo siguiente:

$$F_x = IRB\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$$

$$F_y = IRB\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta = 2IRB$$

Por último, con la suma de las fuerzas en los segmentos rectos y semicirculares se encuentra la fuerza total:

$$F_x = 0 \qquad F_y = IB(L + 2R)$$

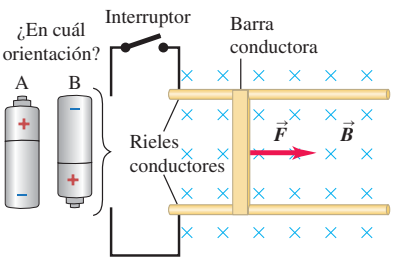
o bien,

$$\vec{F} = IB(L + 2R)\hat{j}$$

EVALUAR: Por simetría, habríamos predicho que la componente x de la fuerza sobre el semicírculo sería igual a cero; en la mitad derecha del semicírculo la componente x de la fuerza es positiva (hacia la derecha), mientras que en la mitad izquierda es negativa (a la izquierda). Se cancelan las contribuciones positivas y negativas.

Observe que la fuerza neta sobre los tres segmentos juntos es la misma fuerza que se ejercería si se remplazara el semicírculo con un segmento recto sobre el eje x. ¿Se da cuenta por qué?

Evalúe su comprensión de la sección 27.6 La figura de la derecha muestra la vista superior de dos rieles conductores sobre los cuales se desliza una barra conductora. Un campo magnético uniforme está dirigido en forma perpendicular al plano de la figura, como se ilustra. Va a conectarse una batería a los dos rieles, de modo que cuando se cierre el interruptor, fluirá corriente a través de la barra y ocasionará que una fuerza magnética empuje la barra hacia la derecha. ¿En cuál orientación, A o B, debería colocarse la batería en el circuito?



27.7 Fuerza y par de torsión en una espira de corriente

Los conductores que transportan corriente por lo general forman espiras cerradas, así que vale la pena usar los resultados de la sección 27.6 para encontrar la fuerza y el par de torsión magnéticos *totales* sobre un conductor en forma de espira. Son muchos los equipos prácticos que usan la fuerza o el par de torsión magnético sobre una espira conductora, inclusive altavoces (véase la figura 27.28) y galvanómetros (sección 26.3). De ahí que los resultados de esta sección tengan mucha importancia práctica y también ayuden a entender el comportamiento de los imanes de barra descritos en la sección 27.1.

Por ejemplo, analicemos una espira rectangular de corriente en un campo magnético uniforme. La espira se puede representar como una serie de segmentos rectilíneos. Veremos que la *fuerza* total sobre la espira es igual a cero, pero puede haber un *par de torsión* neto que actúe sobre la espira, con algunas propiedades interesantes.

13.6 Par de torsión magnético sobre una espira

La figura 27.31a muestra una espira rectangular de alambre cuyos lados tienen longitudes a y b. Una línea perpendicular al plano de la espira (esto es, una *normal* al plano) forma un ángulo ϕ con la dirección del campo magnético $\vec{B}$, y la espira transporta una corriente I. En el diagrama se omiten los alambres que llevan corriente hacia la espira y hacia afuera de ésta, así como la fuente de fem, para mantener sencillo el diagrama.

La fuerza $\vec{F}$ sobre el lado derecho de la espira (longitud a) va hacia la derecha, en la dirección $+x$, como se ilustra. Sobre este lado, $\vec{B}$ es perpendicular a la dirección de la corriente, y la fuerza sobre este lado tiene magnitud

$$F = IaB \tag{27.21}$$

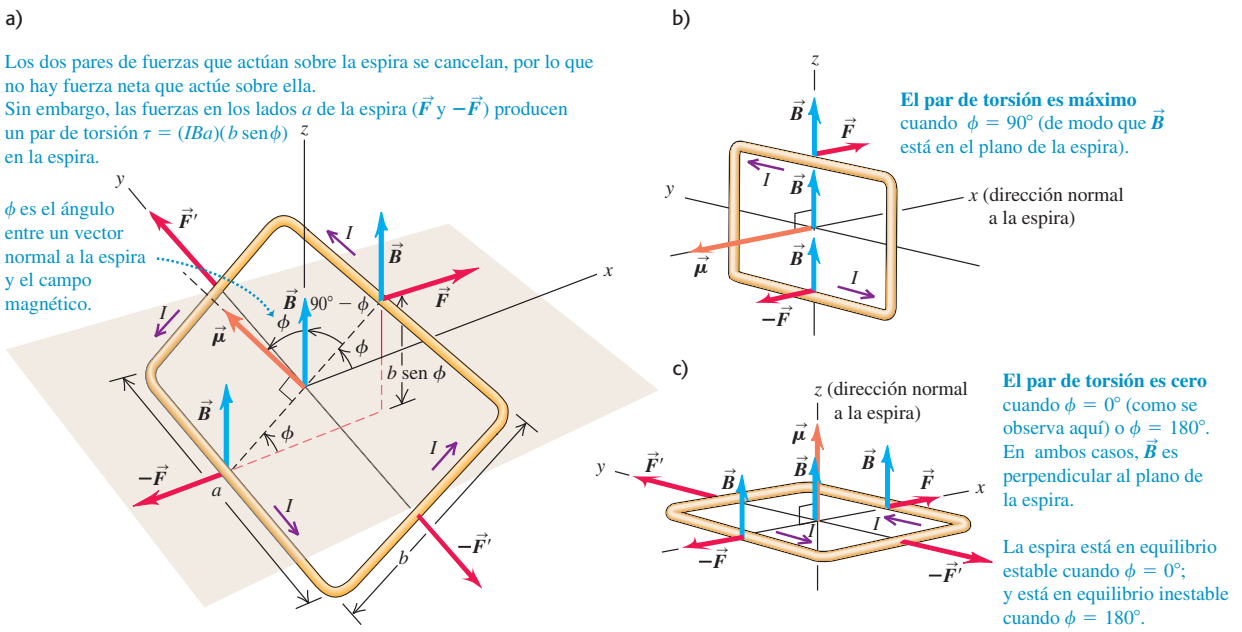
Sobre el lado opuesto de la espira actúa una fuerza $-\vec{F}$ con la misma magnitud pero dirección opuesta, como se observa en la figura.

Los lados con longitud de b forman un ángulo $(90° - \phi)$ con la dirección de $\vec{B}$. Las fuerzas sobre estos lados son los vectores $\vec{F}'$ y $-\vec{F}'$; su magnitud F' está dada por

$$F' = IbB\,\text{sen}(90° - \phi) = IbB\cos\phi$$

Las líneas de acción de ambas fuerzas están sobre el eje y.

27.31 Cálculo del par de torsión sobre una espira que conduce corriente en un campo magnético uniforme.



La fuerza *total* en la espira es igual a cero porque las fuerzas en lados opuestos se cancelan por pares.

La fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es igual a cero. Sin embargo, el par de torsión neto en general no es igual a cero.

(Tal vez encuentre que en este momento sería útil repasar el análisis de un par de torsión, en la sección 10.1.) En la figura 27.31a, las dos fuerzas $\vec{F}'$ y $-\vec{F}'$ están en la misma línea, por lo que originan un par de torsión neto de cero con respecto a cualquier punto. Las dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ quedan a lo largo de distintas líneas de acción, y cada una origina un par de torsión con respecto al eje y. Según la regla de la mano derecha para determinar la dirección de los pares de torsión, los pares de torsión vectoriales debidos a $\vec{F}$ y a $-\vec{F}$ están, ambos, en la dirección $+y$; de ahí que el par de torsión vectorial neto $\vec{\tau}$ también esté en la dirección $+y$. El brazo de momento para cada una de estas fuerzas (igual a la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de la fuerza) es $(b/2)$ sen ϕ, así que el par de torsión debido a cada fuerza tiene magnitud $F(b/2)$ sen ϕ. Si se utiliza la ecuación (27.21) para F, la magnitud del par de torsión neto es

$$\tau = 2F(b/2)\operatorname{sen}\phi = (IBa)(b\operatorname{sen}\phi) \qquad (27.22)$$

El par de torsión es máximo cuando $\phi = 90°$, $\vec{B}$ está en el plano de la espira y la normal a este plano es perpendicular a $\vec{B}$ (figura 27.31b). El par de torsión es igual a cero cuando ϕ es 0° o 180°; en tanto que la normal a la espira es paralela o antiparalela al campo (figura 27.31c). El valor $\phi = 0°$ es una posición de equilibrio estable porque ahí el par de torsión es cero, y cuando la espira se gira un poco de dicha posición, el par de torsión resultante tiende a girarlo de regreso hacia $\phi = 0°$. La posición $\phi = 180°$ es una posición de equilibrio *inestable*: si se aparta un poco de ella, la espira tiende a alejarse aún más allá de $\phi = 180°$. La figura 27.31 ilustra la rotación alrededor del eje y, pero como la fuerza neta sobre la espira es cero, la ecuación (27.22) para el par de torsión es válida para *cualquier* selección de ejes.

El área A de la espira es igual a ab, por lo que la ecuación (27.22) se puede rescribir como

$$\tau = IBA\operatorname{sen}\phi \quad \text{(magnitud del par de torsión en una espira de corriente)} \qquad (27.23)$$

El producto IA se denomina **momento dipolar magnético** o **momento magnético** de la espira, el cual se denota con el símbolo μ (letra griega mu):

$$\mu = IA \tag{27.24}$$

Es análogo al momento dipolar eléctrico que se estudió en la sección 21.7. En términos de μ, la magnitud del par de torsión sobre una espira de corriente es

$$\tau = \mu B \operatorname{sen}\phi \tag{27.25}$$

donde ϕ es el ángulo entre la normal a la espira (dirección del área vectorial $\vec{A}$) y $\vec{B}$. El par de torsión tiende a hacer girar la espira en la dirección en que *disminuye* ϕ, es decir, hacia su posición de equilibrio estable donde la espira queda en el plano xy perpendicular a la dirección del campo $\vec{B}$ (figura 27.31c). Una espira de corriente, o cualquier otro cuerpo que experimente un par de torsión magnético dado por la ecuación (27.25), también recibe el nombre de **dipolo magnético**.

Par de torsión magnético: Forma vectorial

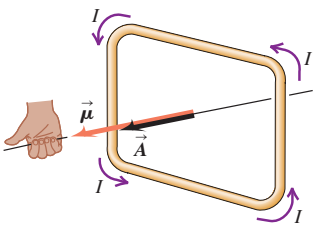
También podemos definir un momento magnético vectorial $\vec{\mu}$ con magnitud IA; éste se ilustra en la figura 27.31. La dirección de $\vec{\mu}$ se define como la perpendicular al plano de la espira, con sentido determinado por la regla de la mano derecha, como se observa en la figura 27.32. Enrosque los dedos de su mano derecha alrededor del perímetro de la espira en la dirección de la corriente. Después extienda su pulgar de modo que quede perpendicular al plano de la espira; su dirección está en la dirección de $\vec{\mu}$ (y la del área vectorial $\vec{A}$ de la espira). El par de torsión es máximo cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, y es igual a cero cuando son paralelos o antiparalelos. En la posición de equilibrio estable, $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

Por último, esta interacción puede expresarse en términos del vector del par de torsión $\vec{\tau}$, que usamos para las interacciones de dipolos *eléctricos* en la sección 21.7. De la ecuación (27.25), la magnitud de $\vec{\tau}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mu} \times \vec{B}$, y en relación con esto, la figura 27.31 muestra que las direcciones también son las mismas. Por lo tanto,

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \text{(par de torsión vectorial sobre una espira de corriente)} \tag{27.26}$$

Este resultado es una analogía directa del que se obtuvo en la sección 21.7 para el par de torsión ejercido por un campo *eléctrico* $\vec{E}$ sobre un dipolo *eléctrico* con momento dipolar $\vec{p}$: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$.

27.32 La regla de la mano derecha determina la dirección del momento magnético de una espira que transporta corriente. Ésta es también la dirección del vector de área $\vec{A}$; de la espira; $\vec{\mu} = I\vec{A}$ es una ecuación vectorial.



Energía potencial para un dipolo magnético

Cuando un dipolo magnético cambia de orientación en un campo magnético, éste realiza trabajo sobre aquél. En un desplazamiento angular infinitesimal $d\phi$ el trabajo dW está dado por $\tau d\phi$, y hay un cambio correspondiente en la energía potencial. Como lo sugiere el análisis anterior, la energía potencial es mínima cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos, y es máxima si son antiparalelos. Con la finalidad de encontrar una expresión para la energía potencial U en función de la orientación, utilizaremos la hermosa simetría que hay entre las interacciones dipolares eléctricas y magnéticas. El par de torsión sobre un dipolo *eléctrico* en un campo *eléctrico* es $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$; en la sección 21.7 vimos que la energía potencial correspondiente es $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. El par de torsión sobre un dipolo *magnético* en un campo *magnético* es $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, por lo que concluimos de inmediato que la energía potencial correspondiente es

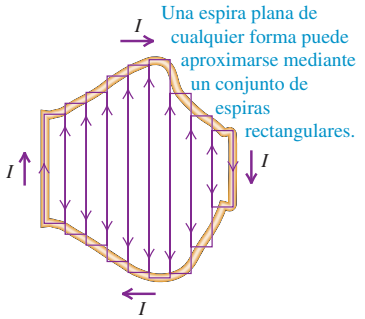
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\phi \quad \text{(energía potencial para un dipolo magnético)} \tag{27.27}$$

Con esta definición, U es igual a cero cuando el momento dipolar magnético es perpendicular al campo magnético.

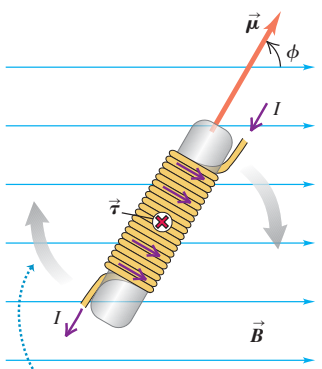
Par de torsión magnético: Espiras y bobinas

Aunque las ecuaciones (27.21) a (27.27) se obtuvieron para una espira de corriente rectangular, todas estas relaciones son válidas para una espira plana de cualquier forma. Cualquier espira plana se puede aproximar tanto como queramos mediante un número muy grande de espiras rectangulares, como se ilustra en la figura 27.33. Si todas estas

27.33 En el límite, el conjunto de rectángulos coincide exactamente con la espira plana irregular, conforme el número de rectángulos tiende a infinito y el ancho de cada rectángulo tiende a cero.



27.34 El par de torsión $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ sobre este solenoide en un campo magnético uniforme está dirigido directamente hacia la página. Un solenoide real tiene mucho más vueltas, estrechamente enrolladas.



El par de torsión tiende a hacer que el solenoide gire en sentido horario en el plano de la página, para alinear el momento magnético $\vec{\mu}$ con el campo $\vec{B}$.

espiras llevan corrientes iguales en el mismo sentido horario, entonces las fuerzas y los pares de torsión sobre los lados de dos espiras adyacentes entre sí se cancelan, y las únicas fuerzas y pares de torsión que no se cancelan se deben a corrientes en torno a la frontera. Así, todas las relaciones anteriores son válidas para un espira de corriente plana que tenga cualquier forma, con el momento magnético $\vec{\mu}$ dado por $\vec{\mu} = I\vec{A}$.

Toda esta formulación también se generaliza a una bobina que consista en N espiras planas cercanas entre sí; el efecto es simplemente multiplicar cada fuerza, el momento magnético, el par de torsión y la energía potencial por un factor de N.

Un arreglo que tiene particular interés es el **solenoide**, que es un devanado helicoidal de alambre similar a una bobina enrollada sobre un cilindro circular (figura 27.34). Si los devanados están muy próximos unos con otros, el solenoide se aproxima por cierto número de espiras circulares, que se encuentran en planos a ángulos rectos con respecto a su eje longitudinal. El par de torsión total sobre un solenoide en un campo magnético es simplemente la suma de los pares de torsión de las vueltas individuales. Para un solenoide con N vueltas en un campo uniforme B, el momento magnético es $\mu = NIA$, y

$$\tau = NIAB \operatorname{sen} \phi \tag{27.28}$$

donde ϕ es el ángulo entre el eje del solenoide y la dirección del campo. El vector de momento magnético $\vec{\mu}$ ocurre a lo largo del eje del solenoide. El par de torsión es máximo cuando dicho eje es perpendicular al campo magnético, y es igual a cero cuando son paralelos. El efecto de este par de torsión es que tiende a hacer girar el solenoide hacia una posición donde su eje es paralelo al campo. Los solenoides también son útiles como *fuentes* de campo magnético, como se veremos en el capítulo 28.

El galvanómetro de d'Arsonval, descrito en la sección 26.3, utiliza un par de torsión magnético sobre una bobina que conduce una corriente. Como se aprecia en la figura 26.14, el campo magnético no es uniforme sino *radial*, por lo que los empujes laterales sobre la bobina siempre son perpendiculares a su plano. Así, el ángulo ϕ en la ecuación (27.28) siempre es de 90°, y el par de torsión magnético siempre es directamente proporcional a la corriente, sin importar cuál sea la orientación de la bobina. Dos resortes generan un par de torsión de recuperación proporcional al desplazamiento angular de la bobina, que también sirven como conductores de corriente hacia ésta. Cuando se suministra corriente a la bobina, ésta gira junto con su aguja indicadora acoplada, hasta que el par de torsión de recuperación de las espirales compensa el par de torsión magnético. De este modo, la desviación de la aguja indicadora es proporcional a la corriente.

Una aplicación médica importante del par de torsión sobre un dipolo magnético son las *imágenes de resonancia magnética* (IRM). Se coloca a un paciente en un campo magnético de aproximadamente 1.5 T, lo cual es 10^4 veces más intenso que el campo de la Tierra. El núcleo de cada átomo de hidrógeno en el tejido que se desea observar tiene un momento dipolar magnético, que experimenta un par de torsión que lo alinea con el campo aplicado. Después se ilumina el tejido con ondas de radio de la frecuencia correcta para apenas sacar a estos momentos magnéticos de su alineación. El grado en que estas ondas de radio son absorbidas por el tejido es proporcional a la cantidad de hidrógeno presente. De ahí que un tejido suave rico en hidrógeno se vea muy distinto de un hueso con poco hidrógeno, lo cual hace que la IRM sea ideal para analizar detalles de tejidos suaves que no se verían en las imágenes de rayos x (consulte la imagen que abre este capítulo).

Ejemplo 27.9 Par de torsión magnético sobre una bobina circular

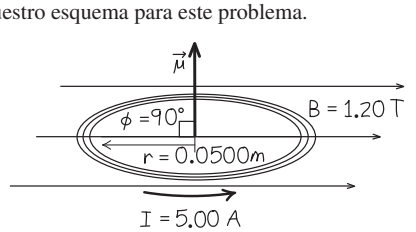
Una bobina circular de 0.0500 m de radio y 30 vueltas de alambre está en un plano horizontal. Conduce una corriente de 5.00 A en sentido antihorario vista desde arriba. La bobina está en un campo magnético uniforme dirigido a la derecha, con magnitud de 1.20 T. Encuentre las magnitudes del momento magnético y del par de torsión sobre la bobina.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la definición de momento magnético y la expresión para el par de torsión sobre un dipolo magnético en un campo magnético.

PLANTEAR: La figura 27.35 ilustra la situación. La magnitud μ del momento magnético de una sola vuelta de alambre está dada en térmi-

27.35 Nuestro esquema para este problema.



nos de la corriente y el área de la bobina por la ecuación (27.24). Para N vueltas, el momento magnético es N veces mayor. La magnitud τ del par de torsión se obtiene con la ecuación (27.25).

EJECUTAR: El área de la bobina es

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500\ \text{m})^2 = 7.85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

El momento magnético de cada vuelta de la bobina es

$$\mu = IA = (5.00\ \text{A})(7.85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2) = 3.93 \times 10^{-2}\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

y el momento magnético total de las 30 vueltas es

$$\mu_{\text{total}} = (30)(3.93 \times 10^{-2}\ \text{A} \cdot \text{m}^2) = 1.18\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

El ángulo ϕ entre la dirección de $\vec{B}$ y la dirección de $\vec{\mu}$ (que está a lo largo de la normal al plano de la bobina) es de 90°. De la ecuación (27.25),

$$\tau = \mu_{\text{total}} B \operatorname{sen}\phi = (1.18\ \text{A} \cdot \text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\operatorname{sen}90°)$$
$$= 1.41\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Alternativamente, según la ecuación (27.23) el par de torsión de cada vuelta de la bobina es

$$\tau = IBA \operatorname{sen}\phi = (5.00\ \text{A})(1.20\ \text{T})(7.85 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(\operatorname{sen}90°)$$
$$= 0.0471\ \text{N} \cdot \text{m}$$

y el par de torsión total sobre la bobina es

$$\tau = (30)(0.0471\ \text{N} \cdot \text{m}) = 1.41\ \text{N} \cdot \text{m}$$

EVALUAR: El par de torsión tiende a hacer girar el lado derecho de la bobina hacia abajo, y el lado izquierdo hacia arriba, a una posición donde la normal a su plano sea paralela a $\vec{B}$.

Ejemplo 27.10 Energía potencial para una bobina en un campo magnético

Si la bobina del ejemplo 27.9 gira desde su posición inicial hasta otra donde su momento magnético sea paralelo a $\vec{B}$, ¿cuál será el cambio de la energía potencial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La posición inicial se presenta en la figura 27.35. En la posición final, la bobina gira 90° en sentido horario, por lo que $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos ($\phi = 0$).

PLANTEAR: La energía potencial se calcula para cada orientación con la ecuación (27.27). Después se obtiene la diferencia entre el valor final y el valor inicial, para encontrar el cambio en la energía potencial.

EJECUTAR: De la ecuación (27.27), la energía potencial inicial U_1 es

$$U_1 = -\mu_{\text{total}} B \cos\phi_1 = -(1.18\ \text{A} \cdot \text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\cos 90°) = 0$$

y la energía potencial final U_2 es

$$U_2 = -\mu_{\text{total}} B \cos\phi_2 = -(1.18\ \text{A} \cdot \text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\cos 0°)$$
$$= -1.41\ \text{J}$$

El cambio en la energía potencial es $\Delta U = U_2 - U_1 = -1.41$ J.

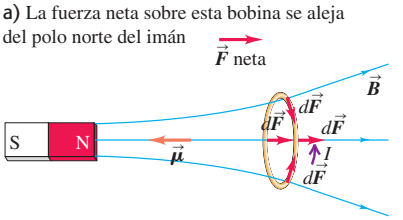
EVALUAR: La energía potencial disminuye porque la rotación ocurre en la dirección del par de torsión magnético.

Dipolo magnético en un campo magnético no uniforme

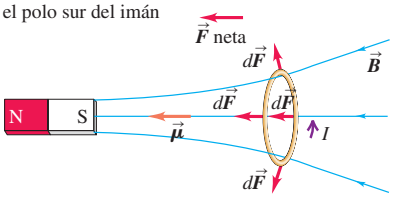
Hemos visto que una espira de corriente (es decir, un dipolo magnético) experimenta una fuerza neta de cero en un campo magnético uniforme. La figura 27.36 muestra dos espiras de corriente en el campo $\vec{B}$ *no uniforme* de un imán de barra; en ambos casos, la fuerza neta sobre la espira *no es* igual a cero. En la figura 27.36a el momento magnético $\vec{\mu}$ está en dirección opuesta al campo, y la fuerza $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ sobre un segmento de la espira tiene tanto una componente radial como una componente a la derecha. Cuando estas fuerzas se suman para obtener la fuerza neta $\vec{F}$ sobre la espira, las componentes radiales se cancelan, de modo que la fuerza neta es hacia la derecha, alejándose del imán. Observe que en este caso la fuerza va hacia la región donde las líneas de campo están muy separadas y la magnitud del campo B es menor. En la figura 27.36b, se invierte la polaridad del imán de barra, por lo que $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos; ahora la fuerza neta sobre la espira actúa hacia la izquierda, en dirección de la región de la mayor magnitud del campo, cerca del imán. Más adelante en esta sección usaremos estas observaciones para explicar por qué los imanes de barra atraen objetos de hierro no magnetizados.

27.36 Fuerzas sobre espiras de corriente en un campo $\vec{B}$ no uniforme. En cada caso, el eje del imán de barra es perpendicular al plano de la espira y pasa por el centro de ésta.

a) La fuerza neta sobre esta bobina se aleja del polo norte del imán



b) La fuerza neta sobre la misma bobina va hacia el polo sur del imán



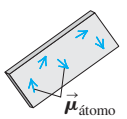
Dipolos magnéticos y cómo funcionan los imanes

El comportamiento de un solenoide en un campo magnético (véase la figura 27.34) se parece al de un imán de barra o una aguja de brújula; si tienen libertad para girar, tanto el solenoide como el imán se orientan con sus ejes paralelos al campo $\vec{B}$. En ambos casos, esto se debe a la interacción de las cargas eléctricas en movimiento con un campo magnético; la diferencia es que en un imán de barra el movimiento de la carga ocurre a la escala microscópica del átomo.

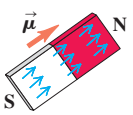
Piense en un electrón como en una esfera de carga giratoria. En esta analogía, la circulación de carga en torno al eje de rotación es como una espira de corriente y, por ello, el electrón tiene un momento magnético neto. (Esta analogía, aunque útil, es

27.37 a) Un trozo de hierro no magnetizado. (Sólo se ilustran algunos momentos atómicos representativos.) b) Un trozo de hierro magnetizado (imán de barra). El momento magnético neto del imán de barra apunta de su polo sur a su polo norte. c) Imán de barra en un campo magnético.

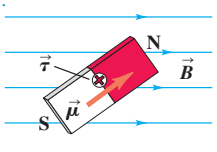
a) Hierro no magnetizado: los momentos magnéticos se orientan al azar.



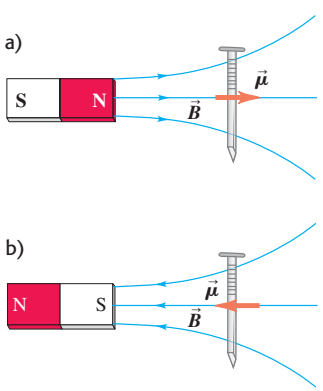
b) En un imán de barra, los momentos magnéticos están alineados.



c) Un campo magnético crea un par de torsión sobre el imán de barra que tiende a alinear su momento dipolar con el campo $\vec{B}$.



27.38 En dos etapas un imán de barra atrae un clavo de hierro no magnetizado. En la primera, el campo $\vec{B}$ del imán de barra produce un momento magnético neto en el clavo. En la segunda, debido a que el campo del imán de barra no es uniforme, este dipolo magnético se ve atraído hacia el imán. La atracción es la misma si el clavo está cerca de a) el polo norte del imán, o b) el polo sur del imán.



inexacta, puesto que un electrón en realidad no es una esfera giratoria. La explicación completa del origen del momento magnético del electrón incluye mecánica cuántica, que está más allá de nuestro alcance en este momento.) En un átomo de hierro, una fracción importante de los momentos magnéticos de los electrones se alinean entre sí, y el átomo tiene un momento magnético distinto de cero. (En contraste, los átomos de la mayoría de los elementos tienen poco o ningún momento magnético.) En un trozo de hierro no magnetizado no hay una alineación general de los momentos magnéticos de los átomos; su suma vectorial es cero, y el momento magnético neto también es cero (figura 27.37a). Pero en un imán de barra, los momentos magnéticos de muchos de sus átomos son paralelos, y existe un momento magnético neto $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ apreciable (figura 27.37b). Si el imán se coloca en un campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$, el campo ejerce un par de torsión dado por la ecuación (27.26), que tiende a alinear $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ con $\vec{\boldsymbol{B}}$ (figura 27.37c). Un imán de barra tiende a alinearse con un campo $\vec{\boldsymbol{B}}$, de modo que una línea que vaya del polo sur al polo norte del imán estará en dirección de $\vec{\boldsymbol{B}}$; de ahí que la significación verdadera de los polos norte y sur de un imán sea que representan la cabeza y la cola, respectivamente, del momento magnético dipolar $\vec{\boldsymbol{\mu}}$.

El par de torsión experimentado por una espira de corriente en un campo magnético también explica por qué se magnetiza un objeto de hierro no magnetizado, como en la figura 27.37a. Si un clip sujetapapeles de hierro no magnetizado se coloca cerca de un imán poderoso, los momentos magnéticos de los átomos del clip tienden a alinearse con el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ del imán. Cuando se retira el sujetapapeles, sus dipolos atómicos tienden a seguir alineados y el clip tiene un momento magnético neto. El sujetapapeles se desmagnetiza si se deja caer al piso o se calienta; la energía interna que se agrega con esto sacude los dipolos atómicos y los vuelve a hacer aleatorios.

El diagrama del dipolo magnético de un imán de barra imantada explica las fuerzas de atracción y de repulsión entre los imanes de barra de la figura 27.1. El momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ de un imán de barra apunta de su polo sur a su polo norte, por lo que las espiras de corriente en las figuras 27.36a y 27.36b son equivalentes a un imán con su polo norte a la izquierda. De ahí que la situación ilustrada en la figura 27.36a sea equivalente a dos imanes de barra con sus polos norte uno junto al otro; la fuerza resultante es de repulsión, igual que en la figura 27.1b. En la figura 27.36b, otra vez tenemos el equivalente de dos imanes de barra con sus extremos juntos, pero con el polo sur del imán de la izquierda junto al polo norte del imán de la derecha. La fuerza resultante es de atracción, como en la figura 27.1a.

Por último, es posible explicar cómo un imán atrae un objeto de hierro no magnetizado (véase la figura 27.2). Se trata de un proceso en dos etapas. En la primera, los momentos magnéticos atómicos del hierro tienden a alinearse con el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ del imán, por lo que el hierro adquiere un momento dipolar magnético neto $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ paralelo al campo. En la segunda, el campo no uniforme del imán atrae al dipolo magnético. La figura 27.38a muestra un ejemplo. El polo norte del imán está más cerca del clavo (que contiene hierro), y el dipolo magnético producido en el clavo es equivalente a una espira con una corriente que circula en dirección opuesta a la que se aprecia en la figura 27.36a; entonces, la fuerza magnética neta sobre el clavo es opuesta a la fuerza sobre la espira en la figura 27.36a, de manera que el clavo es atraído hacia el imán. Al cambiar la polaridad del imán, como en la figura 27.38b, se invierten las direcciones tanto de $\vec{\boldsymbol{B}}$ como de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. Ahora, la situación es equivalente a la que se ilustra en la figura 27.36b; al igual que la espira en esa figura, el clavo es atraído hacia el imán. Es la causa de que un objeto no magnetizado previamente que contenga hierro se vea atraído hacia *cualquier* polo de un imán. En contraste, objetos de latón, aluminio o madera difícilmente responden a un imán; los dipolos magnéticos atómicos de estos materiales, si los hay, muestran menos tendencia a alinearse con un campo externo.

Nuestro análisis de la forma en que interactúan los imanes y los trozos de hierro apenas ha tocado la superficie de un tema diverso conocido como *propiedades magnéticas de los materiales*. En la sección 28.8 estudiaremos tales propiedades con mayor profundidad.

Evalúe su comprensión de la sección 27.7 La figura 27.13c ilustra las líneas de campo magnético debidas a una espira circular que transporta corriente. *a)* ¿Cuál es la dirección del momento magnético de esta espira? *b)* ¿Qué lado de la espira es equivalente al polo norte de un imán, y cuál al polo sur?

*27.8 El motor de corriente directa

Los motores eléctricos juegan un papel importante en la sociedad contemporánea. En un motor, un par de torsión magnético actúa sobre un conductor que transporta corriente, y la energía eléctrica se convierte en energía mecánica. Como ejemplo, veamos el tipo sencillo de motor de corriente directa (cd, en ocasiones también se designa con estas siglas invertidas, dc, por *direct-current*) que se ilustra en la figura 27.39.

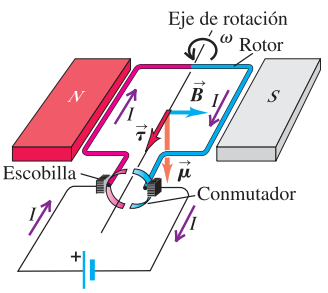
La parte móvil del motor es el *rotor*, es decir, el tramo de alambre cuya forma es una espira de extremos abiertos y tiene libertad para girar alrededor de un eje. Los extremos de los alambres del rotor están adheridos a segmentos circulares conductores que forman un *conmutador*. En la figura 27.39a, cada uno de los dos segmentos del conmutador hacen contacto con una de las terminales, o *escobillas*, de un circuito externo que incluye una fuente de fem. Esto ocasiona que una corriente fluya hacia el rotor por un lado, en color rojo, y salga del rotor por el otro lado, en azul. Por consiguiente, el rotor es una espira de corriente con momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. El rotor queda entre los polos opuestos de un imán permanente, por lo que hay un campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ que ejerce un par de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ sobre el rotor. Para la orientación del rotor que se aprecia en la figura 27.39a, el par de torsión hace que el rotor gire en sentido antihorario, en una dirección que alineará $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ con $\vec{\boldsymbol{B}}$.

En la figura 27.39b, el rotor ha girado 90° a partir de su orientación en la figura 27.39a. Si la corriente a través del rotor fuera constante, éste se hallaría ahora en su orientación de equilibrio; simplemente oscilaría en torno de esta orientación. Pero aquí es donde entra en juego el conmutador; cada escobilla ahora está en contacto con los *dos* segmentos del conmutador. No hay diferencia de potencial entre los conmutadores, por lo que en este instante no fluye corriente por el rotor y el momento magnético es igual a cero. Por su inercia, el rotor continúa girando en sentido antihorario, y otra vez fluye corriente a través de él, como se aprecia en la figura 27.39c. Pero ahora hay corriente que entra en el lado *azul* del rotor y sale por el lado *rojo*, exactamente la situación opuesta a la situación de la figura 27.39a. Aun cuando la dirección de la corriente se haya invertido con respecto al rotor, éste ha girado 180° y el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ está en la misma dirección con respecto al campo magnético. Entonces, el par de torsión magnético $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ tiene la misma dirección en la figura 27.39c que en la figura 27.39a. Gracias al conmutador, la corriente se invierte cada 180° de giro, así que el par de torsión siempre tiene la dirección que hace que el rotor gire en sentido antihorario. Cuando el motor "aumenta su rapidez", el par de torsión magnético promedio está apenas compensado por un par de torsión opuesto debido a la resistencia del aire, la fricción en los cojinetes del rotor, y la fricción entre el conmutador y las escobillas.

El motor simple que se ilustra en la figura 27.39 tan sólo tiene una vuelta de alambre en su rotor. No obstante, en los motores prácticos el rotor tiene muchas vueltas; esto

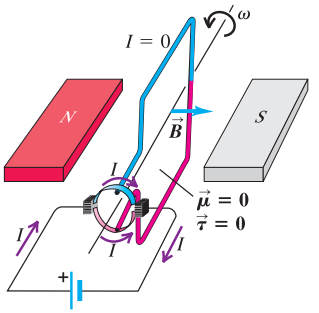
27.39 Diagrama esquemático de un motor sencillo de cd. El rotor es una espira de alambre con libertad para girar alrededor de un eje; los extremos del rotor están adheridos a los dos conductores curvos que forman el conmutador. (Por claridad, las mitades del rotor se muestran en colores rojo y azul.) Los segmentos del conmutador están aislados unos de otros.

a) Las escobillas están alineadas con los segmentos del conmutador



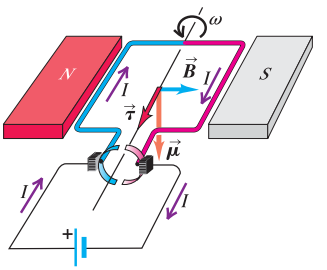
- La corriente ingresa por el lado rojo del rotor y sale por el lado azul.
- Por lo tanto, el par de torsión magnético hace que el rotor gire en sentido antihorario.

b) El rotor ha girado 90°



- Cada escobilla está en contacto con ambos segmentos del conmutador, por lo que la corriente se desvía totalmente del rotor.
- Ningún par de torsión magnético actúa sobre el rotor.

c) El rotor ha girado 180°



- Las escobillas están alineadas otra vez con los segmentos del conmutador. Esta vez la corriente entra por el lado azul del rotor y sale por el lado rojo.
- Por lo tanto, el par de torsión magnético otra vez ocasiona que el rotor gire en sentido antihorario.

27.40 Este motor de una unidad de disco de computadora tiene 12 bobinas que transportan corriente e interactúan con imanes permanentes situados sobre la tornamesa (no se observan) para hacerla girar. (Este diseño es el inverso del diseño de la figura 27.39, donde los imanes permanentes están fijos y es la bobina la que gira.) Debido a que hay bobinas múltiples, el par de torsión magnético es casi constante y la tornamesa gira con rapidez casi constante.

incrementa el momento y el par de torsión magnéticos, por lo que el motor puede hacer girar cargas más grandes. El par de torsión también se incrementa si se utiliza un campo magnético más intenso, que es la razón por la cual muchos diseños de motores utilicen electroimanes en vez de un imán permanente. Otra desventaja del diseño sencillo de la figura 27.39 es que la magnitud del par de torsión aumenta y disminuye a medida que gira el rotor. Esto se soluciona haciendo que el rotor incluya varias bobinas independientes de alambre, orientadas con diferentes ángulos (figura 27.40).

Energía para los motores eléctricos

Debido a que el motor convierte energía eléctrica en mecánica o trabajo, requiere una alimentación de energía eléctrica. Si la diferencia de potencial entre sus terminales es V_{ab} y la corriente es I, entonces la entrada de potencia es $P = V_{ab}I$. Aun si las bobinas del motor tienen resistencia insignificante, debe haber una diferencia de potencial entre las terminales para que P sea diferente de cero. Esta diferencia de potencial resulta sobre todo de las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre las corrientes en los conductores del rotor, a medida que giran a través del campo magnético. La fuerza electromotriz asociada $\mathcal{E}$ se llama fem *inducida*; también recibe el nombre de fuerza *contra*electromotriz debido a que su sentido es opuesto al sentido de la corriente. En el capítulo 29 estudiaremos las fems inducidas que resultan del movimiento de conductores en campos magnéticos.

En un motor en *serie*, el rotor está conectado en serie con el electroimán que produce el campo magnético. En un motor en *derivación* están conectados en paralelo. En un motor en serie con resistencia interna r, V_{ab} es mayor que $\mathcal{E}$, y la diferencia es la caída de potencial Ir a través de la resistencia interna. Es decir,

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir \tag{27.29}$$

Como la fuerza magnética es proporcional a la velocidad, $\mathcal{E}$ *no* es constante sino proporcional a la rapidez de rotación del rotor.

Ejemplo 27.11 Motor de cd en serie

Un motor de cd con su rotor y bobinas de campo conectados en serie tiene una resistencia interna de 2.00 Ω. Cuando opera a toda su capacidad sobre una línea de 120 V, toma una corriente de 4.00 A. *a*) ¿Cuál es la fem en el rotor? *b*) ¿Cuál es la potencia suministrada al motor? *c*) ¿Cuál es la tasa de disipación de energía en la resistencia del motor? *d*) ¿Cuál es la potencia mecánica desarrollada? *e*) ¿Cuál es la eficiencia del motor? *f*) ¿Qué pasaría si la máquina que el motor impulsa se atorara y el rotor se detuviera repentinamente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa las ideas de potencia y caída de potencial en un motor de cd en serie.

PLANTEAR: Se da la resistencia interna $r = 2.00\ \Omega$, el voltaje $V_{ab} = 120$ V a través del motor, y la corriente $I = 4.00$ A a través del motor. Usamos la ecuación (27.29) para determinar la fem $\mathcal{E}$ a partir de tales cantidades. La potencia alimentada al motor es $V_{ab}I$, la tasa de disipación de energía es I^2r, y la potencia de salida del motor es la diferencia entre la potencia de entrada y la potencia disipada. La eficiencia e es la razón de la potencia de salida mecánica con respecto a la potencia de entrada eléctrica.

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (27.29), $V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$, se obtiene

$$120\ \text{V} = \mathcal{E} + (4.0\ \text{A})(2.0\ \Omega) \qquad \text{por lo que} \qquad \mathcal{E} = 112\ \text{V}$$

b) La potencia alimentada al motor por la fuente es

$$P_{\text{entrada}} = V_{ab}I = (120\ \text{V})(4.0\ \text{A}) = 480\ \text{W}$$

c) La potencia disipada en la resistencia r es

$$P_{\text{disipada}} = I^2r = (4.0\ \text{A})^2(2.0\ \Omega) = 32\ \text{W}$$

d) La potencia de salida mecánica es la potencia de entrada eléctrica menos la tasa de disipación de energía en la resistencia del motor (suponiendo de que no hay otras pérdidas de potencia):

$$P_{\text{salida}} = P_{\text{entrada}} - P_{\text{disipada}} = 480\ \text{W} - 32\ \text{W} = 448\ \text{W}$$

e) La eficiencia e es la razón de la potencia de salida mecánica con respecto a la potencia de entrada eléctrica:

$$e = \frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{448\ \text{W}}{480\ \text{W}} = 0.93 = 93\%$$

f) Con el rotor atascado, la fuerza contraelectromotriz $\mathcal{E}$ (que es proporcional a la rapidez del rotor) se hace igual a cero. De la ecuación (27.29), la corriente es:

$$I = \frac{V_{ab}}{r} = \frac{120\ \text{V}}{2.0\ \Omega} = 60\ \text{A}$$

y la potencia disipada en la resistencia r se vuelve:

$$P_{\text{disipada}} = I^2r = (60\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 7200\ \text{W}$$

EVALUAR: Si esta sobrecarga masiva no funde (quema) un fusible ni dispara un cortacircuitos, las bobinas se derretirán rápidamente. Cuando el motor se enciende por primera vez, hay una oleada momentánea de corriente hasta que el motor gana rapidez. Esta oleada ocasiona caídas de voltaje más grandes de lo normal ($V = IR$) en las líneas de potencia que abastecen la corriente. Efectos similares son responsables de la atenuación momentánea de las luces de una casa, cuando arranca el motor de un acondicionador de aire o de la máquina lavavajillas.

Evalúe su comprensión de la sección 27.8 En el circuito que se ilustra en la figura 27.39, se agrega un interruptor en serie con la fuente de fem, de manera que la corriente se puede encender o apagar. Cuando el interruptor se cierra para permitir el paso de corriente, ¿el rotor comenzará a girar sin que importe cuál sea su orientación original?

*27.9 El efecto Hall

La realidad de las fuerzas que actúan sobre las cargas en movimiento de un conductor en un campo magnético queda demostrada de manera sorprendente por el *efecto Hall*: se trata de un efecto similar a la desviación transversal de un haz de electrones en un campo magnético en el vacío. (El efecto fue descubierto por el físico estadounidense Edwin Hall en 1879 cuando todavía era estudiante de posgrado.) Para describir dicho efecto, consideremos un conductor en forma de banda plana, como se ilustra en la figura 27.41. La corriente está en dirección del eje $+x$ y hay un campo magnético uniforme $\vec{\boldsymbol{B}}$ perpendicular al plano de la banda, en la dirección $+y$. La velocidad de deriva de las cargas en movimiento (magnitud de la carga, $|q|$) tiene una magnitud v_d. La figura 27.41a muestra el caso de cargas negativas, como los electrones de un metal, y la figura 27.41b muestran las cargas positivas. En ambos casos, la fuerza magnética va hacia arriba, del mismo modo en que la fuerza magnética en un conductor es la misma sin que importe que las cargas en movimiento sean positivas o negativas. En cualquier caso, una carga móvil es impulsada hacia el *borde superior* de la banda por la fuerza magnética $F_z = |q|v_dB$.

Si los portadores de la carga son electrones, como en la figura 27.41a, en el borde superior de la banda se acumula un exceso de carga negativa, lo cual deja un exceso de carga positiva en el borde inferior. Esta acumulación continúa hasta que el campo electrostático transversal resultante, $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ se hace suficientemente grande como para generar una fuerza (magnitud $|q|E_e$) que sea igual y opuesta a la fuerza magnética (magnitud $|q|v_dB$). Después de eso, ya no hay ninguna fuerza transversal neta que desvíe las cargas móviles. Este campo eléctrico provoca una diferencia de potencial transversal entre los bordes opuestos de la banda, llamada *voltaje de Hall* o *fem de Hall*. La polaridad depende de si las cargas móviles son positivas o negativas. Los experimentos demuestran que para los metales, el borde superior de la banda en la figura 27.41a *sí* se carga negativamente, lo cual demuestra que los portadores de carga en un metal son en verdad electrones negativos.

Sin embargo, si los portadores de la carga son *positivos*, como en la figura 27.41b, entonces en el borde superior se acumula carga *positiva*, y la diferencia de potencial es *opuesta* a la situación con cargas negativas. Poco después del descubrimiento efecto Hall en 1879, se observó que ciertos materiales, en particular algunos *semiconductores*, mostraban una fem de Hall opuesta a la de los metales, como si sus portadores de carga estuvieran cargados positivamente. Ahora se sabe que estos materiales conducen mediante un proceso conocido como *conducción de huecos*. Dentro de tales materiales hay sitios, llamados *huecos*, que normalmente estarían ocupados por un electrón pero en realidad están vacíos. Una carga negativa faltante equivale a una carga positiva. Cuando un electrón se mueve en una dirección para llenar un hueco, deja otro hueco tras de sí. El hueco emigra en dirección opuesta a la del electrón.

En términos del eje de coordenadas de la figura 27.41b, el campo electrostático $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ para el caso de q positiva, está en dirección de la componente z, E_z, que es negativa. El campo magnético está en la dirección $+y$, y lo escribimos como B_y. La fuerza magnética (en la dirección $+z$) es qv_dB_y. La densidad de corriente J_x está en la dirección $+x$. En el estado estable, cuando las fuerzas qE_z y qv_dB_y tienen la misma magnitud y dirección opuesta,

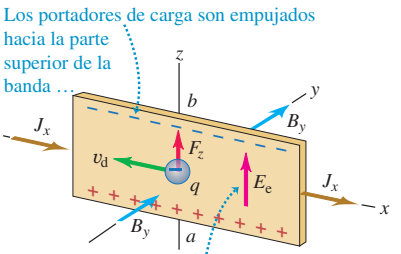
$$qE_z + qv_dB_y = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad E_z = -v_dB_y$$

Esto confirma que cuando q es positiva, E_z es negativa. La densidad de corriente J_x es

$$J_x = nqv_d$$

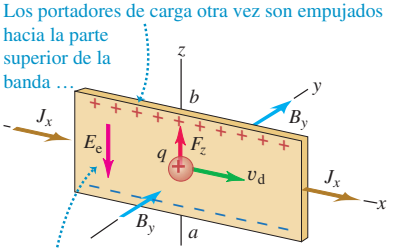
27.41 Fuerzas sobre portadores de carga de un conductor en un campo magnético.

a) Portadores de carga negativa (electrones)



… por lo que el punto *a* tiene un potencial mayor que el punto *b*.

b) Portadores de carga positiva



… de modo que la polaridad de la diferencia de potencial es opuesta a la de los portadores de carga negativa.

Se elimina v_d entre estas ecuaciones y se encuentra

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \qquad \text{(efecto Hall)} \tag{27.30}$$

Observe que este resultado (así como todo el proceso de obtención) es válido para q tanto positiva como negativa. Cuando q es negativa, E_z es positiva, y a la inversa.

J_x, B_y y E_z se pueden medir, por lo que es posible obtener el producto nq. Tanto en metales como en semiconductores, q es igual en magnitud a la carga del electrón, por lo que el efecto Hall permite la medición directa de n, la concentración de cargas portadoras de corriente en el material. El *signo* de las cargas está determinado por la polaridad de la fem de Hall, como se describió.

El efecto Hall también se utiliza para hacer la medición directa de la rapidez de deriva v_d del electrón en los metales. Como vimos en el capítulo 25, estas rapideces son muy pequeñas, con frecuencia del orden de 1 mm/s o menos. Si movemos todo el conductor en dirección opuesta a la corriente con una rapidez igual a la rapidez de deriva, entonces los electrones están en reposo con respecto al campo magnético, y la fem de Hall desaparece. Así, la rapidez del conductor necesaria para hacer que la fem de Hall desaparezca es igual a la rapidez de deriva.

Ejemplo 27.12 Aplicación del efecto Hall

Se coloca una placa de cobre con 2.0 mm de espesor y 1.50 cm de ancho, en un campo magnético uniforme con magnitud de 0.40 T, como se indica en la figura 27.41a. Cuando pasa una corriente de 75 A en la dirección $+x$, se mide con cuidado el potencial en la parte inferior de la placa y resulta ser de 0.81 μV más grande que el de la parte superior. A partir de tal medición, determine la concentración de electrones móviles en el cobre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema describe un experimento con el efecto Hall.

PLANTEAR: Utilizamos la ecuación (27.30) para determinar la concentración de electrones móviles, n.

EJECUTAR: En primer lugar, calculamos la densidad de corriente J_x y el campo eléctrico E_z:

$$J_x = \frac{I}{A} = \frac{75\ \text{A}}{(2.0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1.50 \times 10^{-2}\ \text{m})} = 2.5 \times 10^{6}\ \text{A/m}^2$$

$$E_z = \frac{V}{d} = \frac{0.81 \times 10^{-6}\ \text{V}}{1.5 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 5.4 \times 10^{-5}\ \text{V/m}$$

Entonces, de la ecuación (27.30),

$$n = \frac{-J_x B_y}{qE_z} = \frac{-(2.5 \times 10^{6}\ \text{A/m}^2)(0.40\ \text{T})}{(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5.4 \times 10^{-5}\ \text{V/m})}$$
$$= 11.6 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

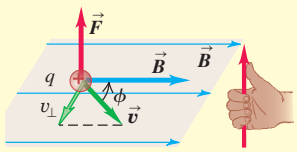
EVALUAR: El valor real de n para el cobre es $8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$, lo que muestra que el modelo sencillo del efecto Hall de esta sección, si se ignoran los efectos cuánticos y las interacciones de los electrones con los iones, debería usarse con precaución. Este ejemplo también ilustra que con buenos conductores, la fem de Hall es muy pequeña aun con densidades de corriente grandes. Los dispositivos de efecto Hall para hacer mediciones del campo magnético y otros propósitos utilizan materiales semiconductores, para los cuales densidades moderadas de corriente dan fems de Hall mucho mayores.

Evalúe su comprensión de la sección 27.9 Un alambre de cobre de sección transversal cuadrada está orientado verticalmente. Los cuatro lados del alambre están hacia norte, sur, este y oeste. Hay un campo magnético uniforme dirigido de este a oeste, y el alambre conduce corriente hacia abajo. ¿Qué lado del alambre tiene el potencial eléctrico mayor? i) el lado norte; ii) el lado sur; iii) el lado este; iv) el lado oeste.

CAPÍTULO 27 RESUMEN

Fuerzas magnéticas: Las interacciones magnéticas son fundamentalmente interacciones entre partículas cargadas en movimiento. Estas interacciones se describen mediante el campo magnético vectorial, denotado con $\vec{B}$. Una partícula con carga q que se mueva con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$. La unidad del SI para el campo magnético es la tesla: $(1\ \text{T} = 1\ \text{N/A} \cdot \text{m})$. (Véase el ejemplo 27.1.)

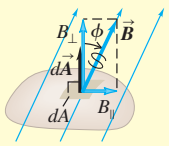
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (27.2)$$



Campo y flujo magnético: Un campo magnético se representa gráficamente con líneas de campo magnético. Para un punto cualquiera, una línea de campo magnético es tangente a la dirección de $\vec{B}$ en ese punto. Donde las líneas de campo están muy cercanas entre sí, la magnitud del campo es grande y viceversa. El flujo magnético Φ_B a través de un área se define en forma similar al flujo eléctrico. La unidad del SI para el flujo magnético es el weber $(1\ \text{Wb} = 1\ \text{T} \cdot \text{m}^2)$. El flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero (ley de Gauss del magnetismo). Como resultado, las líneas de campo magnético siempre se cierran sobre sí mismas. (Véase el ejemplo 27.2.)

$$\Phi_B = \int B_\perp dA = \int B\cos\phi\, dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad (27.6)$$

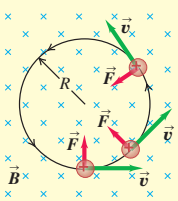
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(superficie cerrada)} \qquad (27.8)$$



Movimiento en un campo magnético: La fuerza magnética siempre es perpendicular a $\vec{v}$; una partícula que se mueve solo bajo la acción de un campo magnético lo hace con rapidez constante. En un campo uniforme, una partícula con velocidad inicial perpendicular al campo se mueve en un círculo con radio R, que depende de la intensidad del campo magnético B, y la masa de la partícula m, la rapidez v y la carga q. (Véanse los ejemplos 27.3 y 27.4).

Los campos eléctricos y magnéticos transversales se usan como selector de velocidad. Las fuerzas eléctricas y magnéticas se cancelan exactamente si $v = E/B$. (Véanse los ejemplos 27.5 y 27.6.)

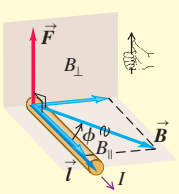
$$R = \frac{mv}{|q|B} \qquad (27.11)$$



Fuerza magnética sobre un conductor: Un segmento rectilíneo de conductor que transporta una corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ perpendicular tanto a $\vec{B}$ como al vector $\vec{l}$, que apunta en la dirección de la corriente y tiene magnitud igual a la longitud del segmento. Una relación similar da la fuerza $d\vec{F}$ sobre un segmento infinitesimal que transporte corriente $d\vec{l}$. (Véanse los ejemplos 27.7 y 27.8.)

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \qquad (27.19)$$

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B} \qquad (27.20)$$

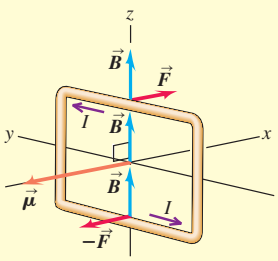


Par de torsión magnético: Una espira de corriente con área A y corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ no experimenta fuerza magnética neta, pero sí un par de torsión magnético de magnitud τ. El par de torsión vectorial $\vec{\tau}$ se expresa en términos del momento magnético $\vec{\mu} = I\vec{A}$ de la espira, igual que la energía potencial U de un momento magnético en un campo magnético $\vec{B}$. El momento magnético de una espira sólo depende de la corriente y del área; es independiente de la forma de la espira. (Véanse los ejemplos 27.9 y 27.10.)

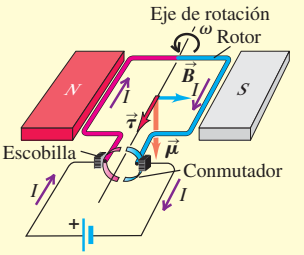
$$\tau = IBA\,\text{sen}\,\phi \qquad (27.23)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad (27.26)$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B\cos\phi \qquad (27.27)$$

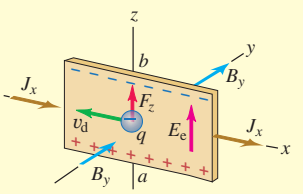


Motores eléctricos: En un motor de cd, un campo magnético ejerce un par de torsión sobre una corriente en el rotor. El movimiento del rotor a través del campo magnético causa una fem inducida llamada fuerza contraelectromotriz. Para un motor en serie, en el que la bobina del rotor está conectada en paralelo con las bobinas que producen el campo magnético, el voltaje terminal es la suma de la fuerza contraelectromotriz y la caída Ir a través de la resistencia interna. (Véase el ejemplo 27.11.)



El efecto Hall: El efecto Hall es una diferencia de potencial perpendicular a la dirección de la corriente en un conductor, cuando el conductor se coloca en un campo magnético. El potencial de Hall está determinado por el requerimiento de que el campo eléctrico asociado debe compensar exactamente la fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Las mediciones del efecto Hall se utilizan para determinar el signo de los portadores de carga y su concentración n. (Véase el ejemplo 27.12.)

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \tag{27.30}$$



Términos clave

imán permanente, *917*
monopolo magnético, *918*
campo magnético, *918*
tesla, *920*
gauss, *920*
línea de campo magnético, *922*
flujo magnético, *924*
weber, *924*
densidad de flujo magnético, *925*
frecuencia de ciclotrón, *926*
espectrómetro de masas, *930*
isótopo, *931*
momento dipolar magnético, *937*
momento magnético, *937*
dipolo magnético, *937*
solenoide, *938*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

En la IRM los núcleos de los átomos de hidrógeno dentro de los tejidos suaves actúan como espiras de corriente en miniatura, cuyos momentos magnéticos se alinean con un campo aplicado. Véase la sección 27.7 para mayores detalles.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

27.1 Respuesta: sí Cuando un imán se corta, cada parte tiene un polo norte y otro sur (véase la figura 27.4). Entonces, la parte roja pequeña se comporta en gran medida como la aguja completa original de la brújula.

27.2 Respuesta: trayectoria 3 La aplicación de la regla de la mano derecha a los vectores $\vec{\boldsymbol{v}}$ (que apuntan a la derecha) y $\vec{\boldsymbol{B}}$ (que apuntan hacia el plano de la figura) dice que la fuerza $\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ sobre una carga *positiva* apuntaría *hacia arriba*. Como la carga es *negativa*, la fuerza apunta *hacia abajo* y la partícula sigue una trayectoria curva hacia abajo.

27.3 Respuestas: *a*) ii), *b*) no La magnitud de $\vec{\boldsymbol{B}}$ se incrementaría a medida que se moviera hacia la derecha, y alcanzaría un máximo al cruzar el plano de la espira. Al moverse más allá del plano de la espira, disminuiría la magnitud del campo. Lo que se puede decir del espaciamiento de las líneas de campo es que cuanto más cerca estén unas de otras, más intenso será el campo. La dirección del campo sería a la derecha de todos los puntos a lo largo de la trayectoria, ya que ésta ocurre a lo largo de una línea de campo y la dirección de $\vec{\boldsymbol{B}}$ en cualquier punto es tangente a la línea de campo a través de dicho punto.

27.4 Respuestas: *a*) ii), *b*) i) El radio de la órbita como lo da la ecuación (27.11) es directamente proporcional a la rapidez, por lo que duplicar la rapidez de la partícula ocasiona que el radio también se duplique. La partícula tiene que viajar lo doble para completar una órbita, pero lo hace al doble de rapidez, así que el tiempo requerido para una órbita no cambia. Este resultado también se obtiene con la ecuación (27.12), que afirma que la rapidez angular ω es independiente de la rapidez lineal v. De ahí que el tiempo por órbita, $T = 2\pi/\omega$, tampoco depende de v.

27.5 Respuesta: iii) De la ecuación (27.13), la rapidez $v = E/B$ con que viajan las partículas en línea recta a través del selector de velocidad no depende de la magnitud, el signo de la carga, o la masa de la partícula. Todo lo que se requiere es que las partículas (iones, en este caso) tengan una carga distinta de cero.

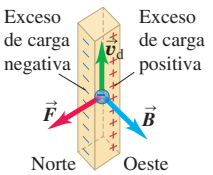
27.6 Respuesta: A Esta orientación hará que la corriente fluya en sentido horario alrededor del circuito y, por ello, a través de la barra conductora de la parte superior a la parte inferior de la figura. Entonces, según la regla de la mano derecha, la fuerza magnética $\vec{\boldsymbol{F}} = I\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ sobre la barra apuntará a la derecha.

27.7 Respuestas: *a*) a la derecha; *b*) el polo norte a la derecha, el polo sur a la izquierda Si usted cierra los dedos de su mano derecha alrededor de la bobina en la dirección de la corriente, su pulgar derecho apunta a la derecha (perpendicular al plano de la bobina). Ésta es la dirección del momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. El momento magnético apunta del polo sur al polo norte, por lo que el lado derecho de la espira es equivalente a un polo norte, y el lado izquierdo equivale a un polo sur.

27.8 Respuesta: no El rotor no comenzará a girar cuando se cierre el interruptor, si el rotor está orientado inicialmente como se muestra en la figura 27.39b. En este caso, no hay corriente a través del rotor y, por ello, no hay par de torsión magnético. Esta situación se remedia mediante el uso de bobinas múltiples en el rotor, orientadas a ángulos diferentes en torno al eje de rotación. Con este arreglo siempre habrá un par de torsión magnético sin importar la orientación.

27.9 Respuesta: ii) Los portadores móviles de carga en el cobre son electrones cargados negativamente, que se mueven por el alambre hacia arriba para dar una corriente hacia abajo. Según la regla de la mano

derecha, la fuerza sobre una partícula con carga positiva que se mueva hacia arriba en un campo magnético que apunte hacia el oeste estaría dirigida hacia el sur; entonces, la fuerza sobre una partícula con carga negativa es hacia el norte. El resultado es un excedente de carga negativa sobre el lado norte del alambre, lo cual deja un exceso de carga positiva —y por ello un potencial eléctrico mayor— en el lado sur.



PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P27.1. ¿Una partícula cargada puede moverse a través de un campo magnético sin experimentar fuerza alguna? Si es así, ¿cómo? Si no, ¿por qué?

P27.2. En cualquier punto del espacio, por definición el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene la dirección de la fuerza eléctrica sobre una partícula con carga positiva situada en ese punto. ¿Por qué no se define de manera similar el campo magnético $\vec{B}$, para que esté en la dirección de la fuerza magnética sobre una partícula cargada positivamente?

P27.3. En la sección 27.2 se describe un procedimiento para encontrar la dirección de la fuerza magnética usando la mano derecha. Si se utiliza el mismo procedimiento pero con la mano izquierda, ¿se obtendrá la dirección correcta de la fuerza? Explique su respuesta.

P27.4. La fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento siempre es perpendicular al campo magnético $\vec{B}$. ¿La trayectoria de una partícula cargada en movimiento siempre es perpendicular a las líneas de campo magnético? Explique su razonamiento.

P27.5. Una partícula cargada se dispara hacia una región cúbica del espacio donde hay un campo magnético uniforme. Fuera de esta región, no hay campo magnético. ¿Es posible que la partícula permanezca dentro de la región cúbica? ¿Por qué?

P27.6. Si la fuerza magnética no realiza trabajo sobre una partícula cargada, ¿cómo puede tener algún efecto sobre el movimiento de la partícula? ¿Existen otros ejemplos de fuerzas que no realicen trabajo, pero tengan un efecto significativo sobre el movimiento de la partícula?

P27.7. Una partícula cargada se mueve a través de una región del espacio con velocidad constante (magnitud y dirección). Si el campo magnético externo es igual a cero en esta región, ¿se puede concluir que el campo eléctrico externo a la región también vale cero? Explique. (Con "externo" nos referimos a aquellos campos que no son producidos por la partícula cargada.) Si el campo eléctrico externo es de cero en la región, ¿se puede concluir que el campo magnético externo en la región también sea igual a cero?

P27.8. ¿Cómo puede usarse como brújula una espira de alambre que transporta corriente? ¿Una brújula de ese tipo distinguiría entre el norte y el sur? ¿Por qué?

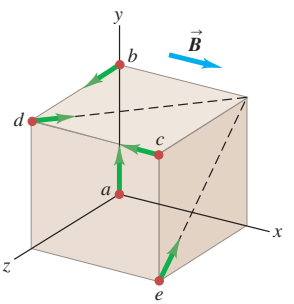
P27.9. ¿Cómo puede determinarse la dirección de un campo magnético únicamente con observaciones *cualitativas* de la fuerza magnética sobre un alambre recto que transporta corriente?

P27.10. Una espira suelta y flexible de alambre conduce una corriente I. La espira de alambre se coloca sobre una mesa horizontal en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la mesa. Esto ocasiona que la espira de alambre se expanda en forma circular mientras yace sobre la mesa. En un diagrama, muestre todas las orientaciones posibles de la corriente I y el campo magnético $\vec{B}$ que pudieran hacer que esto ocurra. Explique su razonamiento.

P27.11. Varias cargas entran a un campo magnético uniforme dirigido hacia la página. *a*) ¿Qué trayectoria seguiría una carga positiva q que se moviera con una velocidad de magnitud v a través del campo? *b*) ¿Qué trayectoria tendría en el campo una carga positiva q que se moviera con una velocidad de magnitud $2v$? *c*) ¿Cuál sería la trayectoria que siguiera una carga negativa $-q$ que se moviera a través del campo con una velocidad de magnitud v? *d*) ¿Qué trayectoria tendría por el campo una partícula neutra?

P27.12. Cada uno de los puntos indicados en las esquinas del cubo que se aprecia en la figura 27.42 representa una carga positiva q que se mueve con una velocidad de magnitud v en la dirección indicada. La región en la figura está en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, paralelo al eje x y dirigido hacia la derecha. ¿Cuáles cargas experimentan una fuerza debido a $\vec{B}$? ¿Cuál es la dirección de la fuerza en cada carga?

Figura 27.42 Pregunta P27.12.



P27.13. Un estudiante afirma que si un relámpago cae sobre un mástil metálico, la fuerza ejercida por el campo magnético terrestre sobre la corriente en el mástil puede ser lo suficientemente grande como para doblarlo. Las corrientes comunes de los relámpagos son del orden de 10^4 a 10^5 A. ¿La opinión del estudiante está justificada? Explique su razonamiento.

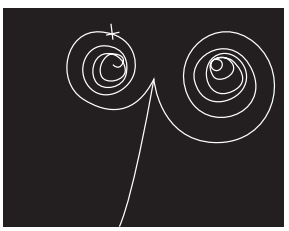
P27.14. Cámara de burbujas I. Ciertos tipos de cámaras de burbujas están llenas de hidrógeno líquido. Cuando una partícula (como un electrón o protón) pasa a través del líquido deja un rastro de burbujas, que se fotografía para mostrar la trayectoria de la partícula. El aparato está inmerso en un campo magnético conocido que hace que la partícula se curve. La figura 27.43 es el rastro de la trayectoria de un electrón en una cámara de burbujas. *a*) ¿Cómo podría determinarse el *signo* de la carga de una partícula a partir de una fotografía de su trayectoria? *b*) ¿Cómo determinan los físicos la *cantidad de movimiento* y la *rapidez* de este electrón con medidas efectuadas por el fotógrafo, dado que se sabe que el campo magnético es perpendicular al plano de la figura? *c*) Es evidente que el electrón sigue una espiral que se hace cada vez más pequeña. ¿Qué propiedades del electrón deben estar cambiando para ocasionar tal comportamiento? ¿Por qué ocurre esto? *d*) ¿Cuál sería la trayectoria de un neutrón en una cámara de burbujas? ¿Por qué?

Figura 27.43 Pregunta P27.14.

P27.15. Un altavoz ordinario como el que se ilustra en la figura 27.28 no debería colocarse cerca de un monitor de computadora o una pantalla de televisión. ¿Por qué no?

P27.16. Cámara de burbujas II. La figura 27.44 muestra las trayectorias de varias partículas en una cámara de burbujas. (Véase la pregunta para análisis P27.14.) Las dos espirales cerca de la parte superior de la fotografía corresponden a dos partículas creadas en el mismo instante debido a un rayo gamma de alta energía. *a*) ¿Qué se concluiría usted acerca de los *signos* de las cargas de estas dos partículas, si se supone que el campo magnético es perpendicular al plano de la fotografía y apunta hacia el papel? *b*) ¿Cuál de las dos partículas (la de la derecha o la de la izquierda) tuvo más cantidad de movimiento inicial? ¿Cómo lo sabe? *c*) ¿Por qué las espirales de las trayectorias son hacia dentro? ¿Qué es lo que hace que pase esto?

Figura **27.44** Ejercicio P27.16.



P27.17. Si se produce una fem en un motor de cd, ¿sería posible usar el motor como una especie de generador o fuente, extrayendo potencia de él en vez de alimentrarla? ¿Cómo se llevaría a cabo esto?

P27.18. Cuando se invierte la polaridad del voltaje aplicado a un motor de cd, la dirección del movimiento *no* se invierte. ¿Por qué no? ¿Cómo *podría* invertirse la dirección del movimiento?

P27.19. En un experimento del efecto Hall, ¿es posible que *no* se observe diferencia de potencial transversal? ¿En qué circunstancias ocurriría esto?

P27.20. Los voltajes del efecto Hall son mucho mayores para conductores relativamente malos (como el germanio) que para buenos (como el cobre), en cuanto a corrientes, campos y dimensiones comparables. ¿Por qué?

P27.21. ¿Podría construirse un acelerador en el que *todas* las fuerzas sobre las partículas, para dirigirlas y para aumentar la rapidez, fueran magnéticas? ¿Por qué?

P27.22. La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada nunca hace trabajo porque en cada instante la fuerza es perpendicular a la velocidad. El par de torsión ejercido por un campo magnético puede hacer trabajo sobre una espira de corriente cuando la espira gira. Explique cómo se concilian estos enunciados contradictorios en apariencia.

Ejercicios

Sección 27.2 Campo magnético

27.1. Una partícula con carga de -1.24×10^{-8} C se mueve con velocidad instantánea $\vec{v} = (4.19 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-3.85 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. ¿Cuál es la fuerza que sobre esta partícula ejerce un campo magnético, *a*) $\vec{B} = (1.40 \text{ T})\hat{\imath}$ y *b*) $\vec{B} = (1.40 \text{ T})\hat{k}$?

27.2. Una partícula con masa de 0.195 g lleva una carga de -2.50×10^{-8} C. Se da a la partícula una velocidad horizontal inicial hacia el norte y con magnitud de 4.00×10^4 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético mínimo que mantendrá la partícula en movimiento en el campo gravitacional terrestre, en la misma dirección horizontal hacia el norte?

27.3. En un campo magnético de 1.25 T dirigido verticalmente hacia arriba, una partícula que tiene una carga de magnitud 8.50 μC y se mueve inicialmente hacia el norte a 4.75 km/s se desvía hacia el este. *a*) ¿Cuál es el signo de la carga de esta partícula? Elabore un diagrama que indique cómo encontró la respuesta. *b*) Obtenga la fuerza magnética sobre la partícula.

27.4. Una partícula con masa de 1.81×10^{-3} kg y una carga de 1.22×10^{-8} C tiene, en un instante dado, una velocidad $\vec{v} = (3.00 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula producida por un campo magnético uniforme $\vec{B} = (1.63 \text{ T})\hat{\imath} + (0.980 \text{ T})\hat{\jmath}$?

27.5. Un electrón experimenta una fuerza magnética, cuya magnitud es de 4.60×10^{-15} N cuando se mueve con un ángulo de 60.0° con respecto a un campo magnético de magnitud 3.50×10^{-3} T. Encuentre la rapidez del electrón.

27.6. Un electrón se mueve a 2.50×10^6 m/s a través de una región en la que hay un campo magnético de dirección no especificada y magnitud de 7.40×10^{-2} T. ¿Cuáles son las magnitudes más grande y más pequeña posibles de la aceleración del electrón debidas al campo magnético? *b*) Si la aceleración real del electrón es la cuarta parte de la magnitud más grande del inciso *a*), ¿cuál será el ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético?

27.7. Una partícula con carga de 7.80 μC se mueve con velocidad $\vec{v} = -(3.80 \times 10^3 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. Se mide la fuerza magnética sobre la partícula y resulta ser de $\vec{F} = +(7.60 \times 10^{-3}\text{N})\hat{\imath} - (5.20 \times 10^{-3} \text{ N})\hat{k}$. *a*) Calcule todas las componentes del campo magnético que pueda con base en esta información. *b*) ¿Hay componentes del campo magnético que no estén determinadas por la medición de la fuerza? Explique su respuesta. *c*) Calcule el producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{F}$. ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{F}$?

27.8. Una partícula con carga de -5.60 nC se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B} = -(1.25 \text{ T})\hat{k}$. La medición de la fuerza magnética sobre la partícula resulta ser $\vec{F} = -(3.40 \times 10^{-7} \text{ N})\hat{\imath} + (7.40 \times 10^{-7} \text{ N})\hat{\jmath}$. *a*) Calcule todas las componentes que pueda de la velocidad de la partícula con base en esta información. *b*) ¿Hay componentes de la velocidad que no estén determinadas por la medición de la fuerza? Explique su respuesta. *c*) Calcule el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{F}$ y diga cuál es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{F}$?

27.9. Un grupo de partículas se mueve en un campo magnético de magnitud y dirección desconocidas. Usted observa que un protón que se mueve a 1.50 km/s en la dirección $+x$ experimenta una fuerza de 2.25×10^{-16} N en la dirección $+y$, y otro electrón que se mueve a 4.75 km/s en la dirección $-z$ experimenta una fuerza de 8.50×10^{-16} N. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre un electrón que se mueve en la dirección $-y$ a 3.2 km/s?

Sección 27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético

27.10. El flujo magnético a través de una cara de un cubo es +0.120 Wb. *a*) ¿Cuál debe ser el flujo magnético total a través de las otras cinco caras del cubo? *b*) ¿Por qué para responder el inciso *a*) no necesitó conocer las dimensiones del cubo? *c*) Suponga que el flujo magnético se debe a un imán permanente como el que se ilustra en la figura 27.11. Muestre en un diagrama en dónde debe localizarse el cubo del inciso *a*) en relación con el imán.

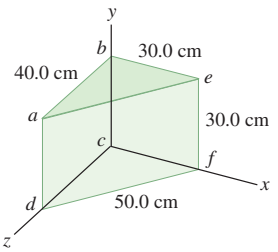
27.11. Un área circular con radio de 6.50 cm yace en el plano xy. ¿Cuál es la magnitud del flujo magnético a través de este círculo debido a un campo magnético uniforme $B = 0.230$ T, *a*) en la dirección $+z$; *b*) a un ángulo de 53.1° a partir de la dirección $+z$; *c*) en la dirección $+y$?

27.12. El campo magnético $\vec{B}$ en cierta región es de 0.128 T, y su dirección es la del eje $+z$ en la figura 27.45. *a*) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *abcd* en la figura? *b*) ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *befc*? *c*) ¿Cuál es el flujo magnético a través de

la superficie *aefd*? *d*) ¿Cuál es el flujo neto a través de las cinco superficies que encierran el volumen sombreado?

27.13. Una botella abierta de plástico de bebida gaseosa, con diámetro de abertura de 2.5 cm está colocada sobre una mesa. Un campo magnético uniforme de 1.75 T dirigido hacia arriba y orientado a 25° de la vertical rodea la botella. ¿Cuál es el flujo magnético total a través del plástico de la botella de bebida gaseosa?

Figura 27.45 Ejercicio 27.12.

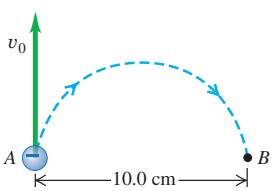


Sección 27.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

27.14. Una partícula con carga de 6.40×10^{-19} C recorre una órbita circular con radio de 4.68 mm debido a la fuerza ejercida sobre ella por un campo magnético con magnitud de 1.65 T y perpendicular a la órbita. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ de la partícula? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ de la partícula?

27.15. Un electrón en el punto *A* de la figura 27.46 tiene una rapidez v_0 de 1.41×10^6 m/s. Calcule *a*) la magnitud y la dirección del campo magnético que hará que el electrón siga la trayectoria semicircular entre *A* y *B*, y b) el tiempo requerido para que el electrón se mueva de *A* a *B*.

Figura 27.46 Ejercicio 27.15.



27.16. Repita el ejercicio 27.15 para el caso en que la partícula es un protón en vez de un electrón.

27.17. Se deja caer una pelota de 150 g que contiene 4.00×10^8 electrones excedentes hacia un pozo vertical de 125 m. En el fondo del pozo, la pelota entra de súbito en un campo magnético uniforme horizontal con magnitud de 0.250 T y dirección de este a oeste. Si la resistencia del aire es despreciablemente pequeña, encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que este campo magnético ejerce sobre la pelota cuando acaba de entrar al campo.

27.18. Una partícula alfa (núcleo de He que contiene dos protones y dos neutrones, y tiene una masa de 6.64×10^{-27} kg) se mueve horizontalmente a 35.6 km/s cuando entra a un campo magnético uniforme, vertical y con magnitud de 1.10 T. *a*) ¿Cuál es el diámetro de la trayectoria seguida por esta partícula alfa? *b*) ¿Qué efecto tiene el campo magnético sobre la rapidez de la partícula? *c*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula alfa mientras está en el campo magnético? *d*) Explique por qué la rapidez de la partícula no cambia aun cuando actúe sobre ella una fuerza externa desequilibrante.

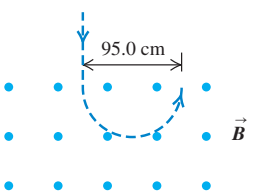
27.19. Reactor de fusión. Si dos núcleos de deuterio (carga $+e$, masa 3.34×10^{-27} kg) se acercan lo suficiente, la atracción de la fuerza nuclear fuerte los fundirá y formarán un isótopo de helio, de manera que se liberará una vasta cantidad de energía. El rango de esta fuerza es alrededor de 10^{-15} m. Éste es el principio tras el reactor de fusión. Los núcleos de deuterio se mueven demasiado rápido para ser contenidos por paredes físicas, por lo que se confinan usando el magnetismo. *a*) ¿Qué tan rápido tendrían que moverse dos núcleos para que en una colisión de frente se acerquen tanto que se fundan? (Trate a los núcleos como cargas puntuales, y suponga que se requiere una separación de 1.0×10^{-15} para que ocurra la fusión.) *b*) ¿Qué intensidad de campo magnético se necesita para hacer que núcleos de deuterio con esta rapidez viajen en un círculo de 2.50 m de diámetro?

27.20. *a*) Un núcleo ^{16}O (carga $+8e$) que se mueve horizontalmente de oeste a este con una rapidez de 500 km/s, experimenta una fuerza magnética de 0.00320 nN vertical hacia abajo. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético más débil que se requiere para generar esta fuerza. Explique cómo podría causarse esta misma fuerza con un campo magnético más grande. *b*) Un electrón se mueve en un campo magnético uniforme, horizontal, de 2.10 T dirigido hacia el oeste. ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de la velocidad mínima del electrón, para que la fuerza magnética sobre él sea de 4.60 pN vertical hacia arriba? Explique cómo la velocidad podría ser mayor que este valor mínimo con una fuerza de las mismas magnitud y dirección.

27.21. Un deuterón (núcleo de un isótopo de hidrógeno) tiene una masa de 3.34×10^{-27} kg y una carga de $+e$. El deuterón se mueve en una trayectoria circular con un radio de 6.96 mm en un campo magnético con magnitud de 2.50 T. *a*) Encuentre la rapidez del deuterón. *b*) Calcule el tiempo requerido para que recorra media revolución. *c*) ¿A través de cuál diferencia de potencial tendría que ser acelerado el deuterón para alcanzar tal rapidez?

27.22. En un experimento con rayos cósmicos, un haz vertical de partículas que tienen carga de magnitud $3e$, y masa de 12 veces la masa del protón, entra a un campo magnético uniforme y horizontal de 0.250 T y es doblado en un semicírculo de 95.0 cm de diámetro, como se indica en la figura 27.47. *a*) Encuentre la rapidez de las partículas y el signo de su carga. *b*) ¿Es razonable ignorar la fuerza de gravedad sobre las partículas? *c*) ¿Cómo se compara la rapidez de las partículas al entrar al campo con la rapidez que tienen al salir del campo?

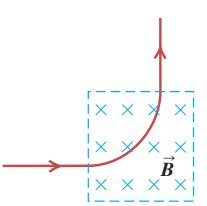
Figura 27.47 Ejercicio 27.22.



27.23. Un físico desea producir ondas electromagnéticas con 3.0 THz de frecuencia (1 THz = 1 terahertz = 10^{12} Hz) usando un magnetrón (véase el ejemplo 27.3). *a*) ¿Cuál sería el campo magnético necesario? Compare este campo con los campos magnéticos constantes más intensos que se han producido en la Tierra, de aproximadamente 45 T. *b*) ¿Habría alguna ventaja en usar protones en vez de electrones en el magnetrón? ¿Por qué?

27.24. Un haz de protones que se desplaza a 1.20 km/s entra a un campo magnético uniforme, viajando en forma perpendicular al campo. El haz sale del campo magnético en una dirección que es perpendicular con respecto a su dirección original (figura 27.48). El haz recorre una distancia de 1.18 cm *mientras está en el campo*. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

Figura 27.48 Ejercicio 27.24.



27.25. Un electrón del haz del cinescopio de un televisor es acelerado por una diferencia de potencial de 2.00 kV. Después pasa a través de una región de campo magnético transversal, donde se mueve en un arco circular con 0.180 m de radio. ¿Cuál es la magnitud del campo?

27.26. Un ion de ^{7}Li (un isótopo del litio) con una sola carga tiene una masa de 1.16×10^{-26} kg. Es acelerado a través de una diferencia de potencial de 220 V, y luego entra a un campo magnético de 0.723 T perpendicular a la trayectoria del ion. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del ion en el campo magnético?

27.27. Un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0.500\ \text{T})\hat{\imath}$. En $t = 0$ el protón tiene componentes de velocidad $v_x = 1.50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ y $v_z = 2.00 \times 10^5$ m/s (véase el ejemplo 27.4). *a*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre el protón? Además del campo magnético, hay un campo eléctrico uniforme en la dirección $+x$, $\vec{E} = (+2.00 \times 10^4\ \text{V/m})\hat{\imath}$. *b*) ¿El protón tendrá una componente de aceleración en la dirección del campo eléctrico? *c*) Describa la trayectoria del protón. ¿El campo eléctrico

afecta el radio de la hélice? Explique su respuesta. *d*) En $t = T/2$, donde T es el periodo del movimiento circular del protón, ¿cuál es la componente x del desplazamiento del protón a partir de su posición en $t = 0$?

Sección 27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas

27.28. *a*) ¿Cuál es la rapidez de un haz de electrones cuando la influencia simultánea de un campo eléctrico de 1.56×10^4 V/m y un campo magnético de 4.62×10^{-3} T, ambos campos normales al haz y entre sí, no produce desviación en los electrones? *b*) Muestre en un diagrama la orientación relativa de los vectores $\vec{v}$, $\vec{E}$ y $\vec{B}$. *c*) Cuando se elimina el campo eléctrico, ¿cuál es el radio de la órbita del electrón? ¿Cuál es el periodo de la órbita?

27.29. Una batería de 150 V está conectada a través de dos placas metálicas paralelas con área de 28.5 cm^2 y separadas 8.20 mm. Un haz de partículas alfa (carga de $+2e$, masa de 6.64×10^{-27} kg) es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1.75 kV y entra a la región entre las placas de manera perpendicular al campo eléctrico. ¿Qué magnitud y dirección del campo magnético se necesitan para que las partículas alfa salgan sin desviarse de entre las placas?

27.30. Campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ transversales. Una partícula con velocidad inicial $\vec{v}_0 = (5.85 \times 10^3 \text{ m/s})\hat{j}$ entra a una región de campos eléctrico y magnético uniformes. El campo magnético en la región es $\vec{B} = -(1.35 \text{ T})\hat{k}$. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región si la partícula debe pasarlo sin desviarse, para una partícula de carga *a*) +0.640 nC y *b*) −0.320 nC. Ignore el peso de la partícula.

27.31. Determinación de la masa de un isótopo. El campo eléctrico entre las placas del selector de velocidad en un espectrómetro de masas de Bainbridge (véase la figura 27.22) es de 1.12×10^5 V/m, y el campo magnético en ambas regiones es de 0.540 T. En el campo magnético, un torrente de iones de selenio con una sola carga cada uno se mueve en trayectoria circular con radio de 31.0 cm. Determine la masa de un ion de selenio y el número de masa de este isótopo de selenio. (El número de masa es igual a la masa del isótopo expresada en unidades de masa atómica, redondeado al entero más cercano. Una unidad de masa atómica = 1 u = 1.66×10^{-27} kg.)

27.32. En el espectrómetro de masas de Bainbridge (véase la figura 27.24), la magnitud del campo magnético en el selector de velocidad es de 0.650 T, y los iones cuya rapidez es de 1.82×10^6 m/s lo atraviesan sin desviarse. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el selector de velocidad? *b*) Si la separación de las placas es de 5.20 mm, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas P y P'?

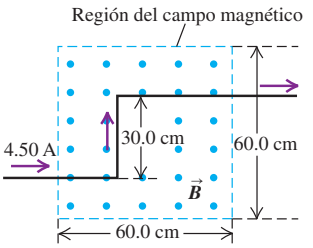
Sección 27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente

27.33. Un alambre rectilíneo de 2.00 m y 150 g conduce una corriente en una región donde el campo magnético terrestre es horizontal y con magnitud de 0.55 gauss. *a*) ¿Cuál es el valor mínimo que debe tener la corriente en el alambre, para que todo su peso esté soportado por la fuerza magnética del campo de la Tierra, si sobre él no actúa más fuerza que la gravedad? ¿Parece factible que un alambre así sea capaz de resistir este tamaño de corriente? *b*) Muestre cómo tendría que orientarse el alambre en relación con el campo magnético de la Tierra para que esté soportado en esa forma.

27.34. Un electroimán produce un campo magnético de 0.550 T en una región cilíndrica con radio de 2.50 cm entre sus polos. Un alambre rectilíneo que transporta una corriente de 10.8 A pasa por el centro de esta región en forma perpendicular a los ejes de la región cilíndrica y el campo magnético. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el alambre?

27.35. Un alambre largo que conduce una corriente de 4.50 A forma dos dobleces a 90°, como se muestra en la figura 27.49. La parte flexionada del alambre pasa a través de un campo magnético uniforme de 0.240 T dirigido como se indica en la figura y confinado a una región limitada del espacio. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que el campo magnético ejerce sobre el alambre.

Figura 27.49 Ejercicio 27.35.

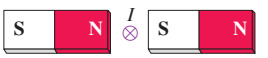


27.36. Un alambre rectilíneo y vertical transporta una corriente de 1.20 A dirigida hacia abajo en una región entre los polos de un gran electroimán superconductor, donde el campo magnético tiene una magnitud $B = 0.558$ T y es horizontal. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre una sección de 1.00 cm del alambre que se encuentra en este campo magnético uniforme, si la dirección del campo magnético es hacia *a*) el este, *b*) el sur, y *c*) 30.0° al sur del oeste?

27.37. Una varilla horizontal de 0.200 m de largo conduce corriente y está montada en una balanza. En el sitio donde se encuentra la varilla hay un campo magnético uniforme y horizontal con magnitud de 0.067 T y dirección perpendicular a la varilla. Con la balanza, se mide la fuerza magnética sobre la varilla y se observa que es de 0.13 N. ¿Cuál es el valor de la corriente?

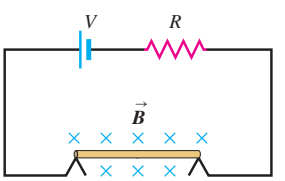
27.38. En la figura 27.50, un alambre que conduce corriente hacia el plano de la figura está entre los polos norte y sur de dos imanes de barra. ¿Cuál es la dirección de la fuerza ejercida por los imanes sobre el alambre?

Figura 27.50 Ejercicio 27.38.



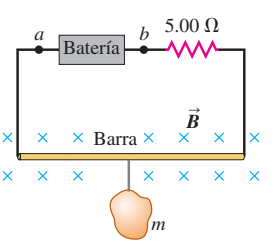
27.39. Una barra de metal delgada con 50.0 cm de longitud y masa de 750 g descansa sobre dos soportes metálicos, pero no unida a éstos, en un campo magnético uniforme de 0.450 T, como se ilustra en la figura 27.51. Una batería y un resistor de 25.0 Ω en serie están conectados a los soportes. *a*) ¿Cuál es el voltaje más alto que puede tener la batería sin que se interrumpa el circuito en los soportes? *b*) El voltaje de la batería tiene el valor máximo calculado en el inciso *a*). Si el resistor sufre de improviso un cortocircuito parcial, de modo que su resistencia baje a 2.0 Ω, calcule la aceleración inicial de la barra.

Figura 27.51 Ejercicio 27.39.



27.40. Balanza magnética. El circuito que se ilustra en la figura 27.52 se utiliza para construir una balanza magnética para pesar objetos. La masa m por medir cuelga del centro de la barra que se halla en un campo magnético uniforme de 1.50 T, dirigido hacia el plano de la figura. El voltaje de la batería se ajusta para hacer variar la corriente en el circuito. La barra horizontal mide 60.0 cm de largo y está hecha de un material extremadamente ligero. Está conectada a la batería mediante alambres delgados verticales que no resisten una tensión apreciable; todo el peso de la masa suspendida m está soportado por la fuerza

Figura 27.52 Ejercicio 27.40.



magnética sobre la barra. Un resistor con $R = 5.00\ \Omega$ está en serie con la barra; la resistencia del resto del circuito es mucho menor que esto. *a*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, debería ser la terminal positiva de la batería? *b*) Si el voltaje terminal máximo de la batería es de 175 V, ¿cuál es la masa más grande *m* que este instrumento es capaz de medir?

27.41. Considere el conductor y la corriente del ejemplo 27.8, pero ahora el campo magnético es paralelo al eje *x*. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética total sobre el conductor? *b*) En el ejemplo 27.8, la fuerza total es la misma que si se remplazara el semicírculo con un segmento rectilíneo a lo largo del eje *x*. ¿Esto sigue siendo verdadero cuando el campo magnético se encuentra en esta dirección diferente? ¿Puede explicar por qué?

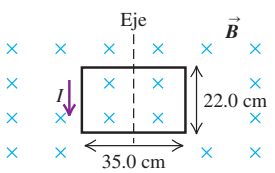
Sección 27.7 Fuerza y par de torsión en una espira de corriente

27.42. El plano de una espira de alambre rectangular, de 5.0 cm × 8.0 cm, es paralelo a un campo magnético de 0.19 T. La espira conduce una corriente de 6.2 A. *a*) ¿Cuál es el par de torsión que actúa sobre la espira? *b*) ¿Cuál es el momento magnético de la espira? *c*) ¿Cuál es el par de torsión máximo que se puede obtener con la misma longitud total de alambre que transporte la misma corriente en este campo magnético?

27.43. Momento magnético del átomo de hidrógeno. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (véase la sección 38.5), en el estado de menor energía, el electrón circunda al protón a una rapidez de 2.2×10^6 m/s en una órbita circular de radio 5.3×10^{-11} m. *a*) ¿Cuál es el periodo orbital del electrón? *b*) Si el electrón que orbita se considera una espira de corriente, ¿cuál es la corriente *I*? *c*) ¿Cuál es el momento magnético del átomo debido al movimiento del electrón?

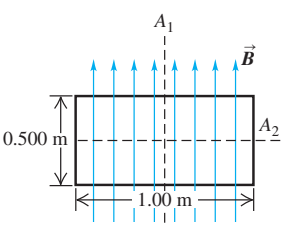
27.44. Una bobina rectangular de alambre, de 22.0 cm por 35.0 cm, conduce una corriente de 1.40 A y está orientada con el plano de su espira perpendicular a un campo magnético uniforme de 1.50 T, como se ilustra en la figura 27.53. *a*) Calcule la fuerza neta y par de torsión que el campo magnético ejerce sobre la bobina. *b*) Se gira la bobina un ángulo de 30.0° en torno al eje que se muestra, de modo que el lado izquierdo salga del plano de la figura y el derecho avance hacia el plano. Calcule la fuerza neta y el par de torsión que ahora el campo magnético ejerce sobre la bobina. (*Sugerencia:* para visualizar este problema en tres dimensiones, dibuje con cuidado la bobina vista a lo largo del eje de rotación.)

Figura 27.53 Ejercicio 27.44.



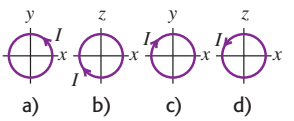
27.45. Una bobina rectangular uniforme con masa total de 210 g y dimensiones de 0.500 m × 1.00 m, está orientada en forma perpendicular a un campo magnético uniforme de 3.00 T (figura 27.54). De repente, se inicia una corriente de 2.00 A en la bobina. *a*) Sobre cuál eje (A_1 o A_2) comenzará a girar la bobina? ¿Por qué? *b*) Encuentre la aceleración angular inicial de la bobina apenas comienza a fluir la corriente.

Figura 27.54 Ejercicio 27.45.



27.46. Una bobina circular con área *A* y *N* vueltas tiene libertad para girar con respecto a un diámetro que coincide con el eje *x*. La corriente *I* circula en la bobina. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección *y* positiva. Calcule la magnitud y la dirección del par de torsión $\vec{\tau}$ y el valor de la energía potencial *U*, según se da en la ecuación (27.27), cuando la bobina está orientada como se ilustra en los incisos *a*) a *d*) de la figura 27.55.

Figura 27.55 Ejercicio 27.46.



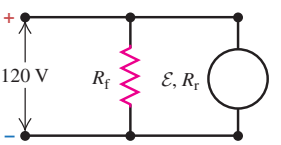
27.47. Una bobina con momento magnético de $1.45\ \text{A} \cdot \text{m}^2$ está orientada inicialmente con su momento magnético antiparalelo a un campo magnético uniforme de 0.835 T. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la bobina cuando se gira 180°, de modo que su momento magnético sea paralelo al campo?

*Sección 27.8 El motor de corriente directa

***27.48.** Un motor de cd con su rotor y bobinas de campo conectadas en serie tiene una resistencia interna de 3.2 Ω. Cuando el motor funciona con carga completa sobre una línea de 120 V, la fem en el rotor es de 105 V. *a*) ¿Cuál es la corriente que el motor toma de la línea? *b*) ¿Cuál es la potencia entregada al motor? *c*) ¿Cuál es la potencia mecánica que el motor desarrolla?

***27.49.** En un motor de cd devanado en derivación, las bobinas de campo y el rotor están conectados en paralelo (figura 27.56). La resistencia R_f de las bobinas de campo es de 106 Ω, y la resistencia R_r del rotor es de 5.9 Ω. Cuando una diferencia de potencial de 120 V se aplica a las escobillas y el motor funciona a su máxima rapidez, entregando energía mecánica, la corriente que se le suministra es de 4.82 A. *a*) ¿Cuál es la corriente en las bobinas del campo? *b*) ¿Cuál es la corriente en el rotor? *c*) ¿Cuál es la fem inducida que desarrolla el motor? *d*) ¿Cuánta potencia mecánica desarrolla este motor?

Figura 27.56 Ejercicios 27.49 y 27.50.

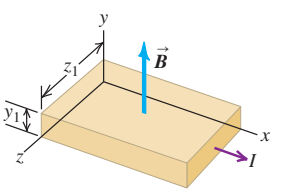


***27.50.** Un motor de cd devanado en derivación con las bobinas de campo y el rotor conectados en paralelo (figura 27.56), funciona conectado a una línea eléctrica de cd de 120 V. La resistencia de los devanados de campo, R_f, es de 218 Ω. La resistencia del rotor, R_r, es de 5.9 Ω. Cuando el motor está operando, el rotor desarrolla una fem $\mathcal{E}$. El motor toma una corriente de 4.82 A de la línea. Las pérdidas por fricción son de 45.0 W. Calcule *a*) la corriente del campo; *b*) la corriente del rotor; *c*) la fem $\mathcal{E}$; *d*) la tasa de desarrollo de energía térmica en los devanados del campo; *e*) la tasa de desarrollo de energía térmica en el rotor; *f*) la potencia de alimentación al motor; *g*) la eficiencia del motor.

* Sección 27.9 El efecto Hall

***27.51.** La figura 27.57 ilustra una porción de un listón de plata con $z_1 = 11.8$ mm y $y_1 = 0.23$ mm, que transporta una corriente de 120 A en la dirección $+x$. El listón se encuentra en un campo magnético uniforme, en la dirección *y*, con magnitud de 0.95 T. Aplique el modelo simplificado del efecto

Figura 27.57 Ejercicios 27.51 y 27.52.



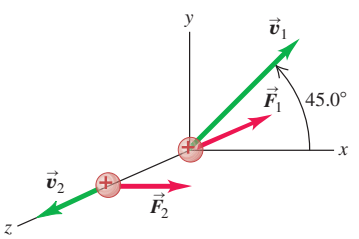
Hall que se presentó en la sección 27.9. Si hay 5.85×10^{28} electrones libres por metro cúbico, encuentre *a*) la magnitud de la velocidad de deriva de los electrones en la dirección x; *b*) la magnitud y la dirección del campo eléctrico en la dirección z debido al efecto Hall; *c*) la fem de Hall.

***27.52.** La figura 27.57 representa una banda de un metal desconocido de las mismas dimensiones que el listón de plata del ejercicio 27.51. Cuando el campo magnético es de 2.29 T y la corriente es de 78.0 A, la fem de Hall es de 131 μV. ¿Cuál es el resultado que proporciona el modelo simplificado del efecto Hall presentado en la sección 27.9, para la densidad de los electrones libres en el metal desconocido?

Problemas

27.53. Cuando una partícula con una carga $q > 0$ se mueve con una velocidad $\vec{v}_1$ orientada a 45.0° del eje $+x$ en el plano xy, un campo magnético uniforme ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ a lo largo del eje $-z$ (figura 27.58). Cuando la misma partícula se mueve con velocidad $\vec{v}_2$ con la misma magnitud que $\vec{v}_1$ pero a lo largo del eje $+z$, se ejerce sobre ella una fuerza $\vec{F}_2$ de magnitud F_2 a lo largo del eje $+x$. *a*) ¿Cuáles son la magnitud (en términos de q, v_1 y F_2) y la dirección del campo magnético? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{F}_1$ en términos de F_2?

Figura 27.58 Problema 27.53.



27.54. Una partícula con carga de 9.45×10^{-8} C se mueve en una región donde hay un campo magnético uniforme de 0.450 T en la dirección $+x$. En un instante específico, la velocidad de la partícula tiene componentes $v_x = -1.68 \times 10^4$ m/s, $v_y = -3.11 \times 10^4$ m/s y $v_z = 5.85 \times 10^4$ m/s. ¿Cuáles son las componentes de la fuerza sobre la partícula en este tiempo?

27.55. Usted quiere acertar en un blanco ubicado a varios metros de distancia, con una moneda cargada cuya masa es de 5.0 g y cuya carga es de +2500 μC. Da a la moneda una velocidad inicial de 12.8 m/s, y en la región existe un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo con intensidad de 27.5 N/C. Si apunta directamente al blanco y lanza la moneda horizontalmente, ¿qué magnitud y dirección del campo magnético uniforme en la región se necesitan para que la moneda dé en el blanco?

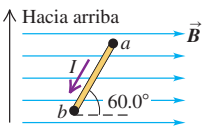
27.56. Un ciclotrón debe acelerar protones hasta una energía de 5.4 MeV. El electroimán del superconductor del ciclotrón produce un campo magnético de 3.5 T perpendicular a las órbitas de los protones. *a*) Cuando estos han alcanzado una energía cinética de 2.7 MeV, ¿cuál es el radio de su órbita circular y qué rapidez angular tienen? *b*) Repita el inciso *a*) cuando los protones hayan alcanzado su energía cinética final de 5.4 MeV.

27.57. Los polos magnéticos de un ciclotrón pequeño producen un campo magnético con magnitud de 0.85 T. Los polos tienen un radio de 0.40 m, que es el radio máximo de las órbitas de las partículas aceleradas. *a*) ¿Cuál es la energía máxima a la que los protones ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se pueden acelerar en este ciclotrón? Exprese la respuesta en electrón volt y joule. *b*) ¿Cuál es el tiempo que se requiere para completar una revolución de un protón que orbite con este radio máximo? *c*) ¿Cuál tendría que ser la magnitud del campo magnético para la máxima energía con la finalidad de que un protón se acelere al doble de lo que se calculó en el inciso *a*)? *d*) Para $B = 0.85$ T, ¿cuál es la energía máxima a la que las partículas alfa ($q = 3.20 \times 10^{-19}$ C, $m = 6.65 \times 10^{-27}$ kg) se pueden acelerar con el ciclotrón? ¿Cómo se compara esto con la energía máxima para los protones?

27.58. La fuerza sobre una partícula cargada, que se mueve en un campo magnético, se calcula como la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada componente por separado del campo magnético. Como ejemplo, una partícula con carga q se mueve con rapidez v en dirección $-y$, y lo hace en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$. *a*) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza $\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre la partícula? *b*) Si $q > 0$, ¿cuáles deben ser los signos de las componentes de $\vec{B}$, si las componentes de $\vec{F}$ son todas no negativas? *c*) Si $q < 0$ y $B_x = B_y = B_z > 0$, encuentre la dirección y la magnitud de $\vec{F}$ en términos de $|q|$, v y B_x.

27.59. Una barra metálica uniforme de 458 g y 75.0 cm de largo conduce una corriente I en un campo magnético uniforme y horizontal de 1.55 T, como se ilustra en la figura 27.59. La barra está articulada en b pero descansa sin sujeción en a. ¿Cuál es la mayor corriente que puede fluir de a a b sin que se interrumpa el contacto eléctrico en a?

Figura 27.59 Problema 27.59.



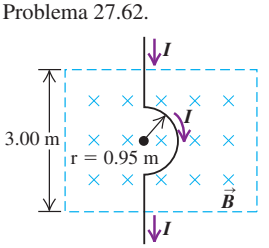
27.60. En el cañón de electrones de un cinescopio de televisor, los electrones (carga $-e$ y masa m) son acelerados por un voltaje V. Después de salir del cañón, el haz de electrones recorre una distancia D hasta la pantalla; en esta región hay un campo magnético transversal de magnitud B y no hay campo eléctrico. *a*) Dibuje la trayectoria del haz de electrones en el cinescopio. *b*) Demuestre que la desviación aproximada del haz debida a este campo magnético es

$$d = \frac{BD^2}{2}\sqrt{\frac{e}{2mV}}$$

(*Sugerencia:* coloque el origen en el centro del arco del haz de electrones y compare la trayectoria de un haz sin desviación con la de otro haz con desviación.) *c*) Evalúe esta expresión para $V = 750$ V, $D = 50$ cm y $B = 5.0 \times 10^{-5}$ T (comparable con el campo de la Tierra). ¿Es significativa esta desviación?

27.61. Una partícula con carga negativa q y masa $m = 2.58 \times 10^{-15}$ kg se mueve por una región que contiene un campo magnético uniforme $\vec{B} = -(0.120\ \text{T})\hat{k}$. En un instante de tiempo específico, la velocidad de la partícula es $\vec{v} = (1.05 \times 10^6\ \text{m/s})(-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k})$ y la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula tiene una magnitud de 1.25 N. *a*) Determine la carga q. *b*) Determine la aceleración $\vec{a}$ de la partícula. *c*) Explique por qué la trayectoria de la partícula es una hélice, y determine el radio de curvatura R de la componente circular de la trayectoria helicoidal. *d*) Determine la frecuencia de ciclotrón de la partícula. *e*) Aunque el movimiento helicoidal no es periódico en el sentido real de la palabra, las coordenadas x y y varían en forma periódica. Si las coordenadas de la partícula en $t = 0$ son $(x, y, z) = (R, 0, 0)$, determine sus coordenadas en el momento $t = 2T$, donde T es el periodo del movimiento en el plano xy.

Figura 27.60 Problema 27.62.



27.62. Un alambre rectilíneo largo contiene una región semicircular con radio de 0.95 m, y está colocado en un campo magnético uniforme de magnitud 2.20 T, como se ilustra en la figura 27.60. ¿Cuál es la fuerza magnética neta que actúa sobre el alambre cuando conduce una corriente de 3.40 A?

27.63. Un campo magnético ejerce un par de torsión τ sobre una espira de alambre redondo que lleva una corriente. ¿Cuál será el par de torsión sobre esta espira (en términos de τ) si su diámetro se triplica?

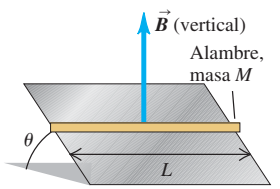
27.64. Una partícula de carga $q > 0$ se mueve con rapidez v en la dirección $+z$ a través de una región de campo magnético uniforme $\vec{B}$. La fuerza magnética sobre la partícula es $\vec{F} = F_0(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})$, donde F_0 es una constante positiva. *a*) Determine las componentes B_x, B_y y B_z, o las que sea posible con la información brindada. *b*) Si además se tiene el dato de que la magnitud del campo magnético es de $6F_0/qv$, determine tantas de las componentes restantes de $\vec{B}$ como sea posible.

27.65. Suponga que el campo eléctrico entre las placas P y P' en la figura 27.24 es de 1.88×10^4 V/m y el campo magnético en ambas regiones es de 0.701 T. Si la fuente contiene los tres isótopos de criptón, ^{82}Kr, ^{84}Kr y ^{86}Kr, y los iones tienen una sola carga, encuentre la distancia entre las líneas que los tres isótopos en la placa fotográfica forman. Suponga que las masas atómicas de los isótopos (en unidades de masa atómica) son iguales a sus números de masa 82, 84 y 86. (Una unidad de masa atómica $= 1$ u $= 1.66 \times 10^{-27}$ kg.)

27.66. Espectrógrafo de masas. Un espectrógrafo de masas se utiliza para medir las masas de los iones, o para separar los iones con masas diferentes (véase la sección 27.5). En un diseño de tal instrumento, los iones con masa m y carga q se aceleran a través de una diferencia de potencial V. Después entran a un campo magnético uniforme perpendicular a su velocidad, y sufren una desviación en una trayectoria semicircular de radio R. Un detector mide el sitio donde los iones completan el semicírculo y, a partir de esto, es fácil calcular el valor de R. *a*) Obtenga la ecuación para calcular la masa del ion a partir de las mediciones de B, V, R y q. *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V que se necesita para que átomos monoionizados de ^{12}C tengan $R = 50.0$ cm en un campo magnético de 0.150 T? *c*) Suponga que el haz consiste en una mezcla de iones de ^{12}C y ^{14}C. Si V y B tienen los mismos valores que en el inciso *b*), calcule la separación de estos dos isótopos en el detector. ¿Piensa que la separación de este haz es suficiente para distinguir los dos iones? (Haga la suposición descrita en el problema 27.65 para las masas de los iones.)

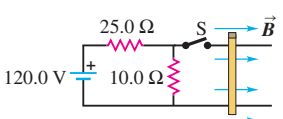
27.67. Un tramo recto de alambre conductor con masa M y longitud L se coloca en un plano inclinado sin fricción con un ángulo θ a partir de la horizontal (figura 27.61). En todos los puntos hay un campo magnético uniforme y vertical $\vec{B}$ (producido por un arreglo de imanes que no se muestran en la figura). Para evitar que el alambre se deslice por el plano inclinado, se acopla una fuente de voltaje en los extremos del alambre, de modo que el alambre permanece en reposo justo cuando fluye por él la cantidad correcta de corriente. Determine la magnitud y dirección de la corriente en el alambre que hará que esté en reposo. Haga una copia de la figura y dibuje en ella la dirección de la corriente. Además, muestre en un diagrama de cuerpo libre todas las fuerzas que actúen sobre el alambre.

Figura **27.61** Problema 27.67.



27.68. Una barra metálica de 3.00 N y 1.50 m de longitud tiene una resistencia de 10.0 Ω y descansa horizontal sobre alambres conductores que la conectan al circuito de la figura 27.62. La barra está en un campo magnético uniforme horizontal de 1.60 T, y no está sujeta a los alambres del circuito. ¿Cuál es la aceleración de la barra justo después de que se cierra el interruptor S?

Figura **27.62** Problema 27.68.



27.69. Dos iones positivos tienen la misma carga q pero diferentes masas m_1 y m_2, y se aceleran horizontalmente a partir del reposo, a través de una diferencia de potencial V. Después entran a una región donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ normal al plano de la trayectoria. *a*) Demuestre que si el haz ingresó al campo magnético a lo largo del eje x, el valor de la coordenada y para cada ion en cualquier tiempo t es aproximadamente

$$y = Bx^2\left(\frac{q}{8mV}\right)^{1/2}$$

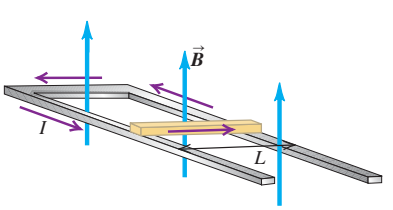
siempre que y sea mucho menor que x. *b*) ¿Se puede usar este arreglo para la separación de isótopos? ¿Por qué?

27.70. Una espira circular de plástico con radio R y carga positiva q está distribuida uniformemente alrededor de la circunferencia de la espira. Después, ésta se gira alrededor de su eje central, perpendicular al plano de la espira, con rapidez angular ω. Si la espira está en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido en forma paralela al plano de la espira, calcule la magnitud del par de torsión magnético sobre la espira.

27.71. Determinación de la dieta. Un método para determinar la cantidad de maíz en las dietas de los antiguos indígenas norteamericanos es la técnica del *análisis de la razón del isótopo estable* (ARIE). Cuando el maíz hace la fotosíntesis, concentra el isótopo carbono 13, mientras que la mayoría de las demás plantas concentran el carbono 12. El consumo excesivo del maíz se puede relacionar con ciertas enfermedades, porque el maíz carece del aminoácido esencial lisina. Los arqueólogos utilizan espectrómetros de masas para separar los isótopos ^{12}C y ^{13}C en muestras de restos humanos. Suponga que usa un selector de velocidad para obtener átomos monoionizados (que perdieron un electrón) con rapidez de 8.50 km/s, y quiere flexionarlos dentro de un campo magnético uniforme en un semicírculo con diámetro de 25.0 cm para el ^{12}C. Las masas medidas de estos isótopos son 1.99×10^{-26} kg (^{12}C) y 2.16×10^{-26} kg (^{13}C). *a*) ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere? *b*) ¿Cuál es el diámetro del semicírculo para el ^{13}C? *c*) ¿Cuál es la separación de los iones ^{12}C y ^{13}C en el detector al final del semicírculo? ¿Esta distancia es suficientemente grande para observarse con facilidad?

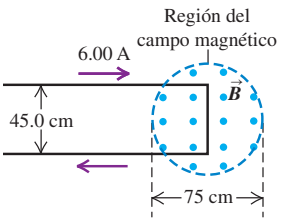
27.72. Cañón electromagnético de rieles. Una barra conductora con masa m y longitud L se desliza sobre rieles horizontales que están conectados a una fuente de voltaje, la cual mantiene una corriente constante I en los rieles y la barra, y un campo magnético uniforme, constante y vertical, $\vec{B}$ llena la región entre los rieles (figura 27.63). *a*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza neta sobre la barra conductora. Ignore la fricción, y las resistencias del aire y eléctrica. *b*) Si la barra tiene masa m, obtenga la distancia d que debe la barra moverse a lo largo de los rieles, si parte del reposo para alcanzar una rapidez v. *c*) Se ha sugerido que los cañones de rieles con base en este principio podrían acelerar cargas hasta una órbita terrestre o más lejos aún. Encuentre la distancia que la barra debe recorrer sobre los rieles para alcanzar la rapidez de escape de la Tierra (11.2 km/s). Sea $B = 0.50$ T, $I = 2.0 \times 10^3$ A, $m = 25$ kg y $L = 50$ cm. Por sencillez, suponga que la fuerza neta sobre el objeto es igual a la fuerza magnética de los incisos *a*) y *b*), aun cuando la gravedad juega un papel importante en un lanzamiento real al espacio.

Figura **27.63** Problema 27.72.



27.73. Un alambre largo que transporta una corriente de 6.00 A invierte su dirección mediante dos flexiones de ángulo recto, como se indica en la figura 27.64. La parte del alambre donde ocurre la flexión está en un campo magnético de 0.666, T confinado a una región circular con 75 cm de diámetro, como se observa. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza neta que el campo magnético ejerce sobre este alambre.

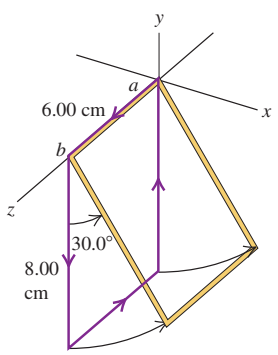
Figura **27.64** Problema 27.73.



27.74. Un alambre de 25.0 cm de largo está sobre el eje z y conduce una corriente de 9.00 A en la dirección $+z$. El campo magnético es uniforme y tiene componentes $B_x = -0.242$ T, $B_y = -0.985$ T y $B_z = -0.336$ T. *a*) Encuentre las componentes de la fuerza magnética sobre el alambre. *b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética neta sobre el alambre?

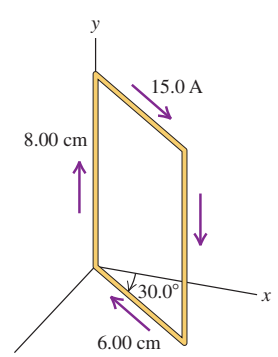
27.75. La espira rectangular de alambre que se ilustra en la figura 27.65 tiene una masa de 0.15 g por centímetro de longitud, y gira sobre el lado *ab* en un eje sin fricción. La corriente en el alambre es de 8.2 A en la dirección que se ilustra. Encuentre la magnitud y la dirección del campo magnético paralelo al eje y que ocasionará que la espira se balancee hasta que su plano forme un ángulo de 30.0° con el plano yz.

Figura **27.65** Problema 27.75.



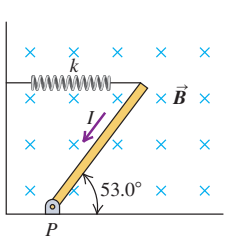
27.76. La espira rectangular que se muestra en la figura 27.66 gira sobre el eje y y conduce una corriente de 15.0 A en la dirección indicada. *a*) Si la espira está en un campo magnético uniforme con magnitud de 0.48 T en la dirección $+x$, calcule la magnitud y la dirección del par de torsión que se requiere para mantener la espira en la posición que se muestra. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que el campo esté en la dirección $-z$. *c*) Para cada uno de los campos magnéticos mencionados, ¿cuál es el par de torsión que se requeriría si la espira girara en trono a un eje que pasa por su centro, paralelo al eje y?

Figura **27.66** Problema 27.76.



27.77. Una varilla delgada y uniforme con masa despreciable mide 0.200 m y está sujeta al piso por una bisagra sin fricción en el punto P (figura 27.67). Un resorte horizontal con fuerza constante de $k = 4.80$ N/m enlaza el otro extremo de la varilla con una pared vertical. La varilla está en un campo magnético uniforme $B = 0.340$ T dirigido hacia el plano de la figura. En la varilla hay una corriente $I = 6.50$ A, en la dirección que se aprecia. *a*) Calcule el par de torsión debido a la fuerza magnética sobre la varilla, para un eje en P. Cuando se calcula el par, ¿es correcto tomar la fuerza magnética total como si actuara en el centro de gravedad de la varilla? Explique su respuesta.

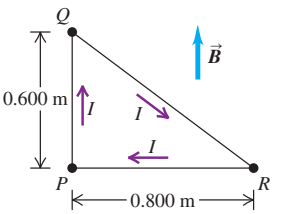
Figura **27.67** Problema 27.77.



b) Cuando la varilla está en equilibrio y forma un ángulo de 53.0° con el piso, ¿el resorte se estira o comprime? *c*) ¿Cuánta energía almacenada hay en el resorte cuando la varilla está en equilibrio?

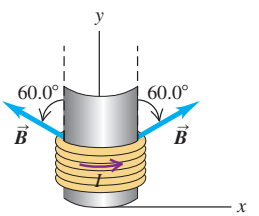
27.78. La espira triangular de alambre que se muestra en la figura 27.68 conduce una corriente $I = 5.00$ A en la dirección que se indica. La espira está en un campo magnético uniforme con magnitud $B = 3.00$ T y en la misma dirección que la corriente en el lado PQ de la espira. *a*) Calcule la fuerza ejercida por el campo magnético en cada lado del triángulo. Si la fuerza es diferente de cero, especifique su dirección. *b*) ¿Cuál es la fuerza neta en la espira? *c*) La espira gira en torno a un eje situado a lo largo del lado PR. Use las fuerzas calculadas en el inciso *a*) para calcular el par de torsión sobre cada lado de la espira (véase el problema 27.77). *d*) ¿Cuál es la magnitud del par de torsión neto sobre la espira? Calcule el par de torsión neto a partir de los pares de torsión calculados en el inciso *c*) y también con la ecuación (27.28). ¿Concuerdan estos resultados? *e*) ¿El par de torsión neto está dirigido para girar el punto Q hacia el plano de la figura o hacia fuera de este plano?

Figura **27.68** Problema 27.78.



27.79. Bobina del sonido. En la sección 27.7 se demostró que la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es igual a cero. La fuerza magnética en la bobina del sonido de un altavoz (véase la figura 27.28) es distinta de cero debido a que el campo magnético en la bobina no es uniforme. La bobina del sonido en un altavoz tiene 50 vueltas de alambre y un diámetro de 1.56 cm, y la corriente en la bobina es de 0.950 A. Suponga que el campo magnético en cada punto de la bobina tiene una magnitud constante de 0.220 T y está dirigida con un ángulo de 60.0° hacia fuera de la normal al plano de la bobina (figura 27.69). Sea que el eje de la bobina esté en la dirección y. La corriente en la bobina está en la dirección que se muestra (en sentido antihorario, vista desde un punto por arriba de la bobina, sobre el eje y). Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza magnética neta sobre la bobina.

Figura **27.69** Problema 27.79.



27.80. Paleoclima. Los climatólogos determinan temperaturas del pasado en la Tierra al comparar la razón del isótopo del oxígeno 18 con el isótopo de oxígeno 16 en el aire atrapado en capas de hielo antiguas, como las de Groenlandia. En un método para separar estos isótopos, primero se monoioniza (se elimina un electrón) una muestra que contiene a ambos y luego se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial V. Después, este haz ingresa a un campo magnético B a ángulos rectos con el campo y se flexiona en un cuarto de círculo. Un detector de partículas en el extremo de la trayectoria mide la cantidad de cada isótopo. *a*) Demuestre que la separación Δr de los dos isótopos en el detector está dada por

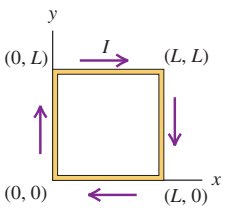
$$\Delta r = \frac{\sqrt{2eV}}{eB}\left(\sqrt{m_{18}} - \sqrt{m_{16}}\right)$$

donde m_{16} y m_{18} son las masas de los dos isótopos de oxígeno. *b*) Las masas medidas de los dos isótopos son 2.66×10^{-26} kg (^{16}O) y 2.99×10^{-26} kg (^{18}O). Si el campo magnético tiene una intensidad de 0.050 T, ¿cuál debe ser el potencial de aceleración V, de modo que estos dos isótopos estén separados por una distancia de 4.00 cm en el detector?

27.81. Fuerza sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme. En la sección 27.7 se demostró que la fuerza neta

sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es igual a cero. Pero, ¿qué ocurre si $\vec{B}$ *no* es uniforme? La figura 27.70 muestra una espira cuadrada de alambre que está en el plano xy. Las esquinas de la espira están en (0, 0), (0, L), (L, 0) y (L, L), y transporta una corriente constante I en sentido horario. El campo magnético no tiene componente x pero sí las otras dos componentes, y y z: $\vec{B} = (B_0 z/L)\hat{j} + (B_0 y/L)\hat{k}$, donde B_0 es una constante positiva. *a*) Dibuje las líneas de campo magnético en el plano yz. *b*) Con la integración de la ecuación (27.20), encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre cada uno de estos lados de la espira. *c*) Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza magnética neta sobre la espira.

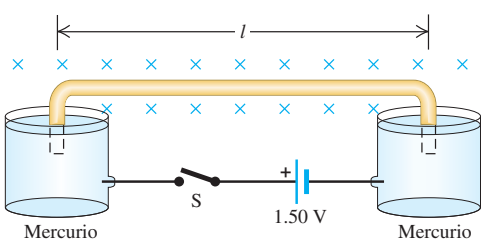
Figura **27.70** Problemas 27.81 y 27.82.



27.82. Par de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme. En la sección 27.7 se obtuvo la expresión para el par de torsión sobre una espira de corriente, suponiendo que el campo magnético $\vec{B}$ era uniforme. Pero, ¿qué sucede si $\vec{B}$ *no* es uniforme? La figura 27.70 muestra una espira de alambre cuadrada que está en el plano xy. La espira tiene esquinas en (0, 0), (0, L), (L, 0) y (L, L), y conduce una corriente constante I en sentido horario. El campo magnético no tiene componente z pero sí las otras dos componentes, x y y: $\vec{B} = (B_0 y/L)\hat{i} + (B_0 x/L)\hat{j}$, donde B_0 es una constante positiva. *a*) Dibuje las líneas de campo magnético en el plano xy. *b*) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre cada uno de los lados de la espira al integrar la ecuación (27.20). *c*) Si la espira tiene libertad para girar sobre el eje x, encuentre la magnitud y la dirección del par de torsión magnético sobre la espira. *d*) Repita el inciso *c*) para el caso en que la espira tiene libertad para girar en torno al eje y. *e*) ¿La ecuación (27.26), $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, es una buena descripción del par de torsión sobre esta espira? ¿Por qué?

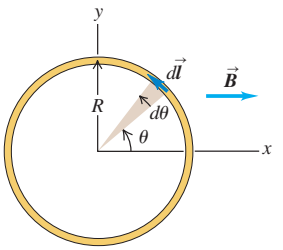
27.83. Un alambre aislado con masa $m = 5.40 \times 10^{-5}$ kg está flexionado en la forma de U invertida, de modo que la parte horizontal tiene longitud $l = 15.0$ cm. Los extremos flexionados del alambre están sumergidos parcialmente en dos estanques de mercurio, con 2.5 cm de cada uno bajo la superficie del mercurio. Toda la estructura está en una región que contiene un campo magnético uniforme de 0.00650 T dirigido hacia la página (figura 27.71). Se hace una conexión eléctrica entre los estanques de mercurio a través de los extremos de los alambres. Los estanques de mercurio están conectados a una batería de 1.50 V y a un interruptor S. Cuando este último se encuentra cerrado, el alambre salta 35.0 cm en el aire, medidos desde su posición inicial. *a*) Determine la rapidez v del alambre en el momento en que sale del mercurio. *b*) Suponga que la corriente I a través del alambre era constante desde el momento en que se cerró el interruptor hasta que el alambre salió el mercurio, determine el valor de I. *c*) Ignore la resistencia del mercurio y los alambres del circuito, y determine la resistencia del alambre móvil.

Figura **27.71** Problema 27.83.



27.84. Obtención de la ecuación (27.26) para una espira circular de corriente. Un anillo de alambre yace en el plano xy con su centro en el origen. El anillo conduce una corriente I en sentido antihorario (figura 27.72). Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ está en la dirección $+x$, $\vec{B} = B_x\hat{i}$. (El resultado se extiende con facilidad a $\vec{B}$ en una dirección arbitraria.) *a*) En la figura 27.72, demuestre que el elemento $d\vec{l} = R\,d\theta(-\text{sen}\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$, y encuentre $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$. *b*) Integre $d\vec{F}$ alrededor de la espira para demostrar que la fuerza neta es igual a cero. *c*) A partir del inciso *a*), encuentre $d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$, donde $\vec{r} = R(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\theta\hat{j})$ es el vector que va del centro de la espira al elemento $d\vec{l}$. (Observe que $d\vec{l}$ es perpendicular a $\vec{r}$.) *d*) Integre $d\vec{\tau}$ sobre la espira para encontrar el par de torsión total $\vec{\tau}$ sobre la espira. Demuestre que el resultado se puede escribir como $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, donde $\mu = IA$. (*Nota:* $\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\text{sen}2x$, $\int\text{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\text{sen}2x$, y $\int\text{sen}x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}^2 x$.)

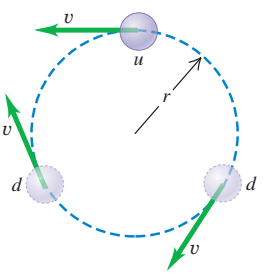
Figura **27.72** Problema 27.84.



27.85. Una espira circular de alambre con área A está en el plano xy. Vista a lo largo del eje z, desde $-z$ hacia el origen, hay una corriente I que circula en sentido horario alrededor de la espira. El par de torsión producido por un campo magnético exterior $\vec{B}$ está dado por $\vec{\tau} = D(4\hat{i} - 3\hat{j})$, donde D es una constante positiva, y para esta orientación de la espira, la energía potencial magnética $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ es negativa. La magnitud del campo magnético es $B_0 = 13D/IA$. *a*) Determine el momento magnético vectorial de la espira de corriente. *b*) Determine las componentes B_x, B_y y B_z de $\vec{B}$.

27.86. Modelo de los quarks para el neutrón. El neutrón es una partícula con carga igual a cero. No obstante, tiene un momento magnético distinto de cero con componente z de 9.66×10^{-27} A · m^2. Esto queda explicado por la estructura interna del neutrón. Hay muchas evidencias que indican que un neutrón está compuesto por tres partículas fundamentales llamadas *quarks*: un quark "arriba" (u) con carga $+2e/3$; y dos quarks "abajo" (d), cada uno con carga $-e/3$. La combinación de los tres quarks produce una carga neta de $2e/3 - e/3 - e/3 = 0$. Si los quarks están en movimiento, producen un momento magnético distinto de cero. Como un modelo muy sencillo, suponga que el quark u se mueve en una trayectoria circular en sentido antihorario, y que los quarks d se mueven con trayectoria circular en sentido horario, todos con radio r y la misma rapidez v (figura 27.73). *a*) Determine la corriente debida a la circulación del quark u. *b*) Calcule la magnitud del momento magnético debido al quark u en circulación. *c*) Obtenga la magnitud del momento magnético del sistema de tres quarks. (Tenga cuidado con el uso de las direcciones correctas del momento magnético.) *d*) ¿Con qué rapidez v deben moverse los quarks para que este modelo reproduzca el momento magnético del neutrón? Utilice $r = 1.20 \times 10^{-15}$ m (el radio del neutrón) como radio de las órbitas.

Figura **27.73** Problema 27.86.



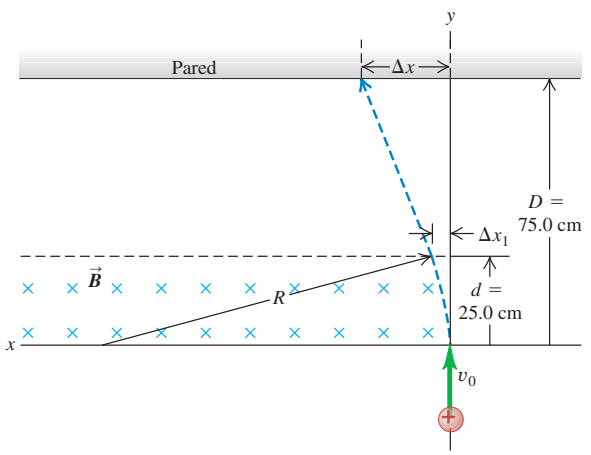
27.87. Uso de la ley de Gauss del magnetismo. En cierta región del espacio, el campo magnético $\vec{B}$ no es uniforme. El campo magnético tiene una componente z y otra componente que apunta radialmente hacia fuera del eje z o hacia éste. La componente z está dada por $B_z(z) = \beta z$, donde β es una constante positiva. La componente radial B_r depende sólo de r, la distancia radial desde el eje z. *a*) Use la ley de Gauss para el magnetismo, ecuación (27.8), y encuentre la componente radial B_r en función de r (*Sugerencia:* pruebe con una superficie gaussiana cilíndrica de radio r concéntrica con el eje z, con un extremo en $z = 0$, y el otro en $z = L$.) Dibuje las líneas de campo magnético.

27.88. Un anillo circular con área de 4.45 cm^2 conduce una corriente de 12.5 A. El anillo tiene libertad para girar alrededor de un diámetro y, al inicio, está en reposo inmerso en una región de campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = (1.15 \times 10^{-2}\ \text{T})(12\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})$. El anillo está situado al principio, de modo que su momento magnético está dado por $\vec{\mu}_i = \mu(-0.800\hat{\imath} + 0.600\hat{\jmath})$, donde μ es la magnitud (positiva) del momento magnético. El anillo se libera y gira un ángulo de 90.0°, punto en que su momento magnético está dado por $\vec{\mu}_f = -\mu\hat{k}$. *a*) Determine la disminución de la energía potencial. *b*) Si el momento de inercia del anillo alrededor del diámetro es de $8.50 \times 10^{-7}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$, determine la rapidez angular del anillo conforme pasa a través de la segunda posición.

Problemas de desafío

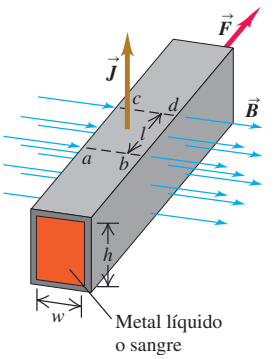
27.89. Una partícula, con carga de 2.15 μC y masa de 3.20×10^{-11} kg, viaja inicialmente en la dirección $+y$ con rapidez $v_0 = 1.45 \times 10^5$ m/s. Después, entra a una región que contiene un campo magnético uniforme dirigido hacia la parte interna página y perpendicular a ésta en la figura 27.74. La magnitud del campo es 0.420 T. La región se extiende una distancia de 25.0 cm a lo largo de la dirección inicial del recorrido; a 75.0 cm desde el punto de entrada en la región del campo magnético hay una pared. Entonces, la longitud de la región libre del campo es de 50.0 cm. Cuando la partícula cargada ingresa al campo magnético, sigue una trayectoria curva cuyo radio de curvatura es R. Después de un tiempo t_1 sale del campo magnético y se desvía una distancia Δx_1. Entonces, la partícula viaja en la región libre del campo y choca contra la pared después de haber sufrido una desviación total Δx. *a*) Determine el radio R de la parte curva de la trayectoria. *b*) Determine t_1, el tiempo que la partícula pasa en el campo magnético. *c*) Obtenga el valor de Δx_1, la desviación horizontal en el punto de salida del campo. *d*) Calcule Δx, la desviación horizontal total.

Figura **27.74** Problema de desafío 27.89.



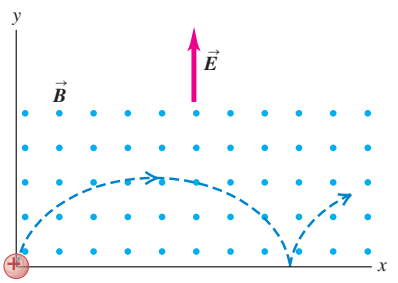
27.90. Bomba electromagnética. Las fuerzas magnéticas que actúan sobre fluidos conductores ofrecen un medio conveniente para bombear tales fluidos. Por ejemplo, este método se puede usar para bombear sangre sin el daño que una bomba mecánica haría a las células. Un tubo horizontal con sección transversal rectangular (altura h, ancho w) se coloca en ángulos rectos con un campo magnético uniforme con magnitud B, de modo que una longitud l está en el campo (figura 27.75). El tubo se llena con un líquido conductor, y se mantiene una corriente eléctrica con densidad J en la tercera dirección mutuamente perpendicular. *a*) Demuestre que la diferencia de presiones entre un punto del líquido en un plano vertical a través de *ab* y otro punto del líquido en otro plano vertical a través de *cd*, en condiciones en que se impide que el líquido fluya, es $\Delta p = JlB$. *b*) ¿Cuál es la densidad de corriente que se necesita para obtener una diferencia de presiones de 1.00 atm entre estos dos puntos, si $B = 2.20$ T y $l = 35.0$ mm?

Figura **27.75** Problema de desafío 27.90.



27.91. Trayectoria cicloidal. Una partícula con masa m y carga positiva q parte del reposo en el origen, como se ilustra en la figura 27.76. Hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ en la dirección $+y$ y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia fuera de la página. En libros más avanzados se demuestra que la trayectoria es una *cicloide*, cuyo radio de curvatura en los puntos superiores es el doble de la coordenada y en ese nivel. *a*) Explique por qué la trayectoria tiene esta forma general y la razón de que se repita. *b*) Demuestre que la rapidez en cualquier punto es igual a $\sqrt{2qEy/m}$. (*Sugerencia:* use la conservación de la energía.) *c*) Aplique la segunda ley de Newton en el punto más alto y tome al radio de curvatura como $2y$, para demostrar que la rapidez en este punto es $2E/B$.

Figura **27.76** Problema de desafío 27.91.



FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO

28

? El inmenso cilindro que aparece en esta fotografía, en realidad, es una bobina conductora de corriente, o solenoide, que genera un campo magnético uniforme en su interior, como parte de un experimento realizado en el Laboratorio Europeo para Física de Partículas (CERN). Si dos de tales solenoides se unieran por sus extremos, ¿qué tan fuerte sería el campo magnético?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La naturaleza del campo magnético producido por una sola partícula con carga en movimiento.
- A describir el campo magnético producido por un elemento de un conductor portador de corriente.
- A calcular el campo magnético producido por un alambre largo y recto que conduzca corriente.
- Por qué los alambres que conducen corrientes en el mismo sentido se atraen, mientras los que conducen corrientes en sentidos opuestos se repelen.
- Cómo calcular el campo magnético generado por un alambre portador de corriente doblado en círculo.
- Qué es la ley de Ampère y qué nos dice acerca de los campos magnéticos.
- A usar la ley de Ampère para calcular el campo magnético de distribuciones simétricas de corriente.

En el capítulo 27 estudiamos las fuerzas ejercidas sobre cargas en movimiento y conductores que transportan corriente en un campo magnético. No interesa cómo llegó ahí el campo magnético: sólo su existencia como un hecho. Pero, ¿cómo se *crean* los campos magnéticos? Sabemos que los imanes permanentes y las corrientes eléctricas en los electroimanes crean campos magnéticos. Ahora estudiaremos esas fuentes de campo magnético.

Vimos que una carga crea un campo eléctrico y que éste ejerce una fuerza sobre una carga. Un campo *magnético* ejerce una fuerza sólo sobre una carga *en movimiento*. ¿Es verdad que una carga *crea* un campo magnético sólo cuando está en movimiento? En una palabra, sí. Estudiaremos el campo magnético creado por una sola carga puntual en movimiento, lo cual nos servirá para determinar el campo creado por un segmento pequeño de un conductor que transporta corriente. Así, es posible encontrar el campo magnético producido por un conductor de *cualquier* forma.

La ley de Ampère, en el magnetismo, desempeña un papel análogo al de la ley de Gauss en la electrostática, y permite aprovechar las propiedades de la simetría para relacionar los campos magnéticos con sus fuentes. Las partículas móviles con carga dentro de los átomos responden a los campos magnéticos y actúan como fuentes del campo magnético. Usaremos estas ideas para comprender cómo se emplean ciertos materiales magnéticos para intensificar los campos magnéticos, y por qué algunos materiales, como el hierro, actúan como imanes permanentes.

28.1 Campo magnético de una carga en movimiento

Comenzaremos con lo fundamental: el campo magnético de una sola carga puntual q que se mueve con velocidad constante $\vec{\boldsymbol{v}}$. En las aplicaciones prácticas, como la del solenoide que aparece en la fotografía que abre este capítulo, los campos magnéticos son producto de un número enorme de partículas con carga que se desplazan en una corriente. Pero una vez comprendida la forma de calcular el campo debido a una sola carga puntual, basta un pequeño paso para calcular el campo producido por un alambre o un conjunto de alambres que transportan corriente.

Igual que hicimos en el caso de los campos eléctricos, llamaremos **punto de fuente** a la ubicación de la carga en movimiento en un instante dado, y **punto de campo** al punto P donde pretendemos calcular el campo. En la sección 21.4 vimos que en un punto de campo situado a una distancia r de una carga puntual q, la magnitud del campo *eléctrico* $\vec{E}$ generado por la carga es proporcional a la magnitud de la carga $|q|$ y a $1/r^2$, y la dirección de $\vec{E}$ (para q positiva) es a lo largo de la línea que une al punto de fuente con el punto de campo. La relación correspondiente para el campo *magnético* $\vec{B}$ de una carga puntual q que se mueve con velocidad constante tiene algunas similitudes y ciertas diferencias interesantes.

Los experimentos demuestran que la magnitud de $\vec{B}$ también es proporcional a $|q|$ y a $1/r^2$. Pero la *dirección* de $\vec{B}$ *no* es a lo largo de la línea que va del punto de fuente al punto de campo. En vez de ello, $\vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene esta línea y al vector velocidad, $\vec{v}$, de la partícula, como se ilustra en la figura 28.1. Además, la *magnitud* B del campo también es proporcional a la rapidez v de la partícula y al seno del ángulo ϕ. Así, la magnitud del campo magnético en el punto P está dada por

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v\,\text{sen}\,\phi}{r^2} \tag{28.1}$$

donde $\mu_0/4\pi$ es una constante de proporcionalidad (el símbolo μ_0 se lee "mu subíndice cero"). La razón de escribir la constante en esta forma particular se verá dentro de poco. En la sección 21.3 hicimos algo similar en relación con la ley de Coulomb.

Carga en movimiento: Campo vectorial magnético

Es posible incorporar tanto la magnitud como la dirección de $\vec{B}$ en una sola ecuación vectorial utilizando el producto vectorial. Para evitar tener que decir "la dirección desde la fuente q al punto P del campo" una y otra vez, introduciremos un vector *unitario* $\hat{r}$ ("r testada") que apunte desde el punto de fuente al punto de campo. (En la sección 21.4 usamos $\hat{r}$ con el mismo propósito.) Este vector unitario es igual al vector $\vec{r}$ de la fuente al punto de campo dividido entre su magnitud: $\hat{r} = \vec{r}/r$. Así, el campo $\vec{B}$ de una carga puntual en movimiento es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \text{(campo magnético de una carga puntual con velocidad constante)} \tag{28.2}$$

La figura 28.1 muestra la relación que hay entre $\hat{r}$ y P, y también el campo magnético $\vec{B}$ en varios puntos en la vecindad de la carga. En todos los puntos a lo largo de una línea que pase por la carga y sea paralela a la velocidad $\vec{v}$, el campo es igual a cero porque $\text{sen}\,\phi = 0$ en todos ellos. A cualquier distancia r desde q, $\vec{B}$ alcanza su magnitud máxima en los puntos localizados en un plano perpendicular a $\vec{v}$ porque, en todos ellos, $\phi = 90°$ y $\text{sen}\,\phi = 1$. Si la carga q es negativa, las direcciones de $\vec{B}$ son opuestas a las que se ilustran en la figura 28.1.

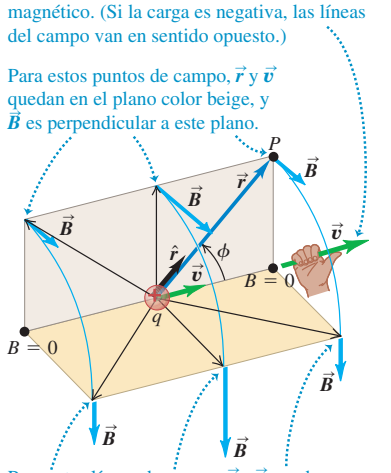
Carga en movimiento: Líneas de campo magnético

Una carga puntual en movimiento también produce un campo *eléctrico*, con líneas de campo que irradian hacia fuera desde una carga positiva. Las líneas de campo *magnético* son diferentes por completo. El análisis anterior indica que para una carga puntual que se mueva con velocidad $\vec{v}$, las líneas de campo magnético son *círculos* con centro en la línea de $\vec{v}$ y que yacen en planos perpendiculares a esta línea. Las direcciones de las líneas de campo para una carga positiva están dadas por la siguiente *regla de la mano derecha*, una de las varias que encontraremos en este capítulo para determinar la dirección del campo magnético causado por diferentes fuentes. Tome el vector velocidad $\vec{v}$ con su mano derecha de manera que su pulgar apunte en dirección de $\vec{v}$; luego, cierre sus dedos alrededor de la línea de $\vec{v}$ en el mismo sentido que las líneas de campo magnético, suponiendo que q es positiva. La figura 28.1a muestra partes de algunas líneas de campo; la figura 28.1b presenta algunas líneas de campo en un plano a través de q, perpendiculares a $\vec{v}$, como se verían al mirar en dirección de $\vec{v}$. Si la carga puntual es negativa, las direcciones del campo y líneas de campo son las opuestas de las que se ilustran en la figura 28.1.

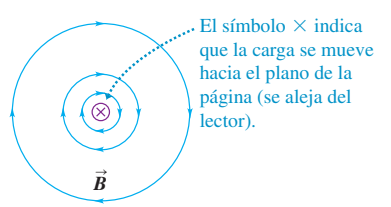
Las ecuaciones (28.1) y (28.2) describen el campo $\vec{B}$ de una carga puntual que se mueve con velocidad *constante*. Si la carga *acelera*, el campo es mucho más compli-

28.1 a) Vectores de campo magnético debidos a una carga puntual positiva en movimiento, q. En cada punto, $\vec{B}$ es perpendicular al plano de $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y su magnitud es proporcional al seno del ángulo entre ellos. b) Las líneas de campo magnético en un plano contienen a la carga positiva en movimiento.

a) Vista en perspectiva



b) Vista desde atrás de la carga



cado. Para nuestros fines, no necesitaremos estos resultados más complejos. (Las partículas con carga que constituyen una corriente en un alambre aceleran en los puntos en que éste se dobla y la dirección de $\vec{v}$ cambia. Pero como la magnitud v_d de la velocidad de deriva en un conductor por lo general es muy pequeña, la aceleración v_d^2/r también lo es, por lo que pueden ignorarse los efectos de la aceleración.)

Como se vio en la sección 27.2, la unidad de B es un tesla (1 T):

$$1\ \text{T} = 1\ \text{N} \cdot \text{s}/\text{C} \cdot \text{m} = 1\ \text{N}/\text{A} \cdot \text{m}$$

Al usar esto con la ecuación (28.1) o (28.2), se encuentra que las unidades de la constante μ_0 son

$$1\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2 = 1\ \text{N}/\text{A}^2 = 1\ \text{Wb}/\text{A} \cdot \text{m} = 1\ \text{T} \cdot \text{m}/\text{A}$$

En unidades del SI, el valor numérico de μ_0 es exactamente $4\pi \times 10^{-7}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb}/\text{A} \cdot \text{m} \\ &= 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m}/\text{A}\end{aligned} \tag{28.3}$$

Parece increíble que μ_0 ¡tenga *exactamente* este valor numérico! En realidad, éste es un valor *definido* que surge de la definición de ampere, como veremos en la sección 28.4.

En la sección 21.3 se mencionó que la constante $1/4\pi\epsilon_0$ en la ley de Coulomb está relacionada con la rapidez de la luz, c:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = (10^{-7}\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2)c^2$$

Cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32, veremos que su rapidez de propagación en el vacío, que es igual a la rapidez de la luz, c, está dada por

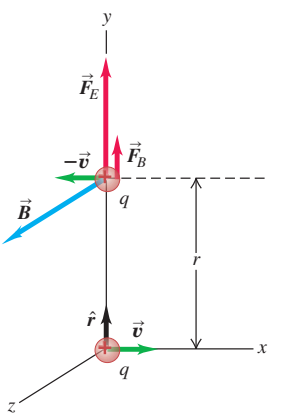
$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \tag{28.4}$$

Si despejamos ϵ_0 en la ecuación $k = 1/4\pi\epsilon_0$, luego sustituimos la expresión resultante en la ecuación (28.4) y despejamos μ_0, en verdad obtendremos el valor de μ_0 que se mencionó poco antes. Este análisis es un poco prematuro, pero da idea de que los campos eléctricos y magnéticos están relacionados íntimamente con la naturaleza de la luz.

Ejemplo 28.1 Fuerzas entre dos protones en movimiento

Dos protones se mueven paralelos al eje x en sentidos opuestos (figura 28.2) con la misma rapidez v (pequeña en comparación con la rapidez de la luz, c). En el instante que se ilustra, calcule las fuerzas eléctricas y magnéticas sobre el protón de la parte superior y determine la razón de sus magnitudes.

28.2 Fuerzas eléctricas y magnéticas entre dos protones en movimiento.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza eléctrica está dada por la ley de Coulomb. Para encontrar la fuerza magnética primero debemos determinar el campo magnético que produce el protón de la parte inferior en la posición del de arriba.

PLANTEAR: Se usa la ecuación (21.2) que expresa la ley de Coulomb. La ecuación (28.2) da el campo magnético debido al protón inferior, y la ley de la fuerza magnética, ecuación (27.2), da la fuerza magnética resultante sobre el protón superior.

EJECUTAR: De acuerdo con la ley de Coulomb, la magnitud de la fuerza eléctrica sobre el protón de arriba es

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

continúa

Las fuerzas son de repulsión, y la fuerza sobre el protón superior es vertical hacia arriba (en la dirección $+y$).

Según la regla de la mano derecha para el producto cruz $\vec{v} \times \hat{r}$ de la ecuación (28.2), el campo $\vec{B}$ debido al protón inferior en la posición del protón superior está en la dirección $+z$ (véase la figura 28.2). Según la ecuación (28.2), la magnitud de $\vec{B}$ es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}$$

puesto que $\phi = 90°$. Alternativamente, de la ecuación (28.2),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{\imath}) \times \hat{\jmath}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k}$$

La velocidad del protón superior es $-\vec{v}$ y la fuerza magnética sobre él es $\vec{F} = q(-\vec{v}) \times \vec{B}$. Al combinar ésta con las expresiones para $\vec{B}$, se tiene

$$F_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2} \quad \text{o bien,}$$

$$\vec{F}_B = q(-\vec{v}) \times \vec{B} = q(-v\hat{\imath}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2}\hat{\jmath}$$

La interacción magnética en esta situación también es de repulsión. La razón de las magnitudes de las dos fuerzas es

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0 q^2v^2/4\pi r^2}{q^2/4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 v^2}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0\mu_0 v^2$$

Con la relación $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, ecuación (28.4), el resultado se expresa en forma muy sencilla:

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$$

Cuando v es pequeña en comparación con c, la rapidez de la luz, la fuerza magnética es mucho menor que la fuerza eléctrica.

EVALUAR: Observe que es esencial usar el mismo marco de referencia para todo el cálculo. Describimos las velocidades y los campos como los vería un observador estacionario en el sistema de coordenadas de la figura 28.2. En un sistema coordenado que se mueve con una de las cargas, una de las velocidades sería igual a cero, por lo que *no* habría fuerza magnética. La explicación de esta aparente paradoja tiende uno de los caminos que condujeron a la teoría especial de la relatividad.

Evalúe su comprensión de la sección 28.1 *a)* Si dos protones viajan paralelos entre sí en la *misma* dirección y con igual rapidez, ¿la fuerza magnética entre ellos es i) de atracción o ii) de repulsión? *b)* ¿La fuerza neta entre ellos es i) de atracción, ii) de repulsión, o iii) igual a cero? (Suponga que la rapidez del protón es mucho menor que la rapidez de la luz.)

28.2 Campo magnético de un elemento de corriente

Igual que para el campo eléctrico, hay un **principio de superposición de campos magnéticos**:

El campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales.

Este principio se puede utilizar con los resultados de la sección 28.1 para encontrar el campo magnético producido por una corriente en un conductor.

Comenzamos con el cálculo del campo magnético ocasionado por un segmento corto $d\vec{l}$ de un conductor que transporta corriente, como se ilustra en la figura 28.3a. El volumen del segmento es $A\,dl$, donde A es el área de la sección transversal del conductor. Si hay n partículas con carga en movimiento por unidad de volumen, cada una con una carga q, la carga total dQ que se mueve en el segmento es

$$dQ = nqA\,dl$$

Las cargas en movimiento en este segmento son equivalentes a una sola carga dQ que viaja con una velocidad igual a la velocidad de *deriva* $\vec{v}_d$. (Los campos magnéticos debidos a los movimientos *al azar* de las cargas, en promedio, se cancelarán en cada punto.) De acuerdo con la ecuación (28.1), la magnitud del campo resultante $d\vec{B}$ en cualquier punto P es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|dQ|v_d \operatorname{sen}\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n|q|v_d\,A\,dl\operatorname{sen}\phi}{r^2}$$

Pero, de acuerdo con la ecuación (25.2), $n|q|v_d A$ es igual a la corriente I en el elemento. Por lo tanto,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\operatorname{sen}\phi}{r^2} \tag{28.5}$$

Elemento de corriente: Campo vectorial magnético

En forma vectorial, usando el vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ como en la sección 28.1, se tiene

$$d\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \quad \text{(campo magnético de un elemento de corriente)} \qquad (28.6)$$

donde $d\vec{\boldsymbol{l}}$ es un vector con longitud dl, en la misma dirección que la corriente en el conductor.

Las ecuaciones (28.5) y (28.6) constituyen la **ley de Biot y Savart**. Esta ley se utiliza para encontrar el campo magnético total $\vec{\boldsymbol{B}}$ debido a la corriente en un circuito completo en cualquier punto en el espacio. Para hacerlo, se integra la ecuación (28.6) con respecto a todos los segmentos $d\vec{\boldsymbol{l}}$ que conduzcan corriente; en forma simbólica,

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\,d\vec{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (28.7)$$

En las siguientes secciones se llevará a cabo esta integración vectorial en varios de los ejemplos.

Elemento de corriente: Líneas de campo magnético

Como se aprecia en la figura 28.3, los vectores de campo $d\vec{\boldsymbol{B}}$ y las líneas de campo magnético de un elemento de corriente son exactamente como los que establece una carga dQ que se desplaza en la dirección de la velocidad de deriva $\vec{\boldsymbol{v}}_d$. Las líneas de campo son círculos en planos perpendiculares a $d\vec{\boldsymbol{l}}$ y con centro en la línea de $d\vec{\boldsymbol{l}}$. Sus direcciones están dadas por la misma regla de la mano derecha que se presentó en la sección 28.1 para cargas puntuales.

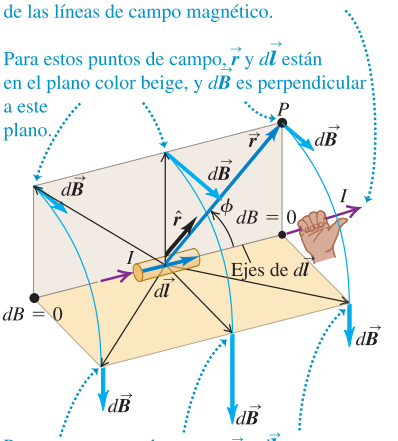
Las ecuaciones (28.5) o (28.6) no se pueden comprobar directamente porque nunca es posible experimentar con un segmento aislado de un circuito que conduzca corriente. Lo que se mide experimentalmente es $\vec{\boldsymbol{B}}$ *total* para un circuito completo. Pero tales ecuaciones sí se verifican de manera indirecta mediante el cálculo de $\vec{\boldsymbol{B}}$ para varias configuraciones de corriente utilizando la ecuación (28.7) y comparando los resultados con mediciones experimentales.

Si hay materia presente en el espacio alrededor de un conductor que transporte corriente, el campo en un punto P del campo en su vecindad tendrá una contribución adicional que proviene de la *magnetización* del material. En la sección 28.8 volveremos a este punto. Sin embargo, a menos que el material sea hierro u otro material ferromagnético, el campo adicional es pequeño y, por lo general, despreciable. Si hay campos eléctricos o magnéticos presentes que varíen con el tiempo, o si el material es superconductor, surgen complicaciones adicionales; más adelante volveremos a estos temas.

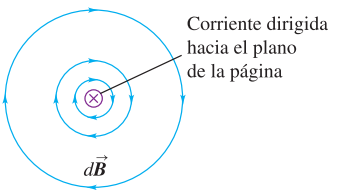
28.3 a) Vectores del campo magnético debido a un elemento de corriente $d\vec{\boldsymbol{l}}$. b) Líneas de campo magnético en un plano que contiene el elemento de corriente $d\vec{\boldsymbol{l}}$. Compare esta figura con la 28.1 para el campo de una carga puntual en movimiento.

a) Vista en perspectiva

Regla de la mano derecha para el campo magnético debido a un elemento de corriente: apunte el pulgar de su mano derecha en dirección de la corriente. Ahora cierre sus dedos alrededor del elemento de corriente en dirección de las líneas de campo magnético.



b) Vista a lo largo del eje del elemento de corriente



Estrategia para resolver problemas 28.1 Cálculo de campos magnéticos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Biot y Savart siempre permite calcular el campo magnético debido a un alambre portador de corriente de la forma que sea. La idea es calcular el campo debido a un elemento de corriente representativo en el alambre, y luego combinar las contribuciones de todos los elementos para encontrar el campo total.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un diagrama que muestre un elemento de corriente representativo y el punto P en que va a determinarse el campo (el punto de campo).
2. Dibuje el elemento de corriente $d\vec{\boldsymbol{l}}$, asegurándose de que apunte en la dirección de la corriente.
3. Dibuje un vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$. Observe que su dirección es siempre *desde* el elemento de corriente (el punto de fuente) al punto P del campo.
4. Identifique las variables buscadas. Por lo general serán la magnitud y dirección del campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Utilice la ecuación (28.5) o (28.6) para expresar el campo magnético $d\vec{\boldsymbol{B}}$ en P desde el elemento de corriente representativo.
2. Sume todos los elementos $d\vec{\boldsymbol{B}}$ para obtener el campo total en el punto P. En ciertas situaciones, los elementos $d\vec{\boldsymbol{B}}$ en el punto P tienen la misma dirección con respecto a todos los elementos de corriente; en estos casos, la magnitud del campo total $\vec{\boldsymbol{B}}$ es la suma de las magnitudes de los elementos $d\vec{\boldsymbol{B}}$. Pero es frecuente que éstos tengan direcciones distintas para elementos diferentes de la corriente. En ese caso se tiene que establecer un sistema de coordenadas y representar cada $d\vec{\boldsymbol{B}}$ en términos de sus componentes. La integral para $\vec{\boldsymbol{B}}$ total queda expresada en términos de una integral para cada componente.
3. En ocasiones es posible aprovechar la simetría de la situación para probar que una componente de $\vec{\boldsymbol{B}}$ debe desaparecer. Siempre hay que estar alerta para identificar formas de aprovechar la simetría con la finalidad de simplificar el problema.

continúa

4. Busque maneras de utilizar el principio de superposición de campos magnéticos. Más adelante, en este capítulo, se determinarán los campos producidos por ciertos conductores con formas sencillas; si encuentra un conductor de forma compleja que pueda representarse como una combinación de formas más simples, será posible utilizar la superposición para obtener el campo de la forma compleja. Ejemplos de esto son una espira rectangular y un semicírculo con segmentos rectilíneos en ambos lados.

EVALUAR *la respuesta:* Con frecuencia, la respuesta será una expresión matemática de $\vec{B}$ como función de la posición del punto de campo. Compruebe la respuesta examinando su comportamiento en tantos límites como sea posible.

Ejemplo 28.2 Campo magnético de un segmento de corriente

Un alambre de cobre conduce una corriente constante de 125 A hacia un tanque galvanizado. Calcule el campo magnético generado por un segmento de 1.0 cm de ese alambre en un punto localizado a 1.2 m de él, si ese punto es *a*) el punto P_1, directamente hacia fuera a un costado del segmento y *b*) el punto P_2, sobre una línea a 30° respecto del segmento, como se aprecia en la figura 28.4.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aunque en sentido estricto las ecuaciones (28.5) y (28.6) se usan sólo con elementos de corriente infinitesimales, se les puede emplear aquí, puesto que la longitud del segmento de 1.0 cm es mucho menor que la distancia de 1.2 m al punto de campo.

PLANTEAR: En la figura 28.4 se muestra con color rojo el elemento de corriente, y apunta en la dirección $-x$ (la dirección de la corriente). El vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ correspondiente a cada punto de campo está dirigido desde el elemento de corriente hacia ese punto: $\hat{\boldsymbol{r}}$ está en la dirección $+y$ en el caso del punto P_1 y forma un ángulo de 30° por arriba de la dirección $-x$ en el caso del punto P_2.

EJECUTAR: *a*) Según la regla de la mano derecha, la dirección de $\vec{B}$ en P_1 es *hacia* el plano *xy* de la figura 28.4. O bien, utilizando vectores unitarios, se observa que $d\vec{l} = dl(-\hat{\imath})$. En el punto P_1, $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\jmath}$, por lo que en la ecuación (28.6),

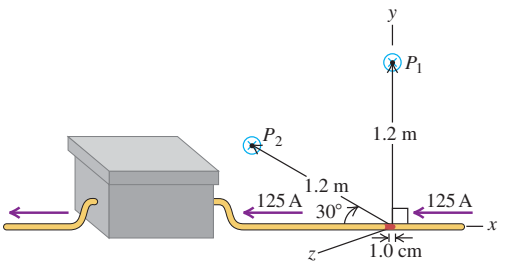
$$d\vec{l} \times \hat{\boldsymbol{r}} = dl(-\hat{\imath}) \times \hat{\jmath} = dl(-\hat{\boldsymbol{k}})$$

La dirección negativa de *z* es *hacia* el plano.

Para obtener la magnitud de $\vec{B}$, se emplea la ecuación (28.5). En el punto P_1, el ángulo entre $d\vec{l}$ y $\hat{\boldsymbol{r}}$ es de 90°, por lo que

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\,\text{sen}\,\phi}{r^2} \\ &= (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(125\text{ A})(1.0\times10^{-2}\text{ m})(\text{sen}\,90°)}{(1.2\text{ m})^2} \\ &= 8.7\times10^{-8}\,\text{T} \end{aligned}$$

28.4 Cálculo del campo magnético en dos puntos debido a un segmento de 1.0 cm de un alambre conductor de corriente (el dibujo no está a escala).



b) En el punto P_2, la dirección de $\vec{B}$ otra vez es hacia el plano *xy* de la figura. El ángulo entre $d\vec{l}$ y $\hat{\boldsymbol{r}}$ es de 30°, y

$$\begin{aligned} B &= (10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(125\text{ A})(1.0\times10^{-2}\text{ m})(\text{sen}\,30°)}{(1.2\text{ m})^2} \\ &= 4.3\times10^{-8}\,\text{T} \end{aligned}$$

EVALUAR: Los resultados para la dirección de $\vec{B}$ se comprueban comparándolos con la figura 28.3. El plano *xy* de la figura 28.4 corresponde al plano color beige de la figura 28.3. Sin embargo, en este ejemplo la dirección de la corriente y, por lo tanto, de $d\vec{l}$ es la contraria de la dirección que se ilustra en la figura 28.3, por lo que la dirección del campo magnético también se invierte. De aquí que el campo en puntos del plano *xy* en la figura 28.4 debe apuntar *hacia* el plano, y no hacia fuera de él. Ésta es exactamente la conclusión a la que habíamos llegado.

Note que estas magnitudes del campo magnético son muy pequeñas; en comparación, el campo magnético de la Tierra es del orden de 10^{-4} T. También observe que los valores no son los campos *totales* en los puntos P_1 y P_2, sino sólo las contribuciones del segmento corto del conductor descrito.

Evalúe su comprensión de la sección 28.2 Un elemento infinitesimal de corriente localizado en el origen ($x = y = z = 0$) conduce corriente *I* en la dirección positiva de *y*. Clasifique las siguientes ubicaciones en orden decreciente de la intensidad del campo magnético que el elemento de corriente produce en cada sitio. i) $x = L$, $y = 0$, $z = 0$; ii) $x = 0$, $y = L$, $z = 0$; iii) $x = 0$, $y = 0$, $z = L$; iv) $x = L/\sqrt{2}$, $y = L/\sqrt{2}$, $z = 0$.

28.3 Campo magnético de un conductor que transporta corriente

Una aplicación importante de la ley de Biot y Savart es la obtención del campo magnético producido por un conductor recto que conduce corriente. Este resultado es útil debido a que prácticamente en todos los aparatos eléctricos y electrónicos se encuen-

Activ Online Physics
13.1 Campo magnético de un alambre

tran alambres conductores rectos. La figura 28.5 muestra un conductor con longitud $2a$ que conduce una corriente I. Encontraremos $\vec{B}$ en un punto a una distancia x del conductor, sobre su bisectriz perpendicular.

Primero usamos la ley de Biot y Savart, ecuación (28.5) para encontrar el campo $d\vec{B}$ generado por el elemento de conductor con longitud $dl = dy$ que se ilustra en la figura 28.5. De acuerdo con la figura, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sen ϕ = sen $(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$. La regla de la mano derecha para el producto vectorial $d\vec{l} \times \hat{r}$ indica que la *dirección* de $d\vec{B}$ es hacia el plano de la figura, perpendicular al plano; además, las direcciones de los $d\vec{B}$'s generados por *todos* los elementos del conductor son las mismas. Así, para integrar la ecuación (28.7), simplemente se suman las *magnitudes* de los elementos $d\vec{B}$'s, una simplificación significativa.

Al reunir los elementos, se encuentra que la magnitud total del campo $\vec{B}$ es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x\, dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Podemos integrar esto por sustitución trigonométrica o con ayuda de una tabla de integrales. El resultado final es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad (28.8)$$

Cuando la longitud $2a$ del conductor es muy grande en comparación con su distancia x desde el punto P, se puede considerar infinitamente larga. Cuando a es mucho mayor que x, $\sqrt{x^2 + a^2}$ es aproximadamente igual a a; de aquí que en el límite, $a \to \infty$, y la ecuación (28.8) se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

La situación física tiene simetría axial con respecto del eje y. Por lo tanto, $\vec{B}$ debe tener la misma *magnitud* en todos los puntos de un círculo con centro en el conductor y que yace en un plano perpendicular a él, y la *dirección* de $\vec{B}$ debe ser tangente a todo ese círculo. Así, en todos los puntos de un círculo de radio r alrededor del conductor, la magnitud B es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(cerca de un conductor largo y recto portador de corriente)} \qquad (28.9)$$

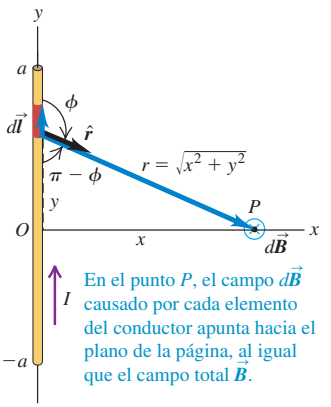
En la figura 28.6 se ilustra parte del campo magnético alrededor de un conductor largo, recto y portador de corriente.

La geometría de este problema es similar a la del ejemplo 21.11 (sección 21.5), en el que resolvimos el problema del campo *eléctrico* generado por una línea infinita de carga. En ambos problemas aparece la misma integral, y en ellos las magnitudes del campo son proporcionales a $1/r$. Pero las líneas de $\vec{B}$ en el problema del magnetismo tienen formas completamente diferentes de las de $\vec{E}$ en el problema eléctrico análogo. Las líneas de campo eléctrico irradian hacia fuera desde una distribución lineal de carga positiva (hacia dentro en el caso de cargas negativas). En contraste, las líneas de campo magnético *circundan* la corriente que actúa como su fuente. Las líneas de campo eléctrico debidas a las cargas comienzan y terminan en otras cargas, pero las líneas del campo magnético forman espiras cerradas y *nunca* tienen extremos, sin importar la forma del conductor portador de corriente que genera el campo. Como se vio en la sección 27.3, ésta es una consecuencia de la ley de Gauss para el magnetismo, que plantea que el flujo magnético total a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada)} \qquad (28.10)$$

Esto implica que no hay cargas magnéticas aisladas ni monopolos magnéticos. Cualquier línea de campo magnético que entre a una superficie cerrada debe salir de ella.

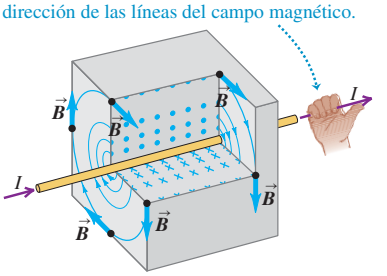
28.5 Campo magnético producido por un conductor recto portador de corriente de longitud $2a$.



En el punto P, el campo $d\vec{B}$ causado por cada elemento del conductor apunta hacia el plano de la página, al igual que el campo total $\vec{B}$.

28.6 Campo magnético alrededor de un conductor largo y recto portador de corriente. Las líneas de campo son círculos, con direcciones determinadas por la regla de la mano derecha.

Regla de la mano derecha para el campo magnético alrededor de un alambre que conduce corriente: Apunte el pulgar de su mano derecha en dirección de la corriente. Cierre sus dedos alrededor del alambre en dirección de las líneas del campo magnético.



Ejemplo 28.3 Campo magnético de un solo alambre

Un conductor largo y recto conduce una corriente de 1.0 A. ¿A qué distancia del eje del conductor, el campo magnético generado por la corriente tiene igual magnitud que el campo magnético terrestre en Pittsburgh (alrededor de 0.5×10^{-4} T)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El conductor recto se describe como largo, lo que significa que es mucho mayor que la distancia desde el conductor con respecto al cual se mide el campo. Por ello, podemos utilizar las ideas de esta sección.

PLANTEAR: La geometría es la misma que en la figura 28.6, por lo que empleamos la ecuación (28.8). Se conocen todas las cantidades en esta ecuación, excepto la variable buscada, la distancia r.

EJECUTAR: Se despeja r en la ecuación (28.8) y se sustituyen los números apropiados:

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(1.0\ \text{A})}{(2\pi)(0.5 \times 10^{-4}\ \text{T})} = 4 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4\ \text{mm}$$

EVALUAR: Las corrientes de alrededor de un ampere son representativas de las que se encuentran en los alambres de los aparatos electrodomésticos. Este ejemplo muestra que los campos magnéticos producidos por estos aparatos son muy débiles incluso en puntos muy cercanos al alambre. A distancias mayores, el campo se debilita aún más; por ejemplo, a una distancia cinco veces mayor ($r = 20$ mm $= 2$ cm $= 2 \times 10^{-2}$ m), el campo tiene la quinta parte de intensidad ($B = 0.1 \times 10^{-4}$ T).

Ejemplo 28.4 Campo magnético de dos alambres

La figura 28.7a es la vista de los extremos de dos alambres largos, rectos y paralelos, que son perpendiculares al plano xy, cada uno de los cuales conduce una corriente I pero en sentidos opuestos. *a*) Calcule la magnitud y dirección de $\vec{B}$ en los puntos P_1, P_2 y P_3. *b*) Encuentre la magnitud y dirección de $\vec{B}$ en cualquier punto del eje x a la derecha del alambre 2 en términos de la coordenada x del punto.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Con las ideas de esta sección es posible encontrar los campos magnéticos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ debidos a cada alambre. El principio de superposición de los campos magnéticos dice que el campo magnético total $\vec{B}$ es la suma vectorial de $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$.

PLANTEAR: Se utiliza la ecuación (28.9) para encontrar la magnitud de los campos $\vec{B}_1$ (debido al alambre 1) y $\vec{B}_2$ (debido al alambre 2) en cualquier punto. Las direcciones de estos campos se encuentran con la regla de la mano derecha. El campo magnético total en el punto en cuestión es $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

EJECUTAR: *a*) El punto P_1 está más cerca del alambre 1 (distancia $2d$) que del alambre 2 (distancia $4d$), por lo que en este punto la magnitud B_1 es mayor que la magnitud B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(4d)} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d}$$

La regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ está en la dirección y negativa, y que $\vec{B}_2$ está en la dirección y positiva. Como B_1 es la magnitud mayor, el campo total $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ está en la dirección y negativa, con magnitud

$$B_{\text{total}} = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} - \frac{\mu_0 I}{8\pi d} = \frac{\mu_0 I}{8\pi d} \qquad \text{(punto } P_1\text{)}$$

En el punto P_2, una distancia d a partir de ambos alambres, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen ambos la dirección y positiva, y los dos tienen la misma magnitud:

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

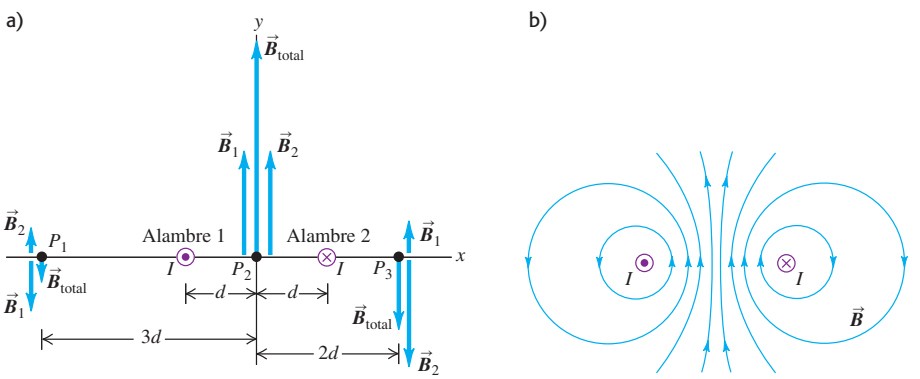
por lo que $\vec{B}_{\text{total}}$ también está en la dirección y positiva y su magnitud es

$$B_{\text{total}} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \qquad \text{(punto } P_2\text{)}$$

Por último, en el punto P_3 la regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ está en la dirección y positiva y $\vec{B}_2$ en la dirección y negativa. Este punto está más lejos del alambre 1 (distancia $3d$) que del alambre 2 (distancia d), por lo que B_1 es menor que B_2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(3d)} = \frac{\mu_0 I}{6\pi d} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

28.7 a) Dos conductores largos y rectos portan corrientes iguales en sentidos opuestos.Los conductores se observan desde sus extremos. b) Mapa del campo magnético producido por los dos conductores. Las líneas de campo están lo más próximas unas de otras entre los conductores, donde el campo tiene la intensidad máxima.



El campo total está en la dirección y negativa, igual que $\vec{\boldsymbol{B}}_2$, y tiene una magnitud

$$B_{\text{total}} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I}{6\pi d} = \frac{\mu_0 I}{3\pi d} \qquad \text{(punto } P_3\text{)}$$

Usted deberá ser capaz de utilizar la regla de la mano derecha para verificar las direcciones de $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ en cada punto.

En la figura 28.7a se ilustran los campos $\vec{\boldsymbol{B}}_1$, $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{total}}$ en cada uno de los tres puntos. Para encontrar $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{total}}$ en cualquier punto se utiliza la misma técnica; para puntos fuera del eje x se debe tener precaución con la suma de los vectores, ya que $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ ya no necesitan ser simplemente paralelos o antiparalelos (véase el problema 28.60). La figura 28.7b muestra algunas de las líneas de campo magnético debidas a esta combinación de alambres.

b) En cualquier punto a la derecha del alambre 2 (es decir, para $x > d$), $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ están en las mismas direcciones que en P_3. Conforme x aumenta, tanto $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ como $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ disminuyen en magnitud, por lo que también $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{total}}$ debe disminuir. Las magnitudes de los campos debidos a cada alambre son

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + d)} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - d)}$$

En cualquier punto de campo a la derecha del alambre 2, este último está más próximo que el alambre 1, por lo que $B_2 > B_1$. Así, $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{total}}$ tiene la dirección y negativa, igual que $\vec{\boldsymbol{B}}_2$, y tiene la siguiente magnitud:

$$B_{\text{total}} = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - d)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + d)} = \frac{\mu_0 I d}{\pi(x^2 - d^2)}$$

donde los dos términos se han combinado mediante un denominador común.

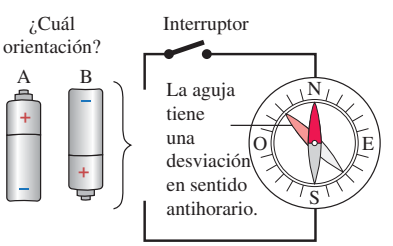
EVALUAR: En los puntos muy alejados de los alambres, x es mucho mayor que d, y el término d^2 en el denominador resulta despreciable, por lo que

$$B_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I d}{\pi x^2}$$

Como se deduce de la ecuación (28.9), la magnitud del campo magnético para un solo alambre disminuye con la distancia en proporción a $1/x$; en el caso de dos alambres que conducen corrientes opuestas, $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ y $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ se cancelan entre sí parcialmente, por lo que la magnitud $\vec{\boldsymbol{B}}_{\text{total}}$ disminuye con más rapidez, en proporción a $1/x^2$. Este efecto se utiliza en sistemas de comunicación, como redes telefónicas o de computadoras. El cableado se dispone de manera que un conductor lleva una señal en un sentido y el otro conduce la señal de regreso, y ambos se encuentran lado a lado, como en la figura 28.7a, o entrelazados (figura 28.8). Como resultado, el campo magnético producido *afuera de* los conductores por estas señales se reduce considerablemente, y es menos probable que ejerza fuerzas indeseables en otras corrientes portadoras de información.

28.8 Los cables de computadora o de equipos para audio y video crean poco o ningún campo magnético. Esto se debe a que dentro de cada cable hay alambres muy cercanos entre sí que llevan corriente en ambos sentidos a lo largo del cable. Los campos magnéticos generados por estas corrientes opuestas se cancelan entre sí.

Evalúe su comprensión de la sección 28.3 La figura de la derecha muestra un circuito que se encuentra sobre una mesa horizontal, sobre el cual se coloca una brújula, como se ilustra. Va a conectarse una batería en el circuito, de manera que cuando el interruptor se cierre, la aguja de la brújula tenga una desviación en sentido antihorario. ¿En cuál orientación, A o B, debe colocarse la batería en el circuito?



28.4 Fuerza entre alambres paralelos

En el ejemplo 28.4 (sección 28.3) se mostró cómo usar el principio de superposición de campos magnéticos para obtener el campo total debido a dos conductores largos portadores de corriente. Otro aspecto importante de esta configuración es la *fuerza de interacción* entre los conductores. Esta fuerza desempeña un papel importante en muchas situaciones prácticas en las que los alambres portadores de la corriente se hallan muy cerca uno del otro, y también tiene importancia esencial en relación con la definición de ampere. La figura 28.9 presenta segmentos de dos conductores largos, rectos y paralelos, separados por una distancia r y que portan las corrientes I e I' en el mismo sentido. Cada conductor se encuentra en el campo magnético producido por el otro, por lo que cada uno experimenta una fuerza. El diagrama ilustra algunas de las líneas de campo generadas por la corriente en el conductor de la parte inferior.

De acuerdo con la ecuación (28.9), el conductor inferior produce un campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ que, en la posición del conductor de arriba, tiene una magnitud

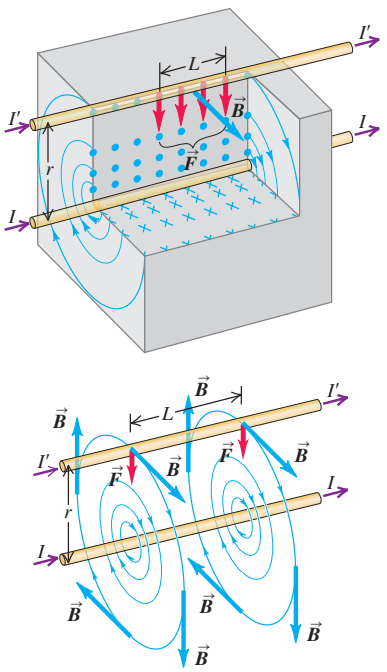
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

De acuerdo con la ecuación (27.19), la fuerza que ejerce este campo sobre una longitud L del conductor superior es $\vec{\boldsymbol{F}} = I'\vec{\boldsymbol{L}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$, donde el vector $\vec{\boldsymbol{L}}$ está en dirección de

28.9 Los conductores paralelos que transportan corrientes en el mismo sentido se atraen uno al otro. Los diagramas muestran cómo el campo magnético $\vec{B}$ causado por la corriente del conductor inferior ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre el conductor superior.

El campo magnético del alambre inferior ejerce una fuerza de atracción sobre el alambre superior. De igual modo, el alambre superior atrae al de abajo.

Si los conductores transportaran corrientes en sentidos *opuestos*, se *repelerían* uno al otro.



la corriente I' y tiene magnitud L. Como $\vec{B}$ es perpendicular a la longitud del conductor y, por lo tanto, a $\vec{L}$, la magnitud de esta fuerza es

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi r}$$

Y la fuerza *por unidad de longitud* F/L es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad \text{(dos conductores largos, paralelos y portadores de corriente)} \qquad (28.11)$$

La aplicación de la regla de la mano derecha a $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$ indica que la fuerza sobre el conductor de arriba está dirigida *hacia abajo*.

La corriente en el conductor superior también origina un campo en la posición del inferior. Dos aplicaciones sucesivas de la regla de la mano derecha para productos vectoriales (una para encontrar la dirección del campo $\vec{B}$ debido al conductor superior, como en la sección 28.2, y otra para determinar la dirección de la fuerza que ejerce este campo sobre el conductor de abajo, como en la sección 27.6) demuestran que la fuerza sobre el conductor inferior va *hacia arriba*. Así, *dos conductores paralelos que transportan corrientes en el mismo sentido se atraen uno al otro.* Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, las fuerzas también se invertirán. *Dos conductores paralelos que transportan corrientes en sentido opuestos se repelen entre sí.*

Las fuerzas magnéticas y la definición de ampere

La atracción o repulsión entre dos conductores rectos, paralelos y portadores de corriente es la base de la definición oficial del **ampere** en el SI:

> ***Un ampere*** **es la corriente invariable que, si está presente en dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro de espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de exactamente 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.**

De acuerdo con la ecuación (28.11), se ve que esta definición de ampere es lo que hizo que eligiéramos el valor de $4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A para μ_0. También constituye la base de la definición del SI para el coulomb, que es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de un ampere.

Ésta es una *definición operacional*; nos da un procedimiento experimental concreto para medir la corriente y definir una unidad de corriente. En principio, es posible utilizar esta definición para calibrar un amperímetro utilizando sólo una regla de medir y una balanza de resortes. Para una estandarización de mucha precisión del ampere, se utilizan bobinas de alambre en vez de alambres rectos, y su separación es de unos cuantos centímetros. Mediciones aún más precisas del ampere estandarizado son posibles empleando una versión del efecto Hall (véase la sección 27.9).

Existen fuerzas de atracción no sólo entre *alambres* que conducen corrientes en el mismo sentido, sino también entre los elementos longitudinales de un solo conductor que transporte corriente. Si el conductor es un líquido o un gas ionizado (un plasma), estas fuerzas dan como resultado una contracción del conductor, como si su superficie estuviera sometida a una presión dirigida hacia dentro. La contracción del conductor se llama *reostricción*. Las altas temperaturas que produce la reostricción en un plasma se han utilizado en una técnica para lograr la fusión nuclear.

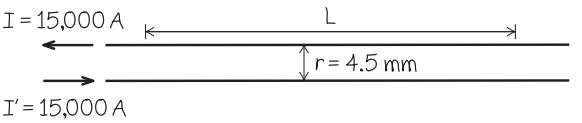
Ejemplo 28.5 Fuerzas entre alambres paralelos

Dos alambres rectos, paralelos y superconductores, separados por una distancia de 4.5 mm, conducen corrientes de 15,000 A en sentidos opuestos. ¿Hay que preocuparse por la resistencia mecánica de estos alambres?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Si hay razón o no para preocuparse por la resistencia mecánica de los alambres depende de cuánta fuerza magnética ejerza uno sobre el otro.

28.10 Diagrama para este problema.



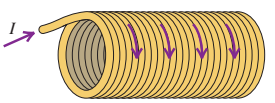
PLANTEAR: La figura 28.10 muestra la situación. La variable que buscamos es la fuerza magnética por unidad de longitud de alambre, la cual se encuentra mediante la ecuación (28.11).

EJECUTAR: Como las corrientes van en sentidos opuestos, los dos conductores se repelen entre sí. De la ecuación (28.11), la fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(15{,}000\ \text{A})^2}{(2\pi)(4.5 \times 10^{-3}\ \text{m})}$$
$$= 1.0 \times 10^4\ \text{N/m}$$

EVALUAR: Ésta es una fuerza grande: más de una tonelada por metro. Así que las resistencias mecánicas de los conductores y de los materiales aislantes deben ser una consideración de relevancia. Las corrientes y las separaciones de esta magnitud se utilizan en electroimanes superconductores de los aceleradores de partículas, y el análisis de esfuerzos mecánicos es una parte crucial del proceso de diseño.

Evalúe su comprensión de la sección 28.4 Un solenoide es un alambre enrollado como bobina helicoidal. La figura de la derecha muestra un solenoide que conduce una corriente I. *a*) La fuerza *magnética* que una espira de la bobina ejerce sobre otra adyacente, ¿es i) de atracción, ii) de repulsión, o iii) igual a cero? *b*) La fuerza *eléctrica* que una espira de la bobina ejerce sobre otra adyacente ¿es i) de atracción, ii) de repulsión, o iii) igual a cero? *c*) La fuerza *magnética* entre lados opuestos de la misma espira de la bobina, ¿es i) de atracción, ii) de repulsión, o iii) igual a cero? *d*) La fuerza *eléctrica* entre lados opuestos de la misma espira de la bobina, ¿es i) de atracción, ii) de repulsión, o iii) igual a cero?



28.11 Este electroimán contiene una bobina conductora de corriente con numerosas espiras de alambre. El campo magnético resultante es capaz de atraer grandes cantidades de barras de acero y otros objetos de hierro.

28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente

Si se mira en el interior de un timbre para puerta, un transformador, un motor eléctrico o un electroimán (figura 28.11), se encontrarán bobinas de alambre con gran número de vueltas, espaciadas tan estrechamente que cada vuelta está muy cerca de formar una espira plana circular. En tales bobinas se utiliza una corriente para establecer un campo magnético. Por ello, es conveniente obtener una expresión para el campo magnético que produce una sola espira conductora circular portadora de corriente, o para las N espiras circulares estrechamente espaciadas que forman la bobina. En la sección 27.7 se consideró la fuerza y el par de torsión sobre una espira de corriente de este tipo colocada en un campo magnético externo generado por otras corrientes; ahora vamos a encontrar el campo magnético generado por la espira misma.

La figura 28.12 presenta un conductor circular con radio a que conduce una corriente I. La corriente es llevada hacia dentro y fuera de la espira a través de dos alambres largos y rectos colocados lado a lado; las corrientes en estos alambres rectos van en sentidos opuestos, y sus campos magnéticos casi se cancelan entre sí (véase el ejemplo 28.4 en la sección 28.3).

Para encontrar el campo magnético en el punto P sobre el eje de la espira, a una distancia x del centro, se usa la ley de Biot y Savart, ecuación (28.5) o (28.6). Como se observa en la figura, $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ son perpendiculares, y la dirección del campo $d\vec{B}$ generado por este elemento $d\vec{l}$ en particular yace en el plano xy. Como $r^2 = x^2 + a^2$, la magnitud dB del campo debido al elemento $d\vec{l}$ es

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)} \tag{28.12}$$

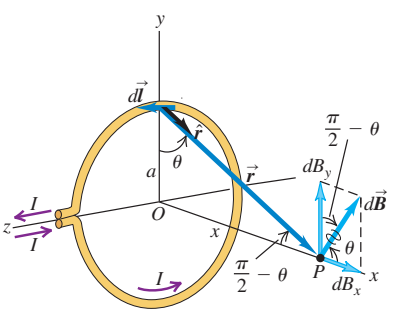
Las componentes del vector $d\vec{B}$ son

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}\frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \tag{28.13}$$

$$dB_y = dB\,\text{sen}\,\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(x^2 + a^2)}\frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \tag{28.14}$$

La situación tiene simetría rotacional con respecto al eje x, por lo que no puede haber una componente del campo total $\vec{B}$ perpendicular a este eje. Para cada elemento $d\vec{l}$ hay otro elemento correspondiente en el lado opuesto de la espira, con dirección opuesta. Estos dos elementos hacen contribuciones iguales a la componente x de $d\vec{B}$, dada por

28.12 Campo magnético en el eje de una espira circular. La corriente en el segmento $d\vec{l}$ genera el campo $d\vec{B}$, que está en el plano xy. Las corrientes de los otros $d\vec{l}$ generan $d\vec{B}$ con distintas componentes perpendiculares al eje x; la suma de estas componentes es cero. Las componentes x de los elementos $d\vec{B}$ se combinan para dar el campo total $\vec{B}$ en el punto P.



Activ ONLINE Physics
13.2 Campo magnético de una espira

la ecuación (28.13), pero dan componentes *opuestas* perpendiculares al eje x. Así, todas las componentes perpendiculares se cancelan y sólo sobreviven las componentes x.

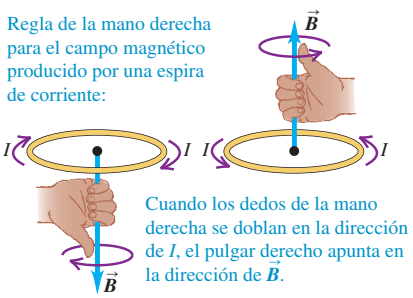
Para obtener la componente x del campo total $\vec{B}$, se integra la ecuación (28.13), incluyendo todos los elementos $d\vec{l}$ alrededor de la espira. Todos los elementos de esta expresión son constantes, excepto dl, por lo que se pueden sacar de la integral para obtener

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\, dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

La integral de dl es simplemente la circunferencia del círculo, $\int dl = 2\pi a$ y finalmente obtenemos

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de una espira circular)} \qquad (28.15)$$

28.13 Regla de la mano derecha para la dirección del campo magnético producido sobre el eje de una bobina que conduce corriente.



La *dirección* del campo magnético sobre el eje de una espira portadora de corriente está dada por la regla de la mano derecha. Si se cierran los dedos de la mano derecha alrededor de la espira en la dirección de la corriente, el pulgar derecho apunta en la dirección del campo (figura 28.13).

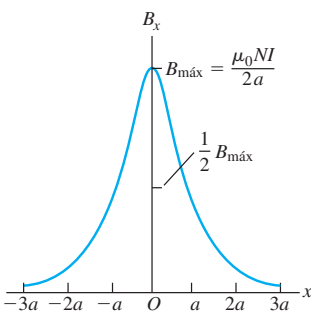
Campo magnético sobre el eje de una bobina

Ahora suponga que en vez de una sola espira en la figura 28.12, se tiene una bobina que consiste en N espiras, todas con el mismo radio. La separación entre las espiras es tan pequeña que el plano de cada una está prácticamente a la misma distancia x del punto de campo P. Cada espira contribuye por igual al campo, y el total es N veces el campo producido por una sola espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de } N \text{ espiras circulares)} \qquad (28.16)$$

El factor N en la ecuación (28.16) es la razón por la que se utilizan bobinas de alambre, y no espiras aisladas, para producir campos magnéticos intensos; para obtener una intensidad de campo deseada, el uso de una sola espira requeriría una corriente I tan grande que superaría la capacidad nominal del alambre de la espira.

28.14 Gráfica del campo magnético a lo largo del eje de una bobina circular con N espiras. Cuando x es mucho más grande que a, la magnitud del campo disminuye aproximadamente con $1/x^3$.



La figura 28.14 muestra una gráfica de B_x como función de x. El valor máximo del campo está en $x = 0$, el centro de la espira o bobina:

$$B_x = \frac{\mu_0 NI}{2a} \qquad \text{(en el centro de } N \text{ espiras circulares)} \qquad (28.17)$$

Conforme se avanza a lo largo del eje, la magnitud del campo disminuye.

En la sección 27.7 se definió que el *momento dipolar magnético* μ (o *momento magnético*) de una espira portadora de corriente es igual al IA, donde A es el área de la sección transversal de la espira. Si hay N vueltas, el momento magnético total es NIA. La espira circular en la figura 28.12 tiene área $A = \pi a^2$, por lo que el momento magnético de una sola espira es $\mu = I\pi a^2$; para N espiras, $\mu = NI\pi a^2$. Al sustituir estos resultados en las ecuaciones (28.15) y (28.16) se encuentra que estas expresiones se pueden escribir como

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad \text{(sobre el eje de cualquier número de espiras circulares)} \qquad (28.18)$$

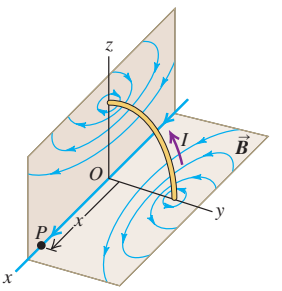
En la sección 27.7 se describió un dipolo magnético en términos de su respuesta a un campo magnético producido por corrientes fuera del dipolo. Pero un dipolo magnético también es una *fuente* de campo magnético; la ecuación (28.18) describe el campo magnético *producido* por un dipolo magnético para puntos a lo largo del eje del dipolo. Este campo es directamente proporcional al momento dipolar magnético μ. Note

que el campo a lo largo del eje x está en la misma dirección que el momento magnético vectorial $\vec{\boldsymbol{\mu}}$; esto es cierto para el eje x tanto positivo como negativo.

CUIDADO **Campo magnético de una bobina** Las ecuaciones (28.15), (28.16) y (28.18) son válidas sólo sobre el *eje* de una espira o bobina. ¡No trate de aplicarlas en otros puntos!

La figura 28.15 muestra algunas de las líneas de campo magnético que rodean una espira circular de corriente (dipolo magnético) en planos a través del eje. Las direcciones de las líneas de campo están dadas por la misma regla de la mano derecha que para un conductor largo y recto. Tome el conductor con su mano derecha, con el pulgar en la dirección de la corriente; doble los dedos alrededor en la misma dirección que las líneas de campo. Para la espira circular de corriente, las líneas de campo son curvas cerradas que circundan el conductor; sin embargo, *no* son círculos.

28.15 Líneas de campo magnético producidas por la corriente en una espira circular. En los puntos sobre el eje, el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ tiene la misma dirección que el momento magnético de la espira.



Ejemplo 28.6 Campo magnético de una bobina

Una bobina con 100 espiras circulares con radio de 0.60 m conduce una corriente de 5.0 A. *a*) Calcule el campo magnético en un punto a lo largo del eje de la bobina, a 0.80 m del centro. *b*) Sobre el eje, ¿a qué distancia desde el centro de la bobina, la magnitud del campo es $\frac{1}{8}$ de la que tiene en el centro?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema pregunta acerca del campo magnético a lo largo del eje de una bobina que conduce corriente, por lo que podemos utilizar las ideas de esta sección.

PLANTEAR: Queremos conocer el campo sobre el eje de la bobina, no necesariamente en su centro, por lo que se emplea la ecuación (28.16). Se dan $N = 100$, $I = 5.0$ A y $a = 0.60$ m. En el inciso *a*) la variable buscada es el campo magnético en un valor dado de la coordenada x. En el inciso *b*) la variable buscada es el valor de x en el que el campo tiene $\frac{1}{8}$ de la magnitud que tiene en $x = 0$.

EJECUTAR: *a*) A partir de $x = 0.80$ m, de acuerdo con la ecuación (28.16), se tiene

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(100)(5.0\ \text{A})(0.60\ \text{m})^2}{2[(0.80\ \text{m})^2 + (0.60\ \text{m})^2]^{3/2}} = 1.1 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

b) Considerando la ecuación (28.16), queremos encontrar un valor de x tal que

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{8}\frac{1}{(0^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para despejar x, se toma el recíproco de todo y luego se elevan ambos lados a la potencia 2/3; el resultado es

$$x = \pm\sqrt{3}a = \pm 1.04\ \text{m}$$

A una distancia de alrededor de 1.7 radios del centro, el campo tiene $\frac{1}{8}$ del valor que tiene en el centro.

EVALUAR: La respuesta del inciso *a*) se comprueba primero encontrando el momento magnético, para luego sustituir el resultado en la ecuación (28.18):

$$\mu = NI\pi a^2 = (100)(5.0\ \text{A})\pi(0.60\ \text{m})^2 = 5.7 \times 10^2\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(5.7 \times 10^2\ \text{A}\cdot\text{m}^2)}{2\pi[(0.80\ \text{m})^2 + (0.60\ \text{m})^2]^{3/2}} = 1.1 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

El momento magnético μ es relativamente grande; sin embargo, se trata de un campo más bien pequeño, comparable en términos de magnitud con el campo magnético terrestre. Este ejemplo da idea de la dificultad que entraña producir un campo de 1 T o más.

Evalúe su comprensión de la sección 28.5 La figura 28.12 muestra el campo magnético $d\vec{\boldsymbol{B}}$ producido en un punto P por un segmento $d\vec{\boldsymbol{l}}$ que está sobre el eje y positivo (en la parte superior de la espira). Este campo tiene componentes $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$. *a*) ¿Cuáles son los signos de las componentes del campo $d\vec{\boldsymbol{B}}$ producido en P por un segmento $d\vec{\boldsymbol{l}}$ sobre el eje y negativo (en la parte inferior de la espira)? i) $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; ii) $dB_x > 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; iii) $dB_x < 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$. iv) $dB_x < 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; v) ninguno de los anteriores. *b*) ¿Cuáles son los signos de las componentes del campo $d\vec{\boldsymbol{B}}$ producido en P por un segmento $d\vec{\boldsymbol{l}}$ en el eje z negativo (en el lado derecho del espira)? i) $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$. ii) $dB_x > 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; iii) $dB_x < 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; iv) $dB_x < 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; v) ninguno de los anteriores.

28.6 Ley de Ampère

Hasta este momento, el cálculo del campo magnético debido a una corriente ha implicado la obtención del campo infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{B}}$ debido a un elemento de corriente, y luego sumar todos los $d\vec{\boldsymbol{B}}$ para determinar el campo total. Este enfoque es directamente análogo a los cálculos para el campo *eléctrico* que efectuamos en el capítulo 21.

Para el problema del campo eléctrico, se vio que en situaciones en las que había una distribución de carga con un alto grado de simetría, con frecuencia era más fácil usar la ley de Gauss para encontrar $\vec{E}$. Asimismo, existe una ley que nos permite obtener con más facilidad los campos *magnéticos* generados por distribuciones de *corriente* con un alto grado de simetría. Pero la ley que permite hacer esto, llamada *ley de Ampère*, es de carácter muy diferente del que tiene la ley de Gauss.

La ley de Gauss para campos eléctricos implica el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada; establece que este flujo es igual al total de la carga encerrada dentro de la superficie, dividida entre la constante ϵ_0. Así, esta ley relaciona los campos eléctricos con las distribuciones de carga. En contraste, la ley de Gauss para campos *magnéticos*, la ecuación (28.10), *no* es una relación entre campos magnéticos y distribuciones de corriente; plantea que el flujo de $\vec{B}$ a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es igual a cero, haya o no una corriente dentro de la superficie. Por lo tanto, la ley de Gauss referente a $\vec{B}$ no se puede utilizar para determinar el campo magnético generado por una distribución de corriente en particular.

La ley de Ampère está formulada no en términos del flujo magnético, sino de la *integral de línea* de $\vec{B}$ alrededor de una trayectoria cerrada que se denota como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

En el capítulo 6 se emplearon integrales de línea para definir el trabajo, y en el capítulo 23 para calcular el potencial eléctrico. Para evaluar esta integral, se divide la trayectoria en segmentos infinitesimales $d\vec{l}$, para cada uno de los cuales se calcula el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{l}$, y se suman los resultados. En general, $\vec{B}$ varía de un punto al otro, y se debe emplear el valor de $\vec{B}$ en la ubicación de cada $d\vec{l}$. Una notación alternativa es $\oint B_\parallel \, dl$, donde $B_\parallel$ es la componente de $\vec{B}$ paralela a $d\vec{l}$ en cada punto. El círculo sobre el signo de la integral indica que ésta se calcula siempre para una trayectoria *cerrada*, es decir, una trayectoria cuyos puntos inicial y final son iguales.

Ley de Ampère para un conductor largo y recto

Para introducir la idea básica de la ley de Ampère, consideremos otra vez al campo magnético generado por un conductor largo y recto que transporta una corriente I. En la sección 28.3 se vio que el campo a una distancia r del conductor tiene una magnitud de

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

y que las líneas de campo magnético son círculos con centro en el conductor. Tomemos la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de uno de tales círculos con radio r, como se observa en la figura 28.16a. En cada punto del círculo, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, por lo que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\, dl$; como r es constante alrededor del círculo, B también es constante. Alternativamente, podemos decir que $B_\parallel$ es constante e igual a B en cada punto del círculo. Por lo tanto, podemos sacar a B de la integral. La integral restante $\oint dl$ simplemente es la circunferencia del círculo, por lo que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\parallel \, dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

Así, la integral de línea es independiente del radio del círculo e igual a μ_0 multiplicado por la corriente que pasa a través del área limitada por el círculo.

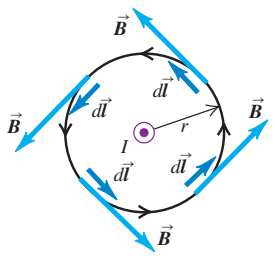
En la figura 28.16b, la situación es la misma, pero ahora la trayectoria de integración va alrededor del círculo en sentido opuesto. Ahora $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son antiparalelos, por lo que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -B\, dl$ y la integral de línea es igual a $-\mu_0 I$. Se obtiene el mismo resultado si la trayectoria de integración es la misma que la de la figura 28.16a, pero se invierte la dirección de la corriente. Así, la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a μ_0 multiplicado por la corriente que pasa a través del área limitada por la trayectoria de integración, con signo positivo o negativo en función de la dirección de la corriente con respecto a la dirección de integración.

Hay una regla simple para determinar el signo de la corriente; seguramente no se sorprenderá si le decimos que hay que utilizar la mano derecha. Doble los dedos de su

28.16 Tres trayectorias para la integral de línea de $\vec{B}$ en la vecindad de un conductor largo y recto que transporta corriente I, *hacia fuera* del plano de la página (como lo indica el círculo con un punto). El conductor se ve desde un extremo.

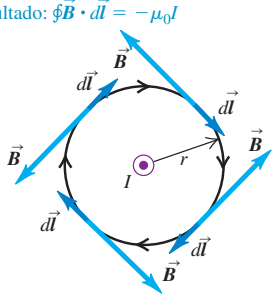
a) La trayectoria de integración es un círculo centrado en el conductor; la integración recorre el círculo en sentido antihorario.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$



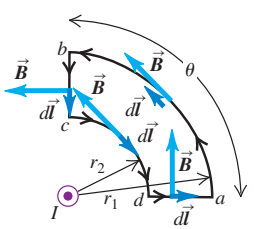
b) Misma trayectoria de integración que en el inciso a), pero la integración recorre el círculo en sentido horario.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$



c) Trayectoria de integración que no encierra el conductor.

Resultado: $\oint B \cdot dl = 0$



mano derecha alrededor de la trayectoria de integración en la dirección de esta última (es decir, la dirección que usa para evaluar $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$). En esas condiciones, su pulgar derecho indica la dirección de la corriente positiva. Las corrientes que pasan a través de la trayectoria de integración en esta dirección son positivas; aquéllas en dirección opuesta son negativas. Con esta regla, usted podrá confirmar que la corriente es positiva en la figura 28.16a, y negativa en la figura 28.16b. Otra manera de decir lo mismo es la siguiente: mirando hacia la superficie limitada por la trayectoria de integración, integre alrededor de ésta en sentido antihorario, como se ilustra en la figura 28.16a. Las corrientes que se mueven hacia usted a través de la superficie son positivas, y las que se alejan de usted son negativas.

En la figura 28.16c se utilizó una trayectoria de integración que *no* encierra al conductor. A lo largo del arco circular *ab* de radio r_1, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, y $B_\parallel = B_1 = \mu_0 I/2\pi r_1$; a lo largo del arco circular *cd* de radio r_2, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son antiparalelos y $B_\parallel = -B_2 = -\mu_0 I/2\pi r_2$. El campo $\vec{B}$ es perpendicular a $d\vec{l}$ en cada punto de las secciones rectas *bc* y *da*, por lo que $B_\parallel = 0$, y estas secciones contribuyen con cero a la integral de línea, que en total es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_\parallel dl = B_1 \int_a^b dl + (0)\int_b^c dl + (-B_2)\int_c^d dl + (0)\int_d^a dl$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(r_1\theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(r_2\theta) + 0 = 0$$

La magnitud de $\vec{B}$ es mayor en el arco *cd* que en el *ab*, pero la longitud del arco es menor, por lo que las contribuciones de los dos arcos se cancelan exactamente. Aun cuando hay un campo magnético en toda la extensión de la trayectoria de integración, la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a cero si no hay corriente que pase a través del área limitada por la trayectoria.

Estos resultados también se pueden obtener para trayectorias de integración más generales, como la que se presenta en la figura 28.17. En la posición del elemento de línea $d\vec{l}$, el ángulo entre $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ es ϕ, y

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\, dl \cos\phi$$

De acuerdo con la figura, $dl \cos\phi = r\, d\theta$, donde $d\theta$ es el ángulo que subtiende $d\vec{l}$ en la posición del conductor, y r es la distancia de $d\vec{l}$ desde el conductor. Por lo tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(r\, d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint d\theta$$

Pero $\oint d\theta$ tan sólo es igual a 2π, el ángulo total barrido por la línea radial del conductor a $d\vec{l}$ durante un recorrido completo alrededor de la trayectoria. De esta forma, se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (28.19)$$

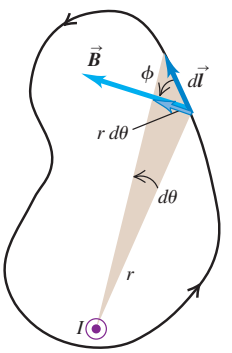
Este resultado no depende de la forma de la trayectoria ni de la posición del conductor dentro de ella. Si la corriente en el alambre es opuesta a la que se ilustra, la integral tiene el signo contrario. Pero si la trayectoria no encierra el alambre (figura 28.17b), entonces el cambio neto de θ durante el recorrido alrededor de la trayectoria de integración es igual a cero; $\oint d\theta$ es cero en vez de 2π y la integral de línea es cero.

Ley de Ampère: Enunciado general

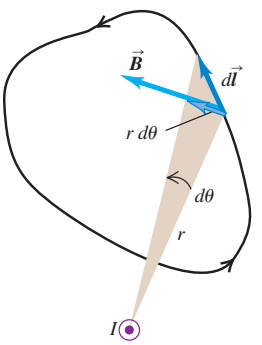
La ecuación (28.19) casi es, aunque no plenamente, el enunciado general de la ley de Ampère. Para generalizar aún más, suponga que *varios* conductores largos y rectos pasan a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración. El campo magnético total $\vec{B}$ en cualquier punto de la trayectoria es la suma vectorial de los campos generados por los conductores individuales. Así, la integral de línea de $\vec{B}$ total es igual a μ_0 multiplicado por la *suma algebraica* de las corrientes. Al calcular esta suma se utiliza la regla de los signos para corrientes que describimos antes. Si la trayectoria de integración no encierra un alambre particular, la integral de línea del

28.17 a) Una trayectoria de integración más general para la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de un conductor largo y recto que transporta una corriente I, *hacia fuera* del plano de la página. El conductor se ve desde su extremo. b) Trayectoria más general de integración que no encierra al conductor.

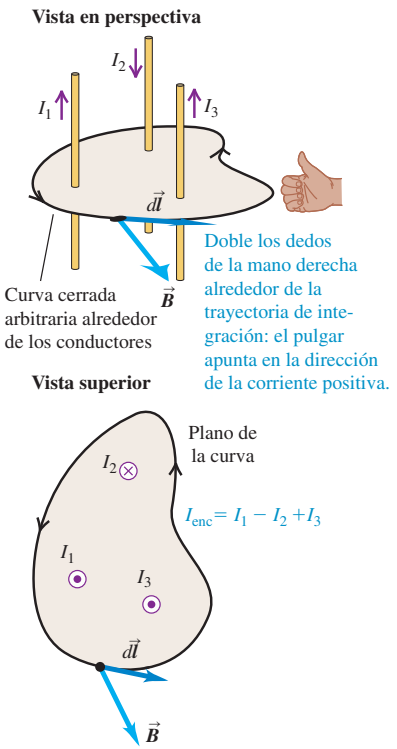
a)



b)

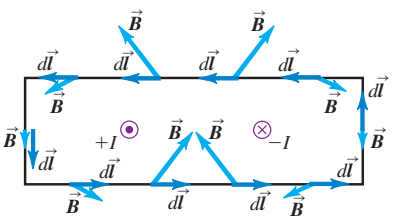


28.18 Ley de Ampère.



Ley de Ampère: Si se calcula la integral de línea del campo magnético alrededor de una curva cerrada, el resultado es igual a μ_0 multiplicado por la corriente total encerrada: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

28.19 Dos conductores largos y rectos que transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores están vistos desde sus extremos, y la trayectoria de integración va en sentido antihorario. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ recibe una contribución nula de los segmentos superior e inferior, una contribución positiva del segmento de la izquierda y otra negativa del segmento de la derecha; la integral neta es igual a cero.



campo $\vec{B}$ de ese alambre es igual a cero, ya que el ángulo θ correspondiente a ese alambre barre un cambio neto de cero en vez de 2π durante la integración. Todo conductor presente que no esté encerrado por una trayectoria particular puede contribuir al valor de $\vec{B}$ en todos los puntos, pero las *integrales de línea* de sus campos alrededor de la trayectoria tienen un valor de cero.

De esta forma, en la ecuación (28.19) se puede remplazar I por I_{enc}, la suma algebraica de las corrientes *encerradas* o *enlazadas* por la trayectoria de integración, con la suma evaluada con base en la regla de los signos que se acaba de describir (figura 28.18). Así, el enunciado de la **ley de Ampère** es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \qquad \text{(ley de Ampère)} \tag{28.20}$$

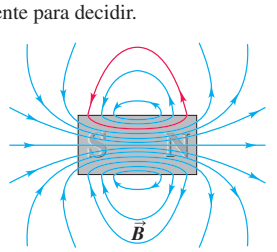
Aunque hemos obtenido la ley de Ampère sólo para el caso especial del campo de varios conductores largos, rectos y paralelos, la ecuación (28.20) de hecho es válida para conductores y trayectorias de *cualquier* forma. En principio, la obtención general no es diferente de lo que se ha expuesto, pero la geometría es más complicada.

Si $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, esto *no* necesariamente significa que $\vec{B} = \mathbf{0}$ a todo lo largo de la trayectoria, sino sólo que la corriente total a través de un área limitada por la trayectoria es igual a cero. En las figuras 28.16c y 28.17b, las trayectorias de integración no encierran ninguna corriente. En la figura 28.19 hay corrientes positivas y negativas de igual magnitud a través del área encerrada por la trayectoria. En ambos casos, $I_{enc} = 0$, y la integral de línea es cero.

CUIDADO **Integrales de línea de campos eléctricos y magnéticos** En el capítulo 23 vimos que la integral de línea del campo electrostático $\vec{E}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a cero; éste es el enunciado de que la fuerza electrostática $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga puntual q es conservativo, por lo que esta fuerza realiza un trabajo de cero sobre una carga en movimiento alrededor de una trayectoria cerrada y que vuelve al punto de partida. Tal vez usted piense que el valor de la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ se relaciona de manera similar con la pregunta de si la *fuerza magnética* es conservativa. Éste no es en absoluto el caso. Recuerde que la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una partícula con carga en movimiento siempre es *perpendicular* a $\vec{B}$, por lo que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ *no* se relaciona con el trabajo realizado por la fuerza magnética; como se establece en la ley de Ampère, esta integral sólo se relaciona con la corriente total que cruza una superficie limitada por la trayectoria de integración. De hecho, la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento *no* es conservativa. Una fuerza conservativa sólo depende de la posición del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza, pero la fuerza magnética sobre una partícula con carga y en movimiento también depende de la *velocidad* de la partícula.

En la forma que se enunció, la ley de Ampère resulta ser válida sólo si las corrientes son estables y si no están presentes materiales magnéticos o campos eléctricos que varíen con el tiempo. En el capítulo 29 veremos cómo generalizar la ley de Ampère para campos variables con el tiempo.

Evalúe su comprensión de la sección 28.6 La siguiente figura muestra líneas de campo magnético a través del centro de un imán permanente. El imán no está conectado a una fuente de fem. Una de las líneas de campo está en color rojo. ¿Qué puede usted concluir acerca de las corrientes dentro de un imán permanente en el interior de la región encerrada por esta línea de campo? i) No hay corrientes en el interior del imán; ii) hay corrientes dirigidas hacia fuera del plano de la página; iii) hay corrientes dirigidas hacia el plano de la página; iv) no se da información suficiente para decidir.



28.7 Aplicaciones de la ley de Ampère

La ley de Ampère es útil cuando se puede aprovechar la simetría de una situación para evaluar la integral de línea de $\vec{B}$. A continuación se dan varios ejemplos. La Estrategia para resolver problemas 28.2 es directamente análoga a la Estrategia para resolver problemas 22.1 (sección 22.4) para aplicaciones de la ley de Gauss; se sugiere que repase esa estrategia ahora y compare los dos métodos.

Estrategia para resolver problemas 28.2 Ley de Ampère

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Al igual que la ley de Gauss para la electricidad, la ley de Ampère siempre se cumple, pero es más útil en situaciones en las que el modelo del campo magnético tiene un alto grado de simetría. En tales situaciones, se usa la ley de Ampère para encontrar una relación entre el campo magnético como función de la posición y la corriente que genera el campo.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Seleccione la trayectoria de integración que se usará con la ley de Ampère. Si lo que quiere es determinar el campo magnético en cierto punto, entonces la trayectoria debe pasar por ese punto. La trayectoria de integración no necesita ser ninguna frontera física real. Por lo general, es una curva puramente geométrica; puede estar en el espacio vacío, incrustada en un cuerpo sólido o tener algo de ambas cosas. La trayectoria de integración debe tener suficiente *simetría* para hacer posible la evaluación de la integral. Si el problema tiene simetría cilíndrica, la trayectoria de integración por lo general será un círculo coaxial con el eje del cilindro.
2. Determine la(s) variable(s) buscada(s). Generalmente, una de ellas será la magnitud del campo $\vec{B}$ como función de la posición.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Efectúe la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de la trayectoria de integración que haya elegido. Si $\vec{B}$ es tangente a toda la trayectoria de integración o a una parte de ella y tiene la misma magnitud B en todos los puntos, entonces su integral de línea es igual al producto de B por la longitud de esa porción de la trayectoria. Si $\vec{B}$ es perpendicular a alguna porción de la trayectoria, esa parte no hace ninguna contribución a la integral.
2. En la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, $\vec{B}$ siempre es el campo magnético *total* en cada punto de la trayectoria. Este campo puede ser causado en parte por corrientes encerradas por la trayectoria y en parte por otras fuera de ella. Si *no* hay corrientes netas contenidas dentro de la trayectoria, el campo en los puntos sobre la trayectoria no necesariamente es igual a cero, pero la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ siempre es igual a cero.
3. Determine la corriente I_{enc} encerrada por la trayectoria de integración. El signo de esta corriente está dado por alguna regla de la mano derecha. Doble los dedos de su mano derecha de manera que sigan la trayectoria de integración en la dirección en que realizó la integración. Entonces, su pulgar apunta en la dirección de la corriente positiva. Si $\vec{B}$ es tangente a la integración en todos los puntos a lo largo de la trayectoria e I_{enc} es positiva, entonces la dirección de $\vec{B}$ es la misma que la dirección de la trayectoria de integración; si en vez de ello, I_{enc} es negativa, $\vec{B}$ está en la dirección opuesta a la dirección de integración.
4. Utilice la ley de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, para despejar la variable buscada.

EVALUAR *la respuesta:* Si el resultado es una expresión para la magnitud del campo como función de la posición, se puede comprobar examinando la forma en que se comporta la expresión en diferentes límites.

Ejemplo 28.7 Campo de un conductor largo, recto y portador de corriente

En la sección 28.6 se obtuvo la ley de Ampère empleando la ecuación (28.9) para el campo de un conductor largo, recto y que transportaba corriente. Revierta este proceso y utilice la ley de Ampère para encontrar la magnitud *y* dirección de $\vec{B}$ en esta situación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Esta situación presenta simetría cilíndrica, por lo que se utiliza la ley de Ampère para encontrar el campo magnético en todos los puntos ubicados a una distancia r del conductor.

PLANTEAR: Se toma como trayectoria de integración un círculo con radio r centrado en el conductor y en un plano perpendicular a éste, como en la figura 28.16a (sección 28.6). En cada punto, $\vec{B}$ es tangente a este círculo.

EJECUTAR: De acuerdo con la elección de la trayectoria de integración, la ley de Ampère [ecuación (28.20)] es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

y de inmediato se deduce la ecuación (28.9), $B = \mu_0 I/2\pi r$.

La ley de Ampère determina la dirección de $\vec{B}$ y su magnitud. Como vamos alrededor de la trayectoria de integración en sentido antihorario, la dirección positiva para la corriente queda fuera del plano de la figura 28.16a; ésta es la misma que la dirección real de la corriente en la figura, por lo que I es positiva y la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ también es positiva. Los elementos $d\vec{l}$ van en sentido antihorario, al igual que $\vec{B}$, como se ilustra en la figura 28.16a.

EVALUAR: Nuestros resultados son congruentes con los de la sección 28.6, como debe ser.

Ejemplo 28.8 Campo en el interior de un conductor largo y cilíndrico

Un conductor cilíndrico con radio R transporta una corriente I (figura 28.20). La corriente está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de la sección transversal del conductor. Encuentre el campo magnético, como función de la distancia r desde el eje del conductor, de puntos situados tanto dentro ($r < R$) como fuera ($r > R$) del conductor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez más se tiene una distribución de corriente con simetría cilíndrica. Igual que para un conductor largo, recto y delgado que transporta corriente, las líneas de campo magnético deben ser círculos concéntricos con el eje del conductor.

PLANTEAR: Para encontrar el campo magnético *dentro* del conductor, se toma la trayectoria de integración como un círculo de radio $r < R$, como se ilustra en la figura 28.20. *Afuera* del conductor también se considera un círculo, pero con radio $r > R$. En cualquier caso, la trayectoria de integración aprovecha la simetría circular del patrón del campo magnético.

EJECUTAR: Dentro del conductor, $\vec{B}$ tiene la misma magnitud en todo punto de la trayectoria circular de integración y es tangente a ésta. Así, la magnitud de la integral de línea es simplemente $B(2\pi r)$. Si se utiliza la regla de la mano derecha para determinar el signo de la corriente, entonces la corriente que pasa a través del área color café encerrada por la trayectoria es positiva; de ahí que $\vec{B}$ apunte en la misma dirección que la trayectoria de integración, como se aprecia. Para calcular la corriente I_{enc} dentro de la trayectoria, note que la densidad de corriente (corriente por unidad de área) es $J = I/\pi R^2$, por lo que $I_{enc} = J(\pi r^2) = Ir^2/R^2$. Por último, la ley de Ampère da

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

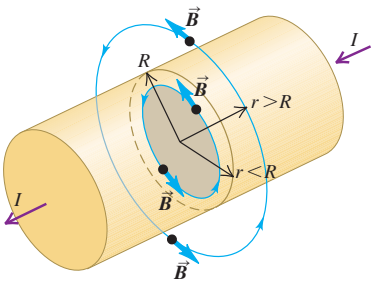
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2} \qquad \begin{matrix}\text{(dentro del conductor,}\\ r < R)\end{matrix} \qquad (28.21)$$

Para la trayectoria de integración circular afuera del conductor ($r > R$), se aplican los mismos argumentos de simetría y la magnitud de $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ de nuevo resulta ser $B(2\pi r)$. La regla de la mano derecha da la dirección de $\vec{B}$ como se ilustra en la figura 28.20. Para esta trayectoria, $I_{enc} = I$, la corriente total en el conductor. La aplicación de la ley de Ampère da la misma ecuación que en el ejemplo 28.7, con el mismo resultado para B:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \begin{matrix}\text{(fuera del conductor,}\\ r > R)\end{matrix} \qquad (28.22)$$

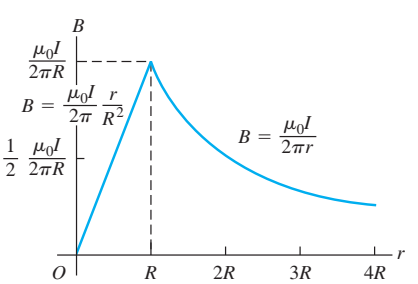
En el exterior del conductor, el campo magnético es el mismo que el de un conductor largo, recto y que transporta una corriente I, independiente del radio R sobre el que se distribuye la corriente. De hecho, el campo magnético afuera de *cualquier* distribución de corriente con simetría cilíndrica es el mismo que si toda ella estuviera concentrada a lo largo del eje de la distribución. Esto es análogo a los resultados de los ejemplos 22.5 y 22.9 (sección 22.4), en los que se vio que el campo *eléctrico* afuera de un cuerpo *con carga* con simetría esférica era el mismo que si toda la carga se localizara en el centro.

28.20 Para encontrar el campo magnético en el radio $r < R$, se aplica la ley de Ampère al círculo que encierra el área de color rojo. La corriente a través del área roja es $(r^2/R^2)I$. Para obtener el campo magnético en el radio $r > R$, se aplica la ley de Ampère al círculo que encierra todo el conductor.



EVALUAR: Observe que en la superficie del conductor ($r = R$), la ecuación (28.21) para $r < R$ y la ecuación (28.22) para $r > R$ concuerdan (como deben). La figura 28.21 muestra una gráfica de B como función de r, tanto en el interior como en el exterior del conductor.

28.21 Magnitud del campo magnético dentro y fuera de un conductor cilíndrico, largo y recto con radio R, que transporta una corriente I.

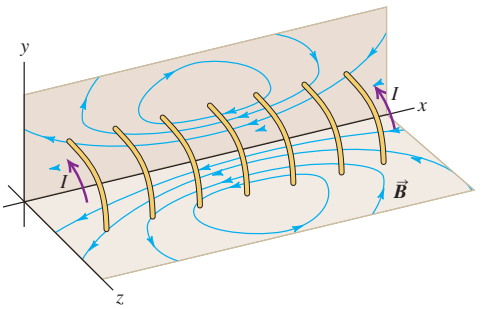


Ejemplo 28.9 Campo de un solenoide

Un solenoide consiste en un enrollamiento helicoidal de alambre sobre un cilindro, por lo general con sección transversal circular. Puede tener cientos o miles de vueltas muy apretadas, cada una de las cuales puede considerarse como una espira circular. También es posible que haya varias capas de vueltas. Por sencillez, la figura 28.22 muestra un solenoide con unas cuantas vueltas, todas las cuales conducen la misma corriente I, y el campo total $\vec{B}$ en cada punto es la suma vectorial de los campos generados por las vueltas individuales. La figura ilustra líneas de campo en los planos xy y xz. En el centro del solenoide aparecen dibujadas líneas de campo espaciadas de manera uniforme. Los cálculos exactos demuestran que para un solenoide largo y con devanado compacto, la mitad de las líneas de campo emergen de los extremos, y la otra mitad se "fuga" a través de los devanados entre el centro y el extremo.

Las líneas de campo cerca del centro del solenoide son aproximadamente paralelas, lo que indica un campo $\vec{B}$ casi uniforme; afuera del

28.22 Líneas de campo magnético producidas por la corriente en un solenoide. Por claridad, sólo se ilustran unas cuantas espiras.



solenoide, las líneas de campo están dispersas, y el campo magnético es débil. Si el solenoide es muy largo en comparación con el diámetro de su sección transversal y las bobinas tienen un devanado compacto, el campo *interno* cerca del punto medio de la longitud del solenoide es casi uniforme en toda la sección transversal y paralelo al eje, y el campo *externo* cerca del punto medio es muy pequeño.

Aplique la ley de Ampère para encontrar el campo en el centro, o cerca del centro, de un solenoide largo de este tipo. El solenoide tiene n espiras de alambre por unidad de longitud y conduce una corriente I.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ésta es una situación con un alto grado de simetría, con un campo $\vec{B}$ uniforme en el interior del solenoide y un campo igual a cero en el exterior. De esta forma, es posible emplear la ley de Ampère para obtener el campo dentro considerando una trayectoria de integración apropiada.

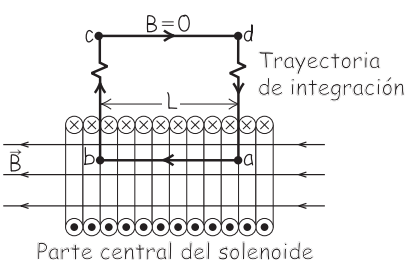
PLANTEAR: La figura 28.23 presenta la situación y nuestra trayectoria de integración, el rectángulo *abcd*. El lado *ab*, con longitud L, es paralelo al eje del solenoide. Los lados *bc* y *da* se consideran muy largos, de manera que el lado *cd* está lejos del solenoide; entonces, el campo en el lado *cd* es tan pequeño que resulta despreciable.

EJECUTAR: Por simetría, el campo $\vec{B}$ a lo largo del lado *ab* es paralelo a éste y es constante. Al efectuar la integración de la ley de Ampère, vamos a lo largo del lado *ab* en la misma dirección que $\vec{B}$. Así, para este lado, $B_\parallel = +B$, y

$$\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{l} = BL$$

A lo largo de los lados *bc* y *da*, $B_\parallel = 0$ porque $\vec{B}$ es perpendicular a ellos; a lo largo del lado *cd*, $B_\parallel = 0$ porque $\vec{B} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, la integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ alrededor de toda la trayectoria cerrada se reduce a BL.

28.23 Nuestro dibujo para este problema.



El número de espiras en el tramo L es nL. Cada una de estas espiras pasa una vez a través del rectángulo *abcd* y conduce una corriente I, donde I es la corriente en los devanados. La corriente total encerrada por el rectángulo es, entonces, $I_{\text{enc}} = nLI$. De acuerdo con la ley de Ampère, como la integral $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ es positiva, I_{enc} también debe ser positiva; de ahí que la corriente que pasa a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración debe tener la dirección que se muestra en la figura 28.23. Entonces, la ley de Ampère da la magnitud B:

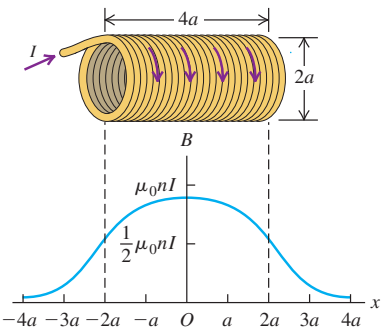
$$\begin{aligned} BL &= \mu_0 nLI \\ B &= \mu_0 nI \end{aligned} \qquad \text{(solenoide)} \qquad (28.23)$$

El lado *ab* no necesariamente queda sobre el eje del solenoide, por lo que este cálculo también demuestra que el campo es uniforme en toda la sección transversal en el centro de la longitud del solenoide.

EVALUAR: Observe que la *dirección* de $\vec{B}$ dentro del solenoide coincide con la del momento magnético vectorial $\vec{\mu}$ del solenoide. Éste es el mismo resultado que encontramos en la sección 28.5 para una sola espira portadora de corriente.

Para puntos a lo largo del eje, el campo es más fuerte en el centro del solenoide y cae cerca de los extremos. Para un solenoide muy largo en comparación con su diámetro, el campo en cada extremo tiene exactamente la mitad de la intensidad que en el centro. Para un solenoide corto y grueso, la relación es más complicada. La figura 28.24 muestra la gráfica de B como función de x para puntos sobre el eje de un solenoide corto.

28.24 Magnitud del campo magnético en puntos a lo largo del eje de un solenoide con longitud $4a$, equivalente a cuatro veces su radio a. La magnitud del campo en cada extremo es alrededor de la mitad de su valor en el centro. (Compare con la figura 28.14 para el campo de N espiras circulares.)



Ejemplo 28.10 Campo de un solenoide toroidal

La figura 28.25a muestra un **solenoide toroidal** en forma de rosquilla, también llamado *toroide*, devanado con N espiras de alambre que conduce una corriente I. En una versión práctica las espiras estarían más apretadas de lo que aparecen en la figura. Encuentre el campo magnético en todos los puntos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El flujo de corriente alrededor de la circunferencia del toroide produce una componente del campo magnético que es perpendicular al plano de la figura, como sucedió con la espira de corriente que se analizó en la sección 28.5. Pero si las bobinas están muy apretadas, podemos considerarlas espiras circulares que conducen corriente entre el radio interior y el exterior del solenoide toroidal; por lo tanto, el flujo de corriente alrededor de la circunferencia del toroide es despreciable, al igual que la componente perpendicular de $\vec{B}$. En esta aproximación idealizada, la simetría circular de la situación nos dice que las líneas de campo magnético deben ser círculos concéntricos con el eje del toroide.

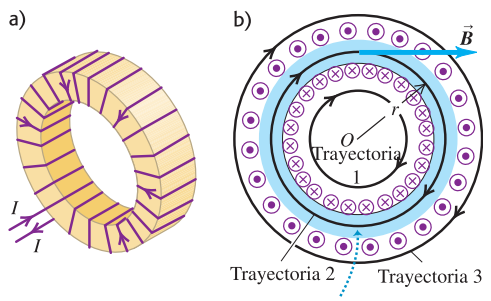
PLANTEAR: Para sacar ventaja de esta simetría al calcular el campo, se eligen trayectorias de integración circulares para usarlas con la ley de Ampère. En la figura 28.25b se ilustran tres de tales trayectorias.

EJECUTAR: Primero considere la trayectoria de integración 1 en la figura 28.25b. Si el solenoide toroidal produce algún campo en esta región, debe ser *tangente* a la trayectoria en todos los puntos, y $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$ será igual al producto de B por la circunferencia $l = 2\pi r$ de la trayectoria. Pero la corriente total encerrada por la trayectoria es igual a cero, por lo que según la ley de Ampère, el campo $\vec{B}$ debe ser cero en cualquier punto de esta trayectoria.

En forma similar, si el solenoide toroidal produce algún campo a lo largo de la trayectoria 3, también debe ser tangente a ella en todos los puntos. Cada espira del devanado pasa *dos veces* a través del área limitada

continúa

28.25 a) Solenoide toroidal. Por claridad, sólo se muestran algunas espiras. b) Trayectorias de integración (círculos negros) usadas para calcular el campo $\vec{B}$ establecido por la corriente (se representa con puntos y cruces).



El campo magnético está confinado casi por completo en el espacio encerrado por los devanados (en azul).

por esta trayectoria, llevando corrientes iguales en sentidos opuestos. Por lo tanto, la corriente *neta* I_{enc} encerrada dentro de esta área es igual a cero, por lo que $\vec{B} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de la trayectoria. Conclusión: *El campo de un solenoide toroidal idealizado está confinado por completo al espacio encerrado por los devanados*. Podemos pensar en un solenoide toroidal idealizado de este tipo como en un solenoide con devanado compacto que ha sido doblado para formar un círculo.

Por último, consideremos la trayectoria 2, un círculo con radio r. De nuevo, por simetría, se espera que el campo $\vec{B}$ sea tangente a la trayectoria y que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ sea igual a $2\pi rB$. Cada espira del devanado pasa *una vez* a través del área limitada por la trayectoria 2. La corriente total encerrada por la trayectoria es $I_{enc} = NI$, donde N es el número total de espiras en el devanado; en la figura 28.25b, I_{enc} es positiva para la dirección de integración en el sentido horario. Por consiguiente, según la ley de Ampère,

$$2\pi rB = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad \text{(solenoide toroidal)} \qquad (28.24)$$

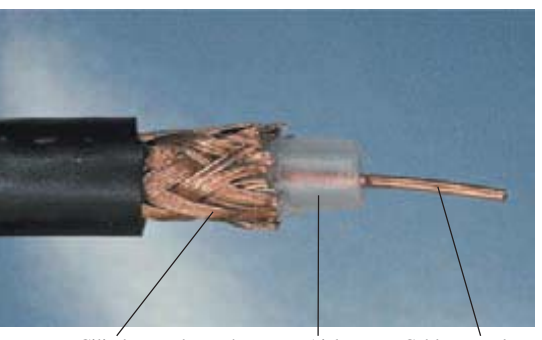
EVALUAR: El campo magnético *no* es uniforme sobre una sección transversal del núcleo porque en el lado externo de la sección el radio r es más grande que en el lado interno. Sin embargo, si el espesor radial del núcleo es pequeño en comparación con r, el campo varía sólo un poco en la sección transversal. En ese caso, si se considera que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia del toroide y que $N/2\pi r$ es el número de vueltas por unidad de longitud n, el campo se puede representar como

$$B = \mu_0 nI$$

igual que en el centro de un solenoide largo y *recto*.

En un solenoide toroidal real, las vueltas no son precisamente espiras circulares, sino segmentos de una hélice doblada. Como resultado, el campo en el exterior no vale estrictamente cero. Para estimar su magnitud, imaginemos que la figura 28.25a equivale aproximadamente, con respecto a puntos situados afuera del toro, a una espira circular con una sola vuelta y radio r. De esta forma, se puede emplear la ecuación (28.17) para demostrar que el campo en el *centro* del toro es más pequeño que el campo en el interior aproximadamente en un factor de N/π.

Las ecuaciones que hemos obtenido para el campo en un solenoide recto o toroidal con devanado compacto sólo son correctas en el sentido estricto si los devanados están en un *vacío*. Sin embargo, para la mayoría de los propósitos prácticos, se pueden aplicar a devanados en aire o sobre un núcleo de algún material no magnético y no superconductor. En la siguiente sección se verá cómo se modifican si el núcleo es un material magnético.



Evalúe su comprensión de la sección 28.7 Considere un alambre conductor que corre a lo largo del eje central de un cilindro conductor hueco. Ese arreglo, llamado *cable coaxial*, tiene muchas aplicaciones en las telecomunicaciones. (Un ejemplo es el cable que conecta un televisor con el proveedor local de señal de cable.) En ese cable, una corriente I corre en un sentido a lo largo del cilindro conductor hueco y se distribuye uniformemente en toda el área de la sección transversal del cilindro. Una corriente igual corre en sentido opuesto a lo largo del cable central. ¿Cómo depende la magnitud B del campo magnético afuera del cable, de la distancia r desde el eje central del cable? i) B es proporcional a $1/r$; ii) B es proporcional a $1/r^2$; iii) B es igual a cero en todos los puntos fuera del cable.

*28.8 Materiales magnéticos

En el análisis de cómo es que las corrientes generan campos magnéticos, se ha supuesto que los conductores están rodeados por vacío. Pero las bobinas de transformadores, motores, generadores y electroimanes casi siempre tienen núcleos de hierro para incrementar el campo magnético y confinarlo a las regiones deseadas. Los imanes permanentes, las cintas magnéticas de grabación y los discos de computadora dependen directamente de las propiedades magnéticas de los materiales; cuando se guarda información en un disco de computadora, en realidad se establece una configuración de imanes permanentes microscópicos en el disco. Así que conviene examinar algunos aspectos de las propiedades magnéticas de los materiales. Después de describir los orígenes atómicos de las propiedades magnéticas, estudiaremos las tres grandes clases de comportamiento magnético que ocurren en los materiales: *paramagnetismo*, *diamagnetismo* y *ferromagnetismo*.

El magnetón de Bohr

Como se vio en la sección 27.7, los átomos que constituyen toda la materia contienen electrones en movimiento, los cuales forman espiras microscópicas de corriente que producen campos magnéticos por sí mismos. En muchos materiales, estas corrientes se encuentran

orientadas al azar y no producen un campo magnético neto. Pero en algunos materiales, un campo externo (producido por corrientes afuera del material) ocasionan que estas espiras se orienten en forma preferencial con el campo, por lo que sus campos magnéticos se *suman* al campo exterior. Entonces decimos que el material se ha *magnetizado*.

Veamos cómo surgen estas corrientes microscópicas. La figura 28.26 muestra un modelo primitivo de electrón en un átomo. Se representa el electrón (masa, m; carga, $-e$) como si se desplazara en una órbita circular con radio r y velocidad v. Esta carga en movimiento es equivalente a una espira de corriente. En la sección 27.7 se vio que una espira de corriente con área A y corriente I tiene un momento dipolar magnético μ dado por $\mu = IA$; para el electrón en órbita, el área de la espira es $A = \pi r^2$. Para encontrar la corriente asociada con el electrón, advertimos que el periodo orbital T (el tiempo que tarda el electrón en completar una órbita) es la circunferencia de la órbita dividida entre la rapidez del electrón: $T = 2\pi r/v$. La corriente equivalente I es la carga total que pasa por cualquier punto de la órbita por unidad de tiempo, la cual es simplemente el cociente que resulta de dividir la magnitud e de la carga del electrón entre el periodo orbital T:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Entonces, el momento magnético $\mu = IA$ es

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \tag{28.25}$$

Es útil expresar μ en términos de la *cantidad de movimiento angular* L del electrón. Para una partícula que se desplaza en una trayectoria circular, la magnitud de la cantidad de movimiento angular es igual a la magnitud de la cantidad de movimiento mv multiplicada por el radio r, es decir, $L = mvr$ (véase la sección 10.5). Al comparar esto con la ecuación (28.25), podemos escribir

$$\mu = \frac{e}{2m}L \tag{28.26}$$

La ecuación (28.26) es útil en nuestro análisis porque la cantidad de movimiento angular atómico está *cuantizado*; su componente en una dirección particular siempre es un múltiplo entero de $h/2\pi$, donde h es una constante física fundamental llamada *constante de Planck*. (En el capítulo 41 estudiaremos con más detalle la cuantización de la cantidad de movimiento angular.) El valor numérico de h es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

Así, la cantidad $h/2\pi$ representa una unidad fundamental de la cantidad de movimiento angular en los sistemas atómicos, del mismo modo que e es una unidad fundamental de carga. Asociada con la cuantización de $\vec{\boldsymbol{L}}$ hay una incertidumbre fundamental en la *dirección* de $\vec{\boldsymbol{L}}$ y, por lo tanto, de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. En el siguiente análisis, cuando hablemos de la magnitud de un momento magnético, un enunciado más preciso sería "componente máxima en una dirección dada". De esta forma, decir que un momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ está alineado con un campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en realidad significa que $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ tiene su componente máxima posible en la dirección de $\vec{\boldsymbol{B}}$; tales componentes siempre están cuantizadas.

La ecuación (28.26) muestra que, asociada con la unidad fundamental de cantidad de movimiento angular, hay otra unidad fundamental de momento magnético. Si $L = h/2\pi$, entonces

$$\mu = \frac{e}{2m}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m} \tag{28.27}$$

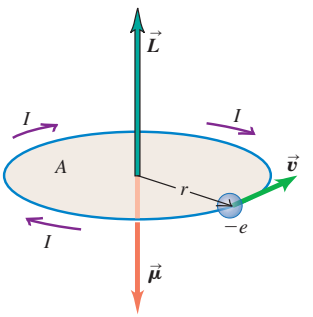
Esta cantidad se llama **magnetón de Bohr**, y se denota con μ_B. Su valor numérico es

$$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T}$$

Le recomendamos verificar que estos dos conjuntos de unidades sean congruentes. El segundo conjunto es útil cuando se calcula la energía potencial $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}}$ para un momento magnético en un campo magnético.

Los electrones también tienen una cantidad de movimiento angular intrínseco, llamado *espín*, que no se relaciona con el movimiento orbital, sino que se puede visuali-

28.26 Un electrón que se desplaza con rapidez v en una órbita circular de radio r tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\boldsymbol{L}}$ y un momento dipolar magnético orbital dirigido en sentido opuesto $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. También tiene cantidad de movimiento angular de espín y un momento dipolar magnético de espín en sentido opuesto.



zar en un modelo clásico como si girara sobre un eje. Esta cantidad de movimiento angular también tiene asociado un momento magnético, y su magnitud resulta ser casi exactamente un magnetón de Bohr. (Ciertos efectos que tienen que ver con la cuantización del campo electromagnético ocasionan que el espín del momento magnético sea alrededor de 1.001 μ_B.)

Paramagnetismo

En un átomo, la mayoría de los distintos momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones suman cero. Sin embargo, en ciertos casos el átomo tiene un momento magnético neto que es del orden de μ_B. Cuando un material así se coloca en un campo magnético, éste ejerce un par de torsión sobre cada momento magnético, según lo da la ecuación (27.26): $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Estos pares de torsión tienden a alinear los momentos magnéticos con el campo, la posición de mínima energía potencial, como se vio en la sección 27.7. En esta posición, las direcciones de las espiras de corriente son de tal naturaleza que se *suman* al campo magnético aplicado externamente.

En la sección 28.5 vimos que el campo $\vec{B}$ producido por una espira de corriente es proporcional al momento dipolar magnético de la espira. Del mismo modo, el campo adicional $\vec{B}$ producido por espiras de corriente electrónicas microscópicas es proporcional al momento magnético total $\vec{\mu}_{\text{total}}$ por unidad de volumen V en el material. Esta cantidad vectorial recibe el nombre de **magnetización** del material, y se denota por $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{\text{total}}}{V} \tag{28.28}$$

El campo magnético adicional debido a la magnetización del material resulta ser igual simplemente a $\mu_0\vec{M}$, donde μ_0 es la misma constante que aparece en la ley de Biot y Savart y la ley de Ampère. Cuando un material así rodea por completo un conductor portador de corriente, el campo magnético total $\vec{B}$ en el material es

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} \tag{28.29}$$

donde $\vec{B}_0$ es el campo generado por la corriente en el conductor.

Para comprobar que las unidades de la ecuación (28.29) son congruentes, advierta que la magnetización $\vec{M}$ es momento magnético por unidad de volumen. Las unidades de momento magnético son corriente por área $(\text{A} \cdot \text{m}^2)$, por lo que las unidades de magnetización son $(\text{A} \cdot \text{m}^2)/\text{m}^3 = \text{A}/\text{m}$. De la sección 28.1, las unidades de la constante μ_0 son $\text{T} \cdot \text{m}/\text{A}$. Así que las unidades de $\mu_0\vec{M}$ son las mismas que las de $\vec{B}$: $(\text{T} \cdot \text{m}/\text{A})(\text{A}/\text{m}) = \text{T}$.

Se dice que un material que tenga el comportamiento que se acaba de describir es **paramagnético**. El resultado es que el campo magnético en cualquier punto de un material así es mayor en un factor adimensional K_m, llamado **permeabilidad relativa** del material, de lo que sería si ese material se remplazara por un vacío. El valor de K_m es diferente para distintos materiales; para sólidos y líquidos paramagnéticos comunes a temperatura ambiente, es común que K_m varíe entre 1.00001 y 1.003.

Todas las ecuaciones de este capítulo que relacionan los campos magnéticos con sus fuentes se adaptan a la situación en la que el conductor que transporta corriente está incrustado en un material paramagnético. Todo lo que se necesita hacer es sustituir μ_0 por $K_m\mu_0$. Este producto por lo general se denota como μ y se llama **permeabilidad** del material:

$$\mu = K_m\mu_0 \tag{28.30}$$

CUIDADO **Dos significados del símbolo μ** La ecuación (28.30) implica cierta notación realmente peligrosa porque también hemos usado μ para denotar el momento dipolar magnético. Es costumbre usar μ para ambas cantidades, pero cuidado: de aquí en adelante, cada vez que vea μ cerciórese de saber si representa permeabilidad o momento magnético. Por lo general, eso se descubre de acuerdo con el contexto.

La cantidad en que la permeabilidad difiere de la unidad se llama **susceptibilidad magnética**, y se denota con χ_m:

$$\chi_m = K_m - 1 \tag{28.31}$$

Tanto K_m como χ_m son cantidades adimensionales. En la tabla 28.1 se dan valores de susceptibilidad magnética para varios materiales. Por ejemplo, para el aluminio, $\chi_m = 2.2 \times 10^{-5}$ y $K_m = 1.000022$. Los materiales en el primer grupo de la tabla son paramagnéticos; dentro de poco estudiaremos el segundo grupo de materiales, a los que llamamos *diamagnéticos*.

La tendencia que tienen los momentos magnéticos atómicos a alinearse de forma paralela al campo magnético (donde la energía potencial es mínima) se opone al movimiento térmico aleatorio, el cual tiende a distribuir sus orientaciones al azar. Por esta razón, la susceptibilidad paramagnética siempre disminuye con el aumento de temperatura. En muchos casos es inversamente proporcional a la temperatura absoluta T, y la magnetización M puede expresarse como

$$M = C\frac{B}{T} \tag{28.32}$$

Esta relación se llama *ley de Curie*, en honor de su descubridor, Pierre Curie (1859-1906). La cantidad C es una constante, diferente para los distintos materiales, llamada *constante de Curie*.

Como se describió en la sección 27.7, un cuerpo con momentos dipolares magnéticos es atraído hacia los polos de un imán. En la mayoría de las sustancias paramagnéticas, esta atracción es muy débil debido a la redistribución térmica aleatoria de los momentos magnéticos atómicos. Por esa razón, un imán no atrae objetos de aluminio (una sustancia paramagnética). Sin embargo, a temperaturas muy bajas, los efectos térmicos se reducen, la magnetización aumenta de acuerdo con la ley de Curie y las fuerzas de atracción son mayores.

Tabla 28.1 Susceptibilidades magnéticas de materiales paramagnéticos y diamagnéticos a $T = 20°C$

Material	$\chi_m = K_m - 1$ ($\times 10^{-5}$)
Paramagnéticos	
Alumbre de hierro y amonio	66
Uranio	40
Platino	26
Aluminio	2.2
Sodio	0.72
Oxígeno gaseoso	0.19
Diamagnéticos	
Bismuto	−16.6
Mercurio	−2.9
Plata	−2.6
Carbono (diamante)	−2.1
Plomo	−1.8
Cloruro de sodio	−1.4
Cobre	−1.0

Ejemplo 28.11 Dipolos magnéticos en un material paramagnético

El óxido nítrico (NO) es un compuesto paramagnético. Sus moléculas tienen un momento magnético con componente máxima en cualquier dirección de alrededor de un magnetón de Bohr cada una. En un campo magnético con magnitud $B = 1.5$ T, compare la energía de interacción de los momentos magnéticos con el campo, con la energía cinética de traslación media de las moléculas a una temperatura de 300 K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Esta sección implica tanto la energía de un momento magnético en un campo magnético (capítulo 27) como la energía cinética de traslación media debida a la temperatura (capítulo 18).

PLANTEAR: En la sección 27.7 se obtuvo la ecuación $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ para la energía de interacción de un momento magnético $\vec{\mu}$ con un campo $\vec{B}$. De la sección 18.3, la energía cinética de traslación media de una molécula a temperatura T es $K = \frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann.

EJECUTAR: La energía de interacción se escribe como $U = -(\mu\cos\phi)B$, donde $\mu\cos\phi$ es la componente del momento magnético $\vec{\mu}$ en la dirección del campo $\vec{B}$. En nuestro caso, el valor máximo de la componente $\mu\cos\phi$ es de aproximadamente μ_B, por lo que

$$|U|_{máx} \approx \mu_B B = (9.27 \times 10^{-24}\,\text{J/T})(1.5\,\text{T})$$
$$= 1.4 \times 10^{-23}\,\text{J} = 8.7 \times 10^{-5}\,\text{eV}$$

La energía cinética de traslación media K es

$$K = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})(300\,\text{K})$$
$$= 6.2 \times 10^{-21}\,\text{J} = 0.039\,\text{eV}$$

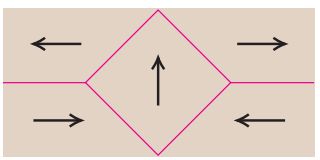
EVALUAR: A una temperatura de 300 K, la energía de interacción magnética es mucho *menor* que la energía cinética aleatoria, por lo que sólo se espera un pequeño grado de alineamiento. Por eso, las susceptibilidades paramagnéticas a temperatura ordinaria son, por lo general, muy pequeñas.

Diamagnetismo

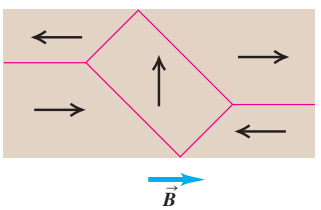
En ciertos materiales, el momento magnético total de todas las espiras atómicas de corriente es igual a cero cuando no hay un campo magnético. Pero incluso estos materiales tienen efectos magnéticos porque un campo externo altera los movimientos de los electrones dentro de los átomos, lo que genera espiras de corriente adicionales y dipolos magnéticos inducidos comparables a los dipolos *eléctricos* inducidos que se estudiaron en la sección 28.5. En este caso, la dirección del campo adicional causado por estas espiras de corriente siempre es *opuesta* a la dirección del campo externo. (Este comportamiento se explica mediante la ley de Faraday de la inducción, que se estudiará en el capítulo 29. Una corriente inducida siempre tiende a cancelar el cambio de campo que la provocó.)

28.27 En este diagrama, adaptado de una fotografía con aumento, las flechas señalan las direcciones de magnetización en los dominios de un solo cristal de níquel. Los dominios que están magnetizados en la dirección de un campo magnético aplicado crecen.

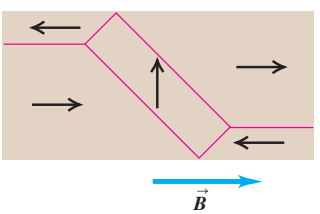
a) No hay campo



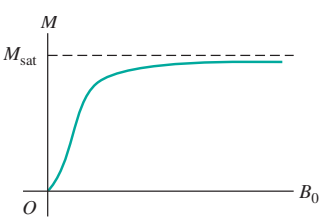
b) Campo débil



c) Campo fuerte



28.28 Curva de magnetización para un material ferromagnético. La magnetización M se aproxima a su valor de saturación M_{sat} conforme el campo magnético B_0 (generado por corrientes externas) aumenta.



Se dice que tales materiales son **diamagnéticos**. Siempre tienen susceptibilidad negativa, como se aprecia en la tabla 28.1, y permeabilidad relativa K_m ligeramente *menor* que la unidad, comúnmente del orden de 0.99990 a 0.99999 para sólidos y líquidos. Las susceptibilidades diamagnéticas están muy cerca de ser independientes de la temperatura.

Ferromagnetismo

Existe una tercera clase de materiales, llamados **ferromagnéticos**, que incluyen al hierro, níquel, cobalto y muchas aleaciones que contienen estos elementos. En esos materiales, las interacciones fuertes entre los momentos magnéticos atómicos los incitan a alinearse paralelamente entre sí en regiones llamadas **dominios magnéticos**, aun cuando no esté presente un campo externo. La figura 28.27 muestra un ejemplo de estructura de dominio magnético. Dentro de cada dominio, casi todos los momentos magnéticos atómicos son paralelos.

Cuando no hay un campo externo aplicado, las magnetizaciones de los dominios están orientadas al azar. Pero cuando está presente un campo $\vec{B}_0$ (generado por corrientes externas), los dominios tienden a orientarse paralelamente al campo. Las fronteras del dominio también se desplazan; los dominios magnetizados en dirección del campo crecen, y aquellos que lo están en otras direcciones se reducen. Como el momento magnético total de un dominio puede ser de muchos miles de magnetones de Bohr, los pares de torsión que tienden a alinear los dominios con un campo externo son mucho más intensos que aquellos que se presentan en los materiales paramagnéticos. La permeabilidad relativa K_m es *mucho* mayor que la unidad, comúnmente del orden de 1,000 a 100,000. Como resultado, un objeto hecho de un material ferromagnético como el hierro es magnetizado fuertemente por el campo de un imán permanente y es atraído por éste (véase la figura 27.38). Un material paramagnético como el aluminio también es atraído por un imán permanente, pero las K_m de los materiales paramagnéticos son tan pequeñas en comparación con las K_m de los materiales ferromagnéticos, que la atracción es muy débil. Por eso, un imán puede levantar clavos de hierro, pero no latas de aluminio.

A medida que se incrementa el campo externo, se alcanza en algún momento un punto en que casi *todos* los momentos magnéticos en el material ferromagnético están alineados en forma paralela con el campo externo. Esta condición se llama *magnetización de saturación*; una vez que ésta se alcanza, un mayor incremento del campo externo ya no ocasiona un aumento en la magnetización ni en el campo adicional causado por la magnetización.

La figura 28.28 muestra una "curva de magnetización", una gráfica de la magnetización M como función del campo magnético externo B_0, para el hierro dulce. Una descripción alternativa de este comportamiento es que K_m no es constante, sino que disminuye conforme aumenta B_0. (Los materiales paramagnéticos también presentan saturación en campos suficientemente intensos. Pero los campos magnéticos que se requieren son tan grandes que la desviación con respecto a una relación lineal entre M y B_0 en estos materiales sólo se observa a temperaturas muy bajas, de 1 K o cercanas.)

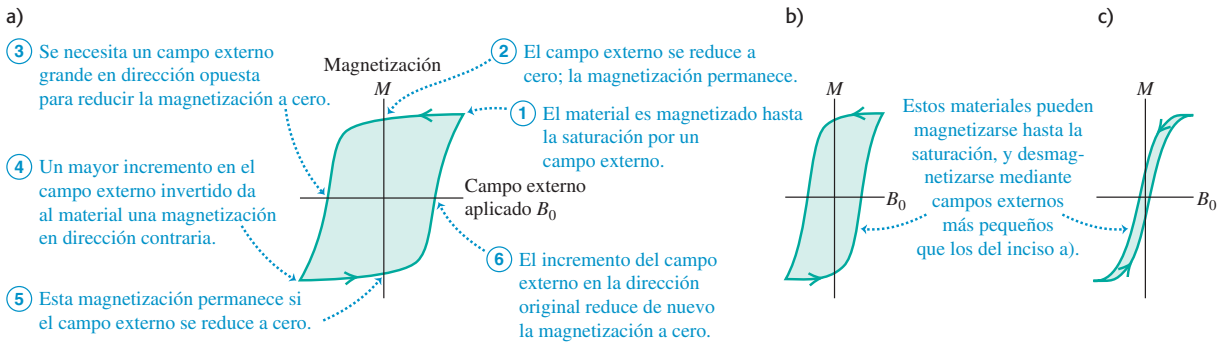
Para muchos materiales ferromagnéticos, la relación entre magnetización y el campo magnético externo es diferente cuando el campo externo aumenta que cuando disminuye. La figura 28.29a muestra esta relación para un material de este tipo. Cuando el material se magnetiza hasta la saturación y luego el campo externo se reduce a cero, permanece cierta magnetización. Este comportamiento es característico de los imanes permanentes, que retienen la mayor parte de su magnetización de saturación cuando se retira el campo magnético. Para reducir la magnetización a cero se requiere un campo magnético en la dirección inversa.

Este comportamiento se llama **histéresis**, y las curvas de la figura 28.29 se denominan *curvas* o *ciclos de histéresis*. La magnetización y desmagnetización de un material que tiene histéresis implica la disipación de energía, por lo que la temperatura del material aumenta durante este proceso.

Los materiales ferromagnéticos se utilizan ampliamente en electroimanes, núcleos de transformadores y motores y generadores, en los que es deseable tener un campo magnético tan grande como sea posible para una corriente determinada. Puesto que la histéresis disipa energía, los materiales que se utilizan en estas aplicaciones por lo general deben tener un ciclo de histéresis tan estrecho como sea posible. El hierro dulce

se utiliza con frecuencia, ya que tiene alta permeabilidad sin histéresis apreciable. Para imanes permanentes, generalmente resulta deseable un ciclo de histéresis amplio, con un campo de magnetización cero extenso, y un campo inverso extenso que se necesita para desmagnetizar. Es común el uso de muchas clases de acero y de numerosas aleaciones, como el Alnico, en la fabricación de imanes permanentes. El campo magnético residual en un material de este tipo, después de haberse magnetizado hasta cerca de la saturación, por lo común es del orden de 1 T, lo que corresponde a una magnetización residual $M = B/\mu_0$ de alrededor de 800,000 A/m.

28.29 Ciclos de histéresis. Los materiales en los incisos **a)** y **b)** permanecen muy magnetizados cuando B_0 se reduce a cero. Como el material de **a)** también es difícil de desmagnetizar, sería adecuado para imanes permanentes. Puesto que el material de **b)** se magnetiza y desmagnetiza con más facilidad, podría usarse como material para memorias de computadoras. El material de **c)** sería útil para los transformadores y otros dispositivos de corriente alterna en los que sería óptima una histéresis de cero.



Ejemplo 28.12 Un material ferromagnético

Un imán permanente está hecho de un material ferromagnético con magnetización M de alrededor de 8×10^5 A/m. El imán tiene forma de cubo de 2 cm de lado. *a*) Encuentre el momento dipolar magnético del imán. *b*) Estime el campo magnético debido al imán en un punto situado a 10 cm del imán a lo largo de su eje.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se basa en la relación entre la magnetización y el momento dipolar magnético, así como en la idea de que un dipolo magnético produce un campo magnético.

PLANTEAR: Encontramos el momento dipolar magnético a partir de la magnetización, que es igual al momento magnético por unidad de volumen. Para estimar el campo magnético, aproximamos el imán como una espira de corriente con el mismo momento magnético y usamos los resultados de la sección 28.5.

EJECUTAR: *a*) El momento magnético total es la magnetización multiplicada por el volumen:

$$\mu_{\text{total}} = MV = (8 \times 10^5\ \text{A/m})(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^3 = 6\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

b) En la sección 28.5 se vio que el campo magnético sobre el eje de una espira de corriente con momento magnético μ_{total} está dado por la ecuación (28.18),

$$B = \frac{\mu_0 \mu_{\text{total}}}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

donde x es la distancia desde la espira y a es su radio. Aquí se utiliza la misma expresión, excepto que a se refiere al tamaño del imán permanente. En sentido estricto, hay complicaciones porque nuestro imán no tiene la misma geometría que una espira de corriente circular. Pero como $x = 10$ cm es muy grande en comparación con el tamaño de 2 cm del imán, el término a^2 es insignificante en comparación con x^2, por lo que podemos ignorarlo. Entonces,

$$B \approx \frac{\mu_0 \mu_{\text{total}}}{2\pi x^3} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(6\ \text{A} \cdot \text{m}^2)}{2\pi(0.1\ \text{m})^3}$$
$$= 1 \times 10^{-3}\ \text{T} = 10\ \text{G}$$

Este campo es alrededor de 10 veces más intenso que el campo magnético de la Tierra. Un imán así desvía fácilmente la aguja de una brújula.

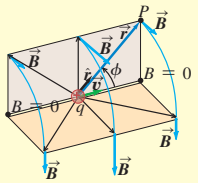
EVALUAR: Note que para calcular B usamos μ_0, no la permeabilidad μ del material magnético. La razón es que estamos calculando B en un punto ubicado *afuera* del material magnético. Habría que sustituir la permeabilidad μ por μ_0 sólo si se tuviera que calcular B *dentro* de un material con permeabilidad relativa K_m, para el que $\mu = K_m \mu_0$.

Evalúe su comprensión de la sección 28.8 ¿Cuáles de los siguientes materiales son atraídos por un imán? i) sodio; ii) bismuto; iii) plomo; iv) uranio.

CAPÍTULO 28 RESUMEN

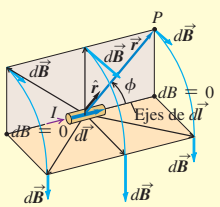
Campo magnético de una carga en movimiento: El campo magnético $\vec{B}$ creado por una carga q en movimiento con velocidad $\vec{v}$ depende de la distancia r entre el punto de fuente (ubicación de q) y el punto de campo (donde se mide $\vec{B}$). El campo $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\hat{r}$, el vector unitario dirigido del punto de fuente al punto de campo. El principio de superposición de campos magnéticos dice que el campo total $\vec{B}$ producido por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales. (Véase el ejemplo 28.1.)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \qquad (28.2)$$



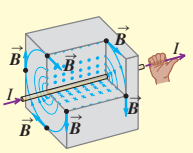
Campo magnético de un conductor que transporta corriente: La ley de Biot y Savart da el campo magnético $d\vec{B}$ creado por un elemento $d\vec{l}$ de un conductor que transporta una corriente I. El campo $d\vec{B}$ es perpendicular tanto a $d\vec{l}$ como a $\hat{r}$, el vector unitario dirigido desde el elemento hasta el punto de campo. El campo $\vec{B}$ creado por un conductor finito que transporta corriente es la integral de $d\vec{B}$ sobre la longitud del conductor. (Véase el ejemplo 28.2.)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} \qquad (28.6)$$



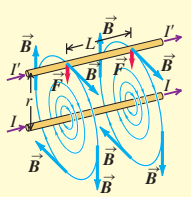
Campo magnético de un conductor largo, recto y portador de corriente: El campo magnético $\vec{B}$ a una distancia r de un conductor largo, recto y que transporta una corriente I tiene una magnitud inversamente proporcional a r. Las líneas de campo magnético son círculos coaxiales con el cable, con direcciones dadas por la regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos 28.3 y 28.4.)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (28.9)$$



Fuerza magnética entre conductores que transportan corriente: Dos conductores largos, paralelos y que transportan corriente se atraen si las corrientes van en el mismo sentido, y se repelen si las corrientes tienen sentidos opuestos. La fuerza magnética por unidad de longitud entre los conductores depende de sus corrientes I e I' y su separación r. La definición de ampere se basa en esta relación. (Véase el ejemplo 28.5.)

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi r} \qquad (28.11)$$



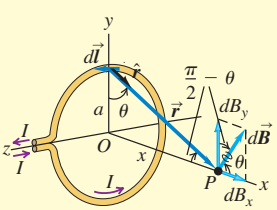
Campo magnético de una espira de corriente: La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético producido a lo largo del eje de una espira circular conductora, de radio a, que transporta una corriente I. El campo depende de la distancia x a lo largo del eje desde el centro de la espira al punto de campo. Si hay N *espiras*, el campo se multiplica por N. En el centro de la espira, $x = 0$. (Véase el ejemplo 28.6.)

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad (28.15)$$

(espira circular)

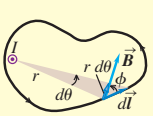
$$B_x = \frac{\mu_0 NI}{2a} \qquad (28.17)$$

(centro de N espiras circulares)



Ley de Ampère: La ley de Ampère establece que la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a μ_0 multiplicado por la corriente neta a través del área encerrada por la trayectoria. El sentido positivo de la corriente se determina mediante la regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos 28.7 a 28.10.)

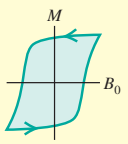
$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \qquad (28.20)$$



Campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente: La siguiente tabla lista los campos magnéticos causados por varias distribuciones de corriente. En cada caso, el conductor transporta una corriente I.

Distribución de corriente	Punto en el campo magnético	Magnitud del campo magnético
Conductor largo y recto	Distancia r desde el conductor	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular de radio a	Sobre el eje de la espira	$B = \dfrac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	En el centro de la espira	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$ (para N espiras, multiplique estas expresiones por N)
Conductor largo y cilíndrico de radio R	Dentro del conductor, $r < R$	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{r}{R^2}$
	Afuera del conductor, $r > R$	$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenoide largo, con devanado compacto y n vueltas por unidad de longitud, cerca de su punto medio	Dentro del solenoide, cerca del centro	$B = \mu_0 n I$
	Afuera del solenoide	$B \approx 0$
Solenoide toroidal (toroide) con devanado compacto y N vueltas	Dentro del espacio encerrado por los devanados, a una distancia r del eje de simetría.	$B = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	Afuera del espacio encerrado por los devanados	$B \approx 0$

***Materiales magnéticos:** Cuando están presentes materiales magnéticos, la magnetización del material ocasiona una contribución adicional a $\vec{B}$. Para materiales paramagnéticos y diamagnéticos, μ_0 se sustituye en las expresiones del campo magnético por $\mu = K_m\mu_0$, donde μ es la permeabilidad del material y K_m es su permeabilidad relativa. La susceptibilidad magnética χ_m se define como $\chi_m = K_m - 1$. Las susceptibilidades magnéticas para materiales paramagnéticos son pequeñas cantidades positivas; las de los materiales diamagnéticos son pequeñas cantidades negativas. Para materiales ferromagnéticos, K_m es mucho mayor que la unidad y no es constante. Algunos materiales ferromagnéticos son imanes permanentes y retienen su magnetización aun después de retirado el campo magnético externo. (Véanse los ejemplos 28.11 y 28.12.)



Términos clave

punto de fuente, *958*
punto de campo, *958*
principio de superposición de campos magnéticos, *960*
ley de Biot y Savart, *961*
ampere, *966*
ley de Ampère, *972*
solenoide toroidal, *975*
magnetón de Bohr, *977*
magnetización, *978*
paramagnético, *978*
permeabilidad relativa, *978*
permeabilidad, *978*
susceptibilidad magnética, *978*
diamagnético, *980*
ferromagnético, *980*
dominio magnético, *980*
histéresis, *980*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

En la intensidad del campo magnético *no* habría cambio. De acuerdo con el ejemplo 28.9 (sección 28.7), el campo dentro de un solenoide tiene magnitud $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de vueltas de alambre por unidad de longitud. Al unir dos solenoides por sus extremos se duplica tanto el número de vueltas como la longitud, por lo que el número de vueltas por unidad de longitud no cambia.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

28.1 Respuestas: *a*) i), *b*) ii) La situación es la misma de la figura 28.2, excepto que el protón superior tiene velocidad $\vec{v}$ en lugar de $-\vec{v}$. El campo magnético debido al protón inferior es el mismo que el de la figura 28.2, pero se invierte la dirección de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre el protón superior. Así que la fuerza magnética es de atracción. Como la velocidad v es pequeña en comparación con c, la fuerza magnética es mucho menor que la fuerza eléctrica de repulsión, por lo que la fuerza neta es de repulsión.

28.2 Respuestas: i) y iii) (empate), iv), ii) De la ecuación (28.5) la magnitud del campo dB debido al elemento de corriente de longitud dl que transporta una corriente I es $dB = (\mu/4\pi)(I\,dl\,\text{sen}\,\phi/r^2)$. En esta expresión, r es la distancia del elemento al punto de campo, y ϕ es el ángulo entre la dirección de la corriente y un vector desde el elemento de corriente al punto de campo. Los cuatro puntos están a la misma distancia $r = L$ desde el elemento de corriente, por lo que el valor dB es proporcional al valor de senϕ. Para los cuatro puntos, el ángulo es i) $\phi = 90°$, ii) $\phi = 0°$, iii) $\phi = 90°$ y iv) $\phi = 45°$, por lo que los valores de sen ϕ son i) 1, ii) 0, iii) 1 y iv) $1/\sqrt{2}$.

28.3 Respuesta: A Esta orientación hará que la corriente fluya alrededor del circuito en sentido horario. Así que la corriente fluirá hacia el sur a través del alambre que se encuentra bajo la brújula. Según la regla de la mano derecha para el campo magnético producido por un conductor largo, recto y que lleva corriente, esto producirá un campo

magnético que apunta a la izquierda en la posición de la brújula (que se encuentra arriba del alambre). La combinación del campo magnético terrestre hacia el norte y el dirigido hacia el oeste producido por la corriente da un campo magnético neto hacia el noroeste, por lo que la aguja de la brújula se moverá en sentido antihorario para alinearse con este campo.

28.4 Respuestas: *a*) i), *b*) iii), *c*) ii), *d*) iii) La corriente fluye en el mismo sentido en espiras adyacentes de la bobina, por lo que las fuerzas magnéticas entre ellas son de atracción. La corriente fluye en sentidos opuestos en lados opuestos de la misma espira, por lo que las fuerzas magnéticas entre estos lados son de repulsión. Así, las fuerzas magnéticas en las espiras del solenoide las comprimen en la dirección a lo largo de su eje, pero las empujan radialmente. Las fuerzas *eléctricas* son igual a cero porque el alambre es eléctricamente neutro, con igual cantidad de carga positiva que negativa.

28.5 Respuestas: *a*) ii), *b*) v) El vector $d\vec{\boldsymbol{B}}$ está en dirección de $d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$. Para un segmento sobre el eje y negativo, $d\vec{\boldsymbol{l}} = -\hat{\boldsymbol{k}}\, dl$ apunta en la dirección de z negativa y $\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Entonces, $d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} = (a\, dl)\hat{\boldsymbol{\imath}} - (x\, dl)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, que tiene una componente x positiva, una componente y negativa y una componente z igual a cero. Para un segmento en el eje z negativo, $d\vec{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}\, dl$ apunta en la dirección de y positiva, y $\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a\hat{\boldsymbol{k}}$. Entonces, $d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{r}} = (a\, dl)\hat{\boldsymbol{\imath}} - (x\, dl)\hat{\boldsymbol{k}}$, que tiene una componente x positiva, una componente y igual a cero y una componente z negativa.

28.6 Respuesta: ii) Imagine que se resuelve la integral $\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$ a lo largo de una trayectoria de integración en sentido horario alrededor de la línea de campo magnético color rojo. En cada punto a lo largo de la trayectoria el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ y el segmento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{l}}$ son tangentes a la trayectoria, por lo que $\vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$ es positivo en cada punto y la integral $\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$ también es positiva. De acuerdo con la ley de Ampère $\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$ y la regla de la mano derecha se deduce que la trayectoria de integración encierra una corriente dirigida hacia fuera del plano de la página. No hay corrientes en el espacio vacío afuera del imán, por lo que debe haber corrientes en el interior de éste (véase la sección 28.8).

28.7 Respuesta: iii) Por simetría, cualquier campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ afuera del cable debe circular alrededor de éste, con líneas de campo circulares como las que rodean el conductor cilíndrico sólido de la figura 28.20. Elija una trayectoria de integración como la que se ilustra en la figura 28.20, con radio $r > R$, de manera que la trayectoria encierre por completo al cable. Como en el ejemplo 28.8, la integral $\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$ para esta trayectoria tiene magnitud $B(2\pi r)$. De acuerdo con la ley de Ampère, esto es igual a $\mu_0 I_{\text{enc}}$. La corriente neta encerrada I_{enc} es igual a cero porque incluye dos corrientes de igual magnitud, pero con sentidos opuestos: una en el alambre central y otra en el cilindro hueco. Así que $B(2\pi r) = 0$, y $B = 0$ para cualquier valor de r afuera del cable. (El campo es diferente de cero *adentro* del cable; véase el ejercicio 28.37.)

28.8 Respuestas: i), iv) El sodio y el uranio son materiales paramagnéticos, por lo que un imán los atrae, mientras que el bismuto y plomo son materiales diamagnéticos y son repelidos por un imán. (Véase la tabla 28.1.)

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P28.1. Un tema de interés actual en la investigación en física es la búsqueda (aún sin éxito) de un polo magnético aislado, o *monopolo* magnético. Si se encontrara, ¿cómo podría reconocerse? ¿Cuáles serían sus propiedades?

P28.2. El flujo de partículas con carga emitidas por el Sol durante los periodos de actividad solar genera una perturbación en el campo magnético de la Tierra. ¿Cómo ocurre esto?

P28.3. En el texto se analiza el campo magnético de un conductor infinitamente largo y recto que transporta una corriente. Por supuesto, no hay *nada* que sea infinitamente largo. ¿Cómo decidiría usted que un alambre en particular es suficientemente largo como para considerarlo infinito?

P28.4. Dos conductores paralelos que llevan corriente en el mismo sentido se atraen entre sí. Si se les permitiera acercarse, las fuerzas de atracción entrarían en acción. ¿De dónde proviene la energía? ¿Contradice esto la afirmación que se hizo en el capítulo 27 de que las fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento no efectúan trabajo? Explique su respuesta.

P28.5. En ocasiones, los pares de conductores que transportan corriente hacia o desde los componentes de suministro de energía de los equipos electrónicos están entrelazados para reducir los efectos de los campos magnéticos. ¿Por qué es favorable esto?

P28.6. Suponga que tiene tres alambres largos y paralelos dispuestos de manera que, vistos en sección transversal, se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero. ¿Hay algún modo de arreglar las corrientes de manera que los tres alambres se atraigan mutuamente? ¿Y de modo que los tres se repelan entre sí? Explique su respuesta.

P28.7. Al obtener la fuerza sobre uno de los conductores largos que transportan corriente, en la sección 28.4, ¿por qué usamos el campo magnético debido a sólo uno de los conductores? Es decir, ¿por qué no utilizamos el campo magnético total debido a *ambos* conductores?

P28.8. Dos espiras concéntricas, coplanares y circulares de alambre de distinto diámetro conducen corrientes en el mismo sentido. Describa la naturaleza de la fuerza ejercida sobre la espira interior por la espira exterior, y sobre la espira exterior por la espira interior.

P28.9. Se envió una corriente a través de un resorte helicoidal. El resorte se contrajo, como si hubiera sido comprimido. ¿Por qué?

P28.10. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de la ley de Ampère y de la ley de Biot y Savart para hacer cálculos prácticos de campos magnéticos?

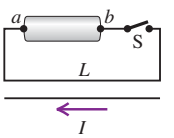
P28.11. Las líneas de campos magnéticos nunca tienen principio ni fin. Con base en esto, explique por qué es razonable que el campo de un solenoide toroidal esté confinado por completo en su interior, mientras que un solenoide recto *debe* tener cierto campo en el exterior.

P28.12. Si la magnitud del campo magnético a una distancia R de un alambre largo, recto y que conduce corriente es B, ¿a qué distancia del alambre el campo tendrá una magnitud de $3B$?

P28.13. Dos cables muy largos y paralelos,transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. *a*) ¿Hay algún sitio en el que sus campos magnéticos se anulen por completo? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué? *b*) ¿Cómo cambiaría la respuesta para el inciso *a*) si las corrientes tuvieran el mismo sentido?

P28.14. En el circuito que se ilustra en la figura 28.30, cuando se cierra súbitamente el interruptor S, el alambre L es jalado hacia el alambre inferior que transporta la corriente I. ¿Cuál (a o b) es la terminal positiva de la batería? ¿Cómo lo sabe?

Figura **28.30**
Pregunta P28.14.



P28.15. Un anillo de metal conduce una corriente que genera un campo magnético B_0 en el centro del anillo, y un campo B en el punto

P a una distancia *x* del centro a lo largo del eje del anillo. Si el radio del anillo se duplica, encuentre el campo magnético en el centro. ¿El campo en el punto *P* cambiaría en el mismo factor? ¿Por qué?

***P28.16.** ¿Por qué debe esperarse que la permeabilidad de un material paramagnético disminuya al aumentar la temperatura?

***P28.17.** Si un imán es suspendido sobre un recipiente de aire líquido, atrae gotas a sus polos. Las gotas contienen sólo oxígeno líquido; aunque el elemento principal que constituye el aire es el nitrógeno, no se ve atraído al imán. Explique qué dice esto sobre las susceptibilidades magnéticas del oxígeno y el nitrógeno, y explique por qué un imán ordinario, a temperatura ambiente, no atrae moléculas de oxígeno *gaseoso* a sus polos.

***P28.18.** ¿Cuáles características de la estructura atómica determinan si un elemento es diamagnético o paramagnético? Explique su respuesta.

***P28.19.** La susceptibilidad magnética de los materiales paramagnéticos depende mucho de la temperatura, pero la de los materiales diamagnéticos casi es independiente de la temperatura. ¿A qué se debe la diferencia?

***P28.20.** Se coloca un cilindro de hierro de manera que tenga libertad para girar alrededor de su eje. Al principio, el cilindro está en reposo y se le aplica un campo magnético de manera que se magnetice en una dirección paralela a su eje. Si la dirección del campo *externo* se invierte súbitamente, la dirección de magnetización también se invertirá y el cilindro comenzará a girar alrededor de su eje. (Esto se llama *efecto de Einstein- de Haas*). Explique por qué comienza a girar el cilindro.

***P28.21.** En el análisis de las fuerzas magnéticas en espiras de corriente en la sección 27.7 se dijo que sobre una espira completa en un campo magnético uniforme no se ejerce una fuerza neta, sino sólo un par de torsión. Pero los materiales magnetizados que contienen espiras atómicas de corriente *sí* experimentan fuerzas netas en campos magnéticos. ¿Cómo se podría resolver esta discrepancia?

***P28.22.** Demuestre que las unidades $A \cdot m^2$ y J/T para el magnetón de Bohr son equivalentes.

Ejercicios

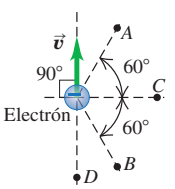
Sección 28.1 Campo magnético de una carga en movimiento

28.1. Una carga puntual de $+6.00\ \mu C$ se desplaza con rapidez constante de 8.00×10^6 m/s en la dirección $+y$ con respecto de un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen de este marco de referencia, ¿cuál es el vector del campo magnético $\vec{B}$ que produce en los siguientes puntos: *a*) $x = 0.500$ m, $y = 0$, $z = 0$; *b*) $x = 0$, $y = -0.500$ m, $z = 0$; *c*) $x = 0$, $y = 0$, $z = +0.500$ m; *d*) $x = 0$, $y = -0.500$ m, $z = +0.500$ m?

28.2. Campos dentro del átomo. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se desplaza en una órbita circular de radio 5.3×10^{-11} m con una rapidez de 2.2×10^6 m/s. Si se mira al átomo en forma tal que la órbita del electrón esté en el plano del papel y el electrón se mueva en sentido horario, encuentre la magnitud y dirección de los campos eléctrico y magnético que produce el electrón en la ubicación del núcleo (considerado como un punto).

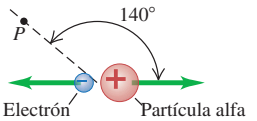
28.3. Un electrón se mueve a 0.100 *c*, como se muestra en la figura 28.31. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que este electrón produce en los siguientes puntos, cada uno situado a 2.00 μm desde el electrón: *a*) puntos *A* y *B*; *b*) punto *C*; *c*) punto *D*.

Figura **28.31** Ejercicio 28.3.



28.4. Una partícula alfa (carga $+2e$) y un electrón se mueven en sentidos opuestos desde el mismo punto, cada uno con rapidez de 2.50×10^5 m/s (figura 28.32). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético total que producen estas cargas en el punto *P*, que se encuentra a 1.75 nm de cada uno.

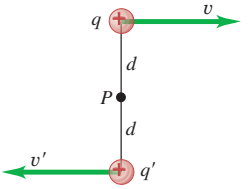
Figura **28.32** Ejercicio 28.4



28.5. Una carga de $-4.80\ \mu C$ se desplaza con rapidez constante de 6.80×10^5 m/s en la dirección $+x$ en relación con un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen, ¿cuál es el vector de campo magnético que produce en los siguientes puntos? *a*) $x = 0.500$ m, $y = 0$, $z = 0$; *b*) $x = 0$, $y = 0.500$ m, $z = 0$; *c*) $x = 0.500$ m, $y = 0.500$ m, $z = 0$; *d*) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0.500$ m.

28.6. Dos cargas puntuales positivas, $q = +8.00\ \mu C$ y $q' = +3.00\ \mu C$, se desplazan en relación con un observador en el punto *P*, como se ilustra en la figura 28.33. La distancia *d* es 0.120 m, $v = 4.50 \times 10^6$ m/s, y $v' = 9.00 \times 10^6$ m/s. *a*) Cuando las dos cargas están en las ubicaciones que se indican en la figura, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto que producen en el punto *P*? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de las fuerzas eléctricas y magnéticas que cada carga ejerce sobre la otra? y ¿cuál es la razón entre la magnitud de la fuerza eléctrica y la magnitud de la fuerza magnética? *c*) Si la dirección de $\vec{v}'$ se invierte, de manera que las dos cargas se desplacen en la misma dirección, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de las fuerzas magnéticas que cada carga ejerce sobre la otra?

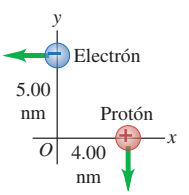
Figura **28.33** Ejercicios 28.6 y 28.7



28.7. La figura 28.33 muestra dos cargas puntuales *q* y *q*′, que se desplazan en relación con un observador situado en el punto *P*. Suponga que la carga inferior en realidad es *negativa*, con $q' = -q$. *a*) Encuentre el campo magnético (magnitud y dirección) producido por las dos cargas en el punto *P* si i. $v' = v/2$; ii. $v' = v$; iii. $v' = 2v$. *b*) Calcule la dirección de la fuerza magnética que ejerce *q* sobre *q*′, y encuentre la dirección de la fuerza magnética que *q*′ ejerce sobre *q*. *c*) Si $v = v' = 3.00 \times 10^5$ m/s, ¿cuál es la razón entre la magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre cada carga y la magnitud de la fuerza de Coulomb que actúa sobre cada una?

28.8. Un electrón y un protón se desplazan cada uno a 845 km/s en trayectorias perpendiculares, como se ilustra en la figura 28.34. En el instante en que están en las posiciones ilustradas en la figura, determine la magnitud y dirección de *a*) el campo magnético total que producen en el origen; *b*) el campo magnético que produce el electrón en la ubicación del protón; *c*) la fuerza eléctrica total y la fuerza magnética total que el electrón ejerce sobre el protón.

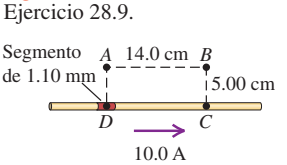
Figura **28.34** Ejercicio 28.8.



Sección 28.2 Campo magnético de un elemento de corriente

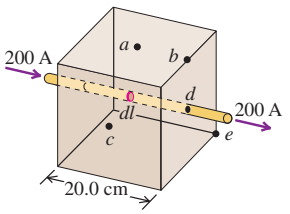
28.9. Un alambre recto transporta una corriente de 10.0 A (figura 28.35). *ABCD* es un rectángulo con su punto *D* a la mitad de un segmento de 1.10 mm del alambre, y su punto *C* está en el alambre. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético debido a este segmento en *a*) el punto *A*; *b*) el punto *B*; *c*) el punto *C*.

Figura **28.35** Ejercicio 28.9.



28.10. Un alambre largo y recto que transporta una corriente de 200 A pasa a través de una caja cúbica de madera, entrando y saliendo por agujeros en los centros de caras opuestas (figura 28.36). La longitud de cada lado de la caja es de 20.0 cm. Considere un elemento *dl* del alambre de 0.100 cm de largo en el centro de la caja. Calcule la magnitud *dB* del campo magnético producido por este elemento en los puntos *a*, *b*, *c*, *d* y *e* en la figura 28.36. Los puntos *a*, *c* y *d* son los centros de las caras del cubo; el punto *b* está en el punto medio de una arista; y el punto *e* se encuentra en un vértice. Copie la figura e indique las direcciones y magnitudes relativas de los vectores de campo. (*Nota:* Suponga que la longitud *dl* es pequeña en comparación con las distancias desde el elemento de corriente a los puntos donde el campo magnético va a calcularse.)

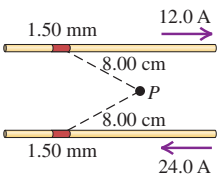
Figura **28.36** Ejercicio 28.10.



28.11. Un alambre largo y recto está a lo largo del eje z y conduce una corriente de 4.00 A en la dirección $+z$. Determine el campo magnético (magnitud y dirección) producido en los siguientes puntos por un segmento de 0.500 mm del alambre con centro en el origen: *a*) $x = 2.00$ m, $y = 0$, $z = 0$; *b*) $x = 0$, $y = 2.00$ m, $z = 0$; *c*) $x = 2.00$ m, $y = 2.00$ m, $z = 0$; *d*) $x = 0$, $y = 0$, $z = 2.00$ m.

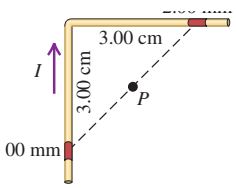
28.12. Dos alambres paralelos están separados por una distancia de 5.00 cm y conducen corrientes en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 28.37. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto *P* debido a dos segmentos de 1.50 mm de cable que están opuestos entre sí y cada uno a 8.00 cm de *P*.

Figura **28.37** Ejercicio 28.12.



28.13. Un alambre que conduce corriente de 28.0 A se dobla en ángulo recto. Considere dos segmentos de 2.00 mm de alambre, cada uno a 3.00 cm del doblez (figura 28.38). Determine la magnitud y dirección del campo magnético que producen estos dos segmentos en el punto *P*, que está a la mitad entre ellos.

Figura **28.38** Ejercicio 28.13.



28.14. Una espira cuadrada de alambre de 10.0 cm por lado transporta una corriente de 15.0 A en el sentido horario. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en su centro debido a los cuatro segmentos de alambre de 1.20 mm en el punto medio de cada lado.

Sección 28.3 Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

28.15. Campo magnético de un relámpago. Los relámpagos pueden conducir corrientes de hasta 20 kA, aproximadamente. Esta corriente se puede modelar como la equivalente de la que conduce un alambre muy largo y recto. *a*) Si una persona es tan desafortunada para estar a 5.0 m del relámpago, ¿qué tan grande sería el campo magnético que experimentaría? *b*) ¿Cómo se compara este campo con el que experimentaría esa persona si estuviera a 5.0 cm de una corriente doméstica de 10 A transportada por un conductor largo y recto?

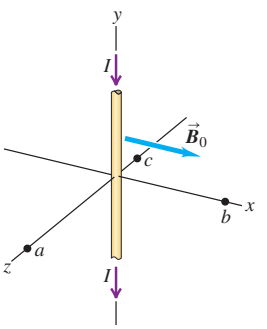
28.16. Un alambre muy largo, recto y horizontal conduce una corriente tal que pasan 3.50×10^{18} electrones por segundo por cualquier punto dado, de oeste a este. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético que produce este alambre en un punto a 4.00 cm directamente por encima de él?

28.17. *a*) ¿De qué magnitud tendría que ser la corriente que tendría que transportar un alambre largo y recto para que el campo magnético a 2.00 cm del alambre fuera igual a 1.00 G (comparable con el campo magnético de la Tierra que apunta hacia el norte)? *b*) Si el alambre es horizontal, con la corriente que va de este a oeste, ¿en qué ubicación el campo magnético del alambre apuntaría en la misma dirección que la componente horizontal del campo magnético terrestre? *c*) Repita el inciso *b*) considerando ahora que el alambre es vertical y que la corriente va hacia arriba.

28.18. Dos alambres largos y rectos, uno sobre el otro, están separados por una distancia $2a$ y son paralelos al eje x. El eje $+y$ está en el plano de los alambres en dirección del alambre inferior al alambre superior. Cada cable lleva una corriente I en la dirección $+x$. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto de los dos alambres en un punto situado en el plano de los alambres *a*) a medio camino entre ambos; *b*) a una distancia a por encima del alambre superior; *c*) a una distancia a por debajo del alambre inferior?

28.19. Un alambre largo y recto está a lo largo del eje y y transporta una corriente $I = 8.00$ A en la dirección $-y$ (figura 28.39). Además del campo magnético debido a la corriente en el alambre, hay un campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ con magnitud de 1.50×10^{-6} T en la dirección $+x$. ¿Cuál es el campo total (magnitud y dirección) en los siguientes puntos del plano xz: *a*) $x = 0$, $z = 1.00$ m; *b*) $x = 1.00$ m, $z = 0$; *c*) $x = 0$, $z = -0.25$ m?

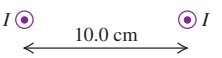
Figura **28.39** Ejercicio 28.19.



28.20. Efecto de las líneas de transmisión. Dos excursionistas leen una brújula debajo de una línea de transmisión situada a 5.50 m por arriba del suelo y que transporta una corriente de 800 A en dirección horizontal de norte a sur. *a*) Determine la magnitud y dirección del campo magnético en un punto sobre el suelo directamente debajo del conductor. *b*) Uno de los excursionistas sugiere que caminen 50 m para evitar lecturas inexactas de la brújula causadas por la corriente. Considerando que la magnitud del campo de la Tierra es del orden de 0.5×10^{-4} T, ¿es realmente un problema la corriente?

28.21. Dos alambres largos, rectos y paralelos, separados por una distancia de 10.0 cm, transportan corrientes iguales de 4.00 A en la misma dirección, como se ilustra en la figura 28.40. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en *a*) el punto P_1, a medio camino entre los dos alambres; *b*) el punto P_2, a 25.0 cm a la derecha de P_1; *c*) el punto P_3, a 20.0 cm directamente arriba de P_1.

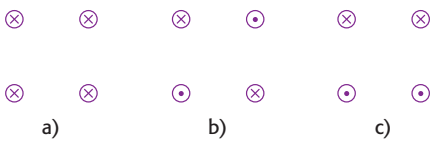
Figura **28.40** Ejercicio 28.21.



28.22. Dos líneas de transmisión largas y paralelas, separadas por una distancia de 40.0 cm, conducen corrientes de 25.0 A y 75.0 A. Determine todas las ubicaciones en que el campo magnético neto de los dos alambres es igual a cero, si las corrientes fluyen *a*) en el mismo sentido y *b*) en sentidos opuestos.

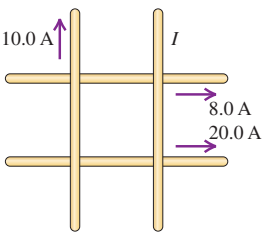
28.23. Cuatro líneas de energía largas y paralelas conducen corrientes de 100 A cada una. El diagrama de la sección transversal de estas líneas es un cuadrado de 20.0 cm por lado. Para cada uno de los tres casos que se ilustran en la figura 28.41, calcule el campo magnético en el centro del cuadrado.

Figura 28.41 Ejercicio 28.23.



28.24. Cuatro cables muy largos, que transportan corriente, están en el mismo plano y se intersecan para formar un cuadrado de 40.0 cm por lado, como se ilustra en la figura 28.42. Determine la magnitud y dirección de la corriente I de manera que el campo magnético en el centro del cuadrado sea igual a cero.

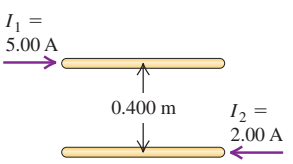
Figura 28.42 Ejercicio 28.24.



Sección 28.4 Fuerza entre alambres paralelos

28.25. Dos alambres largos y paralelos están separados por una distancia de 0.400 m (figura 28.43). Las corrientes I_1 e I_2 tienen las direcciones que se indican. *a*) Calcule la magnitud de la fuerza ejercida por cada alambre sobre un tramo de 1.20 m del otro. ¿La fuerza es de atracción o de repulsión? *b*) Cada corriente se duplica, de manera que I_1 es ahora de 10.0 A e I_2 de 4.00 A. En esas condiciones, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que cada alambre ejerce sobre un tramo de 1.20 m del otro?

Figura 28.43 Ejercicio 28.25.

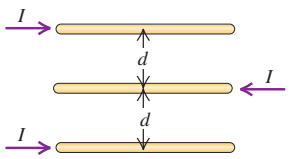


28.26. Dos alambres largos y paralelos están separados por una distancia de 2.50 cm. La fuerza por unidad de longitud que cada uno ejerce sobre el otro es de 4.00×10^{-5} N/m, y los alambres se repelen. La corriente en uno de ellos es de 0.600 A. *a*) ¿Cuál es la corriente en el segundo alambre? *b*) ¿Las dos corrientes fluyen en el mismo sentido o en sentidos opuestos?

28.27. Cables de lámpara. Es común que los alambres de las lámparas domésticas estén separados 3.0 mm de un centro al otro y conduzcan corrientes iguales en sentidos opuestos. Si el cable conduce corriente a una bombilla eléctrica de 100 W conectado a través de una diferencia de potencial de 120 V, ¿cuál es la fuerza por metro que cada alambre del cable ejerce sobre el otro? ¿La fuerza es de atracción o repulsión? ¿Esta fuerza es suficientemente grande como para considerarla en el diseño del cable? (Modele el cable de la lámpara como un alambre muy largo y recto.)

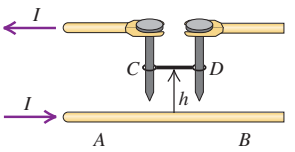
28.28. Cada uno de tres alambres paralelos conduce una corriente I en los sentidos que se indican en la figura 28.44. Si la separación entre alambres adyacentes es d, calcule la magnitud y dirección de la fuerza magnética por unidad de longitud de cada alambre.

Figura 28.44 Ejercicio 28.28.



28.29. Un alambre largo y horizontal AB se encuentra sobre la superficie de una mesa y conduce una corriente I. El alambre horizontal CD está verticalmente arriba del alambre AB, y tiene libertad para deslizarse hacia arriba o abajo sobre las dos guías metálicas verticales C y D (figura 28.45). El alambre CD está conectado a través de contactos corredizos con otro alambre que también transporta una corriente I, en sentido opuesto a la corriente del alambre AB. La masa por unidad de longitud del alambre CD es λ. ¿Hasta qué altura de equilibrio h se elevará el alambre CD si se supone que la fuerza magnética que actúa sobre él se debe por completo a la corriente del alambre AB?

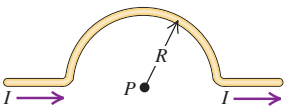
Figura 28.45 Ejercicio 28.29.



Sección 28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente

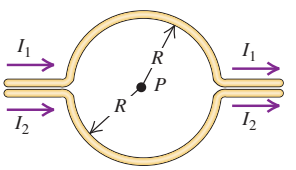
28.30. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P debido a la corriente en la sección semicircular del alambre que se ilustra en la figura 28.46 (*Sugerencia:* Pregúntese si la corriente en la sección larga y recta del alambre produce un campo en P.)

Figura 28.46 Ejercicio 28.30.



28.31. Calcule la magnitud del campo magnético en el punto P de la figura 28.47 en términos de R, I_1 e I_2. ¿Qué resultado da su expresión cuando $I_1 = I_2$?

Figura 28.47 Ejercicio 28.31.



28.32. Una bobina circular con devanado compacto y radio de 2.40 cm tiene 800 espiras. *a*) ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina si el campo magnético en el centro de ella es de 0.580 T? *b*) ¿A qué distancia x del centro de la bobina, sobre su eje, el campo magnético alcanza la mitad del valor que tiene en el centro?

28.33. Una bobina circular con devanado compacto y diámetro de 4.00 cm tiene 600 espiras y conduce una corriente de 0.500 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético *a*) en el centro de la bobina y *b*) en un punto sobre el eje x de la bobina a 8.00 cm de su centro?

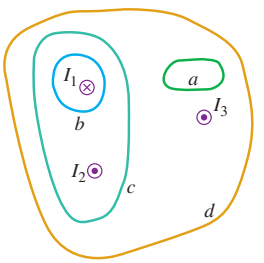
28.34. Una bobina con devanado compacto tiene un radio de 6.0 cm y conduce una corriente de 2.50 A. ¿Cuántas espiras debe tener si en un punto sobre el eje de la bobina que está a 6.00 cm de su centro, el campo magnético es de 6.39×10^{-4} T?

Sección 28.6 Ley de Ampère

28.35. Una curva cerrada encierra varios conductores. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de esta curva es de 3.83×10^{-4} T · m. *a*) ¿Cuál es la corriente neta en los conductores? *b*) Si se integrara alrededor de la curva en el sentido opuesto, ¿cuál sería el valor de la integral de línea? Explique su respuesta.

28.36. La figura 28.48 muestra, en sección transversal, varios conductores que transportan corrientes a través del plano de la figura. Las corrientes tienen las magnitudes I_1 = 4.0 A, I_2 = 6.0 A, e I_3 = 2.0 A, con las direcciones que se indican. Se presentan cuatro trayectorias, designadas de *a* a *d*. ¿Cuál es la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para cada trayectoria? Cada integral implica ir alrededor de la trayectoria en sentido antihorario. Explique sus respuestas.

Figura 28.48 Ejercicio 28.36.

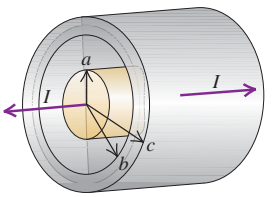


Sección 28.7 Aplicaciones de la ley de Ampère

28.37. Cable coaxial. Un conductor sólido con radio a está sostenido por discos aislantes sobre el eje de un tubo conductor con radio in-

terior b y radio exterior c (figura 28.49). El conductor y el tubo central conducen corrientes iguales I en sentidos opuestos. Las corrientes están distribuidas de manera uniforme sobre las secciones transversales de cada conductor. Obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético a) en puntos situados afuera del conductor central sólido pero en el interior del tubo ($a < r < b$), y b) en puntos situados afuera del tubo ($r > c$).

Figura 28.49
Ejercicio 28.37.



28.38. Repita el ejercicio 28.37 para el caso en que la corriente en el conductor central sólido es I_1, la corriente en el tubo es I_2, y ambas corrientes fluyen en el mismo sentido y no en sentidos opuestos.

28.39. Un alambre cilíndrico, largo y recto, de radio R, conduce una corriente distribuida de manera uniforme en toda su sección transversal. ¿En qué ubicación el campo magnético producido por esta corriente es igual a la mitad de su valor máximo? Considere puntos situados adentro y afuera del alambre.

28.40. Un solenoide de 15.0 cm de largo con radio de 2.50 cm tiene un devanado compacto con 600 espiras de alambre. La corriente en el devanado es de 8.00 A. Calcule el campo magnético en un punto cercano al centro del solenoide.

28.41. Un solenoide está diseñado para producir un campo magnético de 0.0270 T en su centro. Tiene un radio de 1.40 cm y longitud de 40.0 cm, y el alambre puede conducir una corriente máxima de 12.0 A. a) ¿Cuál es el número mínimo de vueltas por unidad de longitud que debe tener el solenoide? b) ¿Cuál es la longitud total de alambre que se requiere?

28.42. Como nuevo técnico electricista, usted está diseñando un solenoide grande para producir un campo magnético uniforme de 0.150 T cerca del centro del solenoide. Tiene alambre suficiente para 4000 vueltas circulares. Este solenoide debe medir 1.40 m de largo y 20.0 cm de diámetro. ¿Cuál es la corriente que necesitará para producir el campo necesario?

28.43. Se ha conseguido un campo magnético de 37.2 T en el Francis Bitter National Magnetic Laboratory del MIT. Calcule la corriente necesaria para generar ese campo a) a 2.00 cm de un alambre largo y recto; b) en el centro de una bobina circular con radio de 42.0 cm que tiene 100 espiras; c) cerca del centro de un solenoide con radio de 2.40 cm, longitud de 32.0 cm y 40,000 espiras.

28.44. Un solenoide toroidal (véase el ejemplo 28.10) tiene un radio interior $r_1 = 15.0$ cm y un radio exterior $r_2 = 18.0$ cm. El solenoide tiene 250 espiras y conduce una corriente de 8.50 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético a las siguientes distancias del centro del toro? a) 12.0 cm; b) 16.0 cm; c) 20.0 cm.

28.45. Sobre un anillo de madera cuyo diámetro medio es de 14.0 cm se ha formado un devanado toroidal compacto de 600 espiras. Calcule la magnitud del campo magnético en el centro de la sección transversal del devanado cuando la corriente en este último es de 0.650 A.

*Sección 28.8 Materiales magnéticos

***28.46.** Un solenoide toroidal con 400 espiras de alambre y radio medio de 6.0 cm conduce una corriente de 0.25 A. La permeabilidad relativa del núcleo es 80. a) ¿Cuál es el campo magnético en el núcleo? b) ¿Qué parte del campo magnético se debe a corrientes atómicas?

***28.47.** Un solenoide toroidal con 500 espiras está devanado sobre un anillo con radio medio de 2.90 cm. Determine la corriente que se requiere en el devanado para generar un campo magnético de 0.350 T en el anillo a) si el anillo es de hierro recocido ($K_m = 1400$) y b) si el anillo está elaborado de acero al silicio ($K_m = 5200$).

***28.48.** La corriente en el devanado de un solenoide toroidal es de 2.400 A. Tiene 500 espiras y su radio medio es de 25.00 cm. El solenoide toroidal está lleno de un material magnético. El campo magnético en el interior del devanado es de 1.940 T. Calcule a) la permeabilidad relativa y b) la susceptibilidad magnética del material que llena el toroide.

***28.49.** Un solenoide largo con 60 espiras de alambre por centímetro conduce una corriente de 0.15 A. El alambre que forma el solenoide está enrollado en torno a un núcleo sólido de acero al silicio ($K_m = 5200$). (El cable del solenoide está encamisado con un aislante para que no fluya ninguna corriente hacia el núcleo.) a) Con respecto a un punto en el interior del núcleo, encuentre las magnitudes de i) el campo magnético $\vec{B}_0$ debido a la corriente en el solenoide; ii) la magnetización $\vec{M}$; iii) el campo magnético total $\vec{B}$. b) En un diagrama del solenoide y su núcleo, indique las direcciones de los vectores $\vec{B}$, $\vec{B}_0$ y $\vec{M}$ en el interior del núcleo.

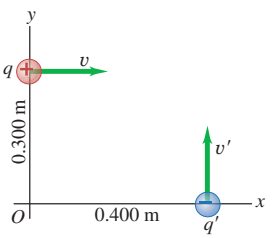
***28.50. Ley de Curie.** En la siguiente tabla se presentan algunas mediciones experimentales de la susceptibilidad magnética del alumbre de hierro y amonio. Dibuje la gráfica de los valores de $1/\chi_m$ en función de la temperatura en kelvin. ¿El material obedece la ley de Curie? Si es así, ¿cuál es la constante de Curie?

T (°C)	χ_m
−258.15	129×10^{-4}
−173	19.4×10^{-4}
−73	9.7×10^{-4}
27	6.5×10^{-4}

Problemas

28.51. Un par de cargas puntuales, $q = +8.00\ \mu$C y $q' = -5.00\ \mu$C, se desplazan como se indica en la figura 28.50 en cada caso con una rapidez $v = 9.00 \times 10^4$ m/s y $v' = 6.50 \times 10^4$ m/s. Cuando las cargas están en las ubicaciones que se muestran en la figura, ¿cuáles son la magnitud y dirección de a) el campo magnético producido en el origen y b) la fuerza magnética que ejerce q' sobre q?

Figura 28.50
Problema 28.51.

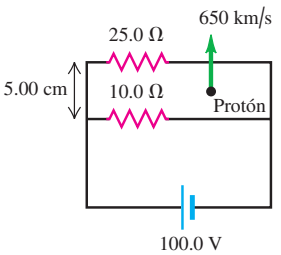


28.52. Un alambre largo y recto conduce una corriente de 2.50 A. Un electrón viaja en la vecindad del alambre. En el instante en que el electrón está a 4.50 cm del alambre y viaja con una rapidez de 6.00×10^4 m/s directamente hacia el alambre, ¿cuáles son la magnitud y dirección (en relación con la dirección de la corriente) de la fuerza que ejerce el campo magnético de la corriente sobre el electrón?

28.53. Un alambre largo y recto conduce una corriente de 25.0 A. Se lanza un electrón paralelo al alambre con una velocidad de 250 km/s en la misma dirección de la corriente, a 2.00 cm del alambre. a) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración inicial del electrón. b) ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de un campo eléctrico uniforme que permita que el electrón siga su recorrido paralelo al alambre? c) ¿Es necesario incluir los efectos de la gravedad? Justifique su respuesta.

28.54. En la figura 28.51, el ramal del circuito que incluye la batería está muy lejos de los dos segmentos horizontales que contienen dos resistores. Estos segmentos horizontales están separados por una distancia de 5.00 cm y su longitud es mucho mayor que 5.00 cm. Se lanza un protón (carga, $+e$) a 650 km/s desde un punto intermedio entre los dos segmentos horizontales superiores del circuito. La velocidad inicial del protón está en el plano del circuito y se dirige hacia el alambre de arri-

Figura 28.51 Problema 28.54.

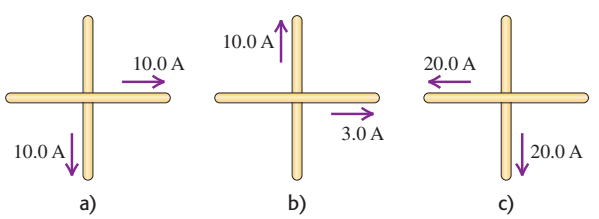


ba. Determine la magnitud y dirección de la fuerza magnética inicial sobre el protón.

28.55. Dos espiras de alambre idénticas y circulares, de 40.0 cm de diámetro cada una, conducen una corriente de 1.50 A en el mismo sentido. Estas espiras son paralelas entre sí y están separadas por una distancia de 25.0 cm. La recta *ab* es normal al plano de las espiras y pasa por sus centros. Se dispara un protón a 2400 km/s perpendicular a la línea *ab* desde un punto intermedio entre los centros de las espiras. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que ejercen estas espiras sobre el protón inmediatamente después del disparo.

28.56. Dos alambres muy largos y rectos conducen las corrientes que se indican en la figura 28.52. En cada caso, encuentre todas las ubicaciones en que el campo magnético es igual a cero.

Figura 28.52 Problema 28.56.

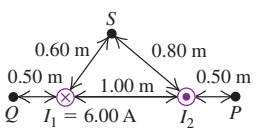


28.57. Una carga puntual negativa $q = -7.20$ mC se desplaza en un marco de referencia. Cuando la carga puntual está en el origen, el campo magnético que produce en el punto $x = 25.0$ cm, $y = 0$, $z = 0$, es $\vec{B} = (6.00\ \mu\text{T})\hat{j}$, y su rapidez es de 800 km/s. *a*) ¿Cuáles son las componentes x, y y z de la velocidad $\vec{v}_0$ de la carga? *b*) En ese mismo instante, ¿cuál es la magnitud del campo magnético que la carga produce en el punto $x = 0$, $y = 25.0$ cm, $z = 0$?

28.58. Un diseñador de imanes neófito afirma que es capaz de producir un campo magnético $\vec{B}$ en el vacío, que apunte en todas partes en la dirección x y cuya magnitud aumente con x. Es decir, $\vec{B} = B_0(x/a)\hat{i}$, donde B_0 y a son constantes con unidades de teslas y metros, respectivamente. Con base en la ley de Gauss para los campos magnéticos, demuestre que tal afirmación es *imposible*. (*Sugerencia:* Use una superficie gaussiana en forma de caja rectangular, con aristas paralelas a los ejes x, y y z.)

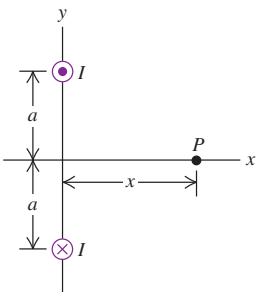
28.59. Dos alambres largos, rectos y paralelos están separados por una distancia de 1.00 m (figura 28.53). El alambre de la izquierda conduce una corriente I_1 de 6.00 A hacia el plano del papel. *a*) ¿Cuáles deben ser la magnitud y el sentido de la corriente I_2 para que el campo neto en el punto P sea cero? *b*)¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo neto en Q? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo neto en S?

Figura 28.53
Problema 28.59.



28.60. La figura 28.54 muestra la vista desde un extremo de dos alambres largos y paralelos, perpendiculares al plano xy, cada uno de los cuales conduce una corriente I pero en sentidos opuestos. *a*) Copie el diagrama y dibuje los vectores que muestren el campo $\vec{B}$ en cada alambre y el campo $\vec{B}$ neto en el punto P. *b*) Obtenga la expresión para la magnitud de $\vec{B}$ en cualquier punto del eje x en términos de la coordenada x del punto. ¿Cuál es la dirección de $\vec{B}$? *c*) Dibuje la gráfica de la magnitud de $\vec{B}$ en puntos sobre el eje x. *d*) ¿En qué valor de x es máxima la magnitud de $\vec{B}$? *e*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{B}$ cuando $x \gg a$?

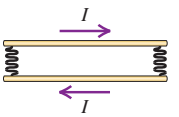
Figura 28.54 Problemas 28.60 y 28.61.



28.61. Lea la situación del problema 28.60. Suponga que un tercer alambre, largo, recto y paralelo a los otros dos pasa por el punto P (véase la figura 28.54) y que cada uno transporta una corriente $I = 6.00$ A. Sea $a = 40.0$ cm y $x = 60.0$ cm. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza por unidad de longitud sobre el tercer alambre, *a*) si la corriente en él está dirigida hacia el plano de la figura y *b*) si la corriente en él está dirigida hacia fuera del plano de la figura.

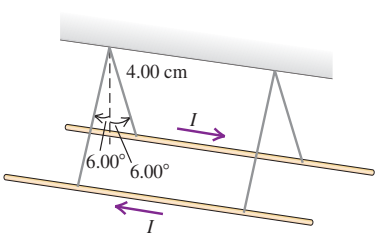
28.62. Un par de varillas metálicas largas y rígidas, cada una de longitud L, están paralelas sobre una mesa perfectamente lisa. Se conectan sus extremos con resortes conductores idénticos, muy ligeros, con constante de fuerza k (figura 28.55) y cuya longitud es despreciable cuando no se encuentran estirados. Si una corriente I circula por el circuito, los resortes se estirarán. ¿Con qué separación las varillas permanecerán en reposo? Suponga que k es suficientemente grande para que la separación de las varillas sea mucho menor que L.

Figura 28.55
Problema 28.62.



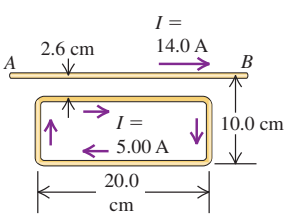
28.63. Dos alambres largos y paralelos cuelgan de cordeles de 4.00 cm de largo de un eje común (figura 28.56). Los alambres tienen una masa por unidad de longitud de 0.0125 kg/m y transportan la misma corriente en sentidos opuestos. ¿Cuál es la corriente en cada alambre si los cordeles cuelgan a un ángulo de 6.00° con respecto a la vertical?

Figura 28.56 Problema 28.63.



28.64. El alambre largo, recto, AB, que se ilustra en la figura 28.57, conduce una corriente de 14.0 A. La espira rectangular cuyos lados largos son paralelos al alambre conduce una corriente de 5.00 A. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza neta que el campo magnético del alambre ejerce sobre la espira.

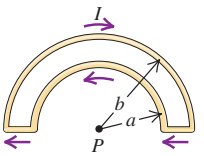
Figura 28.57 Problema 28.64.



28.65. Una espira de cable circular de radio a tiene N vueltas y conduce una corriente I. Una segunda espira con N' vueltas de radio a' transporta una corriente I' y se localiza en el eje de la primera espira, a una distancia x del centro de ésta. La segunda espira está inclinada, de manera que su eje forma un ángulo θ con el eje de la primera espira. La distancia x es grande comparada tanto con a como con a'. *a*) Calcule la magnitud del par de torsión que ejerce la primera espira sobre la segunda. *b*) Determine la energía potencial para la segunda espira durante esta interacción. *c*) ¿Qué simplificaciones resultan del hecho de que x sea mucho mayor que a? ¿Y del hecho de que x sea mucho mayor que a'?

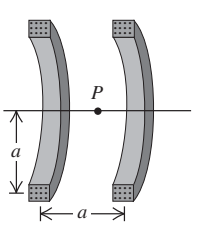
28.66. Los semicírculos de alambre que se muestran en la figura 28.58 tienen radios a y b. Calcule el campo magnético neto (magnitud y dirección) que produce la corriente en los alambres en el punto P.

Figura **28.58** Problema 28.66.



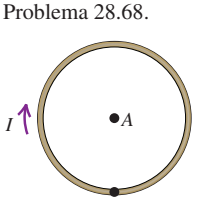
28.67. Bobinas de Helmholtz. La figura 28.59 muestra un corte de dos bobinas circulares con radio a, cada una con devanado de N vueltas de alambre que conduce una corriente I que circula en el mismo sentido en ambas bobinas. Éstas se hallan separadas por una distancia a igual a sus radios. Esta configuración se conoce como bobinas de Helmholtz, las cuales producen un campo magnético muy uniforme en la región comprendida entre ellas. *a*) Obtenga la expresión para la magnitud B del campo magnético en un punto sobre el eje a una distancia x a la derecha del punto P, el cual está a la mitad de la distancia entre las bobinas. *b*) Dibuje la gráfica de B en función de x, de $x = 0$ a $x = a/2$. Compare esta gráfica con otra para el campo magnético debido solamente a la bobina de la derecha. *c*) A partir del inciso *a*), obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético en el punto P si $N = 300$ espiras, $I = 6.00$ A, y $a = 8.00$ cm. *e*) Calcule dB/dx y d^2B/dx^2 en $P(x = 0)$. Analice el modo en que sus resultados muestran que el campo es muy uniforme en la vecindad de P.

Figura **28.59** Problema 28.67.



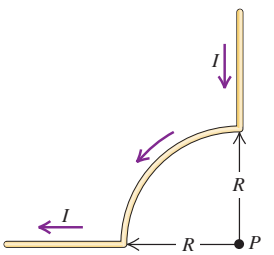
28.68. Un alambre circular de diámetro D está sobre una mesa horizontal y conduce una corriente I. En la figura 28.60 el punto A indica el centro del círculo y el punto C está sobre su borde. *a*) Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto A. *b*) Ahora se desenrolla el alambre de manera que queda recto, con centro en el punto C, y perpendicular a la recta AC, pero se mantiene la misma corriente en él. Ahora encuentre el campo magnético en el punto A. *c*) ¿Cuál campo es mayor, el del inciso *a*) o el del inciso *b*)? ¿En qué factor? ¿Por qué es razonable físicamente este resultado?

Figura **28.60** Problema 28.68.



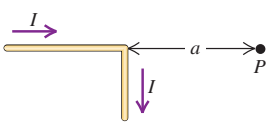
28.69. El alambre de la figura 28.61 transporta una corriente I en el sentido que se indica. El alambre se compone de una sección recta muy larga, un cuarto de círculo de radio R, y otra sección recta y larga. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético neto en el centro de curvatura de la sección con forma de un cuarto de círculo (punto P)?

Figura **28.61** Problema 28.69.



28.70. El alambre de la figura 28.62 es infinitamente largo y conduce una corriente I. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que produce esta corriente en el punto P.

Figura **28.62** Problema 28.70.



28.71. Un alambre largo, recto, con sección transversal circular de radio R, conduce una corriente I. Suponga que la densidad de corriente no es constante en toda la sección transversal del alambre, sino que varía según $J = \alpha r$, donde α es una constante. *a*) De acuerdo con el requerimiento de que J integrada sobre la sección transversal del alambre da la corriente total I, calcule la constante α en términos de I y R. *b*) Con base en la ley de Ampère, calcule el campo magnético $B(r)$ correspondiente a i) $r \leq R$, y ii) $r \geq R$. Exprese sus respuestas en términos de I.

28.72. *a*) Con respecto al cable coaxial del ejercicio 28.37, obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético en los puntos dentro del conductor sólido central ($r < a$). Compare su resultado cuando $r = a$ con los resultados del inciso *a*) del ejercicio 28.37 en ese mismo punto. *b*) Con respecto a este cable coaxial, obtenga una expresión para el campo dentro del tubo ($b < r < c$). Compare su resultado cuando $r = b$ con el inciso *a*) del ejercicio 28.37 en el mismo punto. Compare su resultado cuando $r = c$ con el inciso *b*) del ejercicio 28.37 en ese mismo punto.

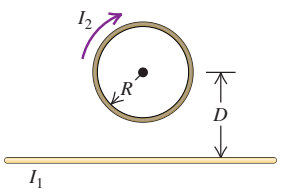
28.73. La dirección del campo eléctrico de una línea infinita de carga positiva es radial hacia fuera con respecto al alambre y puede calcularse con la ley de Gauss para el campo eléctrico (véase el ejemplo 22.6 en la sección 22.4). Con base en la ley de Gauss del magnetismo, demuestre que el campo *magnético* de un *conductor* recto, infinitamente largo y portador de corriente, no puede tener una componente radial.

28.74. Se fabrica un conductor en forma de cilindro hueco con radios interior y exterior a y b, respectivamente. Transporta una corriente I distribuida de manera uniforme en toda su sección transversal. Obtenga expresiones para la magnitud del campo magnético en las regiones *a*) $r < a$; *b*) $a < r < b$; *c*) $r > b$.

28.75. Se conocen los campos magnéticos interior y exterior. Se le dio un cilindro de cobre, hueco, con radio interior a y radio exterior $3a$. La longitud del cilindro es $200a$ y su resistencia eléctrica al flujo de corriente a lo largo de su extensión es R. Para probar que es apropiado usarlo en un circuito, usted conecta los extremos del cilindro a una fuente de voltaje, lo que ocasiona que una corriente I fluya a lo largo del cilindro. La corriente se distribuye de manera uniforme en toda la sección transversal del cilindro. A usted le interesa conocer la intensidad del campo magnético que produce la corriente dentro de la parte sólida del cilindro, en un radio de $2a$ desde el eje del cilindro. Pero como no es fácil insertar una sonda para medir el campo magnético en el metal sólido, usted decide medir el campo en un punto afuera del cilindro donde el campo sea tan intenso como en el radio $2a$. ¿A qué distancia del eje del cilindro se debe colocar la sonda?

28.76. Una espira circular tiene radio R y conduce una corriente I_2 en sentido horario (figura 28.63). El centro de la espira está a una distancia D sobre un alambre largo y recto. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la corriente I_1 en el alambre si el campo magnético en el centro de la espira es igual a cero?

Figura **28.63** Problema 28.76.



28.77. Un cilindro largo, recto, sólido y orientado con su eje en la dirección z conduce una corriente cuya densidad es $\vec{\boldsymbol{J}}$. La densidad de corriente, aunque simétrica con respecto al eje del cilindro, no es constante, sino que varía de acuerdo con la relación

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \frac{2I_0}{\pi a^2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\hat{\boldsymbol{k}} \quad \text{para } r \le a$$
$$= \mathbf{0} \quad \text{para } r \ge a$$

donde a es el radio del cilindro, r es la distancia radial desde el eje del cilindro, I_0 es una constante expresada en amperes. *a*) Demuestre que I_0 es la corriente total que pasa por toda la sección transversal del alambre. *b*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en la región $r \ge a$. *c*) Obtenga una expresión para la corriente I contenida en una sección transversal circular de radio $r \le a$ y con centro en el eje del cilindro. *d*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en la región $r \le a$. ¿Cómo se comparan los resultados de los incisos *b*) y *d*) cuando $r = a$?

28.78. Un cilindro sólido, largo, recto y orientado con su eje en la dirección z conduce una corriente cuya densidad es $\vec{\boldsymbol{J}}$. La densidad de corriente, aunque simétrica con respecto del eje del cilindro, no es constante y varía de acuerdo con la relación

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \left(\frac{b}{r}\right)e^{(r-a)/\delta}\hat{\boldsymbol{k}} \quad \text{para } r \le a$$
$$= \mathbf{0} \quad \text{para } r \ge a$$

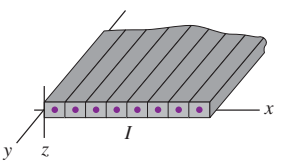
donde el radio del cilindro es $a = 5.00$ cm, r es la distancia radial desde el eje del cilindro, b es una constante igual a 600 A/m, y δ es una constante igual a 2.50 cm. *a*) Sea I_0 la corriente total que pasa por toda la sección transversal del alambre. Obtenga una expresión para I_0 en términos de b, δ y a. Evalúe su expresión para obtener un valor numérico de I_0. *b*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en la región $r \ge a$. Exprese su respuesta en términos de I_0 en vez de b. *c*) Obtenga una expresión para la corriente I contenida en una sección transversal circular de radio $r \le a$ y con centro en el eje del cilindro. Exprese su respuesta en términos de I_0 en vez de b. *d*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en la región $r \le a$. *e*) Evalúe la magnitud del campo magnético en $r = \delta$, $r = a$ y $r = 2a$.

28.79. Integre B_x como aparece en la ecuación (28.15), de $-\infty$ a $+\infty$; es decir, calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} B_x\,dx$. Explique el significado del resultado.

28.80. En una región del espacio en que no hay conducción ni corrientes de desplazamiento, es imposible tener un campo magnético uniforme que decaiga abruptamente a cero. Para demostrar este enunciado, utilice el método de contradicción: suponga que un caso de esta naturaleza *sí* es posible, y luego demuestre que esa suposición contradice una ley de la naturaleza. *a*) En la mitad inferior de una hoja de papel, dibuje líneas horizontales uniformemente espaciadas que representen un campo magnético hacia su derecha. Use líneas punteadas para dibujar un rectángulo *abcda* con lado horizontal *ab* en la región del campo magnético, y lado horizontal *cd* en la mitad superior de la hoja, donde $B = 0$. *b*) Demuestre que la integración alrededor del rectángulo contradice la ley de Ampère.

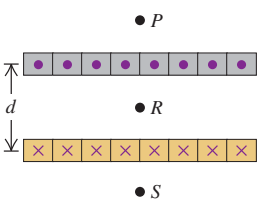
28.81. Lámina infinita de corriente. Se disponen unos al lado de otros unos conductores rectos de sección transversal cuadrada, cada uno de los cuales conduce una corriente I, para formar una lámina infinita de corriente (figura 28.64). Los conductores están en el plano xy, paralelos al eje y, y transportan corriente en la dirección $+y$. Hay n conductores por unidad de longitud, medida a lo largo del eje x. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético a una distancia a abajo de la lámina de corriente? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético a una distancia a arriba de la lámina de corriente?

Figura **28.64** Problema 28.81.



28.82. Se disponen unos al lado de otros unos conductores rectos de sección transversal cuadrada, cada uno de los cuales conduce una corriente I, para formar una lámina infinita de corriente con la dirección de la corriente hacia fuera del plano de la página (figura 28.65). Una segunda lámina de corriente infinita está a una distancia d abajo de la primera y paralela a ella. La segunda lámina conduce corriente hacia el plano de la página. Cada lámina tiene n conductores por unidad de longitud. (Consulte el problema 28.81.) Calcule la magnitud y dirección del campo magnético neto en *a*) el punto P (arriba de la lámina superior); *b*) el punto R (equidistante de las dos láminas); *c*) el punto S (abajo de la lámina inferior).

Figura **28.65** Problema 28.82.



***28.83.** Una pieza de hierro tiene magnetización $M = 6.50 \times 10^4$ A/m. Encuentre el momento dipolar magnético promedio *por átomo* en esta pieza de hierro. Exprese su respuesta tanto en A · m^2 como en magnetones de Bohr. La densidad del hierro se da en la tabla 14.1, y su masa atómica (en gramos por mol) se da en el Apéndice D. El símbolo químico del hierro es Fe.

***28.84.** *a*) En la sección 27.7 se estudió la forma en que un imán permanente atrae o repele un dipolo magnético, como una espira de corriente o un objeto magnetizado. Con base en esto explique por qué *cualquier* punto de un imán *atrae* tanto materiales paramagnéticos como ferromagnéticos (inicialmente no magnetizados), pero *repele* los materiales diamagnéticos. *b*) La fuerza que un imán ejerce sobre un objeto es directamente proporcional al momento magnético del objeto. Un imán particular tiene suficiente fuerza para levantar un cubo de hierro recocido ($K_m = 1400$) de 2.00 cm de lado, de manera que el hierro se adhiera a uno de los polos del imán; es decir, el imán ejerce una fuerza ascendente sobre el cubo de hierro, igual al peso de éste. En cambio, si se intenta usar este imán para levantar un cubo de aluminio de 2.00 cm, ¿cuál sería la fuerza ascendente sobre el cubo? ¿Cómo se compara esta fuerza con el peso del cubo? ¿El imán podría levantar al cubo? (*Sugerencia:* Necesitará información de las tablas 14.1 y 28.1). *c*) Si se intenta usar el imán para levantar un cubo de plata de 2.00 cm, ¿cuáles deberían ser la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre el cubo? ¿Cómo se compara esta fuerza con el peso del cubo? ¿Serían apreciables los efectos de la fuerza magnética?

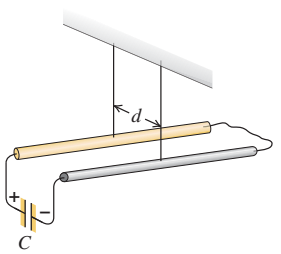
Problemas de desafío

28.85. Dos alambres conductores largos y rectos, con densidad de masa lineal λ están suspendidos de cordeles en posición horizontal, paralelos uno al otro y separados una distancia d. Los extremos posteriores de los alambres están conectados entre sí por un alambre de conexión holgado y de baja resistencia. Ahora se incorpora al sistema un capacitor con carga (capacitancia C); la placa positiva del capacitor (carga inicial $+Q_0$) se conecta al extremo anterior de uno de los alambres, y la placa negativa del capacitor (carga inicial $-Q_0$) se conecta al extremo anterior del otro alambre (figura 28.66). Ambas conexiones se hacen con alambres holgados de poca resistencia. Una vez establecida la conexión, la fuerza de repulsión entre los alambres los empuja hacia los lados, y cada alambre tiene una velocidad horizontal inicial de magnitud v_0. Suponga que el tiempo de descarga del capacitor es insignificante en comparación con el tiempo necesario para que ocurra un desplazamiento apreciable en la posición de los alambres. *a*) Demuestre que la rapidez inicial de cualquiera de los alambres está dada por

$$v_0 = \frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\lambda RCd}$$

donde R es la resistencia total del circuito. *b*) ¿A qué altura h se elevará cada cable como resultado de la conexión del circuito?

Figura **28.66** Problema de desafío 28.85.

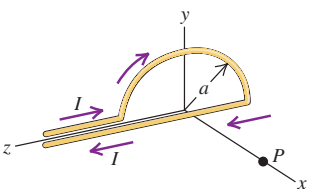


28.86. Una banda aislante larga y ancha tiene una carga positiva uniforme por unidad de área σ en su cara superior. Unos rodillos situados en cada extremo trasladan la banda hacia la derecha con rapidez constante v. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético producido por la banda en movimiento en un punto justo arriba de su superficie. (*Sugerencia:* En los puntos cercanos a la superficie y alejados de sus bordes o extremos, la banda móvil se puede considerar una lámina infinita de corriente, como la del problema 28.81.)

28.87. Disco dieléctrico con carga. Un disco delgado de material dieléctrico con radio a tiene una carga total $+Q$ distribuida de manera uniforme sobre su superficie. El disco gira n veces por segundo sobre un eje perpendicular a la superficie del disco y que pasa por su centro. Determine el campo magnético en el centro del disco. (*Sugerencia:* Divida el disco en anillos concéntricos de anchura infinitesimal.)

28.88. Un alambre en forma de semicírculo con radio a está orientado en el plano yz con su centro de curvatura en el origen (figura 28.67). Si la corriente en el alambre es I, calcule las componentes del campo magnético producido en el punto P, a una distancia x a lo largo del eje x. (*Nota:* No olvide la contribución del alambre recto en la parte inferior del semicírculo que va de $z = -a$ a $z = +a$. Puede considerar el hecho de que los campos de las dos corrientes antiparalelas se anulan en $z > a$, pero debe explicar *por qué* se anulan.)

Figura **28.67** Problema de desafío 28.88.



29 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

? Cuando una tarjeta de crédito se "desliza" por el lector, la información codificada en un patrón magnético al reverso de la tarjeta se transmite al banco del cuentahabiente. ¿Por qué es necesario deslizar la tarjeta en vez de sostenerla inmóvil en la ranura del lector?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La evidencia experimental de que un campo magnético cambiante induce una fem.
- Cómo es que la ley de Faraday relaciona la fem inducida en una espira con el cambio del flujo magnético a través de la espira.
- A determinar el sentido de una fem inducida.
- A calcular la fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético.
- El modo en que un flujo magnético cambiante genera un campo eléctrico que es muy diferente del producido por un arreglo de cargas.
- Las cuatro ecuaciones fundamentales que describen por completo la electricidad y el magnetismo.

Casi todos los dispositivos o máquinas modernas, desde una computadora hasta una lavadora o un taladro eléctrico, tienen circuitos eléctricos en su interior. En el capítulo 25 aprendimos que se requiere una fuerza electromotriz (fem) para que una corriente fluya por un circuito; en los capítulos 25 y 26 casi siempre dimos por hecho que la fem era una batería. Pero para la gran mayoría de los aparatos eléctricos que se usan en la industria y el hogar (incluido cualquiera que se conecte a un contacto de pared), la fuente de fem *no* es una batería, sino una estación generadora de electricidad. Esa estación produce energía eléctrica convirtiendo otras formas de energía: energía potencial gravitacional en una planta hidroeléctrica, energía química en una planta termoeléctrica que consume carbón o petróleo, y energía atómica en una central nucleoeléctrica. Pero, ¿cómo se realiza esta conversión de la energía? En otras palabras, ¿cuál es la física en la que se basa la producción que satisface casi todas nuestras necesidades de energía eléctrica?

La respuesta es un fenómeno conocido como *inducción electromagnética*: si el flujo magnético a través de un circuito cambia, se inducen una fem y una corriente en el circuito. En una estación generadora de electricidad, hay imanes que se mueven con respecto a bobinas de alambre para producir en ellas un flujo magnético variable y, por lo tanto, una fem. Otros componentes clave de los sistemas de energía eléctrica, como los transformadores, también dependen de fem inducidas magnéticamente. De hecho, en virtud de su papel clave en la generación de energía eléctrica, la inducción electromagnética es uno de los fundamentos de nuestra sociedad tecnológica.

El principio fundamental de la inducción electromagnética y la piedra angular de este capítulo es la *ley de Faraday*, que relaciona la fem inducida con el flujo magnético variable en cualquier espira, incluido un circuito cerrado. También analizaremos la ley de Lenz, que ayuda a predecir el sentido de las fem y las corrientes inducidas. Este capítulo explica los principios necesarios para entender los dispositivos de conversión de energía eléctrica, como los motores, generadores y transformadores.

La inducción electromagnética nos dice que un campo magnético que varía en el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico. También veremos cómo un campo *eléctrico* que varía con el tiempo actúa como fuente de un campo *magnético*. Estos

notables resultados forman parte de un conjunto de fórmulas llamadas *ecuaciones de Maxwell*, las cuales describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en *cualquier* situación y preparan el terreno para comprender las ondas electromagnéticas, el tema del capítulo 32.

29.1 Experimentos de inducción

Activ ONLINE Physics
13.9 Inducción electromagnética

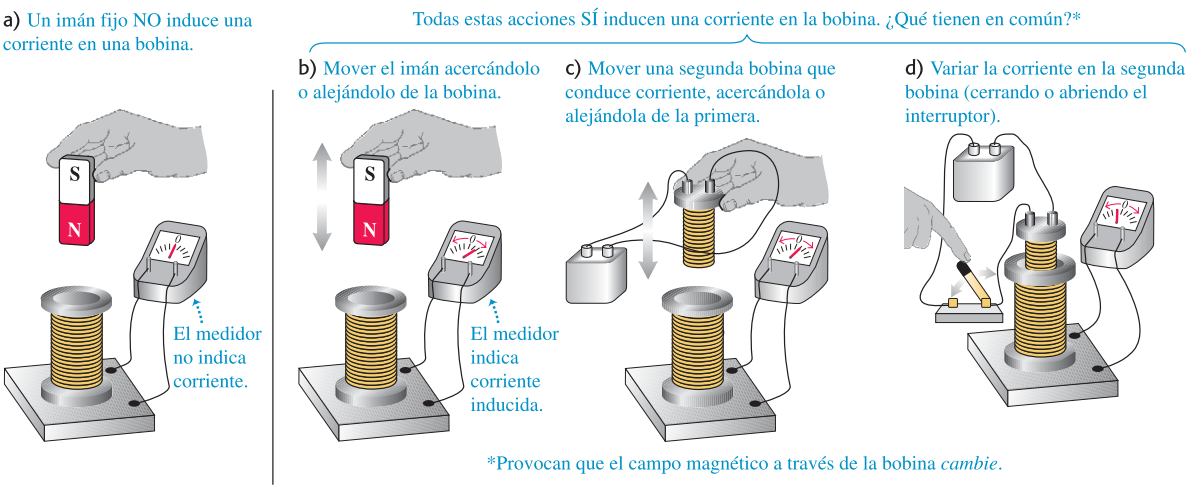
Durante la década de 1830 Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry (1797-1878), quien fuera director de la Smithsonian Institution en Estados Unidos, realizaron varios experimentos pioneros con la fem inducida por medios magnéticos. La figura 29.1 ilustra varios ejemplos al respecto. En la figura 29.1a, una bobina de alambre está conectada a un galvanómetro. Cuando el imán cercano está inmóvil, el medidor no indica corriente. Esto no es sorprendente, pues en el circuito no hay fuente de fem. Pero cuando el imán se *mueve* y se acerca o se aleja de la bobina, el medidor indica corriente en el circuito, pero *sólo* mientras el imán se halla en movimiento (figura 29.1b). Si el imán permanece fijo y es la bobina la que se mueve, otra vez se detecta corriente durante el movimiento. Esto se llama **corriente inducida**, y la fem correspondiente que se requiere para generarla recibe el nombre de **fem inducida**.

En la figura 29.1c se ha sustituido el imán con una segunda bobina conectada a una batería. Cuando la segunda bobina está fija, no hay corriente en la primera bobina. Sin embargo, cuando movemos la segunda bobina acercándola o alejándola de la primera, o hacemos lo mismo con la primera bobina con respecto a la segunda, hay corriente en la primera bobina, pero, de nuevo, *sólo* mientras una de las bobinas se mueve con respecto a la otra.

Por último, en el sistema de dos bobinas que se ilustra en la figura 29.1d, se mantienen ambas inmóviles y se varía la corriente en la segunda, ya sea abriendo y cerrando el interruptor o cambiando la resistencia de la segunda bobina con el interruptor cerrado (por ejemplo, modificando la temperatura de la segunda bobina). Se observa que al abrir y cerrar el interruptor hay un pulso momentáneo de corriente en el primer circuito. Cuando se modifica la resistencia (y, por lo tanto, la corriente) de la segunda bobina, hay una corriente inducida en el primer circuito, pero sólo mientras está cambiando la corriente en el segundo circuito.

Para explorar más a fondo los elementos comunes a estas observaciones, consideremos una serie más detallada de experimentos con la situación que se ilustra en la figura 29.2. Se conecta una bobina de alambre a un galvanómetro, luego se coloca la

29.1 Demostración del fenómeno de la corriente inducida.



bobina entre los polos de un electroimán cuyo campo magnético se pueda modificar. A continuación se describe lo que se observa:

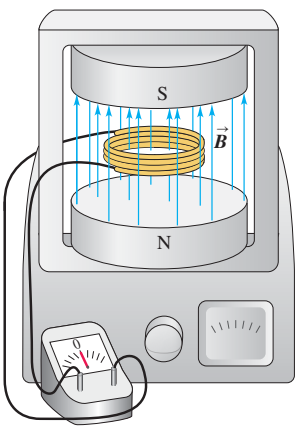
1. Cuando no hay corriente en el electroimán, por lo que $\vec{B} = 0$, el galvanómetro no indica corriente.
2. Cuando el electroimán se enciende, hay una corriente momentánea a través del medidor a medida que se incrementa $\vec{B}$.
3. Cuando $\vec{B}$ se nivela en un valor estable, la corriente cae a cero, sin importar qué tan grande sea $\vec{B}$.
4. Con la bobina en un plano horizontal, la comprimimos para reducir el área de su sección transversal. El medidor detecta corriente sólo *durante* la deformación, no antes ni después. Cuando aumentamos el área para que la bobina regrese a su forma original, hay corriente en sentido opuesto, pero sólo mientras el área de la bobina está cambiando.
5. Si se hace girar la bobina algunos grados en torno a un eje horizontal, el medidor detecta corriente durante la rotación en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Cuando se hace girar de regreso la bobina, hay una corriente en sentido opuesto durante esta rotación.
6. Si se saca la bobina bruscamente del campo magnético, hay corriente durante el movimiento, en el mismo sentido que cuando se redujo el área.
7. Si reducimos el número de espiras de la bobina desenrollando una o más de ellas, hay corriente durante el proceso en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Si enrollamos más espiras en la bobina, hay una corriente en sentido opuesto al enrollar.
8. Cuando se desconecta el electroimán, hay una corriente momentánea en el sentido opuesto al de la corriente cuando fue activado.
9. Cuanto más rápido se efectúen estos cambios, mayor es la corriente.
10. Si se repiten todos estos experimentos con una bobina que tenga la misma forma pero diferente material y resistencia, la corriente en cada caso es inversamente proporcional a la resistencia total del circuito. Esto demuestra que las fem inducidas que ocasionan la corriente no dependen del material de la bobina, sino sólo de su forma y del campo magnético.

El elemento común en todos estos experimentos es el *flujo magnético* cambiante Φ_B a través de la bobina conectada al galvanómetro. En cada caso, el flujo cambia ya sea porque el campo magnético cambia con el tiempo o porque la bobina se mueve a través de un campo magnético no uniforme. Revise la lista anterior para verificar esta afirmación. La ley de Faraday de la inducción, que es el tema de la siguiente sección, establece que en todas estas situaciones la fem inducida es proporcional a la *tasa de cambio* del flujo magnético Φ_B a través de la bobina. El *sentido* de la fem inducida depende de si el flujo aumenta o disminuye. Si el flujo es constante, no hay fem inducida.

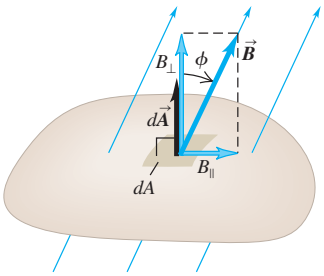
Las fem inducidas no son meras curiosidades de laboratorio, sino que tienen numerosas aplicaciones prácticas. Si está leyendo esto en el interior de una edificación, ¡está haciendo uso de fem inducidas en este preciso momento! En la central eléctrica que abastece su distrito, un generador eléctrico produce una fem haciendo variar el flujo magnético a través de bobinas de alambre. (En la siguiente sección veremos en detalle la forma en que esto se realiza.) Esta fem suministra el voltaje entre las terminales de las tomas de corriente de pared de su casa, y esta diferencia de potencial suministra la energía a la lámpara que ilumina su libro. De hecho, cualquier aparato que se conecte a la toma de corriente de pared utiliza fem inducidas.

Las fem inducidas magnéticamente, al igual que las que se estudiaron en la sección 25.4, siempre son el resultado de la acción de fuerzas *no electrostáticas*. Cuando estas fuerzas son el resultado de campos eléctricos adicionales inducidos por campos magnéticos cambiantes, tenemos que diferenciar con cuidado entre los campos eléctricos producidos por cargas (de acuerdo con la ley de Coulomb) y los producidos por campos magnéticos cambiantes. Denotaremos éstos, respectivamente, con $\vec{E}_c$ (donde el subíndice c hace referencia a Coulomb, o a conservativo) y con $\vec{E}_n$ (donde la n significa que no se trata de Coulomb o que es un campo no conservativo). Más adelante, en este capítulo y el siguiente, volveremos a esta distinción.

29.2 Bobina en un campo magnético. Cuando el campo $\vec{B}$ es constante y la forma, ubicación y orientación de la bobina no cambian, no hay corriente inducida en la bobina. Sólo se induce corriente cuando cambia alguno de estos factores.



29.3 Cálculo del flujo magnético a través de un elemento de área.



Flujo magnético a través de un elemento de área $d\vec{A}$: $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp dA = B\, dA \cos\phi$.

29.2 Ley de Faraday

El elemento común en todos los efectos de inducción es el flujo magnético cambiante a través de un circuito. Antes de enunciar la ley física sencilla que resume todas las clases de experimentos descritos en la sección 29.1, revisemos primero el concepto de flujo magnético Φ_B (que presentamos en la sección 27.3). Para un elemento de área infinitesimal $d\vec{A}$ en un campo magnético $\vec{B}$ (figura 29.3), el flujo magnético $d\Phi_B$ a través del área es

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp\, dA = B\, dA \cos\phi$$

donde $B_\perp$ es la componente de $\vec{B}$ perpendicular a la superficie del elemento de área, y ϕ es el ángulo entre $\vec{B}$ y $d\vec{A}$. (Al igual que en el capítulo 27, hay que tener cuidado en distinguir entre dos cantidades llamadas "fi", ϕ y Φ_B.) El flujo magnético total Φ_B a través de un área finita es la integral de esta expresión sobre el área:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos\phi \qquad (29.1)$$

Si $\vec{B}$ es uniforme sobre un área plana $\vec{A}$, entonces

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\phi \qquad (29.2)$$

La figura 29.4 repasa las reglas para el uso de la ecuación (29.2).

CUIDADO **Al elegir la dirección de $d\vec{A}$ o $\vec{A}$** En las ecuaciones (29.1) y (29.2) tenemos que ser cuidadosos para definir la dirección del área vectorial $d\vec{A}$ o $\vec{A}$ sin ambigüedades. Siempre hay dos direcciones perpendiculares a cualquier área dada, y el signo del flujo magnético a través de ésta depende de cuál se elija como positiva. Por ejemplo, en la figura 29.3 se eligió que $d\vec{A}$ apuntara hacia arriba, por lo que ϕ es menor que 90° y $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ es positivo. En vez de lo anterior, hubiéramos podido elegir que $d\vec{A}$ apuntara hacia abajo, en cuyo caso ϕ habría sido mayor que 90° y $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ habría sido negativo. Cualquier opción es igualmente buena, pero una vez que se elige una, debemos respetarla.

La **ley de Faraday de la inducción** establece lo siguiente:

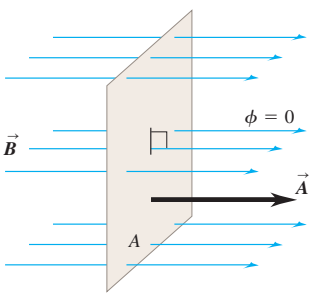
La fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de la espira con respecto al tiempo.

En símbolos, la ley de Faraday es

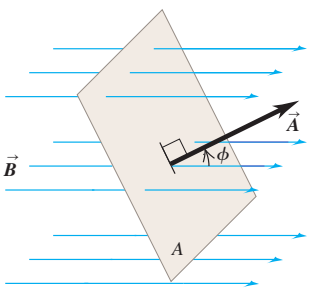
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(ley de Faraday de la inducción)} \qquad (29.3)$$

29.4 Cálculo del flujo de un campo magnético uniforme a través de un área plana. (Compare con la figura 22.6, que muestra las reglas para calcular el flujo de un campo *eléctrico* uniforme.)

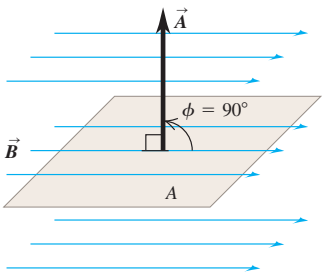
La superficie está de frente al flujo magnético:
- $\vec{B}$ y $\vec{A}$ son paralelos (el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$).
- El flujo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA$.



La superficie está inclinada un ángulo ϕ con respecto a una orientación de frente:
- El ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es ϕ.
- El flujo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\phi$.



La superficie está de perfil al flujo magnético:
- $\vec{B}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$).
- El flujo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos 90° = 0$.



Para comprender el signo negativo, es necesario introducir una convención de signos para la fem inducida $\mathcal{E}$. Pero primero veamos un ejemplo sencillo de esta ley en acción.

Ejemplo 29.1 Fem y corriente inducida en una espira

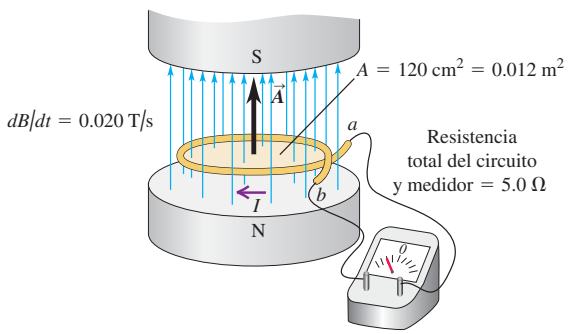
El campo magnético entre los polos del electroimán de la figura 29.5 es uniforme en cualquier momento, pero su magnitud se incrementa a razón de 0.020 T/s. El área de la espira conductora en el campo es de 120 cm^2, y la resistencia total del circuito, incluyendo el medidor, es de 5.0 Ω. *a*) Encuentre la fem inducida y la corriente inducida en el circuito. *b*) Si se sustituye la espira por otra hecha de un material aislante, ¿qué efecto tendrá esto sobre la fem inducida y la corriente inducida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo magnético a través de la espira cambia conforme se modifica el campo magnético. De esta forma, habrá una fem inducida en la espira y es posible encontrar su valor (una de las incógnitas) empleando la ley de Faraday. La corriente generada en la espira por esta fem (la otra variable que buscamos) se determina utilizando las mismas técnicas del capítulo 25.

PLANTEAR: Con la ecuación (29.2) podemos calcular el flujo magnético; luego, utilizamos la ley de Faraday de acuerdo con la ecuación (29.3) para determinar la fem inducida resultante, $\mathcal{E}$. Después se calcula la corriente inducida que produce esta fem, por medio de la relación $\mathcal{E} = IR$, donde R es la resistencia total del circuito que incluye la espira.

29.5 Espira conductora fija en un campo magnético creciente.



EJECUTAR: *a*) El área vectorial de la espira es perpendicular al plano de la espira; optaremos por que sea verticalmente hacia arriba. Así, los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos. Como $\vec{B}$ es uniforme, el flujo magnético a través de la espira es $\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos 0 = BA$. El área $A = 0.012\ m^2$ es constante, por lo que la tasa de cambio del flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{dB}{dt}A = (0.020\ \text{T/s})(0.012\ \text{m}^2)$$
$$= 2.4 \times 10^{-4}\ \text{V} = 0.24\ \text{mV}$$

Esto, aparte de un signo que aún no hemos analizado, es la fem inducida $\mathcal{E}$. La corriente inducida correspondiente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2.4 \times 10^{-4}\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 4.8 \times 10^{-5}\ \text{A} = 0.048\ \text{mA}$$

b) Al cambiar a una espira hecha de material aislante, la resistencia se hace muy grande. La ley de Faraday, ecuación (29.3), no implica la resistencia del circuito de ninguna forma, por lo que la *fem* inducida no cambia. Pero la *corriente* será menor, según la ecuación $I = \mathcal{E}/R$. Si la espira estuviera hecha de un aislante perfecto de resistencia infinita, la corriente inducida sería igual a cero aun cuando estuviera presente una fem. Esta situación es análoga a la de una batería aislada cuyas terminales no estén conectadas a nada: hay una fem presente, pero no fluye corriente.

EVALUAR: En este cálculo conviene verificar la consistencia de las unidades. Hay muchas maneras de hacerlo; una es observar que debido a la relación de fuerza magnética, $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$, las unidades del campo magnético son las de la fuerza divididas entre las unidades de (carga por velocidad): $1\ \text{T} = (1\ \text{N})/(1\ \text{C}\cdot\text{m/s})$. En consecuencia, las unidades de flujo magnético pueden expresarse como $(1\ \text{T})(1\ \text{m}^2) = 1\ \text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m/C}$, y la tasa de cambio del flujo magnético como $1\ \text{N}\cdot\text{m/C} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{V}$. Así, la unidad de $d\Phi_B/dt$ es el volt, como lo requiere la ecuación (29.3). También hay que recordar que la unidad de flujo magnético es el weber (Wb): $1\ \text{T}\cdot\text{m}^2 = 1\ \text{Wb}$, por lo que $1\ \text{V} = 1\ \text{Wb/s}$.

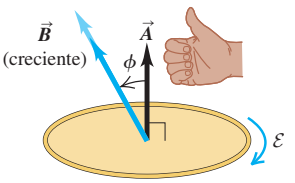
Dirección de la fem inducida

La dirección de una fem o corriente inducida se calcula con la ecuación (29.3) y con algunas reglas sencillas para los signos. El procedimiento es el siguiente:

1. Defina una dirección positiva para el vector de área $\vec{A}$.
2. A partir de las direcciones de $\vec{A}$ y del campo magnético $\vec{B}$, determine el signo del flujo magnético Φ_B y su tasa de cambio $d\Phi_B/dt$. La figura 29.6 presenta varios ejemplos.
3. Determine el signo de la fem o corriente inducida. Si el flujo es creciente, de manera que $d\Phi_B/dt$ es positiva, entonces la fem o corriente inducida es negativa; si el flujo es decreciente, entonces $d\Phi_B/dt$ es negativa y la fem o corriente inducida es positiva.

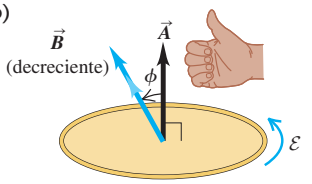
29.6 El flujo magnético se hace **a)** más positivo, **b)** menos positivo, **c)** más negativo y **d)** menos negativo. Por lo tanto, Φ_B es creciente en los incisos **a)** y **d)**, y decreciente en **b)** y **c)**. En **a)** y **d)**, las fem son negativas (opuestas a la dirección de los dedos doblados de la mano derecha cuando el pulgar apunta a lo largo de $\vec{A}$). En **b)** y **c)**, las fem son positivas (en la misma dirección que los dedos enrollados).

a)



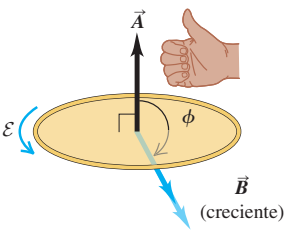
- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$) …
- … y se torna más positivo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\mathcal{E} < 0$).

b)



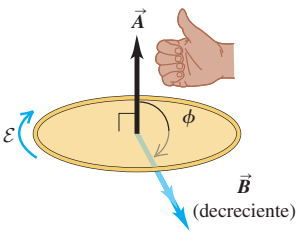
- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$) …
- … y se torna menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\mathcal{E} > 0$).

c)



- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$) …
- … y se torna más negativo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\mathcal{E} > 0$).

d)



- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$) …
- … y se torna menos negativo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\mathcal{E} < 0$).

4. Por último, determine la dirección de la fem o corriente inducida con la ayuda de su mano derecha. Doble los dedos de la mano derecha alrededor del vector $\vec{A}$, con el pulgar en dirección de $\vec{A}$. Si la fem o corriente inducida en el circuito es *positiva*, está en la misma dirección de los dedos doblados. Si la fem o corriente inducida es *negativa*, se encuentra en la dirección opuesta.

En el ejemplo 29.1, en el que $\vec{A}$ va hacia arriba, una $\mathcal{E}$ positiva estaría dirigida en sentido antihorario alrededor de la espira, como se ilustra en la figura. En el ejemplo, tanto $\vec{A}$ como $\vec{B}$ van hacia arriba, por lo que Φ_B es positivo; la magnitud B es creciente, por lo que $d\Phi_B/dt$ es positiva. Entonces, según la ecuación (29.3), la $\mathcal{E}$ del ejemplo 29.1 es *negativa*. Su dirección real va *en sentido horario* alrededor de la espira, como se observa en la figura.

Si la espira de la figura 29.5 es un conductor, de la fem resulta una corriente inducida que también va en sentido horario, como se ilustra en la figura 29.5. Esta corriente inducida produce un campo magnético adicional a través de la espira, y la regla de la mano derecha que se describió en la sección 28.6 indica que la dirección de este campo es *opuesta* al campo creciente producido por el electroimán. Éste es un ejemplo de una regla general llamada *ley de Lenz*, la cual dice que cualquier efecto de inducción tiende a oponerse al cambio que lo ocasionó; en este caso, el cambio es el incremento en el flujo del campo del electroimán a través de la espira. (En la siguiente sección se estudiará esta ley con todo detalle.)

El lector debe comprobar los signos de las fem y corrientes inducidas para la lista de experimentos de la sección 29.1. Por ejemplo, cuando la espira de la figura 29.2 está en un campo constante y lo inclinamos o comprimimos de manera que *disminuya* el flujo a través suyo, la fem y corriente inducidas van en sentido antihorario, vistas desde arriba.

CUIDADO **Las fem inducidas son ocasionadas por cambios en el flujo** Como el flujo magnético tiene un papel central en la ley de Faraday, es tentador pensar que el *flujo* es la causa de la fem inducida y que en un circuito aparecerá una fem siempre que haya un campo magnético en la región limitada por el circuito. Pero la ecuación (29.3) demuestra que sólo un *cambio con respecto al tiempo* en el flujo a través del circuito, no el flujo en sí, puede inducir una fem en un circuito. Si el flujo a través del circuito tiene un valor constante, ya sea positivo, negativo o cero, no habrá fem inducida.

Si se tiene una bobina con N espiras idénticas y si el flujo varía a la misma tasa a través de cada espira, la tasa *total* de cambio a través de todas las espiras es N veces más grande que para una sola espira. Si Φ_B es el flujo a través de cada espira, la fem total en una bobina con N espiras es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.4}$$

Como se vio en la introducción de este capítulo, las fem inducidas desempeñan un papel esencial en la generación de energía eléctrica para uso comercial. Varios de los ejemplos que siguen exploran diferentes métodos para generar fem por medio del movimiento de un conductor con respecto a un campo magnético, lo que da lugar a un flujo cambiante a través de un circuito.

Estrategia para resolver problemas 29.1 Ley de Faraday

IDENTIFICAR: *los conceptos relevantes:* La ley de Faraday se aplica cuando hay un campo magnético cambiante. Para utilizarla hay que asegurarse que es posible identificar un área a través de la cual hay un flujo de campo magnético. Por lo general, ésta será el área encerrada por una espira, hecha de un material conductor [aunque no siempre; véase el inciso *b*) del ejemplo 29.1]. Como siempre, hay que identificar la(s) variable(s) buscada(s).

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. La ley de Faraday relaciona la fem inducida con la tasa de cambio del flujo magnético. Para calcular esa tasa primero se tiene que entender qué es lo que genera el cambio del flujo: ¿El conductor se está moviendo? ¿Está cambiando su orientación? ¿El campo magnético está cambiando? Recuerde que no es el flujo en sí mismo lo que importa, sino su *tasa de cambio*.
2. Elija una dirección para el vector de área $\vec{A}$ o $d\vec{A}$. La dirección siempre debe ser perpendicular al plano del área. Observe que siempre hay dos opciones de dirección. Por ejemplo, si el plano del área es horizontal, $\vec{A}$ podría apuntar directamente hacia arriba o hacia abajo. Es como elegir cuál es el sentido positivo en un problema de movimiento rectilíneo. No importa cuál dirección se elija, pero hay que usarla de manera consistente en todo el problema.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Calcule el flujo magnético con base en la ecuación (29.2) si $\vec{B}$ es uniforme sobre el área de la espira, o con la (29.1) si no es uniforme, tomando en cuenta la dirección que se eligió para el vector de área.
2. Calcule la fem inducida empleando la ecuación (29.3) o la (29.4). Si el conductor tiene N espiras en una bobina, no olvide multiplicar por N. Recuerde la regla de los signos referente a la dirección positiva de la fem y úsela en forma congruente.
3. Si conoce la resistencia del circuito, puede calcular la magnitud de la corriente inducida I con $\mathcal{E} = IR$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe las unidades de los resultados y vuelva a revisar que haya empleado correctamente las reglas de los signos para el cálculo del flujo magnético y la fem inducida.

Ejemplo 29.2 Magnitud y dirección de una fem inducida

Se coloca una bobina de alambre que contiene 500 espiras circulares con radio de 4.00 cm entre los polos de un electroimán grande, donde el campo magnético es uniforme y tiene un ángulo de 60° con respecto al plano de la bobina. El campo disminuye a razón de 0.200 T/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fem inducida?

SOLUCIÓN

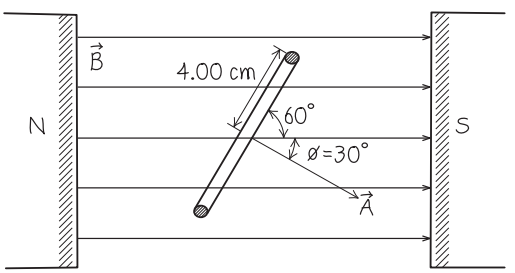
IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es la fem inducida por un flujo magnético variable a través de la bobina. El flujo varía debido a que la magnitud del campo magnético disminuye.

PLANTEAR: Se elige que la dirección del vector de área $\vec{A}$ sea la que se observa en la figura 29.7. Con esta elección, la geometría es muy similar a la de la figura 29.6b. Esa figura nos ayudará a determinar la dirección de la fem inducida.

EJECUTAR: El campo magnético es uniforme en toda la espira, por lo que es posible calcular el flujo con la ecuación (29.2): $\Phi_B = BA\cos\phi$, donde $\phi = 30°$. En esta expresión, la única cantidad que cambia con respecto al tiempo es la magnitud B del campo.

CUIDADO **Recuerde cómo se define ϕ** Tal vez estuvo tentado a utilizar $\phi = 60°$ en este problema. Si así fue, recuerde que ϕ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, *no* entre $\vec{B}$, y el plano de la espira.

29.7 Diagrama para este problema.



continúa

La tasa de cambio del flujo es $d\Phi_B/dt = (dB/dt)A\cos\phi$. En nuestro problema, $dB/dt = -0.200$ T/s, y $A = \pi(0.0400\text{ m})^2 = 0.00503\text{ m}^2$, por lo que

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_B}{dt} &= \frac{dB}{dt}A\cos 30^\circ \\ &= (-0.200\text{ T/s})(0.00503\text{ m}^2)(0.866) \\ &= -8.71\times10^{-4}\text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{s} = -8.71\times10^{-4}\text{ Wb/s}\end{aligned}$$

La fem inducida en la bobina de $N = 500$ espiras es, según la ecuación (29.4),

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -N\frac{d\Phi_B}{dt} \\ &= -(500)(-8.71\times10^{-4}\text{ Wb/s}) = 0.435\text{ V}\end{aligned}$$

Observe que la respuesta es positiva. Esto significa que cuando se apunta el pulgar derecho en la dirección del vector de área $\vec{A}$ (30° por arriba del campo magnético $\vec{B}$), la dirección positiva para $\mathcal{E}$ corresponde a la de los dedos doblados de la mano derecha. De ahí que en este ejemplo la fem tenga la misma dirección (compare con la figura 29.6b). Si en la figura 29.7 viéramos la bobina desde el lado izquierdo y en la dirección de $\vec{A}$, la fem iría en sentido horario.

EVALUAR: Si se conectan los extremos del alambre juntos, la dirección de la corriente en la bobina sería la misma que la de la fem, es decir, en sentido horario, viendo desde la izquierda de la bobina. Una corriente en el sentido horario agrega flujo magnético a través de la bobina en la misma dirección que el flujo del electroimán, por lo que tiende a oponerse a la disminución del flujo total. En la sección 29.3 se verán más ejemplos de esto.

Ejemplo conceptual 29.3 La bobina exploradora

Una forma práctica de medir la intensidad de un campo magnético es usar una bobina pequeña de N espiras, con devanado compacto, llamada *bobina exploradora*. Inicialmente, la bobina, de área A, se coloca de manera que su vector de área $\vec{A}$ esté alineado con un campo magnético de magnitud B. Luego, la bobina se hace girar con rapidez un cuarto de vuelta en torno a su diámetro, o bien, se saca la bobina del campo rápidamente. Explique cómo se puede usar este dispositivo para medir el valor de B.

SOLUCIÓN

Al principio, el flujo a través de la bobina es $\Phi_B = NBA$; cuando la bobina se hace girar o se saca del campo, el flujo disminuye rápidamente de NBA a cero. Mientras el flujo disminuye hay una fem inducida momentánea en un circuito externo conectado a la bobina. La tasa de cambio del flujo a través de la bobina es proporcional a la corriente, o tasa de flujo de carga, por lo que es fácil demostrar que el cambio *total* del flujo es proporcional a la carga total que fluye por el circuito. Se puede construir un instrumento que mida esta carga total y, a partir de esto, obtener el valor de B. Dejamos los detalles como problema para el lector (véase el ejercicio 29.3). En sentido estricto, este método sólo da el campo *medio* de toda el área de la bobina. Pero si el área es pequeña, este campo medio es casi igual al campo en el centro de la bobina.

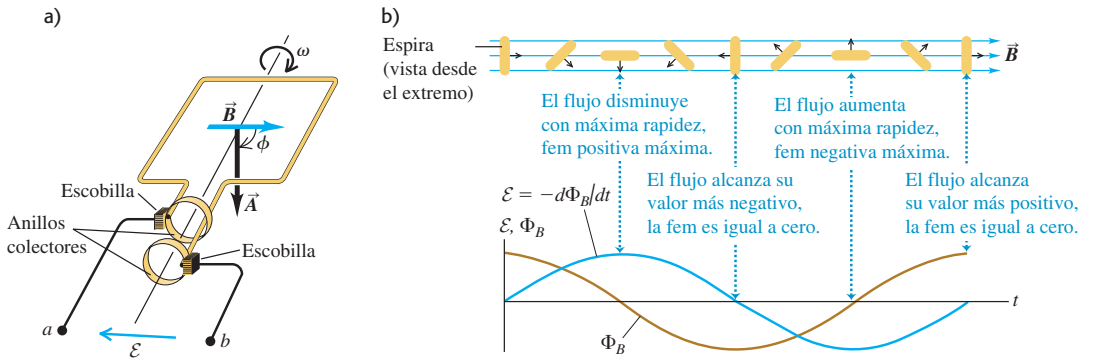
Ejemplo 29.4 Generador I: Un alternador simple

La figura 29.8 muestra una versión sencilla de un *alternador*, un dispositivo que genera una fem. Se hace girar una espira rectangular con rapidez angular constante ω alrededor del eje que se indica. El campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y constante. En el momento $t = 0$, $\phi = 0$. Determine la fem inducida.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: De nuevo, la fem (la variable buscada) es producto de un flujo magnético variable. Sin embargo, en esta situación el campo magnético $\vec{B}$ es constante; el flujo cambia porque la dirección de $\vec{A}$ cambia al girar la espira.

29.8 a) Diagrama de un alternador. Una espira conductora gira en un campo magnético, lo que produce una fem. Las conexiones entre cada extremo de la espira y el circuito externo se efectúan por medio de un anillo colector en ese extremo. El sistema se ilustra para el momento en que el ángulo $\phi = \omega t = 90°$. b) Gráfica del flujo a través de la espira y la fem resultante en las terminales ab, a lo largo de las posiciones correspondientes de la espira durante una rotación completa.



PLANTEAR: La figura 29.8a ilustra la dirección del vector de área $\vec{A}$. Observe que conforme la espira gira, el ángulo ϕ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ aumenta a un ritmo constante.

EJECUTAR: De nuevo, el campo magnético es uniforme en toda la espira, por lo que es fácil calcular el flujo magnético. La tasa de cambio del ángulo ϕ es igual a ω, la rapidez angular de la espira, por lo que podemos escribir $\phi = \omega t$. Por lo tanto,

$$\Phi_B = BA\cos\phi = BA\cos\omega t$$

La derivada de cos ωt es (d/dt) cos $\omega t = -\omega$ sen ωt. Por lo que, según la ley de Faraday [ecuación (29.3)], la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BA\,\text{sen}\,\omega t$$

EVALUAR: La fem inducida $\mathcal{E}$ varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo (véase la figura 29.8b). Cuando el plano de la espira es perpendicular a $\vec{B}$ ($\phi = 0$ o 180°), Φ_B alcanza sus valores máximo y mínimo. En esos momentos, su tasa instantánea de cambio es igual a cero y $\mathcal{E}$ es cero. Asimismo, $\mathcal{E}$ es máxima en valor absoluto cuando el plano de la espira es paralelo a $\vec{B}$ ($\phi = 90°$ o 270°) y Φ_B está cambiando con la máxima rapidez. Por último, se observa que la fem inducida no depende de la *forma* de la espira, sino sólo de su área. Como $\mathcal{E}$ es directamente proporcional a ω y a B, algunos tacómetros utilizan la fem en una bobina giratoria para medir la rapidez de rotación. Otros dispositivos aprovechan la fem de esta clase para medir el campo magnético.

Podemos utilizar el alternador como fuente de fem en un circuito externo empleando dos *anillos colectores* que giran con la espira, como se ilustra en la figura 29.8a. Los anillos se deslizan contra unos contactos fijos llamados *escobillas*, que están conectados a las terminales exteriores a y b. Como la fem varía en forma sinusoidal, la corriente resultante en el circuito es *alterna*, cuya magnitud y dirección también varían en forma sinusoidal. Por esta razón, un alternador también recibe el nombre de *generador de corriente alterna* (ca). La amplitud de la fem aumenta si se incrementa la rapidez de rotación, la magnitud del campo o el área de la espira, o bien, utilizando N espiras en vez de una sola, como en la ecuación (29.4).

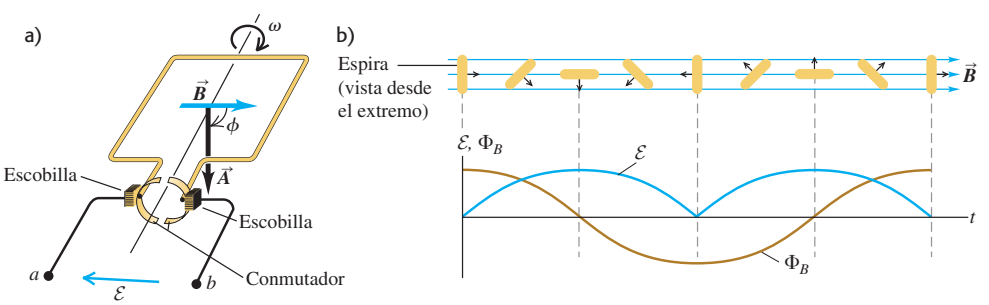
Los alternadores se usan en los automóviles para generar las corrientes en el sistema de arranque, las luces y el sistema de entretenimiento. El arreglo es un poco diferente del de este ejemplo; en vez de tener una espira giratoria en un campo magnético, la espira permanece fija y es el electroimán el que gira. (La rotación se consigue mediante una conexión mecánica entre el alternador y el motor.) Pero el resultado es el mismo; el flujo a través de la espira varía de manera sinusoidal, lo que produce una fem que cambia de modo sinusoidal. En las plantas de generación de energía eléctrica se utiliza el mismo tipo de alternadores, sólo que más grandes (figura 29.9).

29.9 Los alternadores comerciales utilizan muchas espiras de alambre devanadas alrededor de una estructura con apariencia de barril llamada inducido. El inducido y el alambre permanecen fijos mientras los electroimanes giran sobre un eje (no aparece en la fotografía) que pasa por el centro del inducido. La fem inducida resultante es mucho más grande de lo que sería posible con una sola espira de alambre.

Ejemplo 29.5 Generador II: Un generador de CD y la fuerza contraelectromotriz en un motor

El alternador del ejemplo 29.4 produce una fem que varía de modo sinusoidal y por ello genera una corriente alterna. Se puede utilizar un esquema similar para fabricar un *generador de corriente directa* (cd) que produzca una fem que siempre tenga el mismo signo. En la figura 29.10a se ilustra un prototipo de generador. El arreglo de anillos colectores se llama *conmutador*; revierte las conexiones al circuito externo en posiciones angulares en las que se invierte la fem. La fem resultante se representa en la figura 29.10b. Los generadores de cd comerciales tienen un gran número de segmentos de bobinas y conmutadores; este arreglo suaviza las fluctuaciones en la fem, por lo que el voltaje terminal no sólo es unidireccional, sino prácticamente constante. Este arreglo de escobillas y conmutador es el mismo que el del motor de corriente directa que se analizó en la sección 27.8. La *fuerza contraelectromotriz* es simplemente la fem inducida por el flujo magnético cambiante a través de su bobina giratoria. Considere un motor con bobina cuadrada de 10.0 cm de lado, con 500 espiras de alambre. Si el campo magnético tiene una magnitud de 0.200 T, ¿a qué rapidez de rotación la fuerza contraelectromotriz *media* del motor es igual a 112 V?

29.10 a) Diagrama de un generador de cd que utiliza un conmutador de anillo partido. Las mitades del anillo están unidas a la espira y giran con ésta. b) Gráfica de la fem inducida resultante en las terminales ab. Compárela con la figura 29.8b.



continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Por lo que respecta a la espira giratoria, la situación es la misma que la del ejemplo 29.4, excepto que ahora hay N espiras de alambre. Sin el conmutador, la fem alternaría entre valores positivos y negativos y tendría un valor medio de cero (figura 29.8b). Pero con el conmutador, la fem nunca es negativa y su valor medio es positivo (figura 29.10b). Empleando el resultado del ejemplo 29.4, se determinará una expresión para este valor medio y se despejará la rapidez de rotación ω (nuestra incógnita).

PLANTEAR: El planteamiento es el mismo que el del ejemplo 29.4.

EJECUTAR: La comparación de las figuras 29.8b y la 29.10b muestra que la fuerza contraelectromotriz del motor es tan sólo el valor absoluto de la fem calculada para el alternador en el ejemplo 29.4 multiplicada por el número N de espiras en la bobina, como en la ecuación (29.4):

$$|\mathcal{E}| = N\omega BA|\operatorname{sen}\omega t|$$

Para obtener la fuerza contraelectromotriz *media* se sustituye $|\operatorname{sen}\omega t|$ por su valor medio. El valor medio de la función seno se encuentra con la integración de sen ωt sobre medio ciclo, de $t = 0$ a $t = T/2 = \pi/\omega$, para luego dividir el resultado entre el tiempo transcurrido π/ω. Durante este medio ciclo, la función seno es positiva, por lo que $|\operatorname{sen}\omega t| = \operatorname{sen}\omega t$, y se tiene

$$(|\operatorname{sen}\omega t|)_{\text{med}} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sen}\omega t\, dt}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi}$$

o cerca de 0.64. Entonces, la fuerza contraelectromotriz media es

$$\mathcal{E}_{\text{med}} = \frac{2N\omega BA}{\pi}$$

La fuerza contraelectromotriz es proporcional a la rapidez de rotación ω, como se afirmó sin demostrarlo en la sección 27.8. Al despejar ω se obtiene

$$\omega = \frac{\pi\mathcal{E}_{\text{med}}}{2NBA} = \frac{\pi(112\text{ V})}{2(500)(0.200\text{ T})(0.100\text{ m})^2} = 176\text{ rad/s}$$

Se usaron las relaciones $1\text{ V} = 1\text{ Wb/s} = 1\text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, del ejemplo 29.1. Pudimos sumar "radianes" a las unidades de la respuesta porque se trata de una cantidad adimensional, como se vio en el capítulo 9. La rapidez de rotación también puede escribirse como

$$\omega = 176\text{ rad/s}\,\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\,\frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 1680\text{ rev/min}$$

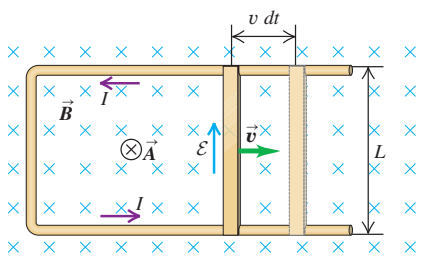
EVALUAR: La fuerza contraelectromotriz media es directamente proporcional a ω. De esta forma, cuanto menor sea la rapidez de rotación, menor será la fuerza contraelectromotriz y mayor la posibilidad de quemar el motor, como se dijo en el ejemplo 27.11 (sección 27.8).

Aunque en este ejemplo y en el anterior usamos un modelo muy sencillo, se aplican los mismos principios a la operación de generadores comerciales.

Ejemplo 29.6 Generador III: El generador de conductor corredizo

La figura 29.11 muestra un conductor en forma de U en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la figura, dirigido *hacia* la página. Colocamos una varilla de metal con longitud L entre los dos brazos del conductor para formar un circuito, y movemos la varilla hacia la derecha con velocidad $\vec{v}$ constante. Esto induce una fem y una corriente, que es la razón por la que este dispositivo se llama *generador de conductor corredizo*. Determine la magnitud y dirección de la fem inducida resultante.

29.11 Generador de conductor corredizo. Tanto el campo magnético $\vec{B}$ como el área vectorial $\vec{A}$ están dirigidos hacia la figura. El aumento en el flujo magnético (causado por un incremento del área) induce la fem y la corriente.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El flujo magnético cambia porque el área de la espira —limitada a la derecha por la varilla móvil— está aumentando. La variable que buscamos es la fem $\mathcal{E}$ inducida en esta espira en expansión.

PLANTEAR: El campo magnético es uniforme sobre el área de la espira, por lo que de nuevo se calcula el flujo magnético empleando $\Phi_B = BA\cos\phi$. Se elige que el vector de área $\vec{A}$ apunte directo hacia el plano de la ilustración, en la misma dirección que $\vec{B}$. Con esta elección, una fem positiva será aquella que esté dirigida en el sentido horario alrededor de la espira. (El lector puede comprobar esto con la regla de la mano derecha. Apunte el pulgar de su mano derecha hacia la página y doble los dedos como en la figura 29.6.)

EJECUTAR: Como $\vec{B}$ y $\vec{A}$ apuntan en la misma dirección, el ángulo $\phi = 0$ y $\Phi_B = BA$. La magnitud del campo magnético B es constante, por lo que la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

Para calcular dA/dt se observa que en el momento dt la varilla corrediza se desplaza una distancia $v\,dt$ (figura 29.11), y el área de la espira se incrementa en una cantidad $dA = Lv\,dt$. Por lo tanto, la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -B\frac{Lv\,dt}{dt} = -BLv$$

El signo negativo nos indica que la fem está dirigida en el *sentido antihorario* alrededor de la espira, al igual que la corriente inducida, como se muestra en la figura.

EVALUAR: Observe que la fem es constante si la velocidad $\vec{v}$ de la varilla es constante. En este caso, el generador de conductor corredizo actúa como un generador de *corriente directa*. No es un dispositivo muy práctico, ya que la varilla en algún momento se mueve más allá del conductor en forma de U y el contacto se pierde, con lo que la corriente cesa.

Ejemplo 29.7 Trabajo y potencia en el generador de conductor corredizo

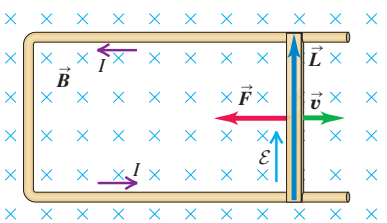
En el generador de conductor corredizo del ejemplo 29.6, la energía se disipa en el circuito debido a su resistencia. Sea R la resistencia del circuito (constituido por conductor corredizo y el conductor en forma de U que conecta los extremos del conductor corredizo) en un punto dado del movimiento del conductor corredizo. Demuestre que la tasa a la que se disipa energía en el circuito es exactamente igual a la tasa a la que se debe efectuar trabajo para desplazar la varilla a través del campo magnético.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las variables buscadas son las *tasas* a las que se disipa energía y se realiza trabajo. Esto significa que trabajaremos con el concepto de potencia (recuerde la sección 6.4). La energía se disipa en el circuito porque hay resistencia; para describir esto necesitaremos las ideas de la sección 25.5. Se requiere trabajo para mover la varilla porque hay una corriente inducida que fluye a través suyo. El campo magnético ejerce una fuerza sobre esta varilla conductora de corriente, y quien desee empujar la varilla tendrá que efectuar trabajo en contra de esa fuerza.

PLANTEAR: En el ejemplo 29.6 se calculó la fem inducida $\mathcal{E}$ en este circuito. La corriente I en el circuito es igual al valor absoluto de $\mathcal{E}$ dividido entre la resistencia R, y la tasa a la que se disipa la energía en la varilla es $P_{\text{disipada}} = I^2R$. La fuerza magnética sobre la varilla es $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$; el vector $\vec{L}$ apunta a lo largo de la varilla en la dirección de la corriente. La figura 29.12 muestra que esta fuerza es opuesta a la velocidad de la varilla, por lo que para mantener el movimiento debe aplicarse una fuerza de igual magnitud en la dirección del movimiento de la varilla (es decir, en dirección de $\vec{v}$). La tasa con que se efectúa trabajo es igual al producto de la fuerza aplicada por la rapidez de la varilla: $P_{\text{aplicada}} = Fv$.

29.12 La fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que actúa sobre la varilla debido a la corriente inducida va hacia la izquierda, opuesta a $\vec{v}$.



EJECUTAR: Primero se calculará P_{disipada}. De acuerdo con el ejemplo 29.6, $\mathcal{E} = -BLv$. En consecuencia, la corriente en la varilla es

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

y la tasa de disipación de energía es

$$P_{\text{disipada}} = I^2R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

Para calcular P_{aplicada} primero se determina la magnitud de $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. Como $\vec{L}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, esta magnitud es

$$F = ILB = \frac{BLv}{R}LB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

Por lo tanto, la tasa con que esta fuerza aplicada realiza trabajo es

$$P_{\text{aplicada}} = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

EVALUAR: La tasa a la que se realiza trabajo es exactamente igual a la tasa a la que la energía se disipa en la resistencia.

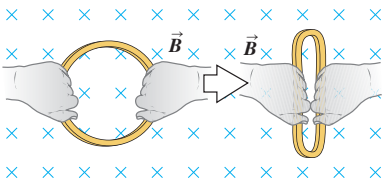
CUIDADO No se puede violar la conservación de la energía Tal vez piense que si se invirtiera la dirección de $\vec{B}$ o de $\vec{v}$ sería posible que la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ estuviera en la *misma* dirección que $\vec{v}$. Éste sería un gran truco. Una vez que la varilla está en movimiento, el flujo magnético cambiante induciría una fem y una corriente, y la fuerza magnética sobre la varilla haría que ésta se moviera aún más rápido, lo que incrementaría la fem y la corriente; esto continuaría así hasta que la varilla alcanzara una rapidez enorme y generara una fuerza eléctrica a una tasa prodigiosa. Si piensa que esto parece demasiado bueno para ser cierto, por no mencionar la violación de la conservación de la energía, tiene razón. Al invertirse $\vec{B}$ también se invierte el signo de la fem inducida y la corriente, y con ello la dirección de $\vec{L}$, por lo que la fuerza magnética aún se opone al movimiento de la varilla; un resultado similar sería verdadero si se invirtiera $\vec{v}$. Este comportamiento es parte de la ley de Lenz, que se estudiará en la sección 29.3.

Los generadores como convertidores de energía

El ejemplo 29.7 demuestra que el generador de conductor corredizo no produce energía eléctrica de la nada; la energía la suministra cualquier cuerpo que ejerza la fuerza para mantener la varilla en movimiento. Todo lo que hace el generador es *convertir* esa energía a una forma diferente. La igualdad entre la tasa con que se suministra energía *mecánica* al generador y la tasa con que se produce energía *eléctrica* se cumple para todos los tipos de generadores. Esto es cierto en particular para el alternador descrito en el ejemplo 29.4. (Se están ignorando los efectos de la fricción en los cojinetes de un alternador o entre la varilla y el conductor en forma de U de un generador de conductor corredizo. Si se incluyeran tales efectos, la conservación de la energía demandaría que la energía perdida por la fricción no estuviera disponible para convertirse en energía eléctrica. En los generadores reales, la fricción se mantiene en el mínimo para que el proceso de conversión de energía sea lo más eficiente posible.)

En el capítulo 27 se dijo que la fuerza magnética sobre cargas en movimiento nunca realiza trabajo. Pero tal vez usted piense que la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ en el ejemplo 29.7 *efectúa* trabajo (negativo) sobre la varilla conductora de corriente conforme ésta se desplaza, lo cual contradice nuestro enunciado anterior. En realidad, el trabajo efectuado por la fuerza magnética es igual a cero. Las cargas en movimiento que constituyen

la corriente en la varilla de la figura 29.12 tienen una componente vertical de velocidad, lo que ocasiona una componente horizontal de fuerza sobre estas cargas. Como resultado, hay un desplazamiento horizontal de la carga dentro de la varilla, el lado izquierdo adquiere una carga neta positiva y el lado derecho una carga neta negativa. El resultado es una componente horizontal del campo eléctrico, perpendicular a la longitud de la varilla (análogo al efecto Hall que se describió en la sección 27.9). Es este campo, en la dirección del movimiento de la varilla, el que realiza trabajo sobre las cargas en movimiento de la varilla y por lo tanto, indirectamente, sobre los átomos que la constituyen.



Bobina circular de alambre — Bobina comprimida en forma de óvalo

Evalúe su comprensión de la sección 29.2 La figura de la izquierda muestra una bobina de alambre que se comprime en un campo magnético uniforme. *a*) Mientras la bobina se comprime, ¿la fem inducida en la bobina i) va en sentido horario, ii) va en sentido antihorario, o iii) es igual a cero? *b*) Una vez que la bobina ha alcanzado su forma final comprimida, ¿la fem inducida en ella i) va en sentido horario, ii) va en sentido antihorario, o iii) es igual a cero?

29.3 Ley de Lenz

La ley de Lenz es un método alternativo conveniente para determinar la dirección de una corriente o fem inducida. La ley de Lenz no es un principio independiente; se puede obtener de la ley de Faraday. Siempre da los mismos resultados que las reglas de los signos que presentamos en relación con la ley de Faraday, pero a menudo es más fácil de usar. La ley de Lenz también ayuda a entender de manera intuitiva los distintos efectos de la inducción y el papel de la conservación de la energía. H. F. E. Lenz (1804-1865) fue un científico ruso que reprodujo de forma independiente muchos de los descubrimientos de Faraday y Henry. La **ley de Lenz** establece lo siguiente:

La dirección de cualquier efecto de la inducción magnética es la que se opone a la causa del efecto.

La "causa" puede ser un flujo cambiante a través de un circuito fijo debido a un campo magnético variable, un flujo que cambia por el movimiento de los conductores que constituyen el circuito, o cualquier combinación de lo anterior. Si el flujo en un circuito fijo cambia, como en los ejemplos 29.1 y 29.2, la corriente inducida establece un campo magnético por sí misma. Dentro del área limitada por el circuito, este campo es *opuesto* al campo original si éste se *incrementa*, pero tiene la *misma* dirección que el campo original si éste *disminuye*. Es decir, la corriente inducida se opone al *cambio en el flujo* a través del circuito (*no* al flujo en sí).

Si el cambio del flujo se debe al movimiento de los conductores, como en los ejemplos 29.3 a 29.7, la dirección de la corriente inducida en el conductor en movimiento es tal que la dirección de la fuerza magnética sobre el conductor es opuesta a la dirección de su movimiento. Así, el movimiento del conductor, que provocó la corriente inducida, encuentra oposición. Esto se vio de manera explícita en el caso del generador de conductor corredizo del ejemplo 29.7. En todos estos casos, la corriente inducida trata de preservar el *statu quo* oponiéndose al movimiento o a un cambio del flujo.

La ley de Lenz también se relaciona directamente con la conservación de la energía. Si la corriente inducida en el ejemplo 29.7 fuera en dirección opuesta a la que indica la ley de Lenz, la fuerza magnética sobre la varilla la aceleraría hacia una rapidez siempre creciente, sin una fuente externa de energía, aun cuando la energía eléctrica se disipara en el circuito. Esto sería una clara violación de la conservación de la energía y no ocurre en la naturaleza.

Ejemplo conceptual 29.8 Otro vistazo al generador de conductor corredizo

En la figura 29.11, la corriente inducida en la espira ocasiona un campo magnético adicional en el área limitada por la espira. La dirección de la corriente inducida es en sentido antihorario. Según el análisis de la sección 28.2, vimos que la dirección del campo magnético adicional ocasionado por esta corriente está *afuera* del plano de la figura. Su dirección es opuesta a la del campo magnético original, por lo que tiende a cancelar el efecto de éste. Esto es congruente con la predicción de la ley de Lenz.

Ejemplo conceptual 29.9 Cómo determinar la dirección de la corriente inducida

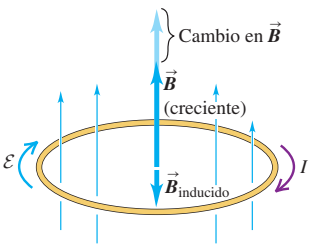
En la figura 29.13 hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a través de la bobina. La magnitud del campo va en aumento y la fem inducida resultante ocasiona una corriente inducida. Con base en la ley de Lenz, determine la dirección de la corriente inducida.

SOLUCIÓN

Esta situación es la misma que la del ejemplo 29.1 (sección 29.2). Según la ley de Lenz, la corriente inducida debe producir un campo magnético $\vec{B}_{\text{inducido}}$ dentro de la bobina cuya dirección es hacia abajo, en oposición al cambio en el flujo. Con la regla de la mano derecha descrita en la sección 28.5 para la dirección del campo magnético producido por una espira circular, $\vec{B}_{\text{inducido}}$ tendrá la dirección deseada si la corriente inducida fluye como se indica en la figura 29.13.

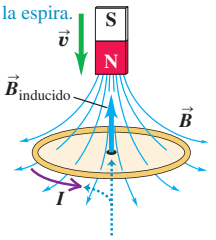
La figura 29.14 muestra varias aplicaciones de la ley de Lenz a la situación similar de un imán que se mueve cerca de una espira conductora. En cada uno de los cuatro casos que se ilustran, la corriente inducida produce un campo magnético por sí misma, en una dirección que se opone al cambio del flujo a través de la espira debido al movimiento del imán.

29.13 La corriente inducida debida al cambio en $\vec{B}$ fluye en sentido horario, vista desde arriba de la espira. El campo adicional $\vec{B}_{\text{inducido}}$ originado por esta corriente es hacia abajo, en oposición al cambio en el campo $\vec{B}$ hacia arriba.



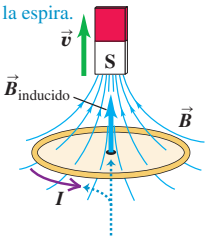
29.14 Direcciones de las corrientes inducidas conforme el imán se mueve a lo largo del eje de una espira conductora. Si el imán de barra está fijo, no hay corriente inducida.

a) El movimiento del imán ocasiona un flujo *creciente hacia abajo* a través de la espira.

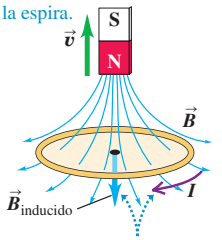


El campo magnético inducido es *hacia arriba* para oponerse al cambio del flujo. Para producir el campo inducido, la corriente inducida debe ir *en sentido antihorario*, vista desde arriba de la espira.

b) El movimiento del imán ocasiona un flujo *decreciente hacia arriba* a través de la espira.

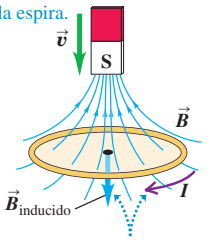


c) El movimiento del imán produce un flujo *decreciente hacia abajo* a través de la espira.



El campo magnético inducido es *hacia abajo* para oponerse al cambio del flujo. Para producir este campo inducido, la corriente inducida debe ir *en sentido horario*, vista desde arriba de la espira.

d) El movimiento del imán ocasiona un flujo *creciente hacia arriba* a través de la espira.



Ley de Lenz y respuesta a los cambios de flujo

Como una corriente inducida siempre se opone a cualquier cambio en el flujo magnético a través de un circuito, ¿cómo es posible entonces que el flujo cambie? La respuesta es que la ley de Lenz sólo da la *dirección* de una corriente inducida; la *magnitud* de la corriente depende de la resistencia del circuito. Cuanto mayor es la resistencia del circuito, menor es la corriente inducida que parece oponerse a cualquier cambio en el flujo y más fácil es que tenga lugar el cambio de flujo. Si la espira de la figura 29.14 estuviera hecha de madera (un aislante), casi no habría corriente inducida en respuesta a los cambios en el flujo a través de la espira.

A la inversa, cuanto menor es la resistencia del circuito, mayor es la corriente inducida y más difícil es el cambio del flujo a través del circuito. Si la espira en la figura 29.14 es un buen conductor, una corriente inducida fluye en tanto que el imán se mueva en relación con la espira. Una vez que el imán y la espira ya no estén en movimiento relativo, la corriente inducida cae a cero con mucha rapidez debido a la resistencia distinta de cero en la espira.

El caso extremo ocurre cuando la resistencia del circuito es igual a *cero*. Entonces, la corriente inducida en la figura 29.14 continuará fluyendo aun después de que la fem inducida haya desaparecido, es decir, después de que el imán haya cesado su movimiento en relación con la espira. Gracias a esta *corriente persistente*, se observa que el flujo a través de la espira es exactamente el mismo que había antes de que el imán comenzara a moverse, por lo que el flujo a través de la espira de resistencia nula *nunca* cambia. Ciertos materiales especiales llamados *superconductores* en realidad tienen una resistencia nula; los estudiaremos en la sección 29.8.

Evalúe su comprensión de la sección 29.3 *a*) Suponga que el imán de la figura 29.14a estuviera fijo y que la espira de alambre se moviera hacia arriba. ¿La corriente inducida en la espira i) tendría el mismo sentido que el que se ilustra en la figura 29.14a, ii) tendría el sentido opuesto al que se muestra en la figura 29.14a, o iii) sería cero? *b*) Suponga que tanto el imán como la espira de alambre en la figura 29.14a se movieran hacia abajo a la misma velocidad. La corriente inducida en la espira, i) ¿tendría el mismo sentido que el que se ilustra en la figura 29.14a, ii) tendría sentido opuesto al que se observa en la figura 29.14a, o iii) sería cero?

29.4 Fuerza electromotriz de movimiento

Hemos visto varias situaciones en las que un conductor se mueve en un campo magnético, como en los generadores que se analizaron en los ejemplos 29.4 a 29.7. Podemos tener una perspectiva más amplia sobre el origen de la fem inducida en estas situaciones si se consideran las fuerzas magnéticas sobre las cargas móviles en el conductor. La figura 29.15a muestra la misma varilla móvil que se analizó en el ejemplo 29.6, separada, por el momento, del conductor en forma de U. El campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y dirigido hacia la página, y movemos la varilla hacia la derecha a velocidad constante $\vec{v}$. Entonces, una partícula cargada q en la varilla experimenta una fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ con magnitud $F = |q|vB$. En el análisis que sigue supondremos que q es positiva; en ese caso, el sentido de esta fuerza es hacia arriba a lo largo de la varilla, de b hacia a.

Esta fuerza magnética hace que las cargas libres en la varilla se muevan, lo que crea un exceso de carga positiva en el extremo superior a y de carga negativa en el extremo inferior b. Esto, a la vez, crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior de la varilla, en el sentido que va de a hacia b (opuesto al campo magnético). La carga continúa acumulándose en los extremos de la varilla hasta que $\vec{E}$ se hace suficientemente grande para que la fuerza eléctrica hacia abajo (con magnitud qE) cancele exactamente la fuerza magnética *hacia arriba* (con magnitud qvB). De esta forma, $qE = qvB$, y las cargas están en equilibrio.

La magnitud de la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ es igual a la magnitud del campo eléctrico E multiplicada por la longitud L de la varilla. De acuerdo con el análisis anterior, $E = vB$, por lo que

$$V_{ab} = EL = vBL \tag{29.5}$$

con el punto a en un potencial mayor que el b.

Ahora suponga que la varilla móvil se desliza a lo largo del conductor fijo en forma de U y forma un circuito completo (figura 29.15b). Ninguna fuerza *magnética* actúa sobre las cargas en el conductor fijo en forma de U, pero la carga que estaba cerca de los puntos a y b se redistribuye a lo largo del conductor fijo, y crea un campo *eléctrico* dentro de este último. Este campo establece una corriente en el sentido que se indica. La varilla móvil se ha vuelto una fuente de fuerza electromotriz; dentro de ella, la carga se mueve del potencial más bajo al más alto, y en lo que resta del circuito se mueve del potencial mayor al menor. Esta fem se denomina **fuerza electromotriz de movimiento**, y se denota con $\mathcal{E}$. Del análisis anterior, la magnitud de esta fem es

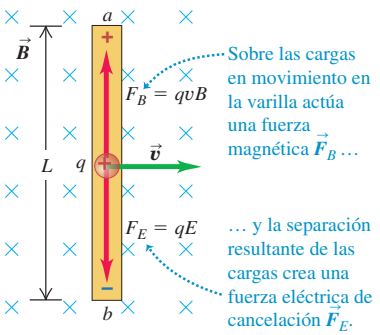
$$\mathcal{E} = vBL \qquad \text{(fem de movimiento; longitud y velocidad perpendiculares a } \vec{B} \text{ uniforme)} \tag{29.6}$$

correspondiente a una fuerza por unidad de carga de magnitud vB que actúa en una distancia L a lo largo de la varilla móvil. Si R es la resistencia total del circuito del conductor en forma de U y la varilla corrediza, la corriente inducida I en el circuito está dada por $vBL = IR$. Éste es el mismo resultado que se obtuvo en la sección 29.2 empleando la ley de Faraday, por lo que la fem de movimiento es un caso particular de la ley de Faraday, uno de los varios ejemplos descritos en la sección 29.2.

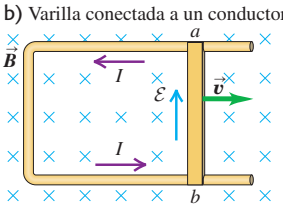
La fem asociada con la varilla móvil en la figura 29.15 es análoga a la de una batería con su terminal positiva en a y negativa en b, aunque los orígenes de las dos fem son muy diferentes. En cada caso, una fuerza electrostática actúa sobre las cargas en el dispositivo, en el sentido de b hacia a, y la fem es el trabajo por unidad de carga realizado por esta fuerza cuando una carga se mueve de b a a en el dispositivo. Cuando éste se

29.15 Una varilla conductora que se mueve en un campo magnético uniforme. a) La varilla, la velocidad y el campo son mutuamente perpendiculares. b) Sentido de la corriente inducida en el circuito.

a) Varilla aislada en movimiento



b) Varilla conectada a un conductor fijo



La fem $\mathcal{E}$ en la varilla móvil crea un campo eléctrico en el conductor fijo.

halla conectado a un circuito externo, la dirección de la corriente es de b a a en el dispositivo, y de a a b en el circuito externo. Aunque hemos estudiado la fem de movimiento en términos de un circuito cerrado como el de la figura 29.15b, una fem de movimiento también se presenta en la varilla móvil aislada de la figura 29.15a, de la misma forma en que una batería tiene una fem aun cuando no forma parte de un circuito.

El sentido de la fem inducida en la figura 29.15 se deduce mediante la ley de Lenz, aun si el conductor no forma un circuito completo (como en la figura 29.15a). En este caso podemos completar el circuito mentalmente entre los extremos del conductor y aplicar la ley de Lenz para determinar el sentido de la corriente. De esto se deduce la polaridad de los extremos del conductor en circuito abierto. El sentido del extremo negativo $(-)$ al extremo positivo $(+)$ dentro del conductor es el que tendría la corriente si el circuito estuviera completo.

El lector debe verificar que si v se expresa en metros por segundo, B en teslas y L en metros, entonces $\mathcal{E}$ está en volts. (Recuerde que 1 V = 1 J/C.)

Fem de movimiento: Forma general

Podemos generalizar el concepto de fem de movimiento para un conductor de *cualquier* forma que se mueva en un campo magnético, uniforme o no (suponiendo que el campo magnético en cada punto no varía con el tiempo). Para un elemento $d\vec{l}$ del conductor, la contribución $d\mathcal{E}$ a la fem es la magnitud dl multiplicada por la componente de $\vec{v} \times \vec{B}$ (la fuerza magnética por unidad de carga) paralela a $d\vec{l}$; es decir,

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Para cualquier espira conductora cerrada, la fem total es

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \text{(fem de movimiento: espira conductora cerrada)} \qquad (29.7)$$

Esta expresión parece muy diferente de nuestro enunciado original de la ley de Faraday, ecuación (29.3), según la cual $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$. No obstante, las dos formas son equivalentes. Se puede demostrar que la tasa de cambio del flujo magnético a través de una espira conductora en movimiento siempre está dada por el negativo de la expresión en la ecuación (29.7). Así, esta ecuación representa una formulación alternativa de la ley de Faraday, que con frecuencia es más conveniente que la forma original para resolver problemas con conductores *móviles*. Pero cuando se tienen conductores *fijos* en campos magnéticos cambiantes, *no es posible* utilizar la ecuación (29.7); en tal caso, la expresión $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ es la única forma correcta de expresar la ley de Faraday.

Ejemplo 29.10 Cálculo de la fem de movimiento

Suponga que la varilla móvil de la figura 29.15b mide 0.10 m de longitud, su velocidad v es de 2.5 m/s, la resistencia total de la espira es de 0.030 Ω, y B es de 0.60 T. Calcule $\mathcal{E}$, la corriente inducida y la fuerza que actúa sobre la varilla.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La primera incógnita es la fem de *movimiento* $\mathcal{E}$ debida al desplazamiento de la varilla. La corriente se puede determinar a partir de los valores de $\mathcal{E}$ y la resistencia R. La fuerza sobre la varilla en realidad es la fuerza magnética ejercida por $\vec{B}$ sobre la corriente en la varilla.

PLANTEAR: Usaremos la expresión para la fem de movimiento desarrollada en esta sección, la conocida relación $\mathcal{E} = IR$, y la fórmula $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ para la fuerza magnética sobre una varilla conductora de corriente de longitud $L = 0.10$ m.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (29.6), la fem es

$$\mathcal{E} = vBL = (2.5 \text{ m/s})(0.60 \text{ T})(0.10 \text{ m}) = 0.15 \text{ V}$$

La corriente inducida resultante en la espira es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0.15 \text{ V}}{0.030 \ \Omega} = 5.0 \text{ A}$$

La fuerza magnética sobre la varilla que conduce esta corriente es directamente *opuesta* al movimiento de la varilla. Esto se puede constatar aplicando la regla de la mano derecha para productos vectoriales a la fórmula $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. El vector $\vec{L}$ apunta de b a a en la figura 29.15, en el mismo sentido que la corriente inducida en la varilla. Como $\vec{L}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, esta fuerza tiene la magnitud

$$F = ILB = (5.0 \text{ A})(0.10 \text{ m})(0.60 \text{ T}) = 0.30 \text{ N}$$

EVALUAR: La respuesta sobre la dirección de $\vec{F}$ se comprueba por medio de la ley de Lenz. Si tomamos el vector de área $\vec{A}$ de manera que apunte hacia el plano de la espira, el flujo magnético es positivo y creciente conforme la varilla se mueve hacia la derecha y aumenta el área de la espira. La ley de Lenz nos dice que una fuerza parece oponerse a este incremento en el flujo. De esta forma, la fuerza sobre la varilla es hacia la izquierda, opuesta a su movimiento.

Ejemplo 29.11 La dinamo de disco de Faraday

Un disco conductor con radio R (figura 29.16) está en el plano xy y gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. El disco está en un campo $\vec{B}$ constante, uniforme, paralelo al eje z. Calcule la fem inducida entre el centro y el borde del disco.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Está presente una fem de movimiento porque el disco conductor se mueve con respecto al campo $\vec{B}$. La complicación es que distintas partes del disco se mueven con diferente rapidez v dependiendo de su distancia al eje de rotación. Trataremos esto considerando pequeños segmentos del disco y sumando (integrando, en realidad) sus contribuciones para determinar la variable buscada, la fem entre el centro y el borde.

PLANTEAR: Considere el pequeño segmento del disco marcado por su vector de velocidad $\vec{v}$. La fuerza magnética por unidad de carga sobre este segmento es $\vec{v} \times \vec{B}$, que apunta radialmente hacia fuera desde el centro del disco. Entonces, la fem inducida tiende a hacer que fluya una corriente radialmente hacia fuera, lo que nos dice que la trayectoria de conducción en movimiento en la cual debemos pensar en este caso es una línea recta que va del centro al borde. La fem de cada pequeño segmento del disco a lo largo de esta línea se encuentra con la expresión $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$, que se integra para hallar la fem total.

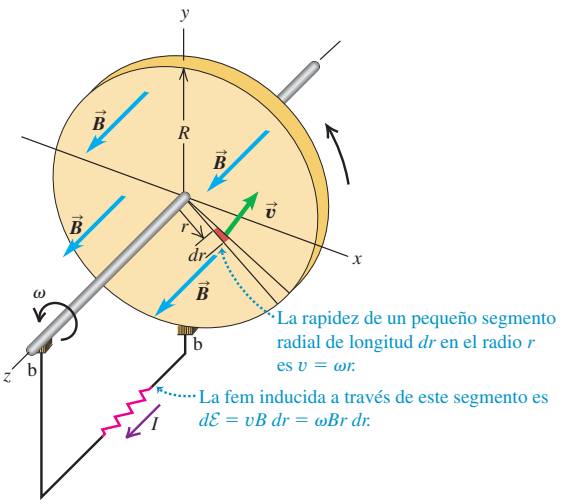
CUIDADO **Rapidez en un disco giratorio** Tal vez se sienta tentado a usar la ecuación (29.5) y simplemente multiplicar vB por la longitud de la trayectoria de conducción en movimiento, que es el radio R. Eso no sería correcto porque v tiene diferentes valores en distintos puntos a lo largo de la trayectoria. ▮

EJECUTAR: Consideremos la fem de movimiento $d\mathcal{E}$ debida a un pequeño segmento radial a una distancia r del eje de rotación. El vector de longitud asociado $d\vec{l}$ (de longitud dr) apunta radialmente hacia fuera, en la misma dirección que $\vec{v} \times \vec{B}$. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares y la magnitud de $\vec{v}$ es $v = \omega r$. Por lo tanto, la fem total entre el centro y el borde es la suma de todas esas contribuciones:

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega B r \, dr = \frac{1}{2}\omega B R^2$$

EVALUAR: Este dispositivo puede usarse como fuente de fem en un circuito completando el circuito por medio de escobillas fijas (b, en la figura) que hagan contacto con el disco y su eje de conducción, como se indica. Faraday estudió la fem en esta clase de disco, por lo que recibe el nombre de *dinamo de disco de Faraday* o *generador homopolar*. A diferencia del alternador del ejemplo 29.4, la dinamo de disco de Faraday es un generador de corriente directa; produce una fem constante en el tiempo. ¿Puede demostrar, con base en la ley de Lenz, que con el sentido de rotación en la figura 29.16, la corriente en el circuito externo debe fluir en el sentido que se indica?

29.16 Un disco conductor de radio R que gira con rapidez angular ω en un campo magnético $\vec{B}$. La fem es inducida a lo largo de líneas radiales del disco y se aplica a un circuito externo a través de dos contactos corredizos identificados como b.



Evalúe su comprensión de la sección 29.4 El campo magnético de la Tierra apunta hacia el norte (magnético). Por sencillez, suponga que el campo no tiene componente vertical (como es el caso cerca del ecuador). *a*) Si usted sostiene una varilla metálica en sus manos y camina hacia el este, ¿cómo debe orientar la varilla para obtener la fem de movimiento máxima entre sus extremos? i) este-oeste; ii) norte-sur; iii) arriba-abajo; iv) se obtiene la misma fem con todas estas orientaciones. *b*) ¿Cómo debe sostener la varilla para lograr una fem igual a *cero* conforme camina hacia el este? i) este-oeste; ii) norte-sur; iii) arriba-abajo; iv) ninguna de las anteriores. *c*) ¿En qué dirección debe viajar para que la fem de movimiento a través de la varilla sea igual a cero sin importar hacia dónde esté orientada? i) oeste; ii) norte; iii) sur; iv) hacia arriba; v) hacia abajo.

29.5 Campos eléctricos inducidos

Cuando un conductor se mueve en un campo magnético, la fem inducida se entiende en términos de fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas del conductor, como se describió en la sección 29.4. Pero una fem inducida también se presenta cuando hay un flujo cambiante a través de un conductor fijo. En este tipo de situación, ¿qué es lo que empuja las cargas alrededor del circuito?

Como ejemplo, consideremos la situación que se ilustra en la figura 29.17. Un solenoide largo y delgado, con área de sección transversal A y n espiras por unidad de longitud, está rodeado en su centro por una espira conductora circular. El galvanómetro G mide la corriente en la espira. Una corriente I en el devanado del solenoide establece un campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de su eje, como se indica, con magnitud B según se calcula en el ejemplo 28.9 (sección 28.7): $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud. Si se ignora el pequeño campo fuera del solenoide y suponemos que el vector de área $\vec{A}$ apunta en la misma dirección que $\vec{B}$, entonces el flujo magnético Φ_B a través de la espira es

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

Cuando la corriente I en el solenoide cambia con el tiempo, el flujo magnético Φ_B también cambia y, de acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida en la espira está dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt} \tag{29.8}$$

Si la resistencia total de la espira es R, la corriente inducida en la espira, que llamaremos I', es $I' = \mathcal{E}/R$.

Pero, ¿qué *fuerza* hace que las cargas se muevan alrededor de la espira? No puede ser una fuerza magnética porque el conductor no se está moviendo en un campo magnético, y en realidad ni siquiera está *en* un campo magnético. Nos vemos obligados a concluir que tiene que haber un **campo eléctrico inducido** en el conductor *causado por el flujo magnético cambiante*. Esto puede sonar un poco discordante; estamos acostumbrados a pensar en un campo eléctrico como algo causado por cargas eléctricas, y ahora se nos dice que un campo magnético cambiante actúa de algún modo como fuente de campo eléctrico. Además, es un campo eléctrico un tanto extraño. Cuando una carga q completa una vuelta alrededor de la espira, el trabajo total realizado sobre ella por el campo eléctrico debe ser igual al producto de q por la fem $\mathcal{E}$. Es decir, el campo eléctrico en la espira *no es conservativo*, en el sentido en que se usó este término en el capítulo 23, porque la integral de línea de $\vec{E}$ alrededor de una trayectoria cerrada no es igual a cero. En vez de ello, esta integral de línea, que representa el trabajo realizado por el campo inducido $\vec{E}$ por unidad de carga, es igual a la fem inducida $\mathcal{E}$:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \tag{29.9}$$

De acuerdo con la ley de Faraday, la fem $\mathcal{E}$ también es el negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de la espira. Así, para este caso, la ley de Faraday se puede plantear como

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(trayectoria de integración constante)} \tag{29.10}$$

Observe que la ley de Faraday siempre se cumple en la forma $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$; la forma dada en la ecuación (29.10) *sólo* es válida si la trayectoria alrededor de la cual se integra es *constante*.

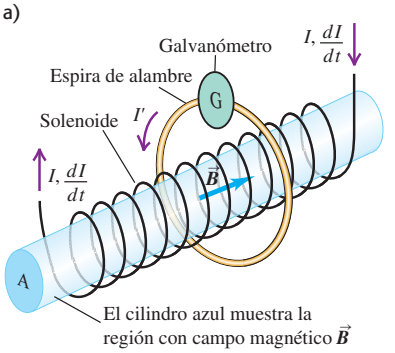
Como ejemplo de situación en la que puede aplicarse la ecuación (29.10), considere la espira circular fija de la figura 29.17b, de radio r. En virtud de la simetría cilíndrica, el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene la misma magnitud en todos los puntos del círculo y es tangente a éste en cada uno de ellos. (La simetría también permitiría que el campo fuera *radial*, pero entonces la ley de Gauss requeriría la presencia de una carga neta dentro del círculo, y no hay ninguna.) La integral de línea de la ecuación (29.10) se vuelve tan sólo la magnitud E multiplicada por la circunferencia $2\pi r$ de la espira, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 2\pi rE$, y la ecuación (29.10) da

$$E = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \tag{29.11}$$

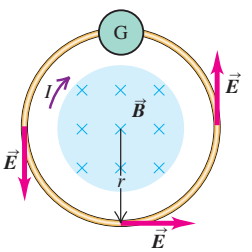
Las direcciones de $\vec{E}$ en los puntos de la espira se indican en la figura 29.17b. Sabemos que $\vec{E}$ debe tener la dirección indicada cuando $\vec{B}$ en el solenoide está aumentando,

29.17 a) El devanado de un solenoide largo lleva una corriente que se incrementa a una tasa dI/dt. El flujo magnético en el solenoide aumenta a una tasa $d\Phi_B/dt$, y este flujo cambiante pasa a través de una espira de alambre. En la espira se induce una fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, la cual induce una corriente I' que se mide con el galvanómetro G. b) Vista transversal.

a)



b)



debido a que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ tiene que ser negativo cuando $d\Phi_B/dt$ es positivo. El mismo enfoque se usa para encontrar el campo eléctrico inducido *dentro* del solenoide cuando el campo $\vec{B}$ del solenoide está cambiando; los detalles se dejan para el lector (véase el ejercicio 29.29).

Campos eléctricos no electrostáticos

Hagamos el resumen de lo que hemos aprendido. La ley de Faraday, ecuación (29.3), es válida para dos situaciones muy diferentes. En una, la fem es inducida por fuerzas magnéticas sobre cargas cuando un conductor se mueve a través de un campo magnético. En la otra, un campo magnético que varía con el tiempo induce un campo eléctrico en un conductor fijo y con ello induce una fem; de hecho, el campo $\vec{E}$ es inducido aun cuando ningún conductor esté presente. Este campo $\vec{E}$ difiere de un campo eletro*stático* en un aspecto importante. Es *no conservativo*; la integral de línea $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ alrededor de una trayectoria cerrada es diferente de cero, y cuando una carga se mueve alrededor de una trayectoria cerrada, el campo realiza sobre ella una cantidad de trabajo distinta de cero. De ello se deduce que para un campo como ése el concepto de *potencial* carece de significado. Un campo de esa clase recibe el nombre de **campo no electrostático**. En contraste, un campo electro*stático siempre* es conservativo, como se vio en la sección 23.1, y siempre tiene asociada una función de potencial. A pesar de esta diferencia, el efecto fundamental de *cualquier* campo es ejercer una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga q. Esta relación es válida tanto si $\vec{E}$ es un campo conservativo producido por una distribución de carga, como si es un campo no conservativo ocasionado por un flujo magnético cambiante.

De manera que un campo magnético actúa como fuente de campo eléctrico de una clase que *no podemos* producir con ninguna distribución de carga estática. Esto tal vez parezca extraño, pero es la forma en que se comporta la naturaleza. Es más, en la sección 29.7 veremos que un campo *eléctrico* cambiante actúa como fuente de campo *magnético*. Exploraremos con mucho detalle esta simetría entre los dos campos cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32.

Por si aún quedara alguna duda sobre la realidad de los campos eléctricos inducidos magnéticamente, considere algunas de las muchas aplicaciones prácticas (figura 29.18). En la cabeza reproductora de una grabadora de cinta, se inducen corrientes en una bobina fija conforme las distintas regiones magnetizadas de la cinta pasan por ella. Las unidades de disco de computadora funcionan con el mismo principio. Las pastillas de las guitarras eléctricas usan corrientes inducidas por la vibración de cuerdas ferromagnéticas cercanas. Los alternadores de la mayoría de automóviles usan imanes giratorios para inducir corrientes en bobinas fijas. Y la lista continúa; nos demos cuenta o no, los campos eléctricos inducidos magnéticamente desempeñan un papel importante en la vida cotidiana.

29.18 Aplicaciones de campos eléctricos inducidos. a) Los datos se almacenan en el disco duro de una computadora, en un patrón de áreas magnetizadas sobre su superficie. Para leer estos datos, se coloca una bobina sobre un brazo móvil cerca del disco giratorio. La bobina experimenta un flujo magnético cambiante, lo que induce una corriente cuyas características dependen del patrón codificado en el disco. b) Este automóvil híbrido tiene un motor de gasolina y un motor eléctrico. Cuando el vehículo se detiene, las ruedas giratorias impulsan en reversa el motor para que actúe como generador. La corriente inducida resultante se utiliza para recargar las baterías del vehículo. c) El cigüeñal en rotación de un avión con motor de pistones hace girar un imán, lo que induce una fem en una bobina adyacente y genera la chispa que enciende el combustible en los cilindros del motor. Esto mantiene en marcha al motor incluso en el caso de que llegaran a fallar otros sistemas eléctricos de la aeronave.

Ejemplo 29.12 Campos eléctricos inducidos

Suponga que el solenoide largo de la figura 29.17a tiene 500 espiras por metro, y que la corriente en éstas crece a razón de 100 A/s. El área de la sección transversal del solenoide es de 4.00 $cm^2 = 4.0 \times 10^{-4}$ m^2. *a*) Encuentre la magnitud de la fem inducida en la espira de alambre afuera del solenoide. *b*) Calcule la magnitud del campo eléctrico inducido dentro de la espira si su radio es de 2.0 cm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como se aprecia en la figura 29.17b, el campo magnético creciente en el interior del solenoide provoca un cambio en el flujo magnético a través de la espira de alambre e induce así un campo eléctrico $\vec{E}$ alrededor de la espira. Las incógnitas son la fem inducida $\mathcal{E}$ y la magnitud de $\vec{E}$.

PLANTEAR: Utilizamos la ecuación (29.8) para calcular la fem. La determinación de la magnitud del campo E se simplifica porque la espira y el solenoide comparten el mismo eje central. Entonces, por simetría, el campo eléctrico es tangente a la espira y tiene la misma magnitud en toda su circunferencia. Esto hace que sea fácil encontrar E a partir de la fem $\mathcal{E}$ empleando la ecuación (29.9).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (29.8), la fem inducida es

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt}\\ &= -(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(500\ \text{espiras/m})\\ &\quad \times (4.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(100\ \text{A/s})\\ &= -25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/s} = -25 \times 10^{-6}\ \text{V} = -25\ \mu\text{V}\end{aligned}$$

b) Por simetría, la integral de línea $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}$ tiene valor absoluto de $2\pi rE$ (sin tener en cuenta el sentido en que se integra alrededor de la espira). Esto es igual al valor absoluto de la fem, por lo que

$$E = \frac{|\mathcal{E}|}{2\pi r} = \frac{25 \times 10^{-6}\ \text{V}}{2\pi(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})} = 2.0 \times 10^{-4}\ \text{V/m}$$

EVALUAR: En la figura 29.17b, el flujo magnético *hacia* el plano de la figura va en aumento. De acuerdo con la regla de la mano derecha para la fem inducida (se ilustra en la figura 29.6), una fem positiva iría en el sentido horario alrededor de la espira; el signo negativo de $\mathcal{E}$ indica que la fem va en sentido antihorario. ¿Puede demostrar esto también con base en la ley de Lenz?

Evalúe su comprensión de la sección 29.5 Si usted balancea un imán hacia delante y atrás en su mano, ¿está generando un campo eléctrico? Si es así, ¿el campo es conservativo?

*29.6 Corrientes parásitas

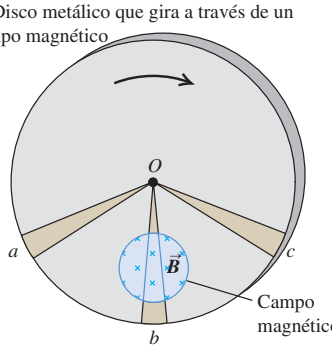
En los ejemplos de efectos de la inducción que hemos estudiado, las corrientes inducidas han estado confinadas a trayectorias bien definidas en conductores y otros componentes que forman un circuito. Sin embargo, muchos aparatos eléctricos contienen masas de metal que se mueven en campos magnéticos, o están situados en campos magnéticos cambiantes. En situaciones como éstas hay corrientes inducidas que circulan por todo el volumen del material. Sus patrones de flujo recuerdan los remolinos en un río y reciben el nombre de **corrientes parásitas**.

Como ejemplo, considere un disco metálico que gira en un campo magnético perpendicular al plano del disco, pero confinado a una porción limitada del área del disco, como se ilustra en la figura 29.19a. El sector *Ob* se desplaza a través del campo y tiene una fem inducida en él. Los sectores *Oa* y *Oc* no están en el campo, pero constituyen trayectorias de retorno para que las cargas desplazadas a lo largo de *Ob* regresen de *b* a *O*. El resultado es una circulación de corrientes parásitas en el disco, en forma parecida a la que se ilustra en la figura 29.19b.

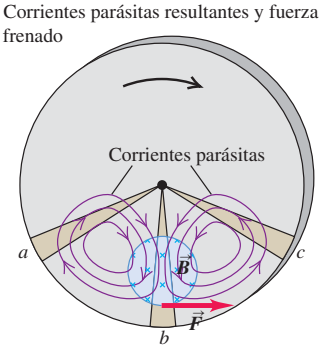
La ley de Lenz nos ayuda a decidir cuál es el sentido de la corriente inducida en las inmediaciones del sector *Ob*. Esta corriente debe experimentar una fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que se *opone* a la rotación del disco, por lo que esta fuerza debe ir hacia la derecha en la figura 29.19b. Como $\vec{B}$ está dirigida hacia el plano del disco, la corriente y, en consecuencia, $\vec{L}$ tienen componentes hacia abajo. Las corrientes de retorno quedan fuera del campo, por lo que no experimentan fuerzas magnéticas. La interacción entre las corrientes parásitas y el campo ocasionan una acción de frenado sobre el disco. Tales efectos se pueden utilizar para detener con rapidez la rotación

29.19 Corrientes parásitas inducidas en un disco metálico giratorio.

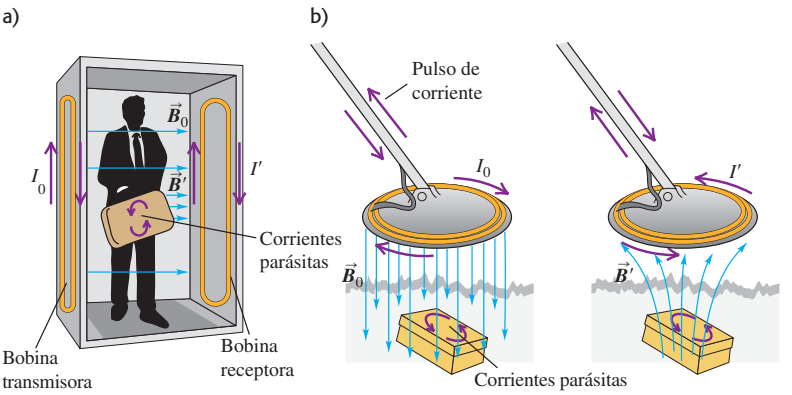
a) Disco metálico que gira a través de un campo magnético



b) Corrientes parásitas resultantes y fuerza de frenado



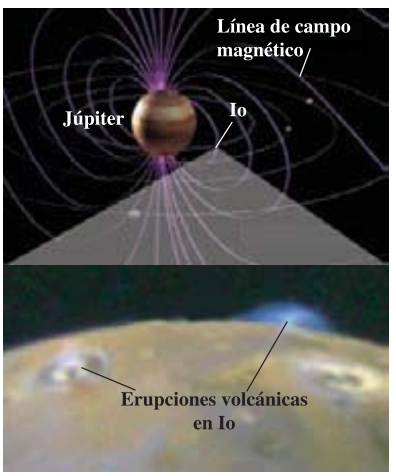
29.20 a) Un detector de metales en un punto de revisión en un aeropuerto genera un campo magnético alternante $\vec{B}_0$. Esto induce corrientes parásitas en un objeto conductor que pase por el detector. A la vez, las corrientes parásitas producen un campo magnético alternante, $\vec{B}'$, el cual induce una corriente en la bobina receptora del detector. b) Los detectores de metal portátiles funcionan con el mismo principio.



de una sierra circular cuando se interrumpe el suministro de energía eléctrica. Algunas balanzas muy sensibles emplean este efecto para amortiguar vibraciones. En ciertos vehículos para tránsito veloz impulsados con electricidad, se usan corrientes parásitas para frenar. En los vagones hay electroimanes que inducen corrientes parásitas en los rieles; los campos magnéticos resultantes originan fuerzas de frenado que actúan sobre los electroimanes y, por lo tanto, sobre los vagones.

Las corrientes parásitas tienen muchos usos prácticos más. El disco metálico brillante que tiene en su interior el medidor de la compañía de electricidad colocado afuera de su casa gira como resultado de las corrientes parásitas. Estas corrientes son inducidas en el disco por campos magnéticos causados por corrientes que varían en forma sinusoidal en una bobina. En los hornos de inducción se utilizan corrientes parásitas para calentar materiales en contenedores herméticamente sellados en procedimientos en los cuales es esencial evitar incluso la mínima contaminación de los materiales. Los detectores de metal que se emplean en los puntos de revisión de los aeropuertos (figura 29.20a) detectan corrientes parásitas inducidas en los objetos metálicos. Dispositivos similares (figura 29.20b) se utilizan para encontrar tesoros enterrados, al detectar tapas de botellas y monedas perdidas.

29.21 Cuando la luna Io de Júpiter recorre su órbita, el poderoso campo magnético del planeta induce corrientes parásitas en el interior del satélite. El acercamiento de la imagen inferior muestra dos erupciones volcánicas simultáneas en Io, ocasionadas en parte por el calentamiento producido por las corrientes parásitas.



Un ejemplo notable de las corrientes parásitas en acción tiene lugar en una de las lunas de Júpiter, llamada Io, que es un poco más grande que la luna de la Tierra (figura 29.21a). Io se mueve rápidamente a través del intenso campo magnético de Júpiter, lo que genera fuertes corrientes parásitas en el interior de Io. Estas corrientes disipan energía a una tasa de 10^{12} W, ¡equivalente a detonar cada cuatro segundos una bomba nuclear de un kilotón dentro de Io! Esta energía disipada ayuda a conservar caliente el interior de Io y contribuye a que haya erupciones volcánicas en su superficie, como las que se aprecian en la figura 29.12b. (Los efectos gravitacionales de Júpiter provocan aún mayor calentamiento.)

Las corrientes parásitas también tienen efectos indeseables. En un transformador de corriente alterna, las bobinas enrolladas alrededor de un núcleo de hierro conducen corriente que varía en forma sinusoidal. Las corrientes parásitas resultantes en el núcleo desperdician energía por calentamiento I^2R y establecen por sí mismas una fem opuesta indeseable en las bobinas. Para minimizar estos efectos, se diseña el núcleo de manera que las trayectorias de las corrientes parásitas sean tan angostas como sea posible. En la sección 31.6 describiremos el modo de hacer esto, cuando estudiemos con detalle los transformadores.

Evalúe su comprensión de la sección 29.6 Suponga que el campo magnético en la figura 29.19 estuviera dirigido hacia fuera del plano de la figura y que el disco girara en sentido antihorario. En comparación con el sentido de la fuerza $\vec{F}$ y de las corrientes parásitas que se muestran en la figura 29.19b, ¿cuáles serían los nuevos sentidos? i) La fuerza $\vec{F}$ y las corrientes parásitas tendrían el mismo sentido; ii) la fuerza $\vec{F}$ tendría el mismo sentido, pero las corrientes parásitas estarían en el sentido opuesto; iii) la fuerza $\vec{F}$ tendría sentido opuesto, pero las corrientes parásitas tendrían el mismo sentido; iv) la fuerza $\vec{F}$ y las corrientes parásitas irían en sentidos opuestos.

29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell

Hemos visto que un campo magnético que varía de lugar a un campo eléctrico inducido. Uno de los ejemplos más notables de la simetría de la naturaleza es que un campo *eléctrico* variable da origen a un campo *magnético*. Este efecto tiene una enorme importancia, ya que explica la existencia de las ondas de radio, los rayos gamma y la luz visible, así como de todas las demás formas de ondas electromagnéticas.

Generalización de la ley de Ampère

Para ver el origen de la relación entre los campos eléctricos variables y los campos magnéticos, volvamos a la ley de Ampère, tal como se expresó en la sección 28.6, ecuación (28.20):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

El problema con la ley de Ampère expresada en esta forma es que está *incompleta*. Para ver por qué, consideremos el proceso de cargar un capacitor (figura 29.22). Alambres conductores llevan corriente i_C hacia una placa y fuera de la otra; la carga Q se incrementa, y el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas aumenta. La notación i_C indica corriente de *conducción* para diferenciarla de otra clase de corriente que vamos a encontrar y que se llama corriente de *desplazamiento*, i_D. Se usan minúsculas para i y v para denotar valores instantáneos de corrientes y diferencias de potencial, respectivamente, que pueden variar con el tiempo.

Apliquemos la ley de Ampère a la trayectoria circular que se muestra. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de esta trayectoria es igual a $\mu_0 I_{\text{enc}}$. Para el área circular plana limitada por el círculo, I_{enc} es tan sólo la corriente i_C en el conductor de la izquierda. Pero la superficie que se abomba hacia la derecha está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es igual a cero. Por lo tanto, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a $\mu_0 i_C$, y ¡al mismo tiempo es igual a cero! Ésta es una contradicción evidente.

Pero algo más ocurre en la superficie abombada. A medida que el capacitor se carga, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el *flujo* eléctrico Φ_E a través de la superficie aumentan. Sus tasas de cambio se pueden determinar en términos de la carga y la corriente. La carga instantánea es $q = Cv$, donde C es la capacitancia y v es la diferencia de potencial instantánea. Para un capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de las placas y d es la separación. La diferencia de potencial v entre las placas es $v = Ed$, donde E es la magnitud del campo eléctrico entre las placas. (Se ignora el efecto de borde y se supone que $\vec{E}$ es uniforme en la región comprendida entre las placas.) Si esta región se llena con un material con permitividad ϵ, se remplaza ϵ_0 por ϵ en todo lugar; en el análisis que sigue se empleará ϵ.

Al sustituir estas expresiones para C y v en $q = Cv$, la carga en el capacitor, q, se expresa como

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E \tag{29.12}$$

donde $\Phi_E = EA$ es el flujo eléctrico a través de la superficie.

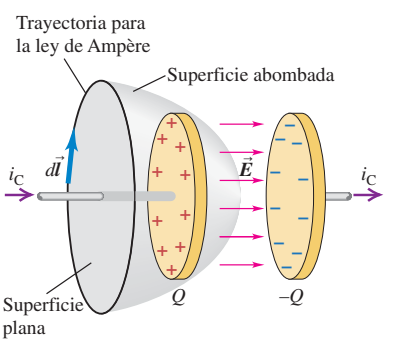
A medida que el capacitor se carga, la tasa de cambio de q es la corriente de conducción, $i_C = dq/dt$. De la derivada de la ecuación (29.12) con respecto al tiempo se obtiene

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{29.13}$$

Ahora, con un pequeño esfuerzo de imaginación, inventamos una **corriente de desplazamiento** ficticia, i_D, en la región entre las placas, definida como

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \text{(corriente de desplazamiento)} \tag{29.14}$$

29.22 Capacitor de placas paralelas en proceso de carga. La corriente de conducción a través de la superficie plana es i_C, pero no hay corriente de conducción a través de la superficie que se abomba para pasar entre las placas. Las dos superficies tienen una frontera común, por lo que esta diferencia en I_{enc} lleva a una contradicción aparente al aplicar la ley de Ampère.



Es decir, imaginamos que el flujo cambiante a través de la superficie curva en la figura 29.22 es en cierto modo equivalente, en la ley de Ampère, a una corriente de conducción a través de esa superficie. Incluimos esta corriente ficticia, junto con la corriente real de conducción, i_C, en la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{enc} \qquad \text{(ley de Ampère generalizada)} \qquad (29.15)$$

La ley de Ampère planteada en esta forma es obedecida sin importar cuál superficie se use en la figura 29.22. Para la superficie plana, i_D es igual a cero; para la superficie curva, i_C es cero; e i_C para la superficie plana es igual a i_D para la superficie curva. La ecuación (29.15) sigue siendo válida en un material magnético siempre que la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya μ_0 por μ.

La corriente ficticia i_D fue inventada en 1865 por el físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien la llamó corriente de desplazamiento. Hay una *densidad de corriente de desplazamiento* correspondiente $j_D = i_D/A$; a partir de $\Phi_E = EA$ y dividiendo la ecuación (29.14) entre A, se encuentra

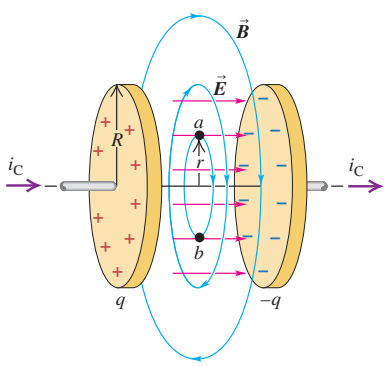
$$j_D = \epsilon \frac{dE}{dt} \qquad (29.16)$$

Hemos sacado el concepto prácticamente de la nada, tal como hizo Maxwell, pero vemos que esto nos permite salvar la ley de Ampère en situaciones como las de la figura 29.22.

Otro beneficio de la corriente de desplazamiento es que permite generalizar la regla de las uniones (también llamada ley de corrientes) de Kirchhoff, que se estudió en la sección 26.2. Si se considera la placa izquierda del capacitor, se tiene una corriente de conducción que entra en ella, pero ninguna que salga. Sin embargo, cuando incluimos la corriente de desplazamiento, se tiene corriente de conducción que entra por un lado y una corriente de desplazamiento igual que sale por el otro lado. Con este significado general del término "corriente", podemos hablar de corriente que pasa *a través* del capacitor.

Realidad de la corriente de desplazamiento

29.23 Un capacitor que se carga con una corriente i_C tiene una corriente de desplazamiento igual a i_C entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento $j_D = \epsilon\, dE/dt$. Ésta se puede considerar como la fuente del campo magnético entre las placas.



En este momento, tal vez el lector se pregunte si la corriente de desplazamiento tiene un significado físico real, o si sólo es un truco para satisfacer la ley de Ampère y la regla de Kirchhoff de las uniones o de los nodos. A continuación se describe un experimento fundamental que ayuda a responder esta pregunta. Se toma un área plana circular entre las placas del capacitor, como se ilustra en la figura 29.23. Si la corriente de desplazamiento realmente desempeña el papel que afirmamos en la ley de Ampère, entonces debe haber un campo magnético en la región comprendida entre las placas mientras el capacitor se esté cargando. Podemos usar la ley de Ampère generalizada, que incluye la corriente de desplazamiento, para predecir cuál debiera ser este campo.

Para ser específicos, pensemos en un capacitor de placas circulares con radio R. Para encontrar el campo magnético en un punto en la región comprendida entre las placas a una distancia r del eje, se aplica la ley de Ampère a un círculo de radio r que pase por el punto en cuestión, con $r < R$. Este círculo pasa por los puntos a y b en la figura 29.23. La corriente total encerrada por el círculo es j_D veces su área, o $(i_D/\pi R^2)(\pi r^2)$. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ en la ley de Ampère sólo es el producto de B por la circunferencia $2\pi r$ del círculo, y como $i_D = i_C$ en el capacitor en proceso de carga, la ley de Ampère se convierte en:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C \qquad \text{o bien,}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_C \qquad (29.17)$$

Este resultado predice que en la región comprendida entre las placas, $\vec{B}$ es igual a cero en el eje y se incrementa en forma lineal con la distancia desde el eje. Un cálculo similar demuestra que *afuera* de la región entre las placas (es decir, para $r > R$), $\vec{B}$ sería el mismo que si el alambre fuera continuo y no hubiera placas.

Cuando *medimos* el campo magnético en esta región, encontramos que realmente está ahí y se comporta tal como predice la ecuación (29.17). Esto confirma directamente el papel que tiene la corriente de desplazamiento como fuente del campo magnético. Con esto queda establecido, más allá de toda duda razonable, que la corriente de desplazamiento, lejos de ser un simple artificio, es un hecho fundamental de la naturaleza. El descubrimiento de Maxwell fue un paso audaz de un genio extraordinario.

Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo

Ahora estamos en posición de reunir en un solo paquete *todas* las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes. Este paquete consiste en cuatro ecuaciones, las llamadas **ecuaciones de Maxwell**. Maxwell no descubrió todas las ecuaciones por sí solo (aunque sí desarrolló el concepto de corriente de desplazamiento), sino que las reunió y reconoció su importancia, en particular para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Por ahora, enunciaremos las ecuaciones de Maxwell en su forma más sencilla, para el caso en que hay cargas y corrientes en un espacio en que, por lo demás, está vacío. En el capítulo 32 estudiaremos cómo modificar estas ecuaciones si está presente un material dieléctrico o magnético.

Dos de las ecuaciones de Maxwell implican una integral de $\vec{\boldsymbol{E}}$ o $\vec{\boldsymbol{B}}$ sobre una superficie cerrada. La primera es sencillamente la ley de Gauss para campos eléctricos, la ecuación (22.8), la cual afirma que la integral de superficie de $E_\perp$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ multiplicado por la carga total Q_{enc} encerrada dentro de la superficie:

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss para } \vec{\boldsymbol{E}}\text{)} \tag{29.18}$$

La segunda es la relación análoga para campos *magnéticos*, ecuación (27.8), la cual establece que la integral de superficie de $B_\perp$ sobre cualquier superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}} = 0 \qquad \text{(ley de Gauss para } \vec{\boldsymbol{B}}\text{)} \tag{29.19}$$

Este enunciado significa, entre otras cosas, que no hay monopolos magnéticos (cargas magnéticas individuales) que actúen como fuentes del campo magnético.

La tercera ecuación es la ley de Ampère con la corriente de desplazamiento incluida. Esta ley establece que tanto la corriente de conducción i_C como la corriente de desplazamiento $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo eléctrico, actúan como fuentes del campo magnético:

$$\oint \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{enc}} \qquad \text{(ley de Ampère)} \tag{29.20}$$

La cuarta y última ecuación es la ley de Faraday; establece que un campo magnético cambiante o un flujo magnético inducen un campo eléctrico:

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(ley de Faraday)} \tag{29.21}$$

Si hay un flujo magnético cambiante, la integral de línea en la ecuación (29.21) es diferente de cero, lo que demuestra que el campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ producido por un flujo magnético cambiante no es conservativo. Recuerde que esta integral de línea debe llevarse a cabo sobre una trayectoria cerrada *constante*.

Vale la pena examinar con más detenimiento el campo total $\vec{\boldsymbol{E}}$ y el papel que desempeña en las ecuaciones de Maxwell. En general, el campo toral $\vec{\boldsymbol{E}}$ en un punto en el espacio puede ser la superposición de un campo electrostático $\vec{\boldsymbol{E}}_c$ provocado por una distribución de cargas en reposo y un campo $\vec{\boldsymbol{E}}_n$ no electrostático inducido

magnéticamente. (El subíndice *c* significa Coulomb o conservativo; el subíndice *n* indica no Coulomb, no electrostático, o no conservativo). Es decir,

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n$$

La parte electrostática $\vec{E}_c$ *siempre* es conservativa, por lo que $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$. Esta parte conservativa del campo no contribuye a la integral en la ley de Faraday, por lo que en la ecuación (29.21) se puede tomar $\vec{E}$ como el campo eléctrico total $\vec{E}$, que incluye tanto la parte de $\vec{E}_c$ debida a las cargas como a la parte inducida magnéticamente $\vec{E}_n$. De manera similar, la parte no conservativa $\vec{E}_n$ del campo $\vec{E}$ no contribuye a la integral en la ley de Gauss porque esta parte del campo no es causada por cargas estáticas. De aquí que $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{A}$ siempre es igual a cero. Se concluye que en todas las ecuaciones de Maxwell, $\vec{E}$ es el campo eléctrico total; estas ecuaciones no hacen distinción entre campos conservativos y no conservativos.

Simetría en las ecuaciones de Maxwell

En las cuatro ecuaciones de Maxwell hay una simetría notable. En el espacio vacío, donde no hay cargas, las dos primeras ecuaciones, (29.18) y (29.19), tienen forma idéntica, una contiene a $\vec{E}$ y la otra a $\vec{B}$. Cuando se comparan las otras dos ecuaciones, la (29.20) dice que un flujo eléctrico cambiante origina un campo eléctrico, y la ecuación (29.21) afirma que un flujo magnético cambiante origina un campo eléctrico. En el espacio vacío, donde no hay corriente de conducción, $i_C = 0$ y las dos ecuaciones tienen la misma forma, aparte de una constante numérica y un signo negativo, con los papeles de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ intercambiados en las dos ecuaciones.

Las ecuaciones (29.20) y (29.21) se pueden volver a escribir en forma distinta pero equivalente incluyendo las definiciones de flujo eléctrico y flujo magnético, $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ y $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, respectivamente. En el espacio vacío, donde no hay carga ni corriente de conducción, $i_C = 0$ y $Q_{enc} = 0$, y tenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{29.22}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{29.23}$$

De nuevo, se observa la simetría entre los papeles que tienen $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en estas expresiones.

La característica más notable de estas ecuaciones es que un campo de *cualquier* tipo que varíe con respecto al tiempo induce un campo del otro tipo en las regiones vecinas del espacio. Maxwell reconoció que estas relaciones predecían la existencia de perturbaciones electromagnéticas consistentes en campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo y que viajan o se *propagan* de una región del espacio a otra, aunque no haya materia presente en el espacio intermedio. Tales perturbaciones, llamadas *ondas electromagnéticas*, constituyen la base física para las ondas luminosas, las ondas de radio y televisión, la radiación infrarroja y ultravioleta, los rayos x y el resto del espectro electromagnético. En el capítulo 32 volveremos a este tema de importancia vital.

Aunque tal vez no sea obvio, *todas* las relaciones básicas entre campos y sus fuentes están contenidas en las ecuaciones de Maxwell. La ley de Coulomb se deduce de la ley de Gauss, la de Biot y Savart se deduce de la de Ampère, y así sucesivamente. Cuando se agrega la ecuación que define los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de las fuerzas que ejercen sobre una carga q, a saber,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{29.24}$$

¡se tienen *todas* las relaciones fundamentales del electromagnetismo!

Por último, se observa que las ecuaciones de Maxwell tendrían mucha más simetría entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ si existieran cargas magnéticas individuales (monopolos magnéticos). El lado derecho de la ecuación (29.19) contendría la carga *magnética* total encerrada por la superficie, y el lado derecho de la ecuación (29.21) incluiría un

término de corriente de monopolos magnéticos. Quizás nos da una idea inicial de por qué algunos físicos desearían que existieran los monopolos magnéticos, pues ayudarían a perfeccionar la belleza matemática de las ecuaciones de Maxwell.

El descubrimiento de que el electromagnetismo puede ser condensado en una forma tan limpia y elegante es muy satisfactorio. En cuanto a concisión y generalidad, las ecuaciones de Maxwell pertenecen a la misma categoría que las leyes de Newton del movimiento y las leyes de la termodinámica. En realidad, uno de los objetivos principales de la ciencia es expresar relaciones muy amplias y generales en forma concisa y compacta. La síntesis de Maxwell del electromagnetismo es un enorme logro intelectual, comparable a la síntesis newtoniana que describimos al final de la sección 12.5 y al desarrollo de la relatividad y la mecánica cuántica en el siglo xx.

Evalúe su comprensión de la sección 29.7 *a*) ¿Cuál de las ecuaciones de Maxwell explica el funcionamiento de un lector de tarjetas de crédito? *b*) ¿Cuál de ellas describe la forma en que un alambre que conduce una corriente estable genera un campo magnético?

*29.8 Superconductividad

La propiedad más familiar de un superconductor es la desaparición súbita de toda resistencia eléctrica cuando el material se enfría por debajo de la llamada *temperatura crítica*, que se denota con T_c. En la sección 25.2 se analizó este comportamiento y las circunstancias que rodearon su descubrimiento. Pero la superconductividad es mucho más que la simple ausencia de resistencia mensurable. Los superconductores también tienen propiedades *magnéticas* extraordinarias. En esta sección exploraremos algunas de ellas.

El primer indicio de propiedades magnéticas inusuales fue el descubrimiento de que para cualquier material superconductor la temperatura crítica T_c cambia cuando el material se coloca en un campo magnético $\vec{B}_0$ producido externamente. La figura 29.24 muestra esta dependencia en el caso del mercurio, el primer elemento en que se observó superconductividad. Conforme aumenta la magnitud B_0 del campo externo, la transición superconductora se presenta a temperatura cada vez más baja. Cuando B_0 es mayor que 0.0412 T, *no* hay transición superconductora. La magnitud mínima del campo magnético que se necesita para eliminar la superconductividad a una temperatura por debajo de T_c se llama *campo crítico*, y se denota con B_c.

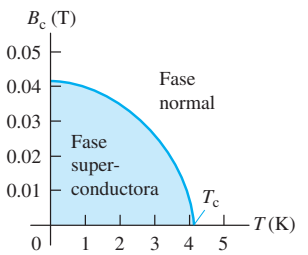
El efecto Meissner

Otro aspecto del comportamiento magnético de los superconductores surge si se coloca una esfera homogénea de un material superconductor en un campo magnético uniforme aplicado $\vec{B}_0$ a una temperatura T mayor que T_c. Entonces, el material está en la fase normal, no en la superconductora. El campo es el que se ilustra en la figura 29.25a. A continuación se baja la temperatura hasta que ocurre la transición superconductora. (Se supone que la magnitud de $\vec{B}_0$ no es suficientemente grande para impedir la transición de fase.) ¿Qué le ocurre al campo?

Las mediciones del campo fuera de la esfera indican que las líneas de campo se distorsionan como en la figura 29.25b. En el interior del material ya no hay ningún campo, excepto tal vez en una capa superficial muy delgada con espesor aproximado de 100 átomos. Si se enrolla una bobina alrededor de la esfera, la fem inducida en la bobina muestra que durante la transición superconductora el flujo magnético a través de la bobina disminuye de su valor inicial a cero; esto es congruente con la ausencia de campo dentro del material. Por último, si el campo cesa mientras el material aún se encuentra en fase superconductora, no se induce ninguna fem en la bobina, y las mediciones revelan que no hay campo afuera de la esfera (figura 29.25c).

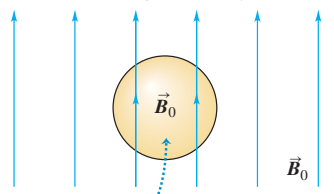
La conclusión es que durante la transición superconductora en presencia del campo $\vec{B}_0$, todo el flujo magnético es expelido del cuerpo de la esfera, y el flujo magnético Φ_B a través de la bobina se reduce a cero. Esta expulsión de flujo magnético se

29.24 Diagrama de fases del mercurio puro, donde se observa el campo magnético crítico B_c y su dependencia de la temperatura. La superconductividad es imposible por arriba de la temperatura crítica T_c. Las curvas para otros materiales superconductores son similares pero con valores numéricos distintos.



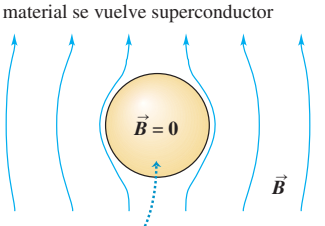
29.25 Material superconductor a) por encima de la temperatura crítica, y b) y c) por debajo de la temperatura crítica.

a) Material superconductor en un campo magnético externo $\vec{B}_0$ con $T > T_c$



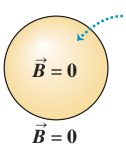
El campo dentro del material es casi igual a $\vec{B}_0$.

b) La temperatura baja a $T < T_c$, por lo que el material se vuelve superconductor



Del material es expelido flujo magnético, y el campo en su interior es igual a cero (efecto Meissner).

c) Cuando el campo externo se elimina a $T < T_c$, el campo es igual a cero en todas partes



En el material no hay cambio en el flujo magnético.

llama *efecto Meissner*. Como se aprecia en la figura 29.25b, la expulsión aglomera las líneas de campo magnético en los lados de la esfera, lo que incrementa $\vec{B}$ en esa región.

Levitación a partir de superconductores y otras aplicaciones

29.26 Un superconductor (la placa negra) ejerce una fuerza de repulsión sobre un imán (el cilindro metálico), lo que sostiene a éste en el aire.

La naturaleza diamagnética de un superconductor tiene algunas consecuencias *mecánicas* interesantes. Un material paramagnético o ferromagnético es atraído por un imán permanente debido a que los dipolos magnéticos en el material se alinean con el campo magnético no uniforme del imán permanente. (En la sección 27.7 se estudió esto.) En el caso de un material diamagnético la magnetización ocurre en el sentido opuesto, y estos materiales son *repelidos* por un imán permanente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el imán también es repelido por el material diamagnético. La figura 29.26 muestra la repulsión entre un espécimen de un superconductor de alta temperatura y un imán; esa fuerza magnética repulsiva sostiene ("hace levitar") el imán.

El comportamiento que hemos descrito es característico de los llamados *superconductores tipo I*, para diferenciarlos de la otra clase de materiales, los *superconductores tipo II*. Cuando un material de éstos en la fase superconductora se coloca en un campo magnético, el grueso del material sigue siendo superconductor, pero unos filamentos finos del material, paralelos al campo, pueden regresar a la fase normal. Alrededor de los bordes de estos filamentos circulan corrientes, y en su interior *hay* un flujo magnético. Los superconductores tipo II se utilizan para fabricar electroimanes, ya que por lo general tienen valores mucho mayores de B_c que los del tipo I, lo que permite campos magnéticos muy grandes sin destruir el estado superconductor. Los superconductores tipo II tienen *dos* campos magnéticos críticos: el primero, B_{c1}, es el campo en el que comienza a entrar flujo magnético en el material y forma los filamentos que acabamos de describir, y el segundo, B_{c2}, es el campo en que el material vuelve a la normalidad.

Están en desarrollo muchas aplicaciones importantes y emocionantes de los superconductores. En los laboratorios de investigación se han usado durante varios años electroimanes superconductores. Sus ventajas, en comparación con los electroimanes convencionales, incluyen mayor eficiencia, volúmenes más compactos y mayores magnitudes de campo. Una vez que se establece una corriente en la bobina de un electroimán superconductor, no se requiere más suministro de energía porque no hay pérdida de energía por resistencia. Las bobinas también son más compactas porque no se requiere proveer canales para la circulación de fluidos de enfriamiento. Los imanes superconductores por rutina alcanzan campos estables del orden de 10 T, mucho mayores que los campos máximos disponibles con los electroimanes ordinarios.

Los superconductores son atractivos para la transmisión de energía eléctrica a grandes distancias y para dispositivos de conversión de energía, como generadores, motores y transformadores. Es posible hacer mediciones muy finas de campos magnéticos con dispositivos superconductores de interferencia cuántica (SQUID, por las siglas de *superconducting quantum interference devices*), pues detectan cambios en el flujo magnético menores a 10^{-14} Wb; estos dispositivos tienen aplicaciones en medicina, geología y otros campos. El número de usos potenciales de los superconductores se ha incrementado considerablemente desde el descubrimiento de los superconductores de alta temperatura en 1987. Estos materiales tienen temperaturas críticas por arriba de la temperatura del nitrógeno líquido (alrededor de 77 K), las cuales son relativamente fáciles de alcanzar. El perfeccionamiento de aplicaciones prácticas de la ciencia de los superconductores promete ser un capítulo emocionante de la tecnología contemporánea.

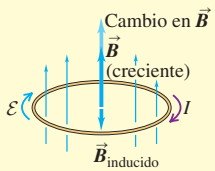
CAPÍTULO 29 RESUMEN

Ley de Faraday: La ley de Faraday establece que la fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo a través de la espira. Esta relación es válida ya sea que el cambio de flujo se deba a un campo magnético variable, al movimiento de la espira, o ambos factores. (Véanse los ejemplos 29.1 a 29.7.)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.3)$$

El movimiento del imán ocasiona un campo magnético *cambiante* a través de la bobina, lo que induce una corriente en esta última.

Ley de Lenz: La ley de Lenz afirma que una corriente o fem inducida siempre tiende a oponerse al cambio que la generó, o a cancelarlo. La ley de Lenz se deduce de la de Faraday y a menudo es más fácil de usar. (Véanse los ejemplos 29.8 y 29.9.)



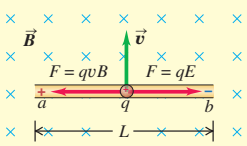
Fem de movimiento: Si un conductor se mueve en un campo magnético, se induce una fem de movimiento. (Véanse los ejemplos 29.10 y 29.11.)

$$\mathcal{E} = vBL \qquad (29.6)$$

(conductor con longitud L se mueve en un campo $\vec{B}$ uniforme, $\vec{L}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a $\vec{B}$ y entre sí)

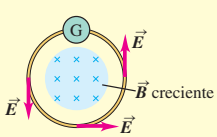
$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \qquad (29.7)$$

(la totalidad o parte de una espira cerrada se mueve en un campo $\vec{B}$)



Campos eléctricos inducidos: Cuando un flujo magnético cambiante a través de un conductor fijo induce una fem, hay un campo eléctrico inducido $\vec{E}$ de origen no electrostático. Este campo es no conservativo y no está asociado con un potencial. (Véase el ejemplo 29.12.)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.10)$$



Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell: Un campo eléctrico que varía en el tiempo genera una corriente de desplazamiento i_D, que actúa como fuente de un campo magnético exactamente de la misma manera que una corriente de conducción. La relación entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes se enuncia en forma compacta en las cuatro ecuaciones de Maxwell. En conjunto forman una base completa para la relación de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con sus fuentes.

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (29.14)$$

(corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad (29.18)$$

(ley de Gauss para campos $\vec{E}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (29.19)$$

(ley de Gauss para campos $\vec{B}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{enc}} \qquad (29.20)$$

(ley de Ampère que incluye la corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.21)$$

(ley de Faraday)

Términos clave

corriente inducida, *994*
fem inducida, *994*
ley de Faraday de la inducción, *996*
ley de Lenz, *1004*
fuerza electromotriz de movimiento, *1006*
campo eléctrico inducido, *1009*
campo no electrostático, *1010*
corrientes parásitas, *1011*
corriente de desplazamiento, *1013*
ecuaciones de Maxwell, *1015*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Conforme la banda magnética de la tarjeta de crédito se desliza por el lector, el patrón codificado de magnetización en la banda provoca un flujo magnético variable y con ello una corriente inducida en los circuitos del lector. Si la tarjeta no se mueve, no hay una fem o corriente inducida y no se lee la información de la tarjeta de crédito.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

29.2 Respuestas: *a*) i), *b*) iii) *a*) Al principio hay un flujo magnético hacia el plano de la página, que llamamos positivo. Mientras se comprime la espira, el flujo se hace menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$), por lo que la fem inducida es positiva, como en la figura 29.6b ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt > 0$). Si usted apunta el pulgar de su mano derecha hacia la página, sus dedos se doblan en el sentido horario, así que éste es el sentido de la fem inducida positiva. *b*) Como la forma de la bobina ya no está cambiando, el flujo magnético tampoco, y no hay fem inducida.

29.3 Respuestas: *a*) i), *b*) iii) En el inciso *a*), como en la situación original, el imán y la espira se acercan entre sí y se incrementa el flujo hacia abajo a través de la espira. De ese modo, la fem y la corriente inducidas son las mismas. En el inciso *b*), como el imán y la espira se mueven juntos, el flujo a través de la espira no cambia y no hay fem inducida.

29.4 Respuestas: *a*) iii); *b*) i) o ii); *c*) ii) o iii) Se obtendrá la máxima fem de movimiento si se sostiene la varilla verticalmente, de manera que su longitud sea perpendicular tanto al campo magnético como a la dirección del movimiento. Con esta orientación, $\vec{L}$ es paralela a $\vec{v} \times \vec{B}$. Si sostiene la varilla en cualquier orientación horizontal, $\vec{L}$ será perpendicular a $\vec{v} \times \vec{B}$ y no se inducirá ninguna fem. Si se camina hacia el norte o sur, $\vec{v} \times \vec{B} = \mathbf{0}$ y no habrá fem inducida para ninguna orientación de la varilla.

29.5 Respuestas: sí, no El campo magnético en una posición fija cambia a medida que se mueve el imán. Tales campos eléctricos inducidos son *no* conservativos.

29.6 Respuesta: iii) Según la ley de Lenz, la fuerza debe oponerse al movimiento del disco a través del campo magnético. Como ahora el material del disco se mueve hacia la derecha a través de la región del campo, la fuerza $\vec{F}$ va hacia la izquierda, es decir, en sentido opuesto al que se ilustra en la figura 29.19b. Para producir una fuerza magnética dirigida hacia la izquierda $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ sobre corrientes que se muevan a través de un campo magnético $\vec{B}$ dirigido hacia fuera del plano de la figura, las corrientes parásitas deben moverse hacia abajo en la figura, es decir, en el mismo sentido que se indica en la figura 29.19b.

29.7 Respuestas: *a*) ley de Faraday, *b*) ley de Ampère Un lector de tarjetas de crédito funciona induciendo corrientes en sus bobinas cuando se desliza la banda magnética de la tarjeta (véase la respuesta a la pregunta de inicio de capítulo). La ley de Ampère describe cómo las corrientes de todas clases (tanto de conducción como de desplazamiento) originan campos magnéticos.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P29.1. Se coloca una lámina de cobre entre los polos de un electroimán con el campo magnético perpendicular a la lámina. Cuando se tira de la lámina hacia fuera, se requiere una fuerza considerable, la cual aumenta con la rapidez. Explique este fenómeno.

P29.2. En la figura 29.8, si la rapidez angular ω de la espira se duplica, entonces la frecuencia con la que la corriente inducida cambia de sentido también se duplica, al igual que la fem máxima. ¿Por qué? ¿Cambia el par de torsión requerido para hacer girar la espira? Explique su respuesta.

P29.3. Dos espiras circulares se encuentran lado a lado en el mismo plano. Una está conectada a una fuente que suministra una corriente creciente; la otra es un anillo simple cerrado. La corriente inducida en el anillo, ¿tiene el mismo sentido que la corriente en la espira conectada con la fuente, o es opuesto? ¿Qué sucede si la corriente en la primera espira disminuye? Explique.

P29.4. Un granjero afirma que las líneas de transmisión de alto voltaje que corren paralelas a su cercado inducen altos voltajes peligrosos sobre la cerca. ¿Es esto posible? Explique. (Las líneas conducen corriente que cambia de sentido 120 veces cada segundo.)

P29.5. Un conductor largo y recto pasa por el centro de un anillo metálico, perpendicular a su plano. Si la corriente en el conductor aumenta, ¿se induce una corriente en el anillo? Explique lo que pasa.

P29.6. Un estudiante asegura que si se deja caer en forma vertical un imán permanente por un tubo de cobre, el imán alcanza tarde o temprano una velocidad terminal aunque no exista resistencia del aire. ¿Por qué tendría que ser así? ¿O debe ser así?

P29.7. Un avión vuela horizontalmente sobre la Antártida, donde el campo magnético terrestre está dirigido sobre todo hacia arriba alejándose del suelo. Vista por un pasajero que mira hacia el frente del avión, ¿el extremo del ala izquierda está a un potencial mayor que el del ala derecha? ¿La respuesta depende de la dirección en que vuela el avión?

P29.8. Considere la situación del ejercicio 29.19. En el inciso *a*), encuentre la dirección de la fuerza que ejerce el circuito grande sobre el pequeño. Explique el modo en que este resultado es congruente con la ley de Lenz.

P29.9. Un rectángulo de metal está cerca de un alambre largo, recto y que conduce corriente, con dos de sus lados paralelos al alambre. Si la corriente en el alambre largo está disminuyendo, ¿el rectángulo es repelido o atraído por el alambre? Explique por qué es congruente este resultado con la ley de Lenz.

P29.10. Una espira conductora cuadrada está en una región de campo magnético constante y uniforme. ¿La espira puede hacerse girar alrededor de un eje a lo largo de un lado sin que se induzca ninguna fem en la espira? Explique lo que pasa en términos de la orientación del eje de rotación con respecto a la dirección del campo magnético.

P29.11. En el ejemplo 29.7 se analiza la fuerza externa que debe aplicarse al conductor corredizo para que se mueva con rapidez constante.

Si hubiera un freno en el extremo izquierdo del conductor en forma de U, ¿cuánta fuerza sería necesaria para mover el conductor corredizo con rapidez constante? Igual que en el ejemplo, ignore la fricción.

P29.12. En la situación que se ilustra en la figura 29.16, ¿sería apropiado preguntar cuánta *energía* gana un electrón durante un recorrido completo alrededor de la espira de alambre con corriente I'? ¿Sería apropiado preguntar a través de qué *diferencia de potencial* se traslada el electrón durante ese recorrido completo? Explique sus respuestas.

P29.13. Un anillo metálico está orientado con el plano de su área perpendicular a un campo magnético espacialmente uniforme que se incrementa a una tasa estable. Si el radio del anillo se duplica, ¿en qué factor cambian *a*) la fem inducida en el anillo y *b*) el campo eléctrico inducido en el anillo?

P29.14. Para la ecuación (29.6) demuestre que si v se expresa en metros por segundo, B en teslas y L en metros, entonces las unidades del lado derecho de la ecuación son joules por coulomb o volts (las unidades correctas del SI para $\mathcal{E}$).

P29.15. ¿Se puede tener una corriente de desplazamiento además de una corriente de conducción dentro de un conductor? Explique su respuesta.

P29.16. Un compañero con quien estudia física le pide que considere un capacitor de placas paralelas que tiene un dieléctrico que llena por completo el volumen entre sus placas. Él afirma que las ecuaciones (29.13) y (29.14) demuestran que la corriente de conducción en el dieléctrico es igual a la corriente de desplazamiento en el dieléctrico. ¿Está de acuerdo? Explique su respuesta.

P29.17. Relacione los enunciados matemáticos de las ecuaciones de Maxwell, tal como aparecen en la sección 29.7, con las siguientes expresiones: *a*) Las líneas de campo eléctrico cerradas son producidas evidentemente sólo por un flujo magnético cambiante. *b*) Las líneas de campo magnético cerradas son producidas tanto por el movimiento de la carga eléctrica como por un flujo eléctrico cambiante. *c*) Las líneas de campo eléctrico pueden comenzar en cargas positivas y terminar en cargas negativas. *d*) Es evidente que no hay monopolos magnéticos en los que comiencen y terminen líneas de campo magnético.

P29.18. Si existieran los monopolos magnéticos, el lado derecho de la ecuación (29.21) incluiría un término proporcional a la corriente de los monopolos magnéticos. Suponga que una corriente de monopolos estable se desplaza a lo largo de un alambre recto y largo. Dibuje las líneas de campo *eléctrico* que produciría esa corriente.

P29.19. Si existieran los monopolos magnéticos, el lado derecho de la ecuación (29.19) sería proporcional al total de carga *magnética* encerrada. Suponga que una línea infinita de monopolos magnéticos estuviera en el eje x. Dibuje las líneas de campo magnético que produciría esa línea de monopolos.

Ejercicios

Sección 29.2 Ley de Faraday

29.1. Una bobina plana y rectangular de 50 espiras mide 25.0 cm por 30.0 cm. Está en un campo magnético uniforme de 1.20 T, con el plano de la bobina paralelo al campo. En 0.222 s se hace girar de manera que el plano de la bobina queda perpendicular al campo. *a*) ¿Cuál es el cambio en el flujo magnético a través de la bobina debido a esta rotación? *b*) Determine la magnitud de la fem media inducida en la bobina durante esta rotación.

29.2. En un experimento en un laboratorio de física, una bobina con 200 espiras que encierra un área de 12 cm^2 se hace girar en 0.040 s desde una posición en que su plano es perpendicular al campo magnético de la Tierra hasta otra en que el plano queda paralelo al campo. El campo magnético terrestre en la ubicación del laboratorio es 6.0×10^{-5} T. *a*) ¿Cuál es el flujo magnético total a través de la bobina antes de hacerla girar? ¿Y después del giro? *b*) ¿Cuál es la fem media inducida en la bobina?

29.3. Bobina exploradora y tarjetas de crédito. *a*) Obtenga la ecuación que relaciona la carga total Q que fluye a través de una bobina exploradora (ejemplo conceptual 29.3) con la magnitud del campo magnético B. La bobina exploradora tiene N espiras, cada una con un área A, y el flujo a través de la bobina disminuye desde su valor máximo inicial hasta cero, en un tiempo Δt. La resistencia de la bobina es R, y la carga total es $Q = I\Delta t$, donde I es la corriente media inducida por el cambio en el flujo. *b*) En un lector de tarjetas de crédito, se hace "deslizar" la banda magnética del reverso por una bobina. Con las mismas ideas que sustentan la operación de una bobina exploradora, explique cómo decodifica el lector la información almacenada en el patrón de magnetización de la banda. *c*) ¿Es necesario "deslizar" la tarjeta de crédito a través del lector exactamente con la rapidez correcta? ¿Por qué?

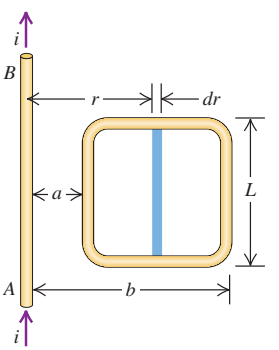
29.4. Una bobina exploradora con devanado compacto (ejercicio 29.3), tiene un área de 3.20 cm^2, 120 espiras y resistencia de 60.0 Ω. Está conectada a un instrumento que mide la carga y cuya resistencia es de 45.0 Ω. Cuando la bobina se hace girar con rapidez desde una posición paralela a un campo magnético uniforme hasta otra perpendicular al campo, el instrumento indica una carga de 3.56×10^{-5} C. ¿Cuál es la magnitud del campo?

29.5. Una espira circular de alambre, con radio de 12.0 cm y orientada en el plano xy horizontal, se localiza en una región de campo magnético uniforme. Un campo de 1.5 T está dirigido a lo largo de la dirección z positiva, que es hacia arriba. *a*) Si se retira la espira de la región del campo en un intervalo de tiempo de 2.0 ms, encuentre la fem media que se inducirá en la espira de alambre durante el proceso de extracción. *b*) Si la bobina se observa desde arriba, ¿la corriente inducida va en sentido horario o antihorario?

29.6. Una bobina de 4.00 cm de radio contiene 500 espiras, y está colocada en un campo magnético uniforme que varía con el tiempo de acuerdo con $B = (0.0120\ \text{T/s})t + (3.00 \times 10^{-5}\ \text{T/s}^4)t^4$. La bobina está conectada a un resistor de 600 Ω, y su plano es perpendicular al campo magnético. Se puede ignorar la resistencia de la bobina. *a*) Encuentre la magnitud de la fem inducida en la bobina como función del tiempo. *b*) ¿Cuál es la corriente en el resistor en el momento $t = 5.00$ s?

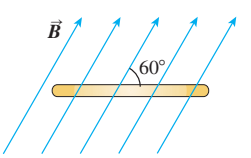
29.7. La corriente en el alambre largo y recto AB que se ilustra en la figura 29.27 va hacia arriba y se incrementa en forma estable a razón di/dt. *a*) En el instante en que la corriente es i, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo $\vec{B}$ a una distancia r hacia la derecha del alambre? *b*) ¿Cuál es el flujo $d\Phi_B$ a través de la banda angosta y sombreada? *c*) ¿Cuál es el flujo total a través de la espira? *d*) ¿Cuál es la fem inducida en la espira? *e*) Determine el valor numérico de la fem inducida si $a = 12.0$ cm, $b = 36.0$ cm, $L = 24.0$ cm, y $di/dt = 9.60$ A/s.

Figura **29.27** Ejercicio 29.7.



29.8. Una espira de acero plano y circular de radio 75 cm se encuentra en reposo en un campo magnético uniforme, cuya vista de perfil se ilustra de la figura 29.28. El campo cambia con el tiempo, de acuerdo con la expresión $B(t) = (1.4\ \text{T})e^{-(0.057\ \text{s}^{-1})t}$. *a*) Calcule la fem inducida en la espira como función del tiempo. *b*) ¿Cuándo es la fem inducida igual a $\frac{1}{10}$ de su valor inicial? *c*) Determine el sentido de la corriente inducida en la espira, viendo esta última desde arriba.

Figura **29.28** Ejercicio 29.8.

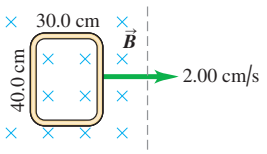


29.9. Espira que se encoge. Una espira circular de alambre de hierro flexible tiene una circunferencia inicial de 165.0 cm, pero su circunferencia disminuye con una rapidez constante de 12.0 cm/s debido a una fuerza tangencial que tira del alambre. La espira se encuentra en un

campo magnético uniforme y constante, orientado perpendicularmente al plano de la espira y con magnitud de 0.500 T. *a*) Determine la fem inducida en la espira en el instante en que han transcurrido 9.0 s. *b*) Determine el sentido de la corriente inducida en la espira, vista a lo largo de la dirección del campo magnético.

29.10. Un rectángulo que mide 30.0 cm por 40.0 cm está localizado en el interior de una región de campo magnético espacialmente uniforme de 1.25 T, con el campo perpendicular al plano de la bobina (figura 29.29). Se tira de la bobina con rapidez constante de 2.00 cm/s en una trayectoria perpendicular a las líneas de campo. La región del campo termina en forma abrupta, como se ilustra. Encuentre la fem inducida en esta bobina cuando está *a*) toda adentro del campo; *b*) parcialmente dentro del campo; *c*) toda afuera del campo.

Figura 29.29 Ejercicio 29.10.



29.11. En una región del espacio, un campo magnético apunta en la dirección $+x$ (hacia la derecha). Su magnitud varía con la posición de acuerdo con la fórmula $B_x = B_0 + bx$, donde B_0 y b son constantes positivas, para $x \geq 0$. Una bobina plana de área A se desplaza con rapidez uniforme v de derecha a izquierda con el plano de su área siempre perpendicular a este campo. *a*) ¿Cuál es la fem inducida en esta bobina mientras está a la derecha del origen? *b*) Vista desde el origen, ¿cuál es el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la bobina? *c*) Si la bobina se moviera de izquierda a derecha, ¿cuáles serían las respuestas para los incisos *a*) y *b*)?

29.12. Fuerza contraelectromotriz. Un motor con una configuración de escobillas y conmutador, como la que se describe en el ejemplo 29.5, tiene una bobina circular con radio 2.5 cm y 150 espiras de alambre. El campo magnético tiene una magnitud de 0.060 T, y la bobina gira a 440 rev/min. *a*) ¿Cuál es la fem máxima inducida en la bobina? *b*) ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz media?

29.13. El inducido de un generador pequeño consiste en una bobina plana y cuadrada con 120 espiras y cuyos lados tienen una longitud de 1.60 cm. La bobina gira en un campo magnético de 0.0750 T. ¿Cuál es la rapidez angular de la bobina si la fem máxima producida es de 24.0 mV?

29.14. Se tira de una bobina plana, rectangular, con dimensiones l y w, con rapidez uniforme v a través de un campo magnético uniforme B y con el plano de su área perpendicular al campo (figura 29.30). *a*) Determine la fem inducida en esta bobina. *b*) Si la rapidez y el campo magnético se triplican, ¿cuál será la fem inducida?

Figura 29.30 Ejercicio 29.14.

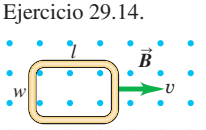
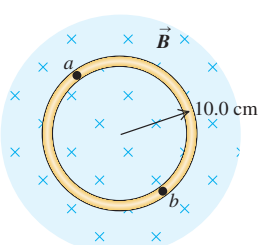


Figura 29.31 Ejercicios 29.15 y 29.30.

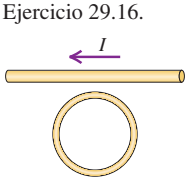


Sección 29.3 Ley de Lenz

29.15. Una espira circular de alambre está en una región de campo magnético espacialmente uniforme, como se aprecia en la figura 29.31. El campo magnético está dirigido hacia el plano de la figura. Determine el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la espira cuando *a*) B aumenta; *b*) B disminuye; *c*) B tiene un valor constante B_0. Explique su razonamiento.

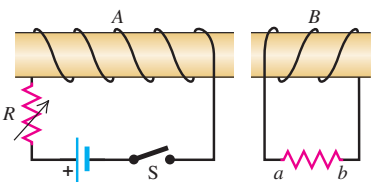
29.16. La corriente en la figura 29.32 obedece la ecuación $I(t) = I_0 e^{-bt}$, donde $b > 0$. Determine el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la bobina circular para $t > 0$.

Figura 29.32 Ejercicio 29.16.



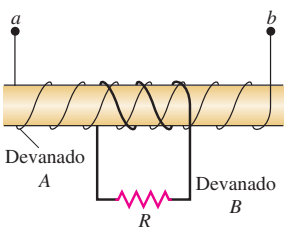
29.17. Con base en la ley de Lenz, determine el sentido de la corriente en el resistor *ab* de la figura 29.33 cuando *a*) se abre el interruptor S después de haber estado cerrado durante varios minutos; *b*) la bobina B se acerca a la bobina A con el interruptor cerrado; *c*) se reduce la resistencia de R mientras el interruptor permanece cerrado.

Figura 29.33 Ejercicio 29.17.



29.18. Se envuelve un tubo de cartón con dos devanados de alambre aislado en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 29.34. Las terminales *a* y *b* del devanado A se conectan a una batería por medio de un interruptor inverso. Indique si la corriente inducida en el resistor R fluye de izquierda a derecha o de derecha izquierda en las siguientes circunstancias: *a*) la corriente en el devanado A va de *a* a *b* y está aumentando; *b*) la corriente en el devanado A es de *b* hacia *a* y está disminuyendo; *c*) la corriente en el devanado A fluye de *b* hacia *a* y está en aumento.

Figura 29.34 Ejercicio 29.18.



29.19. Un pequeño anillo circular está dentro de una espira más grande que se encuentra conectada a una batería y un interruptor, como se observa en la figura 29.35. Con base en la ley de Lenz, determine el sentido de la corriente inducida en el anillo pequeño *a*) inmediatamente después cerrar el interruptor S; *b*) después de que S ha estado cerrado mucho tiempo; *c*) inmediatamente después de abrir S luego de que estuvo cerrado mucho tiempo.

Figura 29.35 Ejercicio 29.19.

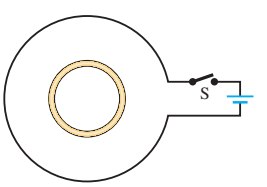
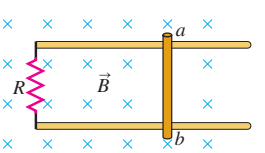


Figura 29.36 Ejercicio 29.20 y problema 29.64.



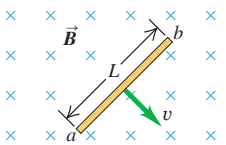
29.20. Se tira hacia la derecha de una barra metálica de 1.50 m de longitud con rapidez uniforme de 5.0 cm/s en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.750 T. La barra corre sobre rieles metálicos paralelos conectados por medio de un resistor de 25.0 Ω, como se ilustra en la figura 29.36, de manera que el aparato forma un circuito completo. Se puede ignorar la resistencia de la barra y los rieles. *a*) Calcule la magnitud de la fem inducida en el circuito. *b*) Determine el sentido de la corriente inducida en el circuito i) con base en la fuerza magnética sobre las cargas en la barra móvil; ii) con base en la ley de Faraday; iii) con base la ley de Lenz. *c*) Calcule la corriente a través del resistor.

Sección 29.4 Fuerza electromotriz de movimiento

29.21. En la figura 29.37, una varilla conductora con longitud L = 30.0 cm se mueve en un campo magnético $\vec{B}$ de magnitud 0.450 T dirigido hacia el plano de la figura. La varilla se desplaza con rapidez

$v = 5.00$ m/s en el sentido que se ilustra. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla? *b*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está a mayor potencial? *c*) Cuando las cargas en la barra están en equilibrio, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico dentro de la varilla? *d*) Cuando las cargas en la varilla están en equilibrio, ¿cuál punto, *a* o *b*, tiene un exceso de carga positiva? *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de la varilla si se desplaza i) en forma paralela a *ab*, y ii) directamente hacia fuera de la página?

Figura 29.37 Ejercicio 29.21.



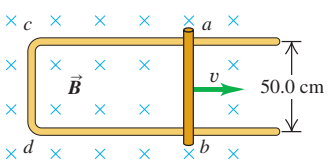
29.22. Para la situación del ejercicio 29.20, determine *a*) la fem de movimiento en la barra y *b*) la corriente a través del resistor.

29.23. ¿Las fem son fuentes prácticas de electricidad? ¿Qué tan rápido (en m/s y mph) tendría que moverse una barra de cobre en ángulos rectos con un campo magnético de 0.650 T para generar 1.50 V (lo mismo que una batería AA) a través de sus extremos? ¿Parece una forma práctica de generar electricidad?

29.24. Fem de movimiento en el transporte. Los aviones y trenes se desplazan a través del campo magnético de la Tierra a grandes velocidades, por lo que es razonable preguntarse si este campo tiene un efecto sustancial sobre ellos. El valor de uso común para el campo terrestre es de 0.50 G *a*) El tren francés TGV y el "tren bala" japonés alcanzan una rapidez de hasta 180 millas/h cuando se desplazan sobre sus rieles separados por una distancia de 1.5 m. Cuando se desplazan a su máxima rapidez en forma perpendicular al campo magnético de la Tierra, ¿qué diferencia de potencial se induce a través de los rieles mientras las ruedas giran? ¿Esto parece suficientemente considerable para producir un efecto notable? *b*) El avión Boeing 747-400 tiene una envergadura de 64.4 m y rapidez de crucero de 565 millas/h. Si no hay viento que sople (por lo que la rapidez de crucero sería también su rapidez con respecto al suelo), ¿cuál es la diferencia de potencial máxima que podría inducirse entre los extremos opuestos de las alas? ¿Esto parece suficientemente considerable para causar problemas al avión?

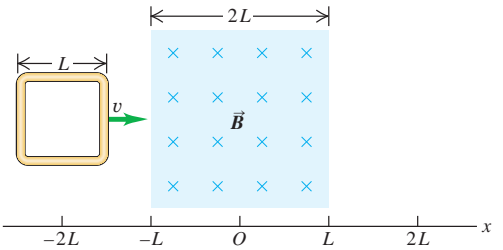
29.25. La varilla conductora *ab* que se muestra en la figura 29.38 hace contacto con los rieles metálicos *ca* y *db*. El aparato está en un campo magnético uniforme de 0.800 T, perpendicular al plano de la figura. *a*) Calcule la magnitud de la fem inducida en la varilla cuando ésta se mueve hacia la derecha con una rapidez de 7.50 m/s. *b*) ¿En qué sentido fluye la corriente en la varilla? *c*) Si la resistencia del circuito *abdc* es de 1.50 Ω (que se supone constante), calcule la fuerza (magnitud y dirección) requerida para mantener la varilla moviéndose hacia la derecha con rapidez constante de 7.50 m/s. Ignore la fricción. *d*) Compare la tasa con que la fuerza (Fv) efectúa trabajo mecánico con la tasa a que se desarrolla energía térmica en el circuito (I^2R).

Figura 29.38 Ejercicio 29.25.



29.26. Una espira cuadrada de alambre con arista L y resistencia R se mueve con rapidez constante v a través de un campo magnético uniforme confinado a una región cuadrada cuyos lados miden el doble de longitud que los de la espira cuadrada (figura 29.39). *a*) Elabore una gráfica de la fuerza externa F necesaria para mover la espira con rapidez constante como función de la coordenada x, de $x = -2L$ a $x = +2L$. (La coordenada x está medida del centro de la región del campo magnético al centro de la espira. Es negativa cuando el centro de la espira está a la izquierda del centro de la región del campo magnético.

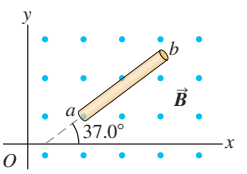
Figura 29.39 Ejercicio 29.26.



Tome la fuerza positiva hacia la derecha.) *b*) Elabore una gráfica de la corriente inducida en la espira como función de x. Tome como positivas las corrientes que vayan en sentido antihorario.

29.27. Una barra de 1.41 m de longitud se mueve a través de un campo magnético uniforme de 1.20 T con una rapidez de 2.50 m/s (figura 29.40). En cada caso, calcule la fem inducida entre los extremos de esta barra e identifique cuál extremo (*a* o *b*, si acaso alguno de los dos) está a mayor potencial. La barra se mueve en la dirección de *a*) el eje $+x$; *b*) el eje $-y$; *c*) el eje $+z$. *d*) ¿Cómo debería moverse esta barra para que la fem a través de sus extremos tuviera el mayor valor posible con *b* a un potencial más alto que *a*, y cuál sería esa fem máxima?

Figura 29.40 Ejercicio 29.27.



Sección 29.5 Campos eléctricos inducidos

29.28. Un solenoide largo y delgado tiene 900 espiras por metro y radio de 2.50 cm. La corriente en el solenoide está aumentando a una tasa uniforme de 60.0 A/s. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en un punto cerca del centro del solenoide y *a*) a 0.500 cm del eje del solenoide; *b*) a 1.00 cm del eje del solenoide?

29.29. El campo magnético dentro de un solenoide largo y recto con sección transversal circular y radio R se incrementa a razón dB/dt. *a*) ¿Cuál es la tasa de cambio del flujo a través de un círculo con radio r_1 dentro del solenoide, normal al eje del solenoide, y con centro en el eje de éste? *b*) Determine la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide, a una distancia r_1 de su eje. Indique en un diagrama la dirección de este campo. *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido *afuera* del solenoide, a una distancia r_2 del eje? *d*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico inducido como función de la distancia r a partir del eje, de $r = 0$ a $r = 2R$. *e*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en una espira circular de radio $R/2$ con centro en el eje del solenoide? *f*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida si el radio en el inciso *e*) es R? *g*) ¿Cuál es la fem inducida si el radio en el inciso *e*) es $2R$?

29.30. El campo magnético $\vec{B}$ en todos los puntos del círculo coloreado que se muestra en la figura 29.31 tiene una magnitud inicial de 0.750 T. (El círculo podría representar aproximadamente el espacio dentro de un solenoide largo y delgado.) El campo magnético está dirigido hacia el plano del diagrama y disminuye a razón de -0.0350 T/s. *a*) ¿Cuál es la forma de las líneas del campo eléctrico inducido que se ilustra en la figura 29.31, dentro del círculo coloreado? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de este campo en cualquier punto del anillo conductor circular con radio 0.100 m? *c*) ¿Cuál es la corriente en el anillo si su resistencia es de 4.00 Ω. *d*) ¿Cuál es la fem entre los puntos *a* y *b* del anillo? *e*) Si el anillo se cortara en algún punto y los extremos se separaran ligeramente, ¿cuál sería la fem entre ellos?

29.31. Un solenoide largo y delgado tiene 400 espiras por metro y radio de 1.10 cm. La corriente en el solenoide aumenta con una tasa

uniforme de di/dt. El campo eléctrico inducido en un punto cerca del centro del solenoide y a 3.50 cm de su eje es de 8.00×10^{-6} V/m. Calcule di/dt.

29.32. Un anillo metálico de 4.50 cm de diámetro está colocado entre los polos norte y sur de imanes grandes con el plano de su área perpendicular al campo magnético. Estos imanes producen un campo inicial uniforme de 1.12 T entre ellos, pero se separan gradualmente, de manera que el campo sigue siendo uniforme aunque disminuye en forma sostenida a 0.250 T/s. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en el anillo? *b*) ¿En qué sentido (horario o antihorario) fluye la corriente de acuerdo con la perspectiva de alguien que se encuentre en el polo sur del imán?

29.33. Un solenoide largo y recto, con área de sección transversal de 8.00 cm^2, tiene un devanado de 90 espiras de alambre por centímetro, las cuales conducen una corriente de 0.350 A. Un segundo devanado de 12 espiras envuelve al solenoide en su centro. La corriente en el solenoide cesa de manera que su campo magnético se hace igual a cero en 0.0400 s. ¿Cuál es la fem inducida media en el segundo devanado?

Sección 29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell

29.34. Un dieléctrico de permitividad 3.5×10^{-11} F/m llena por completo el volumen entre las dos placas de un capacitor. Para $t > 0$ el flujo eléctrico a través del dieléctrico es $(8.0 \times 10^3\ \text{V} \cdot \text{m/s}^3)t^3$. El dieléctrico es ideal y no magnético; la corriente de conducción en el dieléctrico es igual a cero. ¿En qué momento la corriente de desplazamiento en el dieléctrico es igual a 21 μA?

29.35. El flujo eléctrico a través de cierta área de un dieléctrico es $(8.76 \times 10^3\ \text{V} \cdot \text{m/s}^4)t^4$. La corriente de desplazamiento a través de esa área es de 12.9 pA en el momento $t = 26.1$ ms. Calcule la constante dieléctrica del material.

29.36. Un capacitor de placas paralelas, lleno de aire, se está cargando como en la figura 29.23. Las placas circulares tienen un radio de 4.00 cm, y en un instante particular la corriente de conducción en los alambres es de 0.280 A. *a*) ¿Cuál es la densidad de la corriente de desplazamiento j_D en el espacio de aire entre las placas? *b*) ¿Cuál es la tasa con la que cambia el campo eléctrico entre las placas? *c*) ¿Cuál es el campo magnético inducido entre las placas a una distancia de 2.00 cm del eje? *d*) ¿Y a 1.00 cm del eje?

29.37. Corriente de desplazamiento en un dieléctrico. Suponga que las placas paralelas en la figura 29.23 tienen un área de 3.00 cm^2 y están separadas por una lámina de dieléctrico de 2.50 mm de espesor que llena por completo el volumen entre ellas. El dieléctrico tiene una constante dieléctrica de 4.70. (Se pueden ignorar los efectos de borde.) En cierto momento, la diferencia de potencial entre las placas es de 120 V y la corriente de conducción i_C es igual a 6.00 mA. En este instante, ¿cuáles son *a*) la carga q en cada placa; *b*) la tasa de cambio de la carga en las placas; *c*) la corriente de desplazamiento en el dieléctrico?

29.38. En la figura 29.23 las placas del capacitor tienen un área de 5.00 cm^2 y una separación de 2.00 mm. Las placas están en vacío. La corriente de carga i_C tiene un valor *constante* de 1.80 mA. En $t = 0$ la carga en las placas es cero. *a*) Calcule la carga en las placas, el campo eléctrico entre ellas y la diferencia de potencial entre las placas cuando $t = 0.500$ μs. *b*) Calcule dE/dt, la tasa de cambio con respecto al tiempo, del campo eléctrico entre las placas. ¿Varía dE/dt con el tiempo? *c*) Calcule la densidad de corriente de desplazamiento j_D entre las placas y, a partir de este dato, la corriente de desplazamiento total i_D. ¿Cómo son comparativamente i_C e i_D.

29.39. Corriente de desplazamiento en un alambre. Un alambre de cobre, largo y recto, con área de sección transversal de 2.1 mm^2, transporta una corriente de 16 A. La resistividad del material es $2.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico uniforme en el material? *b*) Si la corriente está cambiando a razón de 4000 A/s, ¿a qué tasa está cambiando el campo eléctrico en el material? *c*) En el inciso *b*), ¿cuál es la densidad de la corriente de desplazamiento en el material? (*Sugerencia:* como K para el cobre está muy cerca de 1, use $\epsilon = \epsilon_0$.) *d*) Si la corriente está cambiando como en el inciso *b*), ¿cuál es la magnitud del campo magnético a 6.0 cm del centro del alambre? Note que tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento deben incluirse en el cálculo de B. ¿Es significativa la contribución de la corriente de desplazamiento?

*Sección 29.8 Superconductividad

***29.40.** Un alambre largo y recto está hecho de un superconductor tipo I y conduce una corriente constante I a lo largo de su extensión. Demuestre que la corriente no se puede distribuir de manera uniforme en toda la sección transversal del alambre, sino que debe estar en toda la superficie.

***29.41.** Un superconductor tipo II en un campo externo entre B_{c1} y B_{c2} posee regiones que contienen flujo magnético y presentan resistencia, y también tiene regiones superconductoras. ¿Cuál es la resistencia de un cilindro largo y delgado hecho de ese material?

***29.42.** A temperaturas cercanas al cero absoluto, B_c se aproxima a 0.142 T en el caso del vanadio, un superconductor del tipo I. La fase normal del vanadio tiene una susceptibilidad magnética cercana al cero. Considere un cilindro largo y delgado de vanadio con su eje paralelo a un campo magnético externo $\vec{B}_0$ en la dirección $+x$. En puntos alejados de los extremos del cilindro, por simetría, todos los vectores magnéticos son paralelos al eje x. A temperaturas cercanas al cero absoluto, ¿cuáles son el campo magnético resultante $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ dentro y fuera del cilindro (lejos de los extremos) cuando *a*) $\vec{B}_0 = (0.130\ \text{T})\hat{\imath}$ y *b*) $\vec{B}_0 = (0.260\ \text{T})\hat{\imath}$?

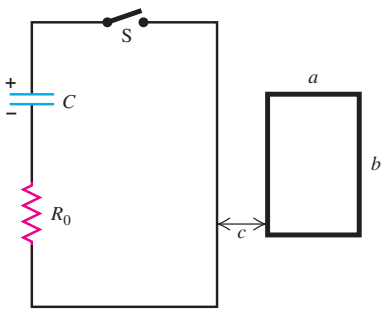
***29.43.** El compuesto SiV_3 es un superconductor del tipo II. A temperaturas cercanas al cero absoluto, los dos campos críticos son $B_{c1} = 55.0$ mT y $B_{c2} = 15.0$ T. La fase normal del SiV_3 tiene una susceptibilidad magnética cercana a cero. Un cilindro largo y delgado de SiV_3 tiene su eje paralelo a un campo magnético externo $\vec{B}_0$ en la dirección $+x$. En puntos alejados de los extremos del cilindro, por simetría, todos los vectores magnéticos son paralelos al eje x. A una temperatura cercana al cero absoluto, el campo magnético externo aumenta lentamente desde cero. ¿Cuáles son el campo magnético resultante $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ dentro del cilindro en puntos alejados de sus extremos *a*) justo antes de que el flujo magnético comience a penetrar en el material y *b*) inmediatamente después de que el material se vuelva completamente normal?

Problemas

29.44. Campo magnético cambiante. Usted está probando un nuevo sistema de adquisición de datos, el cual permite registrar una gráfica de la corriente en un circuito como función del tiempo. Como parte de la prueba, utiliza un circuito constituido por una bobina de alambre de cobre de 4.00 cm de radio y 500 espiras, conectada en serie a un resistor de 600 Ω. El cobre tiene una resistividad de $1.72 \times 10^{-8}\Omega \cdot \text{m}$, y el alambre usado para la bobina tiene un diámetro de 0.0300 mm. Usted coloca la bobina en una mesa inclinada 30.0° con respecto a la horizontal y que se encuentra entre los polos de un electroimán. El electroimán genera un campo magnético dirigido verticalmente hacia arriba que es igual a cero cuando $t < 0$, igual a $(0.120\ \text{T}) \times (1 - \cos\pi t)$ cuando $0 \le t \le 1.00$ s, e igual a 0.240 T cuando $t > 1.00$ s. *a*) Dibuje la gráfica que debería generar su sistema de adquisición de datos. (Se trata de un sistema completo, por lo que la gráfica debe incluir leyendas y valores numéricos en sus ejes.) *b*) Si mira la bobina en dirección vertical hacia abajo, ¿la corriente fluye en sentido horario o antihorario?

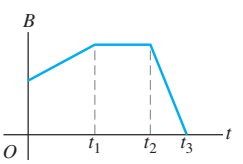
29.45. En el circuito que se aprecia en la figura 29.41, el capacitor tiene una capacitancia $C = 20\ \mu$F e inicialmente se carga a 100 V con la polaridad que se indica. El resistor R_0 tiene una resistencia de 10 Ω. En el momento $t = 0$ se cierra el interruptor. El circuito pequeño no está conectado de ninguna forma al circuito grande. El alambre del circuito pequeño tiene una resistencia de 1.0 Ω/m y contiene 25 espiras. El circuito grande es un rectángulo de 2.0 por 4.0 m, mientras que el pequeño tiene dimensiones $a = 10.0$ cm y $b = 20.0$ cm. La distancia c es de 5.0 cm. (La figura no está dibujada a escala.) Ambos circuitos están fijos. Suponga que sólo el alambre más cercano al circuito pequeño produce un campo magnético apreciable a través de él. *a*) Determine la corriente en el circuito grande 200 μs después de que se cerró S. *b*) Calcule la corriente en el circuito pequeño 200 μs después de haber cerrado S. (*Sugerencia:* véase el problema 29.7.) *c*) Determine el sentido de la corriente en el circuito pequeño. *d*) Justifique por qué se puede ignorar el campo magnético de todos los alambres del circuito grande, excepto el del que está más cerca del circuito pequeño.

Figura 29.41 Problema 29.45.



29.46. Una bobina plana está orientada con el plano de su área formando ángulos rectos con un campo magnético espacialmente uniforme. La magnitud de este campo varía con el tiempo de acuerdo con la gráfica de la figura 29.42. Dibuje una gráfica cualitativa (pero exacta) de la fem inducida en la bobina como función del tiempo. Asegúrese de indicar en la gráfica los tiempos t_1, t_2 y t_3.

Figura 29.42 Problema 29.46.



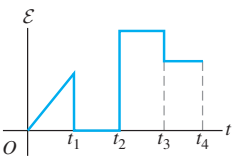
29.47. A través de una espira circular de alambre de radio a y resistencia R, pasa inicialmente un flujo magnético provocado por un campo magnético externo. Después, el campo externo disminuye a cero. Se induce una corriente en la espira mientras el campo externo está cambiando; sin embargo, esta corriente no se detiene en el instante en que el campo externo deja de cambiar. La razón es que la corriente, por sí misma, genera un campo magnético que da origen a un flujo a través de la espira. Si la corriente cambia, el flujo a través de la espira también cambia, y aparece una fem inducida en la espira que se opone al cambio. *a*) El campo magnético en el centro de la espira de radio a producido por la corriente i en la espira está dado por $B = \mu_0 i/2a$. Si se usa la aproximación burda de que el campo tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de la espira, ¿cuál es el flujo de este campo a través de la espira? *b*) Con base en la ley de Faraday, la ecuación (29.3) y la relación $\mathcal{E} = iR$, demuestre que después de que el campo externo ha dejado de cambiar, la corriente en la espira obedece la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = -\left(\frac{2R}{\pi\mu_0 a}\right)i$$

(*c*) Si la corriente tiene el valor i_0 en $t = 0$, el instante en que el campo externo deja de cambiar, resuelva la ecuación del inciso *b*) para encontrar i como función del tiempo cuando $t > 0$. (*Sugerencia:* en la sección 26.4 se encontró una ecuación diferencial similar, la (26.15), para la cantidad q. Esta ecuación para i se resuelve del mismo modo.) *d*) Si la espira tiene un radio $a = 50$ cm y resistencia $R = 0.10\ \Omega$, ¿cuánto tiempo después de que el campo externo deja de cambiar, la corriente será igual a $0.010i_0$ (es decir, $\frac{1}{100}$ de su valor inicial)? *e*) Al resolver los ejemplos de este capítulo ignoramos los efectos descritos en este problema. Explique por qué ésta es una buena aproximación.

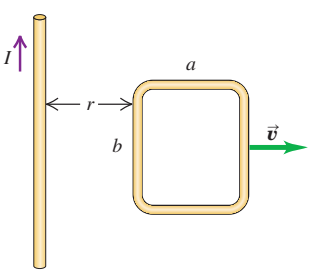
29.48. Una bobina está fija en un campo magnético externo, espacialmente uniforme y variable con el tiempo. La fem inducida en esta bobina como función del tiempo se ilustra en la figura 29.43. Dibuje una gráfica cualitativa clara del campo magnético externo como función del tiempo, considerando que comenzó desde cero. En la gráfica incluya los puntos t_1, t_2, t_3 y t_4.

Figura 29.43 Problema 29.48.



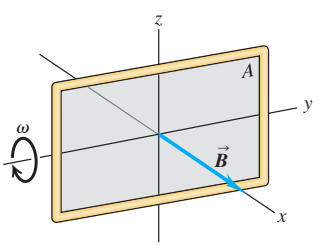
29.49. En la figura 29.44, se tira de la espira hacia la derecha a velocidad constante, v. Una corriente constante I fluye en el alambre largo, en el sentido que se indica. *a*) Calcule la magnitud de la fem neta $\mathcal{E}$ inducida en la espira. Haga esto de dos modos: i) con base en la ley de Faraday de la inducción (*Sugerencia:* véase el problema 29.7) y ii) examinando la fem inducida en cada segmento de la espira debido al movimiento de ésta. *b*) Encuentre el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la espira. Haga esto de dos maneras: i) con base en la ley de Lenz y ii) a partir de la fuerza magnética sobre las cargas en la espira. *c*) Compruebe su respuesta para la fem del inciso *a*) en los siguientes casos especiales para ver si es físicamente razonable: i) La espira está fija; ii) la espira es muy delgada, de manera que $a \to 0$; iii) la espira está muy lejos del alambre.

Figura 29.44 Problema 29.49.



29.50. Suponga que la espira en la figura 29.45 se hace girar *a*) en torno al eje y; *b*) en torno al eje x; *c*) en torno a un borde paralelo al eje z. ¿Cuál es la fem máxima inducida en cada caso si $A = 600$ cm^2, $\omega = 35.0$ rad/s y $B = 0.450$ T?

Figura 29.45 Problema 29.50.



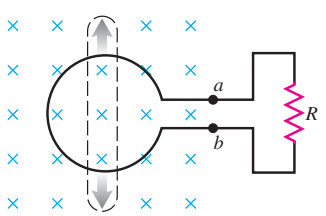
29.51. Como nuevo ingeniero electricista en la compañía de electricidad local, le asignaron el proyecto de diseñar un generador de voltaje ca sinusoidal con voltaje máximo de 120 V. Además de mucho alambre,

dispone de dos fuertes imanes capaces de producir un campo magnético constante y uniforme de 1.5 T sobre un área cuadrada de 10.0 cm de lado cuando están separados por una distancia de 12.0 cm. El diseño básico debe consistir en una bobina cuadrada que gira en el campo magnético uniforme. Para tener una resistencia aceptable, la bobina debe tener un máximo de 400 espiras. ¿Cuál es la tasa de rotación mínima (en rpm) de la bobina para generar el voltaje requerido?

29.52. ¿Construir un generador? Usted naufragó y se encuentra en una isla tropical desierta. Tiene algunos aparatos eléctricos que podrían operar con un generador, pero no tiene imanes. En el lugar donde se encuentra, el campo magnético de la Tierra es horizontal y tiene una magnitud de 8.0×10^{-5} T, y decide intentar utilizar este campo para construir un generador haciendo girar muy rápido una gran bobina circular de alambre. Necesita producir una fem pico de 9.0 V y estima que puede hacer girar la bobina a 30 rpm dando vueltas a una manivela. También decide que para tener una resistencia aceptable en la bobina, el número máximo de espiras que la bobina puede tener es de 2000. *a*) ¿Qué área debe tener la bobina? *b*) Si la bobina es circular, ¿cuál es la máxima rapidez de traslación de un punto de la bobina cuando ésta gira? ¿Piensa que es factible un aparato así? Explique su respuesta.

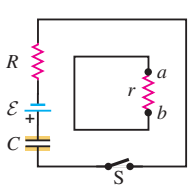
29.53. Una espira circular flexible de 6.50 cm de diámetro está en un campo magnético con magnitud de 0.950 T, dirigido hacia el plano de la página, como se ilustra en la figura 29.46. Se tira de la espira en los puntos indicados por las flechas, para formar una espira de área igual a cero en 0.250 s. *a*) Calcule la fem inducida media en el circuito. *b*) ¿Cuál es el sentido de la corriente en *R*: de *a* a *b* o de *b* a *a*? Explique su razonamiento.

Figura **29.46** Problema 29.53.



29.54. Circuito dentro de otro circuito. La figura 29.47 muestra un circuito pequeño dentro de uno más grande, ambos sobre la superficie de una mesa. El interruptor se cierra en $t = 0$ con el capacitor inicialmente descargado. Suponga que el circuito pequeño no ejerce un efecto apreciable sobre el grande. *a*) ¿Cuál es el sentido de la corriente (de *a* a *b* o de *b* a *a*) en el resistor *r* i) en el instante después de que el interruptor se cierra y ii) una constante de tiempo después de haber cerrado el interruptor? *b*) Dibuje la gráfica de la corriente en el circuito pequeño como función del tiempo, tomando como positivo el sentido horario.

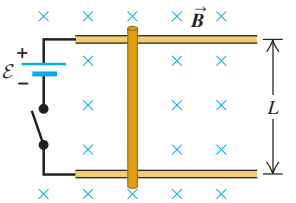
Figura **29.47** Problema 29.54.



29.55. Rapidez terminal. Una varilla conductora con longitud *L*, masa *m* y resistencia *R* se mueve sin fricción sobre rieles metálicos, como se indica en la figura 29.11. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ está dirigido hacia el plano de la figura. La varilla parte del reposo y sobre ella actúa una fuerza constante $\vec{F}$ dirigida hacia la derecha. Los rieles tienen longitud infinita y resistencia despreciable. *a*) Elabore una gráfica de la rapidez de la varilla como función del tiempo. *b*) Encuentre una expresión para la rapidez terminal (la rapidez cuando la aceleración de la varilla es igual a cero).

29.56. Rapidez terminal. Una barra de longitud $L = 0.8$ m tiene libertad para deslizarse sin fricción sobre rieles horizontales, como se muestra en la figura 29.48. Hay un campo magnético uniforme $B = 1.5$ T dirigido hacia el plano de la figura. En un extremo de los rieles hay una batería con fem $\mathcal{E} = 12$ V y un interruptor. La barra tiene una masa de 0.90 kg y resistencia de 5.0 Ω, y pueden ignorarse todas las demás resistencias en el circuito. Se cierra el interruptor en el momento $t = 0$. *a*) Elabore una gráfica de la rapidez de la barra como función del tiempo. *b*) ¿Cuál es la aceleración de la barra inmediatamente después de haber cerrado el interruptor? *c*) ¿Cuál es la aceleración de la barra cuando su rapidez es de 2.0 m/s? *d*) ¿Cuál es la rapidez terminal de la barra?

Figura **29.48** Problema 29.56.

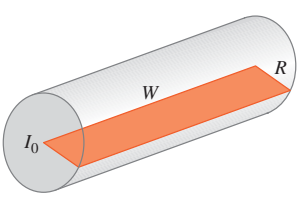


29.57. Fem de una antena. Un satélite que orbita la Tierra sobre el ecuador a una altitud de 400 km, tiene una antena que puede modelarse como una varilla de 2.0 m de largo. La antena está orientada de manera perpendicular a la superficie de la Tierra. En el ecuador, el campo magnético de nuestro planeta es esencialmente horizontal y tiene un valor de 8.0×10^{-5} T; ignore cualesquiera cambios en *B* debidos a la altitud. Si la órbita es circular, determine la fem inducida entre los extremos de la antena.

29.58. Fem en una bala. En el ecuador, el campo magnético de la Tierra es aproximadamente horizontal, está dirigido hacia el norte y tiene un valor de 8×10^{-5} T. *a*) Estime la fem inducida entre las partes superior e inferior de una bala disparada horizontalmente a un blanco en el ecuador, si la bala se dispara hacia el este. Suponga que la bala tiene longitud de 1 cm, diámetro de 0.4 cm y se desplaza a 300 m/s. ¿Cuál está a mayor potencial: la parte superior o la parte inferior de la bala? *b*) ¿Cuál es la fem si la bala viaja hacia el sur? *c*) ¿Cuál es la fem inducida entre las partes anterior y posterior de la bala con cualquier velocidad horizontal?

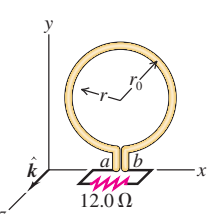
29.59. Un alambre cilíndrico muy largo de radio *R* conduce una corriente I_0 distribuida de manera uniforme a través de la sección transversal del alambre. Calcule el flujo magnético a través de un rectángulo que tiene un lado de longitud *W* que se extiende a lo largo del centro del alambre, y otro lado de longitud *R*, como se indica en la figura 29.49 (véase el problema 29.7).

Figura **29.49** Problema 29.59.



29.60. Un anillo conductor circular con radio $r_0 = 0.0420$ m está en el plano *xy* en una región de campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0[1 - 3(t/t_0)^2 + 2(t/t_0)^3]\hat{k}$. En esta expresión, $t_0 = 0.0100$ s y es constante, *t* es el tiempo, $\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección $+z$ y $B_0 = 0.0800$ T y es constante. En los puntos *a* y *b* (figura 29.50) hay una pequeña abertura en el anillo con alambres que van a un circuito externo de resistencia $R = 12.0$ Ω. No hay campo magnético en la ubicación del circuito externo. *a*) Obtenga una expresión, como función del tiempo, para el flujo magnético total Φ_B a través del anillo. *b*) Determine la fem inducida en el anillo en el momento $t = 5.00 \times 10^{-3}$ s. ¿Cuál es la polaridad de la fem? *c*) Debido a la resistencia interna del anillo, la corriente a través de *R* en el

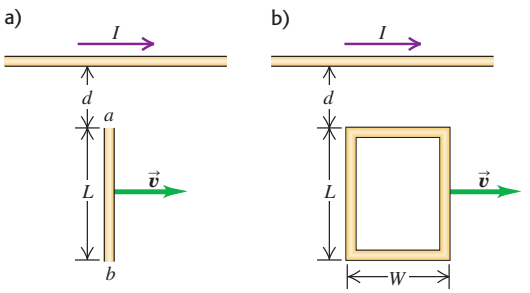
Figura **29.50** Problema 29.60.



momento dado en el inciso *b*) es de sólo 3.00 mA. Determine la resistencia interna del anillo. *d*) Calcule la fem en el anillo en el momento $t = 1.21 \times 10^{-2}$ s. ¿Cuál es la polaridad de la fem? *e*) Determine el instante en el que se invierte el sentido de la corriente que fluye a través de *R*.

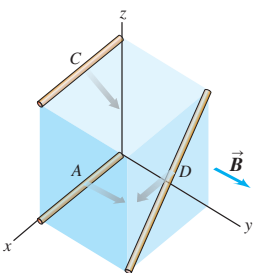
29.61. El alambre largo y recto que se muestra en la figura 29.51a conduce una corriente constante *I*. Una barra metálica con longitud *L* se mueve a velocidad constante $\vec{v}$, como se indica en la figura. El punto *a* está a una distancia *d* del alambre. *a*) Calcule la fem inducida en la barra. *b*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está a mayor potencial? *c*) Si se remplaza la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia *R* (figura 29.51b), ¿cuál sería la magnitud de la corriente inducida en la espira?

Figura **29.51** Problema 29.61.



29.62. El cubo de la figura 29.52 mide 50.0 cm de arista y está en un campo magnético uniforme de 0.120 T, dirigido a lo largo del eje *y* positivo. Los alambres *A*, *C* y *D* se mueven en las direcciones indicadas, cada uno con rapidez de 0.350 m/s. (El alambre *A* se mueve paralelo al plano *xy*, *C* se mueve a un ángulo de 45° por debajo del plano *xy*, y *D* se mueve paralelo al plano *xz*.) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de cada alambre?

Figura **29.52** Problema 29.62.

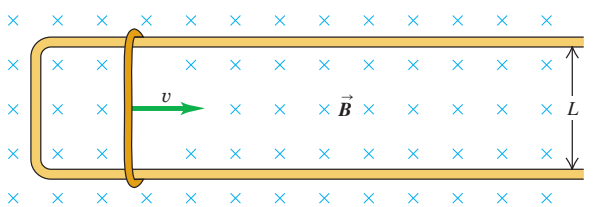


29.63. Una varilla delgada, de 0.240 m de largo, gira con rapidez angular de 8.80 rad/s en torno a un eje que pasa por un extremo y es perpendicular a la varilla. El plano de rotación de la varilla es perpendicular a un campo magnético uniforme con magnitud de 0.650 T. *a*) ¿Cuál es la fem inducida en la varilla? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus extremos? *c*) Suponga que en vez de lo anterior, la varilla gira a 8.80 rad/s en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. En este caso, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla? ¿Y entre el centro de la varilla y un extremo?

29.64. Máquina magnética para hacer ejercicio. Usted ha diseñado una nueva máquina de hacer ejercicio con un mecanismo muy sencillo (figura 29.36). Una barra vertical de plata (elegida por su escasa resistividad y porque hace que la máquina se vea bonita) con longitud $L = 3.0$ m tiene libertad para moverse hacia la izquierda o hacia la derecha sin fricción sobre rieles de plata. Todo el aparato se coloca en un campo magnético uniforme, horizontal, con intensidad de 0.25 T. Cuando se empuja la barra hacia la izquierda o hacia la derecha, su movimiento origina una corriente en el circuito que incluye a la barra. La resistencia de ésta y la de los rieles es despreciable. El campo magnético ejerce una fuerza sobre la barra conductora de corriente, que se opone al movimiento de la barra. El beneficio para la salud se deriva del ejercicio que el usuario hace al trabajar contra esta fuerza. *a*) El objetivo del diseño es que la persona que haga ejercicio realice trabajo a razón de 25 watts al mover la barra con una rapidez constante de 2.0 m/s. ¿Cuál debe ser la resistencia *R*? *b*) Usted decide que quiere tener la capacidad de variar la potencia requerida por la persona, de manera que la máquina se adapte a la fuerza y condición de cada deportista. Si la potencia se incrementa a 50 W modificando *R* mientras se dejan constantes los demás parámetros del diseño, ¿*R* debe aumentar o disminuir? Calcule el valor de *R* para 50 W. *c*) Cuando usted comienza a construir el prototipo de máquina, descubre que es difícil producir un campo magnético de 0.25 T en un área tan grande. Si reduce la longitud de la barra a 0.20 m mientras *B*, *v* y *R* valen lo mismo que en el inciso *a*), ¿cuál será la potencia que se demande de la persona que use el aparato?

29.65. En la figura 29.53 se muestra una espira rectangular con ancho *L* y un alambre corredizo con masa *m*. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ está dirigido en forma perpendicular al plano de la espira hacia el plano de la figura. Se da al alambre corredizo una rapidez inicial v_0 y luego se libera. No hay fricción entre el alambre corredizo y la espira, y la resistencia de la espira es despreciable en comparación con la resistencia *R* del alambre corredizo. *a*) Obtenga una expresión para *F*, la magnitud de la fuerza ejercida sobre el alambre mientras se mueve a velocidad *v*; *b*) Demuestre que la distancia *x* que el alambre se mueve antes de llegar al reposo es $x = mv_0R/a^2B^2$.

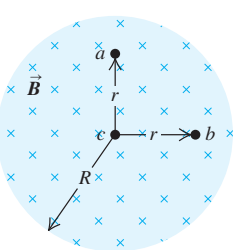
Figura **29.53** Problema 29.65.



29.66. Una varilla metálica de 25.0 cm de largo está en el plano *xy* y forma un ángulo de 36.9° con el eje positivo de las *x*, y un ángulo de 53.1° con el eje positivo de las *y*. La varilla se mueve en la dirección $+x$ con una rapidez de 4.20 m/s, y está en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0.120\ \text{T})\hat{\imath} - (0.220\ \text{T})\hat{\jmath} - (0.0900\ \text{T})\hat{k}$. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la varilla? *b*) Indique cuál extremo de la varilla está a un potencial mayor.

29.67. El campo magnético $\vec{B}$, en todos los puntos dentro de una región circular de radio *R*, es uniforme en el espacio y está dirigido hacia el plano de la página, como se muestra en la figura 29.54. (La región podría ser una sección transversal dentro de los devanados de un solenoide largo y recto.) Si el campo magnético se incrementa a una tasa dB/dt, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza sobre una carga puntual, positiva y fija *q*, ubicada en los puntos *a*, *b* y *c*? (El punto *a* se encuentra a una distancia *r* por arriba del centro de la región, el punto *b* está a una distancia *r* a la derecha del centro, y el punto *c* se halla en el centro de la región.)

Figura **29.54** Problema 29.67.



29.68. La hélice de un avión con longitud total *L* gira alrededor de su centro con rapidez angular ω en un campo magnético perpendicular al plano de rotación. Modele la hélice como una barra delgada y uniforme, y determine la diferencia de potencial entre *a*) el centro y cualquiera de los extremos de la hélice, y *b*) los dos extremos. *c*) Si el campo es el de la Tierra, de 0.50 G, y la hélice gira a 220 rpm y mide 2.0 m de largo, ¿cuál es la diferencia de potencial entre el punto medio y cada extremo? ¿Es suficientemente grande como para preocuparse?

29.69. Es imposible tener un campo eléctrico uniforme que caiga abruptamente a cero en una región del espacio en que el campo magnético sea constante y en el que no haya cargas eléctricas. Para demostrar

esta afirmación, use el método de contradicción: suponga que el caso descrito *sí es* posible, y luego demuestre que la suposición contradice alguna ley de la naturaleza. *a*) En la mitad inferior de una hoja de papel dibuje líneas horizontales equidistantes que representen un campo eléctrico uniforme a su derecha. Use líneas punteadas para dibujar un rectángulo *abcda* con el lado horizontal *ab* en la región del campo eléctrico, y lado horizontal *cd* en la mitad superior de la hoja de papel, donde $E = 0$. *b*) Demuestre que la integración alrededor del rectángulo contradice la ley de Faraday, ecuación (29.21).

29.70. Caída de una espira cuadrada. Una espira cuadrada de cobre orientada verticalmente cae desde una región en la que el campo $\vec{B}$ es horizontal, uniforme y perpendicular al plano de la espira, hacia una región donde el campo es igual a cero. La espira se libera desde el reposo y al principio está por completo dentro de la región del campo magnético. Sea s la longitud lateral de la espira, y d el diámetro del alambre. La resistividad del cobre es ρ_R y su densidad es ρ_m. Si la espira alcanza su rapidez terminal mientras su segmento superior está aún en la región del campo magnético, encuentre una expresión para la rapidez terminal.

29.71. En una región del espacio en la que no hay corrientes de conducción ni de desplazamiento, es imposible tener un campo magnético uniforme que caiga abruptamente a cero. Use el método de contradicción para demostrar este enunciado: suponga que ese caso *sí es* posible, y luego demuestre que la suposición contradice una ley de la naturaleza. *a*) En la mitad inferior de una hoja de papel dibuje líneas horizontales equidistantes que representen un campo magnético uniforme a su derecha. Use líneas punteadas para dibujar un rectángulo *abcda* con su lado horizontal *ab* en la región del campo magnético, y su lado horizontal *cd* en la mitad superior de la hoja de papel, donde $B = 0$. *b*) Demuestre que la integración alrededor de su rectángulo contradice la ley de Ampère, ecuación (29.15).

29.72. Un capacitor tiene dos placas paralelas con área A separadas por una distancia d. El espacio entre las placas está lleno con un material con constante dieléctrica K. El material no es un aislante perfecto, sino que tiene resistividad ρ. El capacitor está inicialmente cargado con carga de magnitud Q_0 en cada placa que gradualmente se descarga por conducción a través del dieléctrico. *a*) Calcule la densidad de corriente de conducción $j_C(t)$ en el dieléctrico. *b*) Demuestre que en cualquier instante la densidad de corriente de desplazamiento en el dieléctrico es igual en magnitud a la densidad de corriente de conducción, pero con sentido opuesto, por lo que la densidad de corriente *total* es igual a cero en cualquier instante.

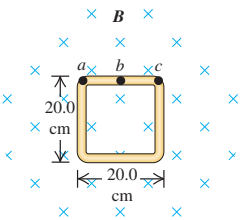
29.73. Una varilla de silicio puro (resistividad $\rho = 2300\ \Omega \cdot \text{m}$) conduce una corriente. El campo eléctrico varía con el tiempo en forma sinusoidal, de acuerdo con la expresión $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, donde $E_0 = 0.450$ V/m, $\omega = 2\pi f$, y la frecuencia es $f = 120$ Hz. *a*) Determine la magnitud de la máxima densidad de corriente de conducción en el alambre. *b*) Suponga que $\epsilon = \epsilon_0$, calcule la máxima densidad de la corriente de desplazamiento en el alambre, y compárela con el resultado del inciso *a*). *c*) ¿A qué frecuencia f las densidades máximas de conducción y de desplazamiento se hacen iguales si $\epsilon = \epsilon_0$ (que en realidad no es el caso)? *d*) Con la frecuencia determinada en el inciso *c*), ¿cuál es la *fase* relativa de las corrientes de conducción y desplazamiento?

Problemas de desafío

29.74. Una espira conductora cuadrada de alambre, con lado L, masa total m, y resistencia total R, inicialmente está en el plano xy horizontal, con vértices en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(0, L, 0)$, $(L, 0, 0)$ y $(L, L, 0)$. Hay un campo magnético uniforme dirigido hacia arriba $\vec{B} = B\hat{k}$ en el espacio del interior y alrededor de la espira. El lado de la espira que va de $(0, 0, 0)$ a $(L, 0, 0)$ está fijo en el eje x; el resto de la espira tiene libertad para girar alrededor de este eje. Cuando se libera la espira, comienza a girar debido al par de torsión gravitacional. *a*) Encuentre el vector par de torsión *neto* (magnitud y dirección) que actúa sobre la espira cuando éste ha barrido un ángulo ϕ a partir de su orientación original y está girando hacia abajo con una rapidez angular ω. *b*) Encuentre la aceleración angular de la espira en el instante descrito en el inciso *a*). *c*) En comparación con el caso en el que el campo magnético es igual a cero, ¿a la espira le toma más tiempo o menos tiempo describir un giro de 90°? Explique su respuesta. *d*) ¿Se conserva la energía mecánica cuando la espira gira hacia abajo? Explique su respuesta.

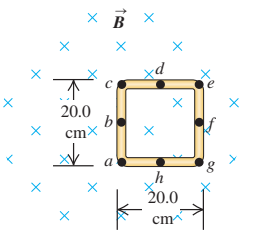
29.75. Una espira conductora, cuadrada, de 20.0 cm por lado, está situada en el mismo campo magnético que se ilustra en el ejercicio 29.30. (Véase la figura 29.55; el centro de la espira cuadrada está en el centro de la región del campo magnético.) *a*) Copie la figura 29.55 y dibuje vectores para indicar la dirección y magnitud relativas del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ en los puntos *a*, *b* y *c*. *b*) Demuestre que la componente de $\vec{E}$ a lo largo de la espira tiene el mismo valor en todos los puntos de la espira y es igual a la del anillo mostrado en la figura 29.31 (véase el ejercicio 29.30). *c*) ¿Cuál es la corriente inducida en la espira si su resistencia es 1.90 Ω? *d*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*?

Figura 29.55 Problema de desafío 29.75.



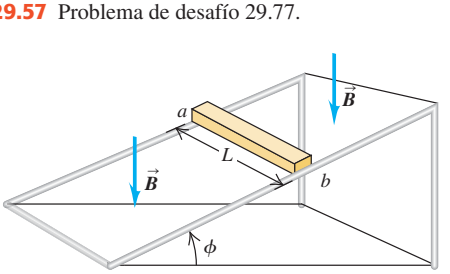
29.76. Una espira conductora, uniforme y cuadrada, de 20.0 cm por lado, está situada en el mismo campo magnético que se muestra en el ejercicio 29.30, con su lado *ac* a lo largo de un diámetro y con el punto *b* en el centro del campo (figura 29.56). *a*) Copie la figura 29.56 y dibuje vectores que muestren la dirección y magnitud relativa del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ en los puntos señalados con letras. *b*) ¿Cuál es la fem inducida en el lado *ac*? *c*) ¿Cuál es la fem inducida en la espira? *d*) ¿Cuál es la corriente en la espira si su resistencia es 1.90 Ω? *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *c*? ¿Cuál punto está a un potencial mayor?

Figura 29.56 Problema de desafío 29.76.



29.77. Una barra metálica con longitud L, masa m y resistencia R está colocada sobre rieles metálicos sin fricción que están inclinados un ángulo ϕ por encima de la horizontal. Los rieles tienen una resistencia despreciable. Como se indica en la figura 29.57, hay un campo magnético uniforme de magnitud B dirigido hacia abajo. La barra se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo por los rieles. *a*) El sentido de la corriente inducida en la barra, ¿es de *a* a *b* o de *b* a *a*? *b*) ¿Cuál es la rapidez terminal de la barra? *c*) ¿Cuál es la corriente inducida en la barra cuando se ha alcanzado la rapidez terminal? *d*) Después de haber alcanzado la rapidez terminal, ¿a qué tasa se convierte la energía eléctrica en energía térmica en la resistencia de la barra? *e*) Una vez que se llegó a la rapidez terminal, ¿a qué tasa la gravedad realiza trabajo sobre la barra? Compare su respuesta con la del inciso *d*).

Figura 29.57 Problema de desafío 29.77.



29.78. Considere un disco de metal uniforme que gira a través de un campo magnético perpendicular $\vec{B}$, como se observa en la figura 29.19a. El disco tiene una masa m, radio R y espesor t, está hecho de un material con resistividad ρ y gira en el sentido horario en la figura 29.19a, con rapidez angular ω. El campo magnético está dirigido hacia el plano del disco. Suponga que la región en la que está confinado el disco no es circular, como se observa en la figura 29.19a, sino que es un cuadrado pequeño con lados de longitud L $(L \ll R)$ con su centro a una distancia d del punto O (el centro del disco). En la figura 29.19a, los lados de este cuadrado son horizontales y verticales. *a*) Demuestre que la corriente inducida dentro del cuadrado es aproximadamente igual a $I = \omega dBLt/\rho$. ¿En qué sentido fluye esta corriente? (*Sugerencia:* suponga que la resistencia a la corriente está confinada a la región del cuadrado. La corriente también encuentra resistencia conforme fluye fuera de la región en que está confinado el campo magnético, como se observa en la figura 29.19b; sin embargo, esta resistencia es relativamente pequeña, ya que la corriente puede fluir a través de un área muy amplia. Recuerde la ecuación (25.10) para la resistencia, dada en la sección 25.3.) *b*) Demuestre que la corriente inducida da origen a un par de torsión de magnitud aproximada $\tau = \omega d^2B^2L^2t/\rho$ que se opone a la rotación del disco (es decir, un par de torsión en sentido antihorario). *c*) ¿Cuáles serían las magnitudes y direcciones de la corriente inducida y del par de torsión si la dirección de $\vec{B}$ fuera aún hacia el plano del disco pero el disco girara en sentido antihorario? ¿Y si la dirección de $\vec{B}$ saliera del plano hacia el observador y el disco girara en sentido antihorario?

30 INDUCTANCIA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo la corriente que varía con el tiempo y que circula por una bobina induce una fem en otra bobina no conectada.
- Cómo relacionar la fem inducida en un circuito con la tasa de cambio de la corriente en el mismo circuito.
- Cómo calcular la energía almacenada en un campo magnético.
- A analizar circuitos que incluyen tanto un resistor como un inductor (bobina).
- Por qué ocurren oscilaciones eléctricas en circuitos que incluyen tanto un inductor como un capacitor.
- La razón por la que decaen las oscilaciones en circuitos con un inductor, un resistor y un capacitor.

? Muchos semáforos cambian cuando un automóvil se acerca a la intersección. ¿Cómo detecta el aparato la presencia del vehículo?

Tome un tramo de alambre de cobre y enróllelo alrededor de un lápiz para que forme una bobina. Si coloca esa bobina en un circuito, ¿se comporta en forma diferente que un trozo recto de alambre? Es sorprendente, pero la respuesta es *sí*. En un automóvil común impulsado con gasolina, una bobina de esta clase es la que hace posible que una batería de 12 volts provea miles de volts a las bujías, lo que a la vez posibilita que éstas se enciendan y pongan en marcha al motor. Otras bobinas de este tipo se usan para mantener encendidas las lámparas de luz fluorescente. En ciertas ciudades se colocan grandes bobinas bajo las calles para controlar la operación de los semáforos. En todas estas aplicaciones, y muchas más, intervienen los efectos de la *inducción* que estudiamos en el capítulo 29.

Una corriente variable en una bobina induce una fem en otra bobina adyacente. El acoplamiento entre ellas queda descrito por su *inductancia mutua*. Una corriente variable en una bobina también induce una fem en esa misma bobina, la cual recibe el nombre de *inductor*, y la relación de la corriente con la fem está descrita por la *inductancia* (también llamada *autoinductancia*) de la bobina. Si una bobina inicialmente conduce corriente, cuando ésta disminuye, hay una liberación de energía; este principio se utiliza en los sistemas de encendido de los automóviles. Veremos que esta energía liberada estaba almacenada en el campo magnético generado por la corriente que inicialmente circulaba por la bobina, y estudiaremos ciertas aplicaciones prácticas de la energía del campo magnético.

También analizaremos brevemente lo que ocurre cuando un inductor forma parte de un circuito. En el capítulo 31 proseguiremos con el estudio de cómo se comportan los inductores en los circuitos de corriente alterna; en ese capítulo aprenderemos por qué los inductores tienen un papel esencial en la electrónica moderna, lo que incluye sistemas de comunicación, fuentes de suministro de energía y muchos otros dispositivos.

30.1 Inductancia mutua

En la sección 28.4 estudiamos la interacción magnética entre dos alambres que transportan corrientes *estables*; la corriente en uno de los alambres genera un campo magnético que ejerce una fuerza sobre la corriente en el otro alambre. Pero cuando hay

una corriente *variable* en uno de los circuitos, surge una interacción adicional. Considere dos bobinas de alambre cerca una de la otra, como se ilustra en la figura 30.1. Una corriente que circula por la bobina 1 produce un campo magnético $\vec{B}$ y, por lo tanto, un flujo magnético a través de la bobina 2. Si la corriente en la bobina 1 cambia, el flujo a través de la bobina 2 también cambia; de acuerdo con la ley de Faraday, esto induce una fem en la bobina 2. De este modo, un cambio en la corriente de un circuito puede inducir otra corriente en un segundo circuito.

Analicemos con más detalle la situación que aparece en la figura 30.1. Para representar las cantidades que varían con el tiempo usaremos letras minúsculas; por ejemplo, una corriente variable en el tiempo se representa con i, a menudo con un subíndice para identificar el circuito. En la figura 30.1, una corriente i_1 establece un campo magnético (indicado por las líneas de color azul), y algunas de estas líneas de campo pasan a través de la bobina 2. Denotaremos con Φ_{B2} el flujo magnético a través de *cada* espira de la bobina 2, causado por la corriente i_1 en la bobina 1. (Si el flujo es diferente a través de las distintas espiras de la bobina, entonces Φ_{B2} denota el flujo *medio*.) El campo magnético es proporcional a i_1, de manera que Φ_{B2} también es proporcional a i_1. Cuando i_1 cambia, Φ_{B2} cambia; este flujo cambiante induce una fem $\mathcal{E}_2$ en la bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \tag{30.1}$$

Podríamos representar la proporcionalidad entre Φ_{B2} e i_1 en la forma Φ_{B2} = (constante) i_1, pero, en vez de ello, es más conveniente incluir el número de espiras N_2 en la relación. Al introducir una constante de proporcionalidad M_{21}, llamada **inductancia mutua** de las dos bobinas, escribimos

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21}i_1 \tag{30.2}$$

donde Φ_{B2} es el flujo a través de *una sola* espira de la bobina 2. De ahí que,

$$N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

y la ecuación (30.1) se rescribe como

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt} \tag{30.3}$$

Es decir, un cambio en la corriente i_1 en la bobina 1 induce una fem en la bobina 2, que es directamente proporcional a la tasa de cambio de i_1 (figura 30.2).

También se podría escribir la definición de la inductancia mutua, ecuación (30.2), como

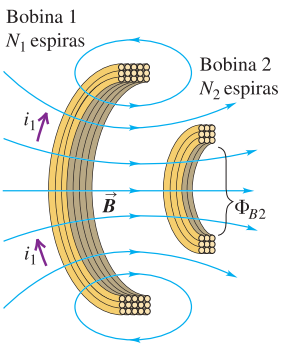
$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1}$$

Si las bobinas están en el vacío, el flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina 2 es directamente proporcional a la corriente i_1. Entonces, la inductancia mutua M_{21} es una constante que sólo depende de la geometría de las dos bobinas (el tamaño, la forma, el número de espiras y la orientación de cada una, así como la separación entre ellas). Si está presente un material magnético, M_{21} también depende de las propiedades magnéticas de éste. Si el material tiene propiedades magnéticas no lineales, es decir, si la permeabilidad relativa K_m (definida en la sección 28.8) no es constante y la magnetización no es proporcional al campo magnético, entonces Φ_{B2} deja de ser directamente proporcional a i_1. En ese caso, la inductancia mutua también depende del valor de i_1. En este análisis supondremos que cualquier material magnético que esté presente tiene una K_m constante, por lo que el flujo *es* directamente proporcional a la corriente y M_{21} sólo depende de la geometría.

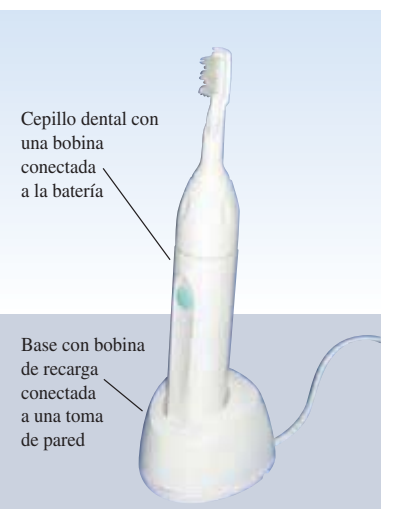
Podría volverse a hacer el análisis para el caso opuesto, en el que una corriente cambiante i_2 en la bobina 2 causa un flujo cambiante Φ_{B1} y una fem $\mathcal{E}_1$ en la bobina 1. Esperaríamos que la constante correspondiente M_{12} fuera diferente de M_{21} porque, en general, las dos bobinas no son idénticas y el flujo a través de ellas no es el mismo. Sin embargo, M_{12} *siempre* es igual a M_{21}, aun cuando las dos bobinas no sean simétricas. A este valor común lo llamamos simplemente inductancia mutua, y lo denotamos

30.1 La corriente en la bobina i_1 da origen a un flujo magnético a través de la bobina 2.

Inductancia mutua: si la corriente en la bobina 1 está cambiando, el flujo cambiante a través de la bobina 2 induce una fem en esta última.



30.2 Este cepillo dental eléctrico usa la inductancia mutua. La base contiene una bobina a la que se suministra corriente alterna desde una toma de pared. Esta corriente variable induce una fem en una bobina en el interior del cuerpo del cepillo, la cual se utiliza para recargar la batería de este último.



con el símbolo M, sin subíndices; este valor caracteriza por completo la interacción de la fem inducida de las dos bobinas. De esta forma, podemos escribir

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad \text{(fem mutuamente inducidas)} \tag{30.4}$$

donde la inductancia mutua M es

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \qquad \text{(inductancia mutua)} \tag{30.5}$$

Los signos negativos en la ecuación (30.4) son un reflejo de la ley de Lenz. La primera ecuación dice que un cambio en la corriente en la bobina 1 provoca un cambio en el flujo magnético a través de la bobina 2, lo que induce una fem en esta última que se opone al cambio del flujo; en la segunda ecuación las dos bobinas intercambian su papel.

CUIDADO **Sólo una corriente variable en el tiempo induce una fem** Note que sólo una corriente *variable en el tiempo* en una bobina puede inducir una fem y, por lo tanto, una corriente en una segunda bobina. Las ecuaciones (30.4) demuestran que la fem inducida en cada bobina es directamente proporcional a la *tasa de cambio* de la corriente en la otra bobina, no al valor de la corriente. Una corriente estable en una bobina, sin importar su intensidad, no puede inducir una corriente en una bobina cercana.

La unidad del SI para la inductancia mutua se llama **henry** (1 H), en honor del físico estadounidense Joseph Henry (1797-1878), uno de los descubridores de la inducción electromagnética. Según la ecuación (30.5), un henry es igual a *un weber por ampere*. Otras unidades equivalentes obtenidas con la ecuación (30.4) son *un volt-segundo por ampere*, *un ohm-segundo*, o *un joule*

$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A} = 1\ \Omega\cdot\text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

Así como el farad es una unidad muy grande de capacitancia (véase la sección 24.1), el henry es una unidad muy grande de inductancia mutua. Como se ilustra en el ejemplo 30.1, los valores comunes de la inductancia mutua son del orden del milihenry (mH) o microhenry (μH).

Desventajas y usos de la inductancia mutua

La inductancia mutua puede ser inconveniente en los circuitos eléctricos, pues las variaciones de corriente en un circuito inducen fem no deseadas en otros circuitos cercanos. Para minimizar estos efectos, los sistemas de circuitos múltiples deben diseñarse de manera que M sea tan pequeña como se pueda; por ejemplo, dos bobinas podrían colocarse muy alejadas o con sus planos perpendiculares.

Felizmente, la inductancia mutua también tiene muchas aplicaciones útiles. Un *transformador*, usado en los circuitos de corriente alterna para subir o bajar voltajes, no tiene diferencias fundamentales con las dos bobinas ilustradas en la figura 30.1. Una corriente alterna variable en el tiempo en una bobina del transformador produce una fem variable en la otra bobina; el valor de M, que depende de la geometría de las bobinas, determina la amplitud de la fem inducida en la segunda bobina y, por lo tanto, la amplitud del voltaje de salida. (En el capítulo 31 describiremos con más detalle los transformadores, una vez que hayamos estudiado con mayor profundidad la corriente alterna.)

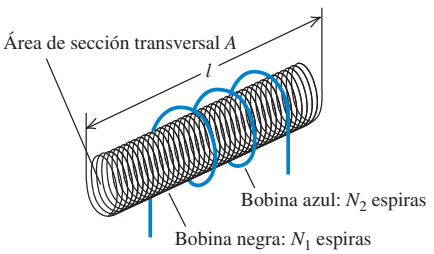
Ejemplo 30.1 Cálculo de la inductancia mutua

En una forma de bobina de Tesla (un generador de alto voltaje que tal vez haya visto en algún museo de ciencia), un solenoide largo con longitud l y área de sección transversal A, tiene un devanado muy compacto con N_1 espiras de alambre. Una bobina con N_2 espiras lo circunda concéntricamente (figura 30.3). Calcule la inductancia mutua.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En esta situación, la inductancia mutua ocurre porque la corriente en una de las bobinas establece un campo magnético que ocasiona un flujo a través de la otra.

30.3 Un solenoide largo con área de sección transversal A y N_1 espiras (en color negro) está circundado concéntricamente por una bobina con N_2 espiras (en color azul).



PLANTEAR: Se aplica la ecuación (30.5) para determinar la inductancia mutua M. De acuerdo con esa ecuación, necesitamos conocer ya sea *a*) el flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina exterior debido a la corriente i_1 en el solenoide, o *b*) el flujo Φ_{B1} a través de cada espira del solenoide interno debido a la corriente i_2 en la bobina externa. Elegimos la opción *a*) puesto que en el ejemplo 28.9 (sección 28.7) tenemos una expresión sencilla para el campo en el centro de un solenoide largo que conduzca corriente, dada por la ecuación (28.23). Note que no se da el valor de la corriente i_1 en el solenoide. No obstante, esta omisión no debe ser motivo de alarma: el valor de la inductancia mutua no depende del valor de la corriente, por lo que la cantidad i_1 debe cancelarse cuando se calcule M.

EJECUTAR: De acuerdo con el ejemplo 28.9, un solenoide largo que conduce una corriente i_1 produce un campo magnético $\vec{B}_1$ que apunta a lo largo del eje del solenoide. La magnitud del campo B_1 es proporcional a i_1 y a n_1, el número de espiras por unidad de longitud:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide es igual a B_1A. Como un solenoide muy largo no produce campo magnético por fuera de sus espiras, este flujo también es igual al flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina circundante exterior, sin importar cuál sea el área de la sección transversal de la bobina exterior. De acuerdo con la ecuación (30.5), la inductancia mutua M es

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

EVALUAR: La inductancia mutua de dos bobinas cualesquiera siempre es proporcional al producto N_1N_2 de sus números de espiras. Observe que la inductancia mutua M sólo depende de la geometría de las dos bobinas, no de la corriente.

A continuación se presenta un ejemplo numérico para dar idea de las magnitudes. Suponga que $l = 0.50$ m, $A = 10$ cm^2 $= 1.0 \times 10^{-3}$m^2, $N_1 = 1000$ espiras y $N_2 = 10$ espiras. De esta forma,

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0.50\ \text{m}}$$
$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}$$

Ejemplo 30.2 Fem debida a la inductancia mutua

En el ejemplo 30.1, suponga que la corriente i_2 en la bobina circundante exterior está dada por $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})t$ (de hecho, las corrientes en alambres pueden intensificarse con esta rapidez durante periodos breves). *a*) En el tiempo $t = 3.0\ \mu$s, ¿qué flujo magnético medio a través de cada espira del solenoide es causado por la corriente en la bobina exterior circundante? *b*) ¿Cuál es la fem inducida en el solenoide?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 30.1 se encontró la inductancia mutua relacionando la corriente en el solenoide con el flujo producido en la bobina exterior. En este ejemplo se da la corriente en la bobina exterior y se desea encontrar el flujo resultante en el solenoide. El punto clave es que la inductancia mutua es la *misma* en cualquier caso.

PLANTEAR: Dado el valor de la inductancia mutua $M = 25\ \mu$H, del ejemplo 30.1, se aplica la ecuación (30.5) para determinar el flujo Φ_{B1} a través de cada espira del solenoide causado por una corriente dada i_2 en la bobina exterior. Después, se emplea la ecuación (30.4) para determinar la fem inducida en el solenoide por la variación con respecto al tiempo de la corriente en la bobina exterior.

EJECUTAR: *a*) En el tiempo $t = 3.0\ \mu\text{s} = 3.0 \times 10^{-6}$ s, la corriente en la bobina exterior (bobina 2) es $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})(3.0 \times 10^{-6}\ \text{s}) =$ 6.0 A. Para encontrar el flujo medio a través de cada espira del solenoide (bobina 1), se despeja Φ_{B1} en la ecuación (30.5):

$$\Phi_{B1} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(6.0\ \text{A})}{1000} = 1.5 \times 10^{-7}\ \text{Wb}$$

Note que éste es un valor *medio*; el flujo puede variar en forma considerable entre el centro y los extremos del solenoide.

b) La fem inducida $\mathcal{E}_1$ está dada por la ecuación (30.4):

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} = -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})\frac{d}{dt}[(2.0 \times 10^6\ \text{A/s})t]$$
$$= -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(2.0 \times 10^6\ \text{A/s}) = -50\ \text{V}$$

EVALUAR: Ésta es una fem inducida sustancial, en respuesta a una tasa de cambio muy rápida de la corriente. Al operar una bobina de Tesla hay una corriente alterna de alta frecuencia y no una corriente continua en aumento como la de este ejemplo; también di_2/dt y $\mathcal{E}_1$ alternan, con amplitudes que llegan a ser miles de veces más grandes que las de este ejemplo.

Evalúe su comprensión de la sección 30.1 Considere la bobina descrita en el ejemplo 30.1. Si se construyera el solenoide con el doble de alambre, de manera que tuviera dos veces más espiras y fuera dos veces más largo, ¿cuánto más grande sería la inductancia mutua? i) M sería cuatro veces más grande; ii) M sería lo doble de grande; iii) M permanecería sin cambio; iv) M sería de $\frac{1}{2}$; v) M sería de $\frac{1}{4}$.

30.2 Autoinductancia e inductores

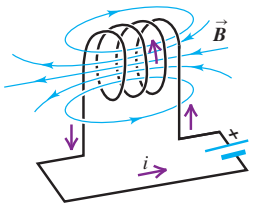
En nuestro análisis de la inductancia mutua consideramos dos circuitos separados e independientes: la corriente en un circuito crea un campo magnético que da origen a un flujo a través del segundo circuito. Si cambia la corriente en el primer circuito, el flujo en el segundo circuito cambia y en éste se induce una fem.

Ocurre un efecto importante relacionado incluso cuando se considera un *solo* circuito aislado. Cuando en el circuito está presente una corriente, se establece un campo magnético que crea un flujo magnético a través del *mismo* circuito; este flujo cambia cuando la corriente cambia. Así, cualquier circuito que conduzca una corriente variable tiene una fem inducida en él por la variación en *su propio* campo magnético. Esa clase de fem se denomina **fem autoinducida**. Según la ley de Lenz, una fem autoinducida siempre se opone al cambio en la corriente que causó la fem, y de ese modo hace más difícil que haya variaciones en la corriente. Por esta razón, las fem autoinducidas son de gran importancia siempre que hay una corriente variable.

Puede haber fem autoinducidas en *cualquier* circuito, ya que siempre hay algún flujo magnético a través de la espira cerrada de un circuito que conduce corriente. Pero el efecto se intensifica considerablemente si el circuito incluye una bobina con N espiras de alambre (figura 30.4). Como resultado de la corriente i, hay un flujo magnético medio Φ_B a través de cada vuelta de la bobina. En analogía con la ecuación (30.5), definimos la **autoinductancia** L del circuito como

30.4 La corriente i en el circuito crea un campo magnético $\vec{B}$ en la bobina y, por lo tanto, un flujo a través de ésta.

Autoinductancia: si la corriente i en la bobina está cambiando, el flujo cambiante a través de ésta induce una fem en la bobina.



$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad \text{(autoinductancia)} \tag{30.6}$$

Cuando no hay riesgo de confusión con la inductancia mutua, la autoinductancia se llama simplemente **inductancia**. Al comparar las ecuaciones (30.5) y (30.6) se observa que las unidades de autoinductancia son las mismas que las de la inductancia mutua; la unidad del SI para la autoinductancia es el henry.

Si la corriente i en el circuito cambia, también lo hace el flujo Φ_B; al reacomodar la ecuación (30.6) y obtener la derivada con respecto al tiempo, la relación entre las tasas de cambio es

$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday para una bobina con N espiras, ecuación (29.4), la fem autoinducida es $\mathcal{E} = -N\,d\Phi_B/dt$, por lo que se deduce que

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad \text{(fem autoinducida)} \tag{30.7}$$

El signo menos en la ecuación (30.7) es un reflejo de la ley de Lenz; nos dice que la fem autoinducida en un circuito se opone a cualquier cambio en la corriente en ese circuito. (Más adelante, en esta sección, estudiaremos con más profundidad el significado de este signo menos.)

La ecuación (30.7) también establece que la autoinductancia de un circuito es la magnitud de la fem autoinducida por unidad de tasa de cambio de la corriente. Esta relación hace posible medir una autoinductancia desconocida en forma relativamente sencilla: cambie la corriente en el circuito con una tasa di/dt conocida, mida la fem inducida y obtenga el cociente para determinar el valor de L.

Los inductores como elementos de un circuito

Un elemento de circuito diseñado para tener una inductancia particular se llama **inductor**, o *bobina de autoinducción*. El símbolo habitual para un inductor en un circuito es

Al igual que los resistores y capacitores, los inductores se encuentran entre los elementos indispensables de los circuitos electrónicos modernos. Su finalidad es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito. Un inductor en un circuito de corriente directa ayuda a mantener una corriente estable a pesar de las fluctuaciones en la fem aplicada; en un circuito de corriente alterna, un inductor tiende a suprimir las variaciones de la corriente que ocurran más rápido de lo deseado. En este capítulo y en el siguiente estudiaremos con más detalle el comportamiento y las aplicaciones de los inductores en los circuitos.

Para entender el comportamiento de los circuitos que contienen inductores es necesario desarrollar un principio general análogo a la ley de Kirchhoff de las mallas (que estudiamos en la sección 26.2). Para aplicar esa ley se recorre una malla conductora midiendo las diferencias de potencial a través de elementos sucesivos del circuito conforme se avanza. La suma algebraica de estas diferencias alrededor de cualquier malla cerrada debe ser igual a cero porque el campo eléctrico producido por las cargas distribuidas alrededor del circuito es *conservativo*. En la sección 29.7 denotamos un campo conservativo con $\vec{\boldsymbol{E}}_c$.

Cuando en el circuito hay un inductor, la situación cambia. El campo eléctrico inducido magnéticamente dentro de las bobinas del inductor *no* es conservativo; igual que en la sección 29.7, lo denotaremos con $\vec{\boldsymbol{E}}_n$. Necesitamos pensar con mucho cuidado sobre los papeles que tienen los diferentes campos. Supongamos que tratamos con un inductor cuyas bobinas tienen resistencia insignificante. Entonces, para hacer que una carga se desplace a través de las bobinas se requiere un campo eléctrico tan pequeño que sea despreciable, por lo que el campo eléctrico *total* $\vec{\boldsymbol{E}}_c + \vec{\boldsymbol{E}}_n$ dentro de las bobinas debe ser igual a cero, aun cuando ninguno de los campos individuales valga cero. Como $\vec{\boldsymbol{E}}_c$ es diferente de cero, sabemos que debe haber acumulaciones de carga en las terminales del inductor y las superficies de sus conductores para que se produzca este campo.

Considere el circuito que se ilustra en la figura 30.5; la caja contiene una combinación de baterías y resistores variables que nos permiten controlar la corriente i en el circuito. De acuerdo con la ley de Faraday, ecuación (29.10), la integral de línea de $\vec{\boldsymbol{E}}_n$ alrededor del circuito es el negativo de la tasa de cambio del flujo a través del circuito, que a la vez está dada por la ecuación (30.7). Al combinar estas dos relaciones se obtiene

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}}_n \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -L\frac{di}{dt}$$

donde se integra en el sentido horario alrededor del circuito (el sentido supuesto para la corriente). Pero $\vec{\boldsymbol{E}}_n$ es diferente de cero sólo dentro del inductor. Por lo tanto, la integral de $\vec{\boldsymbol{E}}_n$ alrededor de todo el circuito se remplaza por su integral sólo de a a b a través del inductor; es decir,

$$\int_a^b \vec{\boldsymbol{E}}_n \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -L\frac{di}{dt}$$

A continuación, como $\vec{\boldsymbol{E}}_c + \vec{\boldsymbol{E}}_n = \boldsymbol{0}$ en cada punto dentro de las bobinas del inductor, esta ecuación se rescribe como

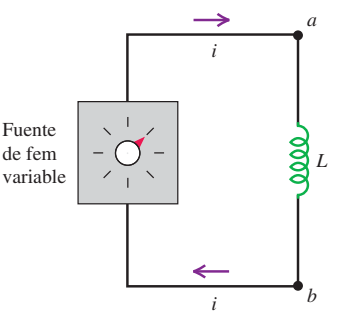
$$\int_a^b \vec{\boldsymbol{E}}_c \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = L\frac{di}{dt}$$

Pero esta integral es simplemente el potencial V_{ab} del punto a con respecto a b, por lo que al final se obtiene

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt} \tag{30.8}$$

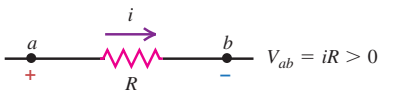
Se concluye que hay una diferencia de potencial genuina entre las terminales del inductor, asociada con las fuerzas conservativas electrostáticas, a pesar del hecho de que el campo eléctrico asociado con el efecto de inducción magnética es no conservativo. Así, está justificado usar la ley de Kirchhoff de las mallas para analizar circuitos que incluyan inductores. La ecuación (30.8) da la diferencia de potencial a través de un inductor en un circuito.

30.5 Circuito que contiene una fuente de fem y un inductor. La fuente es variable, por lo que la corriente i y su tasa de cambio di/dt pueden variarse.

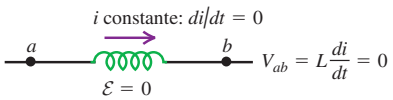


30.6 a) La diferencia de potencial a través de un resistor depende de la corriente. b), c) y d) La diferencia de potencial a través de un inductor depende de la tasa de cambio de la corriente.

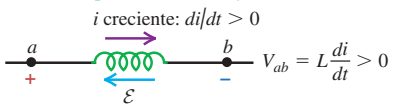
a) Resistor con corriente i que fluye de a a b: el potencial disminuye de a a b.



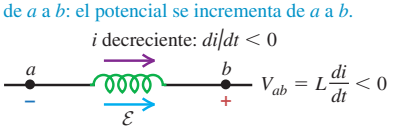
b) Inductor con corriente *constante* i que fluye de a a b: no hay diferencia de potencial.



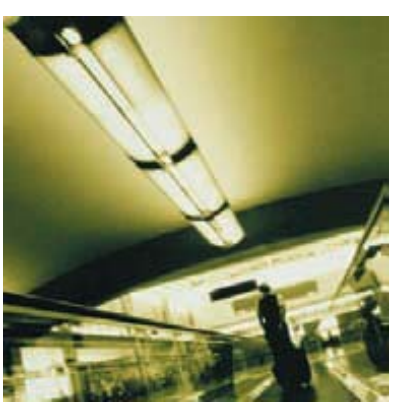
c) Inductor con corriente i *creciente* que fluye de a a b: el potencial disminuye de a a b.



d) Inductor con corriente i *decreciente* que fluye de a a b: el potencial se incrementa de a a b.



30.7 Estos tubos de luz fluorescente están conectados en serie con un inductor, o bobina de inductancia, que ayuda a mantener el flujo de corriente a través de los tubos.



CUIDADO **La fem autoinducida se opone a los cambios en la corriente** Note que la fem autoinducida no se opone a la corriente i en sí, sino a cualquier *cambio* (di/dt) en la corriente. Así, el comportamiento de un inductor en un circuito es muy diferente del de un resistor. En la figura 30.6 se comparan los comportamientos de un resistor y un inductor, y se resumen las relaciones de signos.

Aplicaciones de los inductores

Como un inductor se opone a los cambios en la corriente, desempeña un papel importante en los equipos que emplean luz fluorescente (figura 30.7), en los que la corriente fluye de los conductores al gas que llena el tubo, con lo que el gas se ioniza y brilla. Sin embargo, un gas ionizado o *plasma* es un conductor marcadamente no óhmico: cuanto mayor es la corriente, tanto más alto es el grado de ionización que alcanza el plasma y menor su resistencia. Si se aplicara al plasma un voltaje suficientemente grande, la corriente aumentaría tanto que dañaría los circuitos afuera del tubo fluorescente. Para evitar este problema, se conecta un inductor o *bobina de inductancia* en serie con el tubo con la finalidad de impedir que la corriente aumente más de lo debido.

La bobina de inductancia también hace posible que el tubo fluorescente funcione con el voltaje alterno provisto por el cableado de una vivienda. Este voltaje oscila en forma sinusoidal con una frecuencia de 60 Hz, por lo que vale cero momentáneamente 120 veces por segundo. Si no hubiera una bobina de inductancia, el plasma en el tubo fluorescente se desionizaría con rapidez cuando el voltaje se redujera a cero y el tubo se apagaría. Con la bobina de inductancia, una fem autoinducida sostiene la corriente y mantiene encendido el tubo. Las bobinas de inductancia también se emplean con este propósito en el alumbrado público (las luminarias obtienen su luz de un vapor brillante de mercurio o átomos de sodio) y en las luces de neón. (En las lámparas fluorescentes compactas, la bobina de inductancia se sustituye por un esquema más complicado de regulación de corriente, que utiliza transistores, los cuales se estudiarán en el capítulo 42.)

La autoinductancia de un circuito depende de su tamaño, forma y número de espiras. Para N espiras muy cercanas, siempre es proporcional a N^2. También depende de las propiedades magnéticas del material encerrado por el circuito. En los ejemplos que siguen se supondrá que el circuito sólo encierra vacío (o aire, el cual, desde el punto de vista del magnetismo es en esencia un vacío). Sin embargo, si el flujo está concentrado en una región que contenga un material magnético con permeabilidad μ, en la expresión para B hay que sustituir μ_0 (la permeabilidad del vacío) por $\mu = K_m\mu_0$, como se vio en la sección 28.8. Si el material es diamagnético o paramagnético, esta sustitución hace muy poca diferencia, puesto que K_m tiene un valor muy cercano a 1. Sin embargo, si el material es *ferromagnético*, la diferencia tiene importancia crucial. Un solenoide devanado en torno a un núcleo de hierro dulce con $K_m = 5000$ tiene una inductancia aproximadamente 5000 veces más grande que la del mismo solenoide con un núcleo de aire. Los inductores de núcleo ferromagnético se usan mucho en varias aplicaciones de electrónica y generación de electricidad.

Una complicación adicional es que con los materiales ferromagnéticos, la magnetización en general no es una función lineal de la corriente magnetizadora, en especial cuando está próxima la saturación. Como resultado, la inductancia no es constante, sino que depende de la corriente en forma bastante complicada. En nuestro análisis ignoraremos esta dificultad y supondremos siempre que la inductancia es constante. Ésta es una suposición razonable aun para un material ferromagnético si la magnetización permanece muy por debajo del nivel de saturación.

Como los automóviles contienen acero —un material ferromagnético—, conducir un vehículo sobre una bobina causa un incremento apreciable en la inductancia de esta última. Este efecto se aprovecha en los sensores de los semáforos, que usan una bobina grande portadora de corriente, la cual está enterrada bajo la superficie del pavimento cerca de una intersección de avenidas. Los circuitos conectados a la bobina detectan el cambio de inductancia cuando un vehículo pasa por arriba, y cuando un número programado de autos ha pasado sobre la bobina, la luz del semáforo cambia a verde para permitir que crucen la intersección.

?

Ejemplo 30.3 Cálculo de la autoinductancia

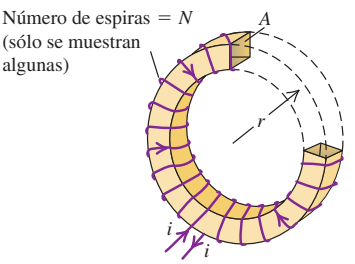
Un solenoide toroidal con área de sección transversal A y radio medio r tiene un devanado compacto con N espiras de alambre (figura 30.8) alrededor de un núcleo no magnético. Determine su autoinductancia L. Suponga que B es uniforme en toda la sección transversal (es decir, ignore la variación de B con la distancia a partir del eje del toroide).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La variable que buscamos es la autoinductancia L del solenoide toroidal.

PLANTEAR: L se determina en una de dos formas: con la ecuación (30.6), que requiere conocer el flujo Φ_B a través de cada espira y la corriente i en la bobina, o con la ecuación (30.7), que implica conocer la fem autoindicida $\mathcal{E}$ debida a una tasa de cambio dada de la corriente di/dt. No se da información sobre la fem, por lo que se debe usar el primer enfoque. Se usan los resultados del ejemplo 28.10 (sección 28.7) en el que se determinó el campo magnético en el interior de un solenoide toroidal.

30.8 Determinación de la autoinductancia de un solenoide toroidal con devanado compacto. Por claridad, sólo se ilustran algunas espiras del devanado. Se ha hecho un corte en el toroide para mostrar el área de la sección transversal A y el radio r.



EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (30.6), la autoinductancia es $L = N\Phi_B/i$. Del ejemplo 28.10, la magnitud del campo a una distancia r del eje del toroide es $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Si suponemos que el campo tiene esta magnitud en toda el área A de la sección transversal, entonces el flujo magnético a través de la sección transversal es

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}$$

El flujo Φ_B es el mismo a través de cada espira, y la autoinductancia L es

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \qquad \text{(autoinductancia de un solenoide toroidal)}$$

EVALUAR: Suponga que $N = 200$ espiras, $A = 5.0\ \text{cm}^2 = 5.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, y $r = 0.10$ m; entonces

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A} \cdot \text{m})(200)^2(5.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{2\pi(0.10\ \text{m})}$$
$$= 40 \times 10^{-6}\ \text{H} = 40\ \mu\text{H}$$

Más adelante, en este capítulo, usaremos la expresión $L = \mu_0 N^2 A/2\pi r$ para la inductancia de un solenoide toroidal con la finalidad de desarrollar una expresión para la energía almacenada en un campo magnético.

Ejemplo 30.4 Cálculo de la fem autoinducida

Si la corriente en el solenoide toroidal del ejemplo 30.3 se incrementa de manera uniforme de 0 a 6.0 A en 3.0 μs, calcule la magnitud y sentido de la fem autoinducida.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se conocen el valor de L, la autoinductancia, y di/dt, la tasa de cambio de la corriente. La incógnita es la fem autoinducida.

PLANTEAR: Se calcula la fem mediante la ecuación (30.7).

EJECUTAR: La tasa de cambio de la corriente en el solenoide es $di/dt = (6.0\ \text{A})/(3.0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 2.0 \times 10^6\ \text{A/s}$. De la ecuación (30.7), la magnitud de la fem inducida es

$$|\mathcal{E}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\ \text{H})(2.0 \times 10^6\ \text{A/s}) = 80\ \text{V}$$

La corriente va en aumento, por lo que de acuerdo con la ley de Lenz el sentido de la fem es opuesto al de la corriente. Esto corresponde a la situación de la figura 30.6c; el sentido de la fem es de b a a, como una batería con a en la terminal + y b en la terminal −, y tiende a oponerse al incremento de la corriente que proviene del circuito externo.

EVALUAR: Este ejemplo demuestra que incluso una inductancia pequeña L puede dar lugar a una fem inducida sustancial si la corriente cambia con rapidez.

Evalúe su comprensión de la sección 30.2 Ordene los siguientes inductores según la diferencia de potencial V_{ab}, del más positivo al más negativo. En cada caso, el inductor tiene una resistencia igual a cero y la corriente fluye a través del inductor del punto a al punto b. i) La corriente a través de un inductor de 2.0 μH se incrementa de 1.0 A a 2.0 A en 0.50 s; ii) la corriente a través de un inductor de 4.0 μH disminuye de 3.0 A a 0 en 2.0 s; iii) la corriente a través de un inductor de 1.0 μH permanece constante e igual a 4.0 A; iv) la corriente a través de un inductor de 1.0 μH se incrementa de 0 a 4.0 A en 0.25 s.

30.3 Energía del campo magnético

El establecimiento de una corriente en un inductor requiere un suministro de energía, y un inductor que conduce corriente contiene energía almacenada. Veamos cómo sucede esto. En la figura 30.5, una corriente creciente i en el inductor produce una fem $\mathcal{E}$ entre sus terminales, y una diferencia de potencial correspondiente V_{ab} entre las terminales de la fuente, con el punto a a mayor potencial que el b. Así, la fuente debe estar agregando energía al inductor, y la potencia instantánea P (la tasa de transferencia de energía al inductor) es $P = V_{ab}i$.

Energía almacenada en un inductor

Si la corriente inicial es igual a cero, con la inductancia L podemos calcular la entrada total de energía U necesaria para establecer una corriente final I en un inductor. Suponemos que el inductor tiene una resistencia igual a cero, por lo que dentro del inductor no se disipa energía. Sea i la corriente en cierto instante y su tasa de cambio di/dt; la corriente va en aumento, de manera que $di/dt > 0$. El voltaje entre las terminales a y b del inductor en ese instante es $V_{ab} = L\,di/dt$, y la tasa P a la que se entrega energía al inductor (igual a la potencia instantánea suministrada por la fuente) es

$$P = V_{ab}i = Li\frac{di}{dt}$$

La energía dU suministrada al inductor durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt es $dU = P\,dt$, por lo que

$$dU = Li\,di$$

La energía total U suministrada mientras la corriente aumenta de cero a un valor final I es

$$U = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \text{(energía almacenada en un inductor)} \qquad (30.9)$$

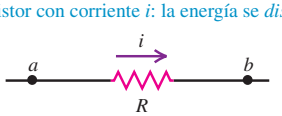
Una vez que la corriente ha alcanzado su valor final estable I, $di/dt = 0$, y no se alimenta más energía al inductor. Cuando no hay corriente, la energía almacenada U es igual a cero; cuando la corriente es I, la energía es $\frac{1}{2}LI^2$.

Cuando la corriente disminuye de I a cero, el inductor actúa como fuente que suministra una cantidad total de energía igual a $\frac{1}{2}LI^2$ al circuito externo. Si interrumpimos bruscamente el circuito abriendo un interruptor o desconectando violentamente una clavija (enchufe) de una toma de corriente de pared, la corriente disminuye con mucha rapidez, la fem inducida es muy grande y la energía podría disiparse en forma de un arco entre los contactos del interruptor. Esta fem elevada es la analogía eléctrica de la gran fuerza que ejerce un automóvil en movimiento que se estrella contra un muro sólido y se detiene en forma súbita.

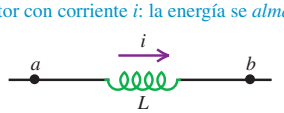
CUIDADO **Energía, resistores e inductores** Es importante no confundir el comportamiento de resistores e inductores en lo que respecta a la energía (figura 30.9). La energía fluye hacia un resistor siempre que una corriente, ya sea estable o variable, pasa a través de él; esta energía se disipa en forma de calor. En contraste, la energía fluye hacia un inductor ideal con resistencia igual a cero, sólo cuando la corriente en este último *se incrementa*. Esta energía no se disipa, sino que se almacena en el inductor y se libera cuando la corriente *disminuye*. Cuando una corriente estable fluye a través de un inductor, no entra ni sale energía.

30.9 Resistor es un dispositivo en el que se disipa energía de manera irreversible. En contraste, en un inductor portador de corriente, la energía almacenada se recupera cuando la corriente disminuye a cero.

Resistor con corriente i: la energía se *disipa*.



Inductor con corriente i: la energía se *almacena*.



Densidad de la energía magnética

La energía en un inductor en realidad se almacena en el campo magnético dentro de la bobina, al igual que la energía de un capacitor lo hace en el campo eléctrico entre sus placas. Es posible deducir relaciones para la energía del campo magnético análogas a las que obtuvimos para la energía del campo eléctrico en la sección 24.3 [ecua-

ciones (24.9) y (24.11)]. Nos centraremos en un caso sencillo: el del solenoide toroidal ideal. Este sistema tiene la ventaja de que su campo magnético se encuentra confinado por completo en una región finita del espacio en el interior de su núcleo. Como en el ejemplo 30.3, suponemos que el área de la sección transversal A es suficientemente pequeña como para suponer que el campo magnético es uniforme en toda el área. El volumen V encerrado por el solenoide toroidal es aproximadamente igual a la longitud de la circunferencia $2\pi r$ multiplicada por el área A: $V = 2\pi rA$. Del ejemplo 30.3, la autoinductancia del solenoide toroidal con vacío dentro de sus bobinas es:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

De la ecuación (30.9), la energía U almacenada en el solenoide toroidal cuando la corriente es I se obtiene así:

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}I^2$$

El campo magnético y, por lo tanto, esta energía se localizan en el volumen $V = 2\pi rA$ encerrado por los devanados. La energía *por unidad de volumen*, o *densidad de energía magnética*, es $u = U/V$:

$$u = \frac{U}{2\pi rA} = \frac{1}{2}\mu_0\frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2}$$

Esto se puede expresar en términos de la magnitud B del campo magnético dentro del solenoide toroidal. De acuerdo con la ecuación (28.24) en el ejemplo 28.10 (sección 28.7), esto es

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

por lo tanto,

$$\frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2} = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

Cuando se sustituye este resultado en la ecuación anterior de u, se encuentra finalmente la expresión para la **densidad de energía magnética** en el vacío:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \text{(densidad de energía magnética en el vacío)} \qquad (30.10)$$

Ésta es la analogía magnética de la energía por unidad de volumen en un campo *eléctrico* en el vacío, $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, que se obtuvo en la sección 24.3.

Cuando el material dentro del toroide no es un vacío, sino un material con permeabilidad magnética (constante) $\mu = K_m\mu_0$, se sustituye μ_0 por μ en la ecuación (30.10). Así, la energía por unidad de volumen en el campo magnético es

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \qquad \text{(densidad de energía magnética en un material)} \qquad (30.11)$$

Aunque hemos obtenido la ecuación (30.11) sólo para una situación especial, resulta ser la expresión correcta para la energía por unidad de volumen asociada con *cualquier* configuración de campo magnético en un material con permeabilidad constante. Para el vacío, la ecuación (30.11) se reduce a la (30.10). En el capítulo 32 usaremos las expresiones para la energía de los campos eléctricos y magnéticos, cuando estudiemos la energía asociada con las ondas electromagnéticas.

30.10 La energía requerida para encender la bujía de un automóvil proviene de la energía del campo magnético almacenada en la bobina de encendido.

La energía de campo magnético desempeña un papel importante en los sistemas de encendido de los automóviles de gasolina. Una bobina primaria de alrededor de 250 espiras está conectada a la batería del vehículo y produce un campo magnético intenso. Esta bobina está rodeada por una bobina secundaria con cerca de 25,000 espiras de alambre muy delgado. Cuando es el momento de encender la bujía (véase la figura 20.5 en la sección 20.3), la corriente hacia la bobina primaria se interrumpe, el campo magnético disminuye a cero con rapidez y en la bobina secundaria se induce una fem de decenas de miles de volts. La energía almacenada en el campo magnético se convierte en un potente pulso de corriente que recorre la bobina secundaria hacia la bujía, donde genera la chispa que enciende la mezcla de combustible con aire en los cilindros del motor (figura 30.10).

Ejemplo 30.5 Almacenamiento de energía en un inductor

A la industria de generación de energía eléctrica le agradaría encontrar formas eficientes de almacenar los sobrantes de energía producida durante las horas de poca demanda para satisfacer con más facilidad los requerimientos de consumo de sus clientes en los momentos de mucha demanda. Quizá se pudiera emplear un enorme inductor. ¿Qué inductancia se necesitaría para almacenar 1.00 kW · h de energía en una bobina que conduzca una corriente de 200 A?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se conoce la cantidad requerida de energía almacenada, U, y la corriente, I. La variable que buscamos es la autoinductancia L.

PLANTEAR: Se despeja L en la ecuación (30.9).

EJECUTAR: Se tiene $I = 200$ A y $U = 1.00\,\text{kW}\cdot\text{h} = (1.00 \times 10^3\,\text{W})(3600\,\text{s}) = 3.60 \times 10^6$ J. Se despeja L en la ecuación (30.9) y se obtiene:

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2(3.60 \times 10^6\,\text{J})}{(200\,\text{A})^2} = 180\,\text{H}$$

Esto es más de *un millón* de veces la autoinductancia del solenoide toroidal del ejemplo 30.3 (sección 30.2).

EVALUAR: Los alambres convencionales que tendrían que conducir 200 A tendrían que ser de un diámetro grande para mantener baja la resistencia y evitar pérdidas inaceptables de energía debidas al calentamiento I^2R. Como resultado, un inductor de 180 H que usara alambre convencional sería muy grande (del tamaño de una habitación). Un inductor superconductor sería mucho más pequeño, ya que la resistencia de un superconductor es igual a cero y podrían usarse alambres mucho más delgados; una desventaja sería que éstos tendrían que mantenerse a baja temperatura para que fueran superconductores, y habría que usar energía para conservar la baja temperatura. El resultado es que este esquema es impráctico con la tecnología existente.

Ejemplo 30.6 Densidad de la energía magnética

En un acelerador de protones usado en la física experimental de partículas, las trayectorias de los protones están controladas por imanes de desviación que producen un campo magnético de 6.6 T. ¿Cuál es la densidad de energía en este campo en el vacío entre los polos de un imán como el descrito?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La variable buscada es la densidad de energía magnética u; se da la magnitud B del campo magnético.

PLANTEAR: En el vacío, $\mu = \mu_0$, y la densidad de energía está dada por la ecuación (30.10).

EJECUTAR: La densidad de energía en el campo magnético es

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(6.6\,\text{T})^2}{2(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})} = 1.73 \times 10^7\,\text{J/m}^3$$

EVALUAR: Como comparación interesante, el calor de combustión del gas natural, expresado sobre la base de energía por unidad de volumen, es de alrededor de 3.8×10^7 J/m^3.

Evalúe su comprensión de la sección 30.3 La corriente en un solenoide invierte su sentido al tiempo que conserva su magnitud. *a*) ¿Esto cambia el campo magnético dentro del solenoide? *b*) ¿Cambia la densidad de energía magnética en el solenoide?

30.4 El circuito *R-L*

Veamos algunos ejemplos del comportamiento de los inductores en los circuitos. Algo ya está claro: un inductor en un circuito hace difícil que ocurran cambios rápidos en la corriente, en virtud de los efectos de la fem autoinducida. La ecuación (30.7) muestra que cuanto más grande es la tasa de cambio de la corriente, di/dt, mayor es la fem autoinducida y mayor la diferencia de potencial entre las terminales del inductor. Esta ecuación, junto con las reglas de Kirchhoff (véase la sección 26.2), nos da los principios necesarios para analizar los circuitos que contienen inductores.

Activ Online Physics
14.1 El circuito *RL*

Estrategia para resolver problemas 30.1 Inductores en circuitos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Un inductor tan sólo es otro elemento de circuito, al igual que una fuente de fem, un resistor o un capacitor. Una diferencia clave es que cuando en un circuito se incluye un inductor, todos los voltajes, las corrientes y las cargas de capacitor son, por lo general, funciones del tiempo, no contantes como lo han sido en la mayoría de los análisis de circuitos anteriores. Pero las reglas de Kirchhoff, que estudiamos en la sección 26.2, siguen siendo válidas. Cuando los voltajes y corrientes varían con el tiempo, las leyes de Kirchhoff se cumplen en cada instante del tiempo.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Siga el mismo procedimiento descrito en la Estrategia para resolver problemas 26.2 de la sección 26.2. (Éste es un momento excelente para repasar esa estrategia.) Dibuje un diagrama grande del circuito e indique todas las cantidades, tanto las conocidas como las desconocidas. Aplique la regla de las uniones en todas las uniones existentes.
2. Determine cuáles son las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

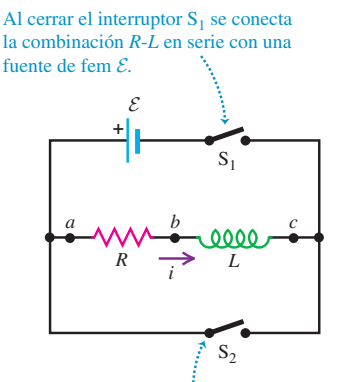
1. Al igual que en la Estrategia para resolver problemas 26.2, aplique la ley de mallas de Kirchhoff a cada malla presente en el circuito.
2. Como en todo análisis de circuitos, es esencial utilizar el signo correcto para cada diferencia de potencial. (Es conveniente repasar las reglas expuestas en la Estrategia para resolver problemas 26.2.) Para obtener el signo correcto de una diferencia de potencial entre las terminales de un inductor, recuerde la ley de Lenz y la regla de los signos descrita en la sección 30.2 junto con la ecuación (30.7) y la figura 30.6. En la ley de Kirchhoff de las mallas, cuando se pasa a través de un inductor en el *mismo* sentido que se supuso para la corriente, se encuentra una *caída* de voltaje igual a $L\,di/dt$, por lo que el término correspondiente en la ecuación de la malla es $-L\,di/dt$. Cuando se va a través de un inductor en el sentido *opuesto* al que se supuso para la corriente, la diferencia de potencial se invierte y el término por usar en la ecuación de la malla es $+L\,di/dt$.
3. Como siempre, se despejan las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su respuesta sea congruente con el comportamiento normal de los inductores. Si la corriente a través de un inductor está cambiando, su respuesta debe indicar que la diferencia de potencial entre las terminales del inductor se opone al cambio. De no ser así, probablemente utilizó un signo incorrecto en algún punto de su cálculo.

Crecimiento de la corriente en un circuito *R-L*

A partir del análisis del circuito que se ilustra en la figura 30.11 podemos aprender varias cosas fundamentales acerca del comportamiento de un inductor. Un circuito que incluye tanto un resistor como un inductor, y tal vez una fuente de fem, se llama **circuito *R-L***. El inductor ayuda a impedir los cambios rápidos en una corriente, lo que puede ser útil si se requiere una corriente estable y la fuente externa tiene una fem fluctuante. El resistor R puede ser un elemento de circuito individual, o ser la resistencia de los devanados del inductor; todo inductor de la vida real tiene cierta resistencia a menos que esté hecho de alambre superconductor. Al cerrar el interruptor S_1 se conecta la combinación *R-L* a una fuente con fem constante $\mathcal{E}$. (Suponemos que la fuente tiene resistencia interna igual a cero, por lo que el voltaje terminal es igual a la fem.)

30.11 Un circuito *R-L*.



Suponga que, en un principio, ambos interruptores están abiertos, y luego, en cierto momento inicial $t = 0$ se cierra el interruptor S_1. La corriente no puede cambiar súbitamente de cero a algún valor final porque di/dt y la fem inducida en el inductor serían infinitas. En vez de ello, la corriente comienza a crecer con una tasa que sólo depende del valor de L en el circuito.

Sea i la corriente en cierto momento t después de que se cerró el interruptor S_1, y sea di/dt su tasa de cambio en ese instante. La diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor en ese momento es

$$v_{ab} = iR$$

y la diferencia de potencial v_{bc} a través del inductor es

$$v_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Note que si la corriente va en el sentido que se indica en la figura 30.11 y en aumento, entonces tanto v_{ab} como v_{bc} son positivas; a está a una diferencia de potencial mayor que b, que a la vez está a un potencial más elevado que c. (Compare las figuras 30.6a y 30.6c.) Aplicamos la ley de mallas de Kirchhoff, comenzando en la terminal negativa y avanzando en sentido antihorario alrededor del circuito:

$$\mathcal{E} - ir - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{30.12}$$

Se despeja di/dt y se encuentra que la tasa de aumento de la corriente es

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i \tag{30.13}$$

En el instante en que el interruptor S_1 se cierra por primera vez, $i = 0$ y la caída del potencial a través de R es igual a cero. La tasa de cambio inicial de la corriente es

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{inicial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Como se esperaba, cuanto mayor es la inductancia L, con más lentitud aumenta la corriente.

Conforme aumenta la corriente, el término $(R/L)i$ en la ecuación (30.13) también aumenta, y la *tasa* de incremento de la corriente dada por la ecuación (30.13) se hace cada vez más pequeña. Esto significa que la corriente se acerca a un valor final I de estado estable. Cuando la corriente alcanza ese valor, su tasa de incremento es igual a cero. Entonces, la ecuación (30.13) se convierte en:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \quad \text{e}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

La corriente *final* I no depende de la inductancia L; es la misma que se tendría si sólo se conectara la resistencia R a la fuente con fem $\mathcal{E}$.

La figura 30.12 muestra el comportamiento de la corriente como función del tiempo. Para obtener la ecuación de esta curva (es decir, una expresión para la corriente como función del tiempo), se procede igual que para el capacitor en proceso de carga, en la sección 26.4. En primer lugar, se reordena la ecuación (30.13) para que adopte la forma:

$$\frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L}dt$$

Esto separa las variables, con i en el lado izquierdo y t en el derecho. Después se integran ambos lados, cambiando el nombre de las variables de integración a i' y t' para utilizar i y t como límites superiores. (El límite inferior para cada integral es cero, lo que corresponde a una corriente igual a cero en el momento inicial $t = 0$.) Se obtiene:

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt'$$

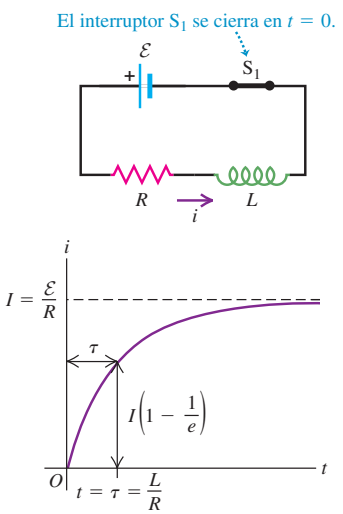
$$\ln\left(\frac{i - (\mathcal{E}/R)}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

A continuación se aplica la función exponencial a ambos lados y se despeja i. Se dejan al lector los detalles de la solución; el resultado final es

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad \text{(corriente en un circuito } R\text{-}L \text{ con fem)} \tag{30.14}$$

Ésta es la ecuación de la curva de la figura 30.12. Derivando la ecuación (30.14), se obtiene:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-(R/L)t} \tag{30.15}$$



30.12 Gráfica de i contra t para el crecimiento de la corriente en un circuito R-L con una fem conectada en serie. La corriente final es $I = \mathcal{E}/R$; después de una constante de tiempo τ, la corriente es $1 - 1/e$ de este valor.

En el momento $t = 0$, $i = 0$ y $di/dt = \mathcal{E}/L$. Conforme $t \to \infty$, $i \to \mathcal{E}/R$, y $di/dt \to 0$, como se había pronosticado.

Como se aprecia en la figura 30.12, la corriente instantánea i primero aumenta con rapidez, luego con más lentitud, y se acerca al valor final $I = \mathcal{E}/R$ en forma asintótica. En un tiempo igual a L/R la corriente ha subido a $(1 - 1/e)$, o el 63% de su valor final. De esta forma, la cantidad L/R es una medida de la rapidez con que la corriente se aproxima a su valor final; esta cantidad se llama **constante de tiempo** del circuito, y se denota con τ:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(constante de tiempo para un circuito } R\text{-}L\text{)} \tag{30.16}$$

En un tiempo igual a 2τ, la corriente alcanza el 86% de su valor final; en el tiempo 5τ llega al 99.3% y en 10τ llega al 99.995%. (Compare esto con el análisis hecho en la sección 26.4 para la carga de un capacitor con capacitancia C conectado en serie con un resistor de resistencia R; la constante de tiempo para esa situación fue el producto RC.)

Las gráficas de i contra t tienen la misma forma general para todos los valores de L. Para un valor dado de R, la constante de tiempo τ es mayor para valores más grandes de L. Cuando L es pequeña, la corriente aumenta con rapidez hasta su valor final; cuando L es grande, crece con más lentitud. Por ejemplo, si $R = 100\ \Omega$ y $L = 10$ H,

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10\ \text{H}}{100\ \Omega} = 0.10\ \text{s}$$

y la corriente se incrementa al 63%, aproximadamente, de su valor final en 0.10 s. (Recuerde que $1\ \text{H} = 1\ \Omega \cdot \text{s}$.) Pero si $L = 0.010$ H, $\tau = 1.0 \times 10^{-4}$ s $= 0.10$ ms, y el crecimiento es mucho más rápido.

Las consideraciones acerca de la energía brindan una perspectiva adicional sobre el comportamiento de un circuito *R-L*. La tasa instantánea con la que la fuente entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$. La tasa instantánea con que se disipa energía en el resistor es i^2R, y la tasa con que se almacena energía en el inductor es $iv_{bc} = Li\,di/dt$ [o, en forma equivalente, $(d/dt)(\frac{1}{2}Li^2) = Li\,di/dt$]. Cuando se multiplica la ecuación (30.12) por i y se reordena, se encuentra que

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt} \tag{30.17}$$

De la potencia $\mathcal{E}i$ suministrada por la fuente, la parte (i^2R) se disipa en el resistor, y la parte $(Li\,di/dt)$ es la energía almacenada en el inductor. Este análisis es análogo por completo al análisis de la potencia para un capacitor en proceso de carga, que se hizo al final de la sección 26.4.

Ejemplo 30.7 Análisis de un circuito *R-L*

Un dispositivo electrónico sensible con resistencia de 175 Ω va a conectarse a una fuente de fem por medio de un interruptor. El dispositivo está diseñado para que opere con una corriente de 36 mA, pero, para evitar que sufra daños, la corriente no debe exceder de 4.9 mA en los primeros 58 μs después de cerrado el interruptor. Para proteger el dispositivo, se conecta en serie con un inductor, como se ilustra en la figura 30.11; el interruptor en cuestión es el S_1. *a*) ¿Cuál es la fem que debe tener la fuente? Suponga que la resistencia interna es despreciable. *b*) ¿Qué inductancia se requiere? *c*) ¿Cuál es la constante de tiempo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema tiene que ver con el aumento de la corriente en un circuito *R-L*, por lo que aplicaremos las ideas de esta sección.

PLANTEAR: La figura 30.12 indica que la corriente final es $I = \mathcal{E}/R$. Como se da la resistencia, la fem está determinada por el requerimiento de que la corriente final sea de 36 mA. El otro requerimiento es que la corriente no exceda de $i = 4.9$ mA en $t = 58$ μs; para satisfacer esto, se emplea la ecuación (30.14) para la corriente como función del tiempo, y se despeja la inductancia, que es la única incógnita. Después, la ecuación (30.16) da la constante de tiempo.

EJECUTAR: *a*) Con $I = 36$ mA $= 0.036$ A y $R = 175\ \Omega$, en la expresión $I = \mathcal{E}/R$ para la corriente final, se despeja la fem y se obtiene:

$$\mathcal{E} = IR = (0.036\ \text{A})(175\ \Omega) = 6.3\ \text{V}$$

b) Para encontrar la inductancia requerida, se despeja L en la ecuación (30.14). En primer lugar, se multiplica por $(-R/\mathcal{E})$ y luego se suma I en ambos lados, con lo que se obtiene:

$$1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} = e^{-(R/L)t}$$

continúa

Se obtienen los logaritmos naturales en ambos lados, se despeja L y se sustituyen los valores:

$$L = \frac{-Rt}{\ln(1 - iR/\mathcal{E})}$$
$$= \frac{-(175\ \Omega)(58 \times 10^{-6}\ \text{s})}{\ln[1 - (4.9 \times 10^{-3}\ \text{A})(175\ \Omega)/(6.3\ \text{V})]} = 69\ \text{mH}$$

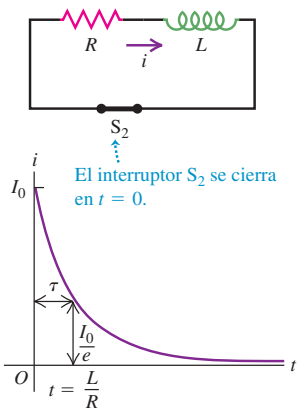
c) De acuerdo con la ecuación (30.16),

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{69 \times 10^{-3}\ \text{H}}{175\ \Omega} = 3.9 \times 10^{-4}\ \text{s} = 390\ \mu\text{s}$$

EVALUAR: Notamos que 58 μs es mucho menor que la constante de tiempo. En 58 μs la corriente crece sólo de cero a 4.9 mA, una fracción pequeña de su valor final de 36 mA; después de 390 μs, la corriente es $(1 - 1/e)$ de su valor final, es decir, alrededor de (0.63)(36 mA) = 23 mA.

Decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*

30.13 Gráfica de i contra t para el decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*. Después de una constante de tiempo τ, la corriente es $1/e$ de su valor inicial.



Ahora supongamos que el interruptor S_1 en el circuito de la figura 30.11 ha permanecido cerrado por un tiempo y la corriente ha alcanzado el valor I_0. Se reinicia el cronómetro para redefinir el tiempo inicial, se cierra el interruptor S_2 en el momento $t = 0$, con la batería puesta en derivación. (Al mismo tiempo se debe abrir S_1 para que no se arruine la batería.) La corriente a través de R y L no se reduce a cero de manera instantánea, sino que decae con lentitud, como se ilustra en la figura 30.13. La ecuación de la ley de Kirchhoff de las mallas se obtiene de la ecuación (30.12), con sólo omitir el término $\mathcal{E}$. Invitamos al lector a que siga los pasos del análisis anterior y demuestre que la corriente i varía con el tiempo de acuerdo con

$$i = I_0 e^{-(R/L)t} \tag{30.18}$$

donde I_0 es la corriente inicial en el momento $t = 0$. La constante de tiempo, $\tau = L/R$, es el tiempo para que la corriente disminuya a $1/e$, alrededor del 37%, de su valor original. En el tiempo 2τ ha disminuido al 13.5%, en el tiempo 5τ al 0.67%, y en 10τ al 0.0045%.

La energía necesaria para mantener la corriente durante este decaimiento proviene de la energía almacenada en el campo magnético del inductor. En esta ocasión, el análisis detallado de la energía es más sencillo. En vez de la ecuación (30.17) tenemos

$$0 = i^2R + Li\frac{di}{dt} \tag{30.19}$$

En este caso, $Li\,di/dt$ es negativo; la ecuación (30.19) demuestra que la energía almacenada en el inductor *disminuye* a una tasa igual a la tasa de disipación de la energía i^2R en el resistor.

Toda esta exposición debe parecer familiar al lector, pues la situación es muy parecida a la de un capacitor que se carga y descarga, lo que se estudió en la sección 26.4. Sería buena idea comparar esa sección con nuestro análisis del circuito *R-L*.

Ejemplo 30.8 Energía en un circuito *R-L*

Cuando la corriente decae en un circuito *R-L*, ¿qué fracción de la energía almacenada en el inductor se ha disipado después de 2.3 constantes de tiempo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema concierne al decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*, así como a la relación entre la corriente en un inductor y la cantidad de energía almacenada.

PLANTEAR: Para esta situación, en cualquier momento t, la corriente i está dada por la ecuación (30.18). La energía almacenada que se asocia con esta corriente está dada por la ecuación (30.9), $U = \frac{1}{2}Li^2$.

EJECUTAR: De la ecuación (30.18), la corriente i en cualquier momento t es

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

La energía U en el inductor en *cualquier* momento se obtiene sustituyendo esta expresión en $U = \frac{1}{2}Li^2$. Se obtiene

$$U = \frac{1}{2}LI_0^2 e^{-2(R/L)t} = U_0 e^{-2(R/L)t}$$

donde $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$ es la energía en el momento inicial $t = 0$. Cuando $t = 2.3\tau = 2.3L/R$, se tiene

$$U = U_0 e^{-2(2.3)} = U_0 e^{-4.6} = 0.010\ U_0$$

Es decir, permanece sólo el 0.010, o 1.0%, de la energía almacenada inicialmente en el inductor; el 99.0% restante se ha disipado en el resistor.

EVALUAR: Para tener una idea de lo que significa este resultado, considere el circuito *R-L* que se analizó en el ejemplo 30.7, para el que la constante de tiempo es 390 μs. Con $L = 69$ mH $= 0.069$ H y una corriente inicial $I_0 = 36$ mA $= 0.036$ A, la cantidad de energía en el inductor inicialmente es $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}(0.069\text{ H})(0.036\text{ A})^2 = 4.5 \times 10^{-5}$ J. De ésta, el 99.0%, o 4.4×10^{-5} J, se disipa en $2.3(390\ \mu\text{s}) = 9.0 \times 10^{-4}$ s $= 0.90$ ms. En otras palabras, este circuito puede perder casi toda su energía en 0.90 ms, y la puede recuperar en la misma cantidad de tiempo. Por lo tanto, el tiempo mínimo para un ciclo completo de encendido y apagado es de 1.8 ms. Para muchos fines, por ejemplo, en las redes de conmutación rápida para telecomunicaciones, se requiere un ciclo de tiempo aún más corto. En esos casos se necesita una constante de tiempo más pequeña $\tau = L/R$.

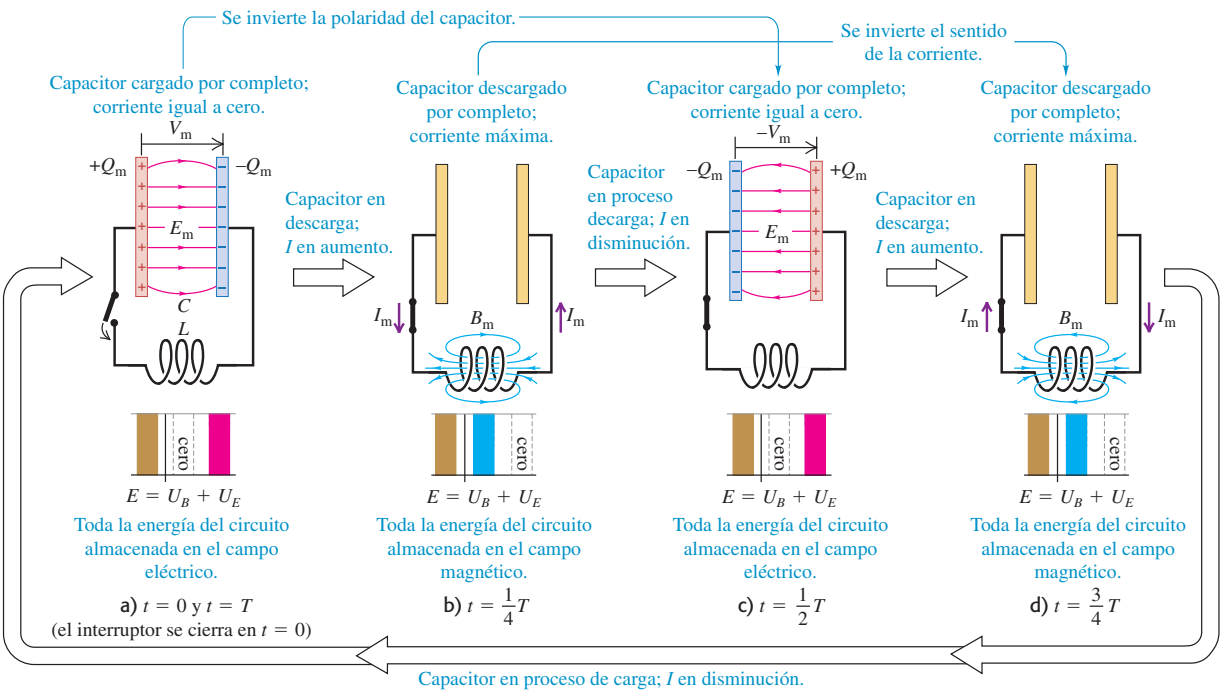
Evalúe su comprensión de la sección 30.4 *a*) En la figura 30.11, ¿cuáles son los signos algebraicos de las diferencias de potencial v_{ab} y v_{bc} cuando está cerrado el interruptor S_1 y abierto el S_2? i) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} > 0$; ii) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} < 0$; iii) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} > 0$; iv) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} < 0$. *b*) ¿Cuáles son los signos de v_{ab} y v_{bc} cuando S_1 está abierto, S_2 está cerrado, y la corriente fluye en el sentido que se indica? i) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} > 0$; ii) $v_{ab} > 0$, $v_{bc} < 0$; iii) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} > 0$; iv) $v_{ab} < 0$, $v_{bc} < 0$.

30.5 El circuito *L-C*

Un circuito que contiene un inductor y un capacitor muestra un modo completamente nuevo de comportamiento, caracterizado por una corriente y una carga *oscilantes*. Esto está en claro contraste con el enfoque *exponencial* de la situación de estado estable que hemos visto para circuitos tanto *R-C* como *R-L*. En el **circuito *L-C*** de la figura 30.14a se carga el capacitor con una diferencia de potencial V_m y una carga

Activ Online Physics
14.2 Circuitos de CA: el oscilador *RLC* (preguntas de la 1 a la 6)

30.14 En un circuito oscilante *L-C*, la carga en el capacitor y la corriente a través del inductor varían en forma sinusoidal con el tiempo. Se transfiere energía entre la energía magnética en el inductor (U_B) y la energía eléctrica en el capacitor (U_E). Como en el movimiento armónico simple, la energía total E permanece constante. (Compare con la figura 13.14 en la sección 13.3.)



inicial $Q = CV_m$ en su placa izquierda y luego se cierra el interruptor. ¿Qué es lo que pasa?

El capacitor comienza a descargar a través del inductor. A causa de la fem inducida en el inductor, la corriente no puede cambiar en forma instantánea; comienza en cero y finalmente alcanza un valor máximo I_m. Durante esta intensificación el capacitor se está descargando. En cada instante el potencial del capacitor es igual a la fem inducida, por lo que a medida que el capacitor se descarga, la *tasa de cambio* de la corriente disminuye. Cuando el potencial del capacitor se reduce a cero, la fem inducida también es igual a cero, y la corriente se ha estabilizado en su valor máximo I_m. La figura 30.14b ilustra esta situación; el capacitor se ha descargado por completo. La diferencia de potencial entre sus terminales (y las del inductor) ha disminuido hasta cero, y la corriente alcanzó su valor máximo I_m.

Durante la descarga del capacitor, la corriente en aumento en el inductor ha establecido un campo magnético en el espacio que lo rodea, y la energía que inicialmente estaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora lo está en el campo magnético del inductor.

Aunque en la figura 30.14b el capacitor está completamente descargado, la corriente persiste (no puede cambiar instantáneamente), y el capacitor comienza a cargarse con polaridad opuesta a la de su estado inicial. Conforme disminuye la corriente, la magnitud del campo magnético también lo hace, lo que induce una fem en el inductor en el *mismo* sentido que el de la corriente; esto retarda la disminución de la corriente. Con el tiempo, la corriente y el campo magnético disminuyen a cero y el capacitor queda cargado en el sentido *opuesto* al de su polaridad inicial (figura 30.14c), con una diferencia de potencial $-V_m$ y carga $-Q$ en su placa izquierda.

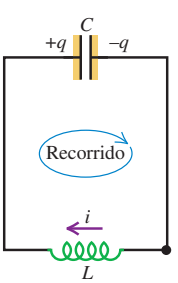
El proceso se repite ahora en sentido opuesto; un poco después, el capacitor se ha descargado una vez más y en el inductor hay una corriente en el sentido opuesto (figura 30.14d). Más tarde, la carga del capacitor recupera su valor original (figura 30.14a), y todo el proceso se repite. Si no hay pérdidas de energía, las cargas en el capacitor siguen oscilando hacia atrás y adelante indefinidamente. Este proceso se llama **oscilación eléctrica**.

Desde el punto de vista de la energía, las oscilaciones de un circuito eléctrico transfieren energía del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor y viceversa. La energía *total* asociada con el circuito es constante. Esto es análogo a la transferencia de energía en un sistema mecánico que oscila de la energía potencial a la cinética y viceversa, con la energía total constante. Como veremos, esta analogía va mucho más lejos.

Oscilaciones eléctricas en un circuito *L-C*

Para estudiar con detalle el flujo de la carga, procedemos igual que para el circuito *R-L*. La figura 30.15 muestra nuestras definiciones de q e i.

30.15 Aplicación de la ley de Kirchhoff de las mallas al circuito *L-C*. Se indica el sentido del recorrido alrededor de la malla en la ecuación de la malla. Tan pronto como se ha completado el circuito y el capacitor comienza a descargarse por primera vez, como en la figura 30.14a, la corriente es negativa (opuesta al sentido que se indica).



CUIDADO **Corriente positiva en un circuito *L-C*** Después de estudiar la figura 30.14, quizá parezca que el sentido positivo de la corriente en la figura 30.15 va hacia atrás. En realidad, hemos elegido este sentido para simplificar la relación entre la corriente y la carga del capacitor. Se define la corriente en cada instante como $i = dq/dt$, la tasa de cambio de la carga en la placa izquierda del capacitor. De ahí que si al principio el capacitor está cargado y comienza a descargarse como en las figuras 30.14a y 30.14b, entonces $di/dt < 0$ y la corriente inicial i es negativa; el sentido de la corriente es, por lo tanto, opuesto al sentido (positivo) que se muestra en la figura 30.15.

Se aplica la ley de Kirchhoff de las mallas al circuito de la figura 30.15. Partiendo de la esquina inferior derecha del circuito y sumando los voltajes conforme se recorre la espira en el sentido horario, se obtiene lo siguiente:

$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Como $i = dq/dt$, se deduce que $di/dt = d^2q/dt^2$. Sustituimos esta expresión en la ecuación anterior y se divide entre $-L$ para obtener

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \text{(circuito } L\text{-}C\text{)} \tag{30.20}$$

La ecuación (30.20) tiene exactamente la misma forma que la ecuación que se obtuvo para el movimiento armónico simple, en la sección 13.2, ecuación (13.4). Esa ecuación es $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$, o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

(Antes de continuar con este análisis, es recomendable repasar la sección 13.2.) En el circuito *L-C* la carga del capacitor q desempeña el papel del desplazamiento x, y la corriente $i = dq/dt$ es análoga a la velocidad de la partícula $v_x = dx/dt$. La inductancia L es análoga a la masa m, y el recíproco de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante de fuerza k.

Al continuar con esta analogía, recordemos que la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ del oscilador armónico es igual a $(k/m)^{1/2}$, y la posición está dada como función del tiempo por la ecuación (13.13),

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde la amplitud A y el ángulo de fase ϕ dependen de las condiciones iniciales. En la situación eléctrica análoga, la carga q del capacitor está dada por

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \tag{30.21}$$

y la frecuencia angular ω de la oscilación está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \text{(frecuencia angular de la oscilación en un circuito } L\text{-}C\text{)} \tag{30.22}$$

Verifique por su cuenta que la ecuación (30.21) satisface la ecuación de las espiras, ecuación (30.20), cuando ω tiene el valor dado por la ecuación (30.22). Al hacer esto, encontrará que la corriente instantánea $i = dq/dt$ está dada por

$$i = -\omega Q\,\text{sen}(\omega t + \phi) \tag{30.23}$$

Así, en un circuito *L-C* la carga y la corriente oscilan en forma sinusoidal con el tiempo, con una frecuencia angular determinada por los valores de L y C. La frecuencia ordinaria f, el número de ciclos por segundo, es igual a $\omega/2\pi$, como siempre. En las ecuaciones (30.21) y (30.23), las constantes Q y ϕ están determinadas por las condiciones iniciales. Si en el momento $t = 0$ la placa izquierda del capacitor de la figura 30.15 tiene su carga máxima Q, y la corriente i es igual a cero, entonces $\phi = 0$. Si $q = 0$ en el momento $t = 0$, entonces $\phi = \pm\pi/2$ rad.

Energía en un circuito *L-C*

También se puede analizar el circuito *L-C* desde la perspectiva de la energía. La analogía con el movimiento armónico simple es igualmente útil en este caso. En el problema mecánico, un cuerpo con masa m está sujeto a un resorte con constante de fuerza k. Suponga que el cuerpo se desplaza una distancia A desde su posición de equilibrio y se le libera desde el reposo en el tiempo $t = 0$. La energía cinética del sistema en un instante posterior es $\frac{1}{2}mv_x^2$, y su energía potencial elástica es $\frac{1}{2}kx^2$. Como el sistema es conservativo, la suma de estas energías es igual a la energía inicial del sistema, $\frac{1}{2}kA^2$. La velocidad v_x en cualquier posición x se calcula como se hizo en la sección 13.3, ecuación (13.22):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \tag{30.24}$$

El circuito *L-C* también es un sistema conservativo. Otra vez, sea Q la carga máxima del capacitor. La energía del campo magnético, $\frac{1}{2}Li^2$, en el inductor en cualquier momento corresponde a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del cuerpo oscilante, y la energía del campo eléctrico $q^2/2C$ en el capacitor corresponde a la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ del resorte. La suma de estas energías es igual a la energía total $Q^2/2C$ del sistema:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \tag{30.25}$$

La energía total en el circuito *L-C* es *constante*; oscila entre las formas magnética y eléctrica, del mismo modo que la energía mecánica total en el movimiento armónico simple es constante y oscila entre las formas cinética y potencial.

Al despejar i en la ecuación (30.25), se encuentra que cuando la carga en el capacitor es q, la corriente i es

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2} \tag{30.26}$$

Podemos comprobar esta ecuación si sustituimos q de la ecuación (30.21) e i de la (30.23). Al comparar las ecuaciones (30.24) y (30.26) se observa que la corriente $i = dq/dt$ y la carga q están relacionadas en la misma forma que la velocidad $v_x = dx/dt$ y la posición x en el problema mecánico.

En la tabla 30.1 se resumen las analogías entre el movimiento armónico simple y las oscilaciones del circuito *L-C*. El sorprendente paralelismo que se aprecia ahí entre las oscilaciones mecánica y eléctrica es uno de los muchos ejemplos similares en la física. Este paralelismo es tan cercano que se pueden resolver problemas complicados de mecánica y acústica si se establecen circuitos eléctricos análogos y se miden las corrientes y los voltajes que correspondan a las cantidades mecánicas y acústicas por determinar. Éste es el principio básico de muchas computadoras analógicas. Esta analogía se puede extender a las oscilaciones *amortiguadas*, que estudiaremos en la siguiente sección. En el capítulo 31 se extenderá la analogía aún más para que incluya las oscilaciones eléctricas *forzadas*, las cuales se presentan en todos los circuitos de corriente alterna.

Tabla 30.1 Oscilación de un sistema de masa y resorte comparado con oscilaciones eléctricas en un circuito *L-C*

Sistema de masa y resorte
Energía cinética $= \frac{1}{2}mv_x^2$
Energía potencial $= \frac{1}{2}kx^2$
$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$
$v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2}$
$v_x = dx/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$x = A\cos(\omega t + \phi)$
Circuito de inductor y capacitor
Energía magnética $= \frac{1}{2}Li^2$
Energía eléctrica $= q^2/2C$
$\frac{1}{2}Li^2 + q^2/2C = Q^2/2C$
$i = \pm\sqrt{1/LC}\sqrt{Q^2 - q^2}$
$i = dq/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
$q = Q\cos(\omega t + \phi)$

Ejemplo 30.9 Circuito oscilante

Una fuente de voltaje de 300 V se utiliza para cargar un capacitor de 25 μF. Una vez que el capacitor está cargado por completo se desconecta de la fuente y se conecta a un inductor de 10 mH. La resistencia en el circuito es despreciable. *a*) Determine la frecuencia y el periodo de oscilación en el circuito. *b*) Obtenga la carga del capacitor y la corriente en el circuito 1.2 ms después de haber conectado el inductor y el capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las variables buscadas son la frecuencia f y el periodo T, así como los valores de la carga q y la corriente i en un tiempo dado t.

PLANTEAR: Se da la capacitancia C y la inductancia L, con las que se calcula la frecuencia y el periodo por medio de la ecuación (30.22). Se obtiene la carga y la corriente con las ecuaciones (30.21) y (30.23). Inicialmente, el capacitor está cargado por completo y la corriente es igual a cero, como se ilustra en la figura 30.14a, por lo que el ángulo de fase es $\phi = 0$ [véase el análisis que sigue a la ecuación (30.23)].

EJECUTAR: *a*) La frecuencia *angular* natural es

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3}\,\text{H})(25 \times 10^{-6}\,\text{F})}}$$
$$= 2.0 \times 10^3\,\text{rad/s}$$

La frecuencia f es $1/2\pi$ veces esta cantidad:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.0 \times 10^3\,\text{rad/s}}{2\pi\,\text{rad/ciclo}} = 320\,\text{Hz}$$

El periodo es el recíproco de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\,\text{Hz}} = 3.1 \times 10^{-3}\,\text{s} = 3.1\,\text{ms}$$

b) Como el periodo de la oscilación es $T = 3.1$ ms, $t = 1.2$ ms es igual a $0.38T$; esto corresponde a una situación intermedia entre la fi-

gura 30.14b ($t = T/4$) y la 30.14c ($t = T/2$). Al comparar estas figuras con la 30.15 se esperaría que la carga del capacitor q fuera negativa (es decir, habría carga negativa en la placa izquierda del capacitor) y que la corriente i también tuviera un valor negativo (es decir, la corriente circularía en sentido antihorario).

Para encontrar el valor de q, se usa la ecuación (30.21). La carga es máxima en $t = 0$, por lo que $\phi = 0$ y $Q = C\mathcal{E} = (25 \times 10^{-6}\text{F})(300\text{ V}) = 7.5 \times 10^{-3}\text{C}$. La carga q en cualquier momento es

$$q = (7.5 \times 10^{-3}\text{ C})\cos\omega t$$

En el momento $t = 1.2 \times 10^{-3}$ s,

$$\omega t = (2.0 \times 10^{3}\text{ rad/s})(1.2 \times 10^{-3}\text{ s}) = 2.4\text{ rad}$$
$$q = (7.5 \times 10^{-3}\text{ C})\cos(2.4\text{ rad}) = -5.5 \times 10^{-3}\text{ C}$$

La corriente i en cualquier momento es

$$i = -\omega Q \operatorname{sen}\omega t$$

En el momento $t = 1.2 \times 10^{-3}$ s,

$$i = -(2.0 \times 10^{3}\text{ rad/s})(7.5 \times 10^{-3}\text{ C})\operatorname{sen}(2.4\text{ rad}) = -10\text{ A}$$

EVALUAR: Note que los signos de q e i son negativos, como se había pronosticado.

Ejemplo 30.10 La energía en un circuito oscilante

Considere otra vez el circuito *L-C* del ejemplo 30.9. *a*) Determine las energías magnética y eléctrica en $t = 0$. *b*) Obtenga las energías magnética y eléctrica en $t = 1.2$ ms.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema pide la energía magnética (almacenada en el inductor) y la eléctrica (almacenada en el capacitor) en dos momentos diferentes durante la oscilación del circuito *L-C*.

PLANTEAR: Del ejemplo 30.9, se conocen los valores de la carga q en el capacitor y la corriente i en el circuito en los dos momentos de interés. Usaremos esos valores para calcular la energía magnética almacenada en el inductor, dada por $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, y la energía eléctrica almacenada en el capacitor, dada por $U_E = q^2/2C$.

EJECUTAR: *a*) En $t = 0$ no hay corriente y $q = Q$, por lo que no hay energía magnética, y toda la energía en el circuito está en forma de energía eléctrica en el capacitor:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = 0 \qquad U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(7.5 \times 10^{-3}\text{ C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\text{ F})} = 1.1\text{ J}$$

b) Como se dijo en el ejemplo 30.9, $t = 1.2$ ms corresponde a una situación intermedia entre la figura 30.14b ($t = T/4$) y la 30.14c ($t = T/2$). Por consiguiente, se espera que en ese tiempo la energía tenga una parte magnética y otra eléctrica. Del ejemplo 30.9, $i = -10$ A y $q = -5.5 \times 10^{-3}$ C, por lo que

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(10 \times 10^{-3}\text{ H})(-10\text{ A})^2 = 0.5\text{ J}$$
$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(-5.5 \times 10^{-3}\text{ C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\text{ F})} = 0.6\text{ J}$$

EVALUAR: Las energías magnética y eléctrica son iguales en $t = 3T/8 = 0.375T$, exactamente a la mitad entre las situaciones ilustradas en las figuras 30.14b y 30.14c. El instante que se considera aquí es un poco posterior y U_B es un poco menor que U_E, como se esperaba. Hay que hacer énfasis en que en *todo* momento la energía *total* $E = U_B + U_E$ tiene el mismo valor, 1.1 J. Un circuito *L-C* sin resistencia es un sistema conservativo; no se disipa energía.

Evalúe su comprensión de la sección 30.5 Una forma de pensar en la energía almacenada en un circuito *L-C* consiste en afirmar que los elementos de circuito efectúan trabajo positivo o negativo sobre las cargas que se mueven hacia atrás y adelante a través del circuito. *a*) En la figura 30.14, entre las etapas *a*) y *b*), ¿el capacitor realiza trabajo positivo o negativo sobre las cargas? *b*) ¿Qué clase de fuerza (eléctrica o magnética) ejerce el capacitor sobre las cargas para efectuar este trabajo? *c*) Durante este proceso, ¿el inductor realiza trabajo positivo o negativo sobre las cargas? *d*) ¿Qué clase de fuerza (eléctrica o magnética) ejerce el inductor sobre las cargas?

30.6 El circuito *L-R-C* en serie

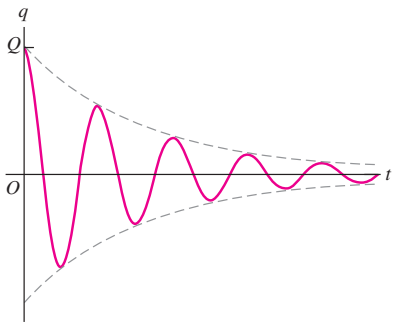
En nuestro análisis del circuito *L-C* se supuso que no hay *resistencia* en el circuito. Desde luego, ésta es una idealización; todo inductor real tiene resistencia en sus devanados, y también puede haber resistencia en los alambres de conexión. En virtud de la resistencia, la energía electromagnética en el circuito se disipa y se convierte en otras formas, como energía interna de los materiales del circuito. La resistencia en un circuito eléctrico es análoga a la fricción en un sistema mecánico.

Suponga que un inductor con inductancia L y un resistor de resistencia R están conectados en serie entre las terminales de un capacitor cargado, para formar un **circuito en serie *L-R-C***. Como antes, el capacitor comienza a descargarse tan pronto como el

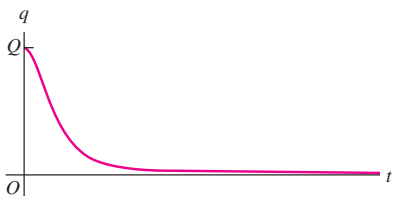
ActivPhysics ONLINE
14.2 Circuitos de CA: el oscilador *RLC* (preguntas de la 7 a la 10)

30.16 Gráficas de la carga en el capacitor como función del tiempo en un circuito en serie *L*-*R*-*C* con carga inicial *Q*.

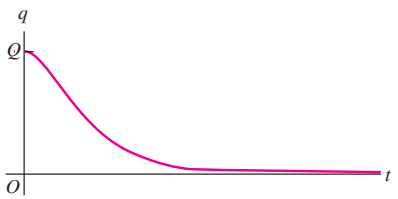
a) Circuito subamortiguado (resistencia *R* pequeña)



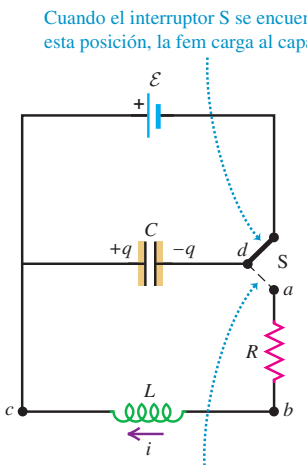
b) Circuito críticamente amortiguado (resistencia *R* grande)



c) Circuito sobreamortiguado (resistencia *R* muy grande)



30.17 Circuito *L*-*R*-*C* en serie.



circuito está completo. Pero en virtud de las pérdidas i^2R en el resistor, la energía del campo magnético adquirida por el inductor cuando el capacitor está descargado por completo es *menor* que la energía del campo eléctrico original del capacitor. De igual forma, la energía del capacitor cuando el campo magnético ha disminuido a cero es aún más pequeña, y así sucesivamente.

Si la resistencia *R* es relativamente pequeña, el circuito aún oscila, pero con un **movimiento armónico amortiguado** (figura 30.16a), y se dice que el circuito está **subamortiguado**. Si *R* se incrementa, las oscilaciones cesan con más rapidez. Cuando *R* alcanza cierto valor, el circuito deja de oscilar; está **críticamente amortiguado** (figura 30.16b). Para valores aún mayores de *R*, el circuito está **sobreamortiguado** (figura 30.16c), y la carga del capacitor se acerca a cero aún más lentamente. En la sección 13.7 se usaron estos mismos términos para describir el comportamiento del sistema mecánico análogo, el oscilador armónico amortiguado.

Análisis del circuito *L*-*R*-*C*

Para analizar con detalle el comportamiento del circuito *L*-*R*-*C*, consideremos el circuito que aparece en la figura 30.17. Es como el circuito *L*-*C* de la figura 30.15, excepto por el resistor *R* que se agregó; también se ilustra la fuente que carga al capacitor al inicio. Las indicaciones de los sentidos positivo de *q* e *i* son las mismas que para el circuito *L*-*C*.

Primero se cierra el interruptor en la posición hacia arriba, para conectar al capacitor con una fuente de fem $\mathcal{E}$ durante un tiempo suficientemente largo para asegurar que el capacitor adquiera su carga final $Q = C\mathcal{E}$ y que toda oscilación inicial haya cesado. Entonces, en el momento $t = 0$ se coloca al interruptor en la posición hacia abajo, con lo que se elimina a la fuente del circuito y se pone al capacitor en serie con el resistor y el inductor. Note que la corriente inicial es negativa y con sentido opuesto al de *i* que se ilustra en la figura.

Para determinar cómo varían *q* e *i* con el tiempo, se aplica la ley de Kirchhoff de las mallas. Partiendo del punto *a* y recorriendo el circuito en el sentido *abcda*, se obtiene la ecuación

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Al sustituir *i* con dq/dt y reordenar, se obtiene

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

Observe que cuando $R = 0$, esto se reduce a la ecuación (30.20) para un circuito *L*-*C*.

Hay métodos generales para obtener soluciones de la ecuación (30.27). La forma de la solución es diferente para los casos del circuito subamortiguado (*R* pequeña) y sobreamortiguado (*R* grande). Cuando R^2 es menor que $4L/C$, la solución tiene la forma

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right) \qquad (30.28)$$

donde *A* y ϕ son constantes. Se invita al lector a que obtenga la primera y segunda derivadas de esta función, y demuestre por sustitución directa que satisface la ecuación (30.27).

Esta solución corresponde al comportamiento *subamortiguado* que se ilustra en la figura 30.16a; la función representa una oscilación sinusoidal con una amplitud que decae exponencialmente. (Note que el factor exponencial $e^{-(R/2L)t}$ *no* es el mismo que el factor $e^{-(R/L)t}$ que encontramos al describir el circuito *R*-*L* en la sección 30.4.) Cuando $R = 0$, la ecuación (30.28) se reduce a la (30.21) para las oscilaciones en un circuito *L*-*C*. Si *R* no es igual a cero, la frecuencia angular de la oscilación es *menor*

que $1/(LC)^{1/2}$ a causa del término que contiene a R. La frecuencia angular ω' de las oscilaciones amortiguadas está dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \text{(circuito en serie } L\text{-}R\text{-}C \text{ subamortiguado)} \qquad (30.29)$$

Cuando $R = 0$, esto se reduce a la ecuación (30.22), $\omega = (1/LC)^{1/2}$. A medida que R se incrementa, ω' se hace cada vez más pequeña. Cuando $R^2 = 4L/C$, la cantidad bajo el radical se vuelve cero; el sistema ya no oscila y se ha llegado al caso del *amortiguamiento crítico* (figura 30.16b). Para valores de R aún más grandes, el sistema se comporta como el de la figura 30.16c. En este caso el circuito es *sobreamortiguado*, y q está dada como función del tiempo por la suma de dos funciones exponenciales decrecientes.

En el caso *subamortiguado*, la constante de fase ϕ en la función coseno de la ecuación (30.28) ofrece la posibilidad de una carga inicial y una corriente inicial en $t = 0$, en forma análoga a la asignación de un desplazamiento inicial y de una velocidad inicial a un oscilador armónico subamortiguado (véase el ejercicio 30.38).

Una vez más se hace énfasis en que el comportamiento del circuito *L-R-C* en serie es completamente análogo al del oscilador armónico amortiguado que se estudió en la sección 13.7. Se invita al lector a verificar, por ejemplo, que si se comienza con la ecuación (13.41) y se sustituye q por x, L por m, $1/C$ por k, y R por la constante de amortiguamiento b, el resultado es la ecuación (30.27). En forma similar, el punto de transición entre el subamortiguamiento y el sobreamortiguamiento ocurre en $b^2 = 4km$ para el sistema mecánico y en $R^2 = 4L/C$ para el eléctrico. ¿Puede usted encontrar otros aspectos de esta analogía?

Las aplicaciones prácticas del circuito *L-R-C* en serie surgen cuando se incluye una fuente de fem con variación sinusoidal en el circuito. Esto es análogo a las *oscilaciones forzadas* que se estudiaron en la sección 13.7, y hay efectos *de resonancia* análogos. Un circuito como el descrito se llama de *corriente alterna (ca)*, que es el tema principal del siguiente capítulo.

Ejemplo 30.11 Circuito *L-R-C* en serie subamortiguado

¿Qué resistencia se requiere (en términos de L y C) para impartir a un circuito *L-R-C* una frecuencia equivalente a la mitad de la frecuencia no amortiguada?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema tiene que ver con un circuito subamortiguado *L-R-C* en serie (figura 30.16a): queremos que la resistencia sea suficientemente grande como para que se reduzca la frecuencia de oscilación a la mitad del valor no amortiguado, pero no tan grande como para que el oscilador se vuelva críticamente amortiguado (figura 30.1b) o sobreamortiguado (figura 30.16c).

PLANTEAR: La frecuencia angular de un circuito *L-R-C* en serie subamortiguado está dada por la ecuación (30.29); la frecuencia angular de un circuito *L-C* no amortiguado está dada por la ecuación (30.22). Utilizamos estos datos para despejar la incógnita R.

EJECUTAR: Queremos que la ω' dada por la ecuación (30.29) sea igual a la mitad de ω dada por la ecuación (30.22):

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Después de elevar al cuadrado ambos lados y despejar R, se obtiene

$$R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

Por ejemplo, al agregar 35 Ω al circuito del ejemplo 30.9, la frecuencia se reduciría de 320 Hz a 160 Hz.

EVALUAR: El circuito alcanza la amortiguación crítica sin oscilaciones cuando $R = \sqrt{4L/C}$. Nuestro resultado para R es menor que eso, como debe ser; queremos que el circuito sea subamortiguado.

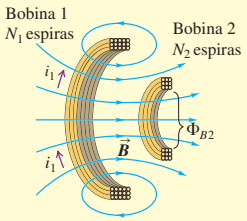
Evalúe su comprensión de la sección 30.6 Un circuito *L-R-C* en serie incluye un resistor de 2.0 Ω. En $t = 0$ la carga del capacitor es de 2.0 μC. ¿Para cuáles de los siguientes valores de inductancia y capacitancia la carga en el capacitor *no* oscilará? i) $L = 3.0$ μH, $C = 6.0$ μF; ii) $L = 6.0$ μH, $C = 3.0$ μF; iii) $L = 3.0$ μH, $C = 3.0$ μF.

CAPÍTULO 30 RESUMEN

Inductancia mutua: Cuando una corriente variable i_1 en un circuito ocasiona un flujo magnético variable en un segundo circuito, en este último se induce una fem $\mathcal{E}_2$. Del mismo modo, una corriente variable i_2 en el segundo circuito induce una fem $\mathcal{E}_1$ en el primero. La inductancia mutua M depende de la geometría de las dos bobinas y el material entre ellas. Si los circuitos son bobinas de alambre con N_1 y N_2 espiras, M se expresa en términos del flujo medio Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina 2 que es ocasionado por la corriente i_1 en la bobina 1, o en términos del flujo medio Φ_{B1} a través de cada espira de la bobina 1 ocasionado por la corriente i_2 en la bobina 2. La unidad del SI de la inductancia mutua es el henry, que se abrevia con H. (Véanse los ejemplos 30.1 y 30.2.)

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \tag{30.4}$$

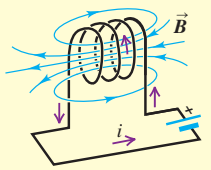
$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \tag{30.5}$$



Autoinductancia: Una corriente i variable en cualquier circuito ocasiona una fem $\mathcal{E}$ autoinducida. La inductancia (o autoinductancia) L depende de la geometría del circuito y el material que lo rodea. La inductancia de una bobina de N espiras se relaciona con el flujo medio Φ_B a través de cada espira creado por la corriente i en la bobina.
Un inductor es un elemento de circuito, que por lo general incluye una bobina de alambre, cuya finalidad es tener una inductancia sustancial. (Véanse los ejemplos 30.3 y 30.4.)

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \tag{30.7}$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \tag{30.6}$$



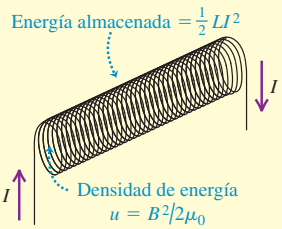
Energía del campo magnético: Un inductor con inductancia L que lleve corriente I tiene energía U asociada con el campo magnético del inductor. La densidad de energía magnética u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo magnético. (Véanse los ejemplos 30.5 y 30.6.)

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \tag{30.9}$$

$$u = \frac{B^2}{2\,\mu_0} \quad \text{(en el vacío)} \tag{30.10}$$

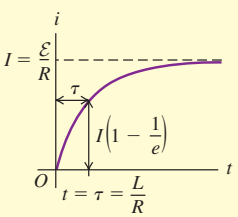
$$u = \frac{B^2}{2\,\mu} \tag{30.11}$$

(en un material con permeabilidad magnética μ)



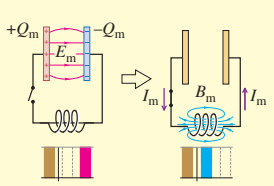
Circuitos *R-L*: En un circuito que contiene un resistor R, un inductor L y una fuente de fem, el crecimiento y el decaimiento de la corriente son exponenciales.
La constante de tiempo τ es el tiempo requerido para que la corriente se aproxime a una fracción $1/e$ de su valor final. (Véanse los ejemplos 30.7 y 30.8.)

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{30.16}$$



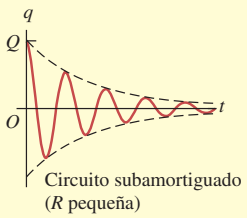
Circuito *L-C*: Un circuito que contiene inductancia L y capacitancia C experimenta oscilaciones eléctricas con frecuencia angular ω que depende de L y C. Tal circuito es análogo a un oscilador armónico mecánico, con inductancia L análoga a la masa m; el recíproco de la capacitancia $1/C$, a la constante de fuerza k; la carga q, al desplazamiento x; y la corriente i, a la velocidad v_x. (Véanse los ejemplos 30.9 y 30.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{30.22}$$



Circuitos *L-R-C* en serie: Un circuito que contiene inductancia, resistencia y capacitancia experimenta oscilaciones amortiguadas para una resistencia suficientemente pequeña. La frecuencia ω' de las oscilaciones amortiguadas depende de los valores de L, R y C. Conforme R aumenta, el amortiguamiento se incrementa; si R es mayor que cierto valor el comportamiento se vuelve sobreamortiguado y deja de haber oscilación. La transición entre el subamortiguamiento y el sobreamortiguamiento ocurre cuando $R^2 = 4L/C$; cuando se satisface esta condición, las oscilaciones están críticamente amortiguadas. (Véase el ejemplo 30.11.)

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (30.29)$$



Términos clave

inductancia mutua, *1031*
henry, *1032*
fem autoinducida, *1034*
inductancia (autoinductancia), *1034*
inductor, *1034*
densidad de energía magnética, *1039*
circuito *R-L*, *1041*
constante de tiempo, *1043*
circuito *L-C*, *1045*
oscilación eléctrica, *1046*
circuito en serie *L-R-C*, *1049*
movimiento armónico amortiguado, *1050*
subamortiguado, *1050*
críticamente amortiguado, *1050*
sobreamortiguado, *1050*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Como se explicó en la sección 30.2, los sensores de semáforos funcionan midiendo el cambio en la inductancia de una bobina enterrada bajo el pavimento cuando un automóvil pasa por encima de ella.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

30.1 Respuesta: iii) Duplicar tanto la longitud del solenoide (l) como el número de espiras de alambre en éste (N_1) *no* tendría efecto en la inductancia mutua M. El ejemplo 30.1 muestra que M depende del cociente de estas cantidades, las cuales permanecerían sin cambio. Esto se debe a que el campo magnético producido por el solenoide depende del número de espiras *por unidad de longitud*, y el cambio propuesto no tiene efecto sobre esta cantidad.

30.2 Respuestas: iv), i), iii), ii) De acuerdo con la ecuación (30.8), la diferencia de potencial a través del inductor es $V_{ab} = L\,di/dt$. Para los cuatro casos se encuentra que i) $V_{ab} = (2.0\ \mu\text{H})(2.0\ \text{A} - 1.0\text{A})/(0.50\ \text{s}) = 4.0\ \mu\text{V}$; ii) $V_{ab} = (4.0\ \mu\text{H})(0 - 3.0\text{A})/(2.0\ \text{s}) = -6.0\ \mu\text{V}$; iii) $V_{ab} = 0$ porque la tasa de cambio de la corriente es igual a cero; y iv) $V_{ab} = (1.0\ \mu\text{H})(4.0\text{A} - 0)/(0.25\ \text{s}) = 16\ \mu\text{V}$.

30.3 Respuestas: *a*) sí, *b*) no La inversión del sentido de la corriente no tiene efecto sobre la magnitud del campo magnético, pero ocasiona que se invierta el sentido del campo magnético. No tiene efecto sobre la densidad de energía del campo magnético, que es proporcional al cuadrado de la *magnitud* del campo magnético.

30.4 Respuestas: *a*) i), *b*) ii) Recuerde que v_{ab} es el potencial en a menos el potencial en b, y de manera similar para v_{bc}. Para cualquier arreglo de los interruptores, la corriente fluye a través del resistor de a a b. El extremo corriente arriba del resistor siempre está en el potencial mayor, por lo que v_{ab} es positiva. Con S_1 cerrado y S_2 abierto, la corriente a través del inductor fluye de b a c y va en aumento. La fem autoinducida se opone a este incremento, por lo que se dirige de c a b, lo que significa que b está a un potencial mayor. Por lo tanto, v_{bc} es positiva. Con S_1 abierto y S_2 cerrado, la corriente en el inductor otra vez fluye de b a c, pero ahora disminuye. La fem autoinducida se dirige de b a c en un esfuerzo por sostener la corriente que decae, por lo que c está a un potencial mayor y v_{bc} es negativa.

30.5 Respuestas: *a*) positivo, *b*) eléctrica, *c*) negativo, *d*) eléctrica El capacitor pierde energía entre las etapas *a*) y *b*), por lo que realiza trabajo positivo sobre las cargas. Esto lo logra ejerciendo una fuerza eléctrica que empuja la corriente lejos de la placa izquierda del capacitor con carga positiva y hacia la derecha con carga negativa. Al mismo tiempo, el inductor gana energía y efectúa trabajo negativo sobre las cargas en movimiento. Aunque el inductor almacena energía magnética, la fuerza que ejerce el inductor es *eléctrica*. Esta fuerza proviene de la fem autoinducida del inductor (véase la sección 30.2).

30.6 Respuestas: i), iii) No hay oscilaciones si $R^2 \geq 4L/C$. En cada caso, $R^2 = (2.0\ \Omega)^2 = 4.0\ \Omega^2$. En el caso i) $4L/C = 4(3.0\ \mu\text{H})/(6.0\ \mu\text{F}) = 2.0\ \Omega^2$, por lo que no hay oscilaciones (el sistema está sobreamortiguado); en el caso ii) $4L/C = 4(6.0\ \mu\text{H})/(3.0\ \mu\text{F}) = 8.0\ \Omega^2$, de manera que hay oscilaciones (el sistema está subamortiguado), y en el caso iii) $4L/C = 4(3.0\ \mu\text{H})/(3.0\ \mu\text{F}) = 4.0\ \Omega^2$, por lo que no hay oscilaciones (el sistema está críticamente amortiguado).

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P30.1. En un trolebús eléctrico, un tipo de autobús, el motor del vehículo toma corriente de un alambre que corre por arriba por medio de un brazo largo con un dispositivo en su extremo que se desliza a lo largo del alambre. Con frecuencia se observa una chispa eléctrica brillante cuando el dispositivo cruza las uniones de los alambres, donde el contacto se pierde momentáneamente. Explique este fenómeno.

P30.2. Un transformador consiste básicamente en dos bobinas muy cercanas, pero sin que estén en contacto eléctrico. Una corriente en una de las bobinas induce magnéticamente una fem en la otra, con propiedades que se controlan ajustando la geometría de ambas bobinas. Sin embargo, ese dispositivo sólo funciona con corriente alterna, y no con corriente directa. Explique la razón.

P30.3. En la figura 30.1, si la bobina 2 se hace girar 90° de manera que su eje sea vertical, ¿aumenta o disminuye la inductancia mutua? Explique su respuesta.
P30.4. El solenoide toroidal con devanado muy compacto es una de las pocas configuraciones para las que es fácil calcular la autoinductancia. ¿Cuáles son las características que le dan esta simplicidad?
P30.5. Dos bobinas circulares con devanados muy compactos son idénticas y cada una tiene autoinductancia L; se colocan muy cerca una de la otra, de manera que son coaxiales y casi se tocan. Si se conectan en serie, ¿cuál es la autoinductancia de la combinación? ¿Y cuál si se conectan en paralelo? ¿Se pueden conectar de manera que la inductancia total sea igual a cero? Explique su respuesta.
P30.6. Dos bobinas circulares con devanados muy compactos tienen el mismo número de espiras, pero una tiene un radio que mide el doble del radio de la otra. ¿Cómo se relacionan las autoinductancias de las dos bobinas? Explique su razonamiento.
P30.7. Usted va a construir un resistor devanando un alambre alrededor de un cilindro. Para hacer la inductancia tan pequeña como sea posible, le proponen que enrolle la mitad del alambre en un sentido, y la otra mitad en sentido contrario. ¿Esto daría el resultado que busca? ¿Por qué?
P30.8. Para la misma intensidad de campo magnético B, ¿la densidad de energía es mayor en el vacío o en un material magnético? Explique su respuesta. ¿La ecuación (30.11) implica que para un solenoide largo en el que la corriente es I, la energía almacenada es proporcional a $1/\mu$? ¿Y esto significa que para la misma corriente se almacena menos energía cuando el solenoide está lleno con un material ferromagnético que cuando contiene aire? Explique.
P30.9. En la sección 30.5, la ley de Kirchhoff de las mallas se aplica a un circuito L-C donde el capacitor está inicialmente cargado por completo y se obtiene la ecuación $-L\,di/dt - q/C = 0$. Pero conforme el capacitor comienza a descargarse, la corriente se incrementa desde cero. La ecuación nos dice que $L\,di/dt = -q/C$; por lo tanto, afirma que $L\,di/dt$ es negativo. Explique cómo puede ser negativo $L\,di/dt$ si la corriente va en aumento.
P30.10. En la sección 30.5 se usó la relación $i = dq/dt$ para obtener la ecuación (30.20). Pero un flujo de corriente corresponde a una disminución de la carga del capacitor. Entonces, explique por qué ésta es la ecuación correcta para hacer la deducción, y no $i = -dq/dt$.
P30.11. En el circuito R-L que se ilustra en la figura 30.11, cuando se cierra el interruptor S_1, el potencial v_{ab} cambia súbitamente y en forma discontinua, no así la corriente. Explique por qué el voltaje puede cambiar de pronto pero la corriente no.
P30.12. En el circuito R-L que se presenta en la figura 30.11, ¿la corriente en el resistor siempre es la misma que la corriente en el inductor? ¿Cómo se sabe?
P30.13. Suponga que hay una corriente estable en un inductor. Si trata de reducir la corriente a cero en forma instantánea abriendo rápidamente un interruptor, puede aparecer un arco donde el interruptor hace contacto. ¿Por qué? ¿Es físicamente posible detener la corriente de forma instantánea? Explique su respuesta.
P30.14. En un circuito R-L-C, ¿qué criterio podría emplearse para decidir si el sistema está sobreamortiguado o subamortiguado? Por ejemplo, ¿podríamos comparar la máxima energía almacenada durante un ciclo con la energía disipada durante un ciclo? Explique.

Ejercicios

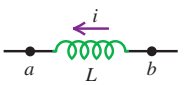
Sección 30.1 Inductancia mutua

30.1. Dos bobinas tienen inductancia mutua $M = 3.25 \times 10^{-4}$ H. La corriente i_1 en la primera bobina aumenta con una tasa uniforme de 830 A/s. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la segunda bobina? ¿Es constante? *b*) Suponga que la corriente descrita está en la segunda bobina y no en la primera. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?
30.2. Dos bobinas están devanadas alrededor de la misma forma cilíndrica, como las del ejemplo 30.1. Cuando la corriente en la primera bobina disminuye a una tasa de −0.242 A/s, la fem inducida en la segunda tiene una magnitud de 1.65×10^{-3} V. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de bobinas? *b*) Si la segunda bobina tiene 25 espiras, ¿cuál es el flujo a través de cada espira cuando la corriente en la primera bobina es igual a 1.20 A? *c*) Si la corriente en la segunda bobina aumenta a razón de 0.360 A/s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?
30.3. De acuerdo con la ecuación (30.5), 1 H = 1 Wb/A; y de la (30.4), 1 H = 1 Ω · s. Demuestre que estas dos definiciones son equivalentes.
30.4. Una bobina en forma de solenoide con 25 espiras de alambre está devanada en forma compacta alrededor de otra bobina con 300 espiras (véase el ejemplo 30.1). El solenoide interior tiene 25.0 cm de longitud y 2.00 cm de diámetro. En cierto momento, la corriente en el solenoide interior es de 0.120 A y aumenta a una tasa de 1.75×10^3 A/s. Para este tiempo, calcule *a*) el flujo magnético medio a través de cada espira del solenoide interno; *b*) la inductancia mutua de los dos solenoides; *c*) la fem inducida en el solenoide exterior cambiando la corriente en el solenoide interior.
30.5. Dos solenoides toroidales están devanados alrededor de la misma forma de manera que el campo magnético de uno pasa a través de las espiras del otro. El solenoide 1 tiene 700 espiras, y el solenoide 2 tiene 400. Cuando la corriente en el solenoide 1 es de 6.52 A, el flujo medio a través de cada espira del solenoide 2 es de 0.0320 Wb. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de solenoides? *b*) Cuando la corriente en el solenoide 2 es de 2.54 A, ¿cuál es el flujo medio a través de cada espira del solenoide 1?

Sección 30.2 Autoinductancia e inductores

30.6. Un solenoide toroidal tiene 500 espiras, área de sección transversal de 6.25 cm^2, y radio medio de 4.00 cm. *a*) Calcule la autoinductancia de la bobina. *b*) Si la corriente disminuye de manera uniforme de 5.00 A a 2.00 A en 3.00 ms, calcule la fem autoinducida en la bobina. *c*) La corriente se dirige de la terminal *a* de la bobina a la *b*. El sentido de la fem inducida, ¿es de *a* a *b*, o de *b* a *a*?
30.7. En el instante en que la corriente en un inductor aumenta a razón de 0.0640 A/s, la magnitud de la fem autoinducida es 0.0160 V. *a*) ¿Cuál es la inductancia del inductor? *b*) Si el inductor es un solenoide con 400 espiras, ¿cuál es el flujo magnético medio a través de cada espira, cuando la corriente es de 0.720 A?
30.8. Cuando la corriente en un solenoide toroidal cambia a razón de 0.0260 A/s, la magnitud de la fem inducida es de 12.6 mV. Cuando la corriente es igual a 1.40 A, el flujo medio a través de cada espira del solenoide es de 0.00285 Wb. ¿Cuántas espiras tiene el solenoide?
30.9. El inductor de la figura 30.18 tiene una inductancia de 0.260 H y conduce una corriente en el sentido que se ilustra y que disminuye a una tasa uniforme $di/dt = -0.0180$ A/s. *a*) Calcule la fem autoinducida. *b*) ¿Cuál extremo del inductor, *a* o *b*, está a un mayor potencial?

Figura **30.18** Ejercicios 30.9 y 30.10.



30.10. El inductor que se ilustra en la figura 30.18 tiene una inductancia de 0.260 H y conduce una corriente en el sentido indicado. La corriente cambia a una tasa constante. *a*) El potencial entre los puntos *a* y *b* es $V_{ab} = 1.04$ V, con el punto *a* a un mayor potencial? ¿La corriente aumenta o disminuye? *b*) Si la corriente en $t = 0$ es de 12.0 A, ¿cuál es la corriente en $t = 2.00$ s?
30.11. Inductancia de un solenoide. Un solenoide largo y recto tiene N espiras, área de sección transversal uniforme A y longitud l. Demuestre que la inductancia de este solenoide está dada por la ecuación $L = \mu_0 AN^2/l$. Suponga que el campo magnético es uniforme dentro del solenoide e igual a cero en su exterior. (La respuesta será aproximada porque en realidad B es menor en los extremos que en el centro. Por esta razón, la respuesta es en realidad un límite superior de la inductancia.)

Sección 30.3 Energía del campo magnético

30.12. Un inductor que se utiliza en una fuente de energía eléctrica de cd tiene una inductancia de 12.0 H y resistencia de 180 Ω. Conduce una corriente de 0.300 A. *a*) ¿Cuál es la energía almacenada en el campo magnético? *b*) ¿A qué tasa se desarrolla energía térmica en el inductor? *c*) ¿La respuesta del inciso *b*) significa que la energía del campo magnético disminuye con el tiempo? Explique su razonamiento.

30.13. Un solenoide toroidal lleno de aire tiene un radio medio de 15.0 cm y área de sección transversal de 5.00 cm^2. Cuando la corriente es de 12.0 A, la energía almacenada es de 0.390 J. ¿Cuántas espiras tiene el devanado?

30.14. Un solenoide toroidal lleno de aire tiene 300 espiras de alambre, 12.0 cm de radio medio y 4.00 cm^2 de área de sección transversal. Si la corriente es de 5.00 A, calcule: *a*) el campo magnético en el solenoide; *b*) la autoinductancia del solenoide; *c*) la energía almacenada en el campo magnético; *d*) la densidad de energía en el campo magnético. *e*) Compruebe la respuesta para el inciso *d*) dividiendo la respuesta al inciso *c*) entre el volumen del solenoide.

30.15. Un solenoide de 25.0 cm de longitud y área de sección transversal de 0.500 cm^2, contiene 400 espiras de alambre y conduce una corriente de 80.0 A. Calcule: *a*) el campo magnético en el solenoide; *b*) la densidad de energía en el campo magnético si el solenoide está lleno de aire; *c*) la energía total contenida en el campo magnético de la bobina (suponga que el campo es uniforme); *d*) la inductancia del solenoide.

30.16. Existe la propuesta de usar grandes inductores como dispositivos para almacenar energía. *a*) ¿Cuánta energía eléctrica convierte en luz y energía térmica una bombilla eléctrica de 200 W en un día? *b*) Si la cantidad de energía calculada en el inciso *a*) se almacena en un inductor en el que la corriente es de 80.0 A, ¿cuál es la inductancia?

30.17. A partir de la ecuación (30.9), obtenga en detalle la ecuación (30.11) para la densidad de energía en un solenoide toroidal lleno con material magnético.

30.18. Se ha propuesto almacenar 1.00 kW · h = 3.60×10^6 J de energía eléctrica en un campo magnético uniforme con magnitud de 0.600 T. *a*) ¿Qué volumen (en el vacío) debe ocupar el campo magnético para almacenar esa cantidad de energía? *b*) Si en vez de lo anterior, esa cantidad de energía fuera a almacenarse en un volumen (en el vacío) equivalente a un cubo de 40.0 cm por lado, ¿cuál sería el campo magnético que se requiere?

Sección 30.4 El circuito *R-L*

30.19. Un inductor con inductancia de 2.50 H y resistencia de 8.00 Ω está conectado a las terminales de una batería con una fem de 6.00 V y resistencia interna despreciable. Determine *a*) la tasa inicial de incremento de la corriente en el circuito; *b*) la tasa de aumento de la corriente en el instante en que esta última es de 0.500 A; *c*) la corriente 0.250 s después de haber cerrado el circuito; *d*) la corriente en el estado estable final.

30.20. Un resistor de 15.0 Ω y una bobina se encuentran conectados en serie con una batería de 6.30 V con resistencia interna despreciable y un interruptor cerrado. *a*) 2.00 ms después de abrir el interruptor, la corriente ha disminuido a 0.210 A. Calcule la inductancia de la bobina. *b*) Calcule la constante de tiempo en el circuito. *c*) ¿Cuánto tiempo después de haber cerrado el interruptor la corriente alcanzará el 1.00% de su valor original?

30.21. Una batería de 35.0 V con resistencia interna insignificante, un resistor de 50.0 Ω y un inductor de 1.25 mH con resistencia despreciable están conectados en serie con un interruptor abierto, el cual se cierra de forma súbita. *a*) ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor la corriente a través del inductor alcanzará la mitad de su valor máximo? *b*) ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor la energía almacenada en el inductor será la mitad de su máximo valor?

30.22. En la figura 30.11, el interruptor S_1 está cerrado mientras el interruptor S_2 se encuentra abierto. La inductancia es $L = 0.115$ H y la resistencia es $R = 120\ \Omega$. *a*) Cuando la corriente ha alcanzado su valor final, la energía almacenada en el inductor es de 0.260 J. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ de la batería? *b*) Después de que la corriente ha alcanzado su valor final, se abre S_1 y se cierra S_2. ¿Cuánto tiempo se requiere para que la energía almacenada en el inductor disminuya a 0.130 J, la mitad de su valor original?

30.23. Demuestre que L/R tiene unidades de tiempo.

30.24. Escriba una ecuación que corresponda a la (30.13) para la corriente que se indica en la figura 30.11, justo después de haber cerrado el interruptor S_2 y de abrir el S_1, si la corriente inicial es I_0. Use métodos de integración para verificar la ecuación (30.18).

30.25. En la figura 30.11, suponga que $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R = 240\ \Omega$ y $L = 0.160$ H. Con el interruptor S_2 abierto, se deja cerrado el S_1 hasta que se establece una corriente constante. Después se cierra el S_2 se abre el S_1, y se retira la batería del circuito. *a*) ¿Cuál es la corriente inicial en el resistor, inmediatamente después de haber cerrado S_2 y de abrir S_1? *b*) ¿Cuál es la corriente en el resistor en $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s? *c*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *b* y *c* en $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s? ¿Cuál punto está a un potencial mayor? *d*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la corriente disminuya a la mitad de su valor inicial?

30.26. En la figura 30.11, suponga que $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R = 240\ \Omega$ y $L = 0.160$ H. Al principio no hay corriente en el circuito. El interruptor S_2 se deja abierto y el S_1 cerrado. *a*) Inmediatamente después de haber cerrado S_1, ¿cuáles son las diferencias de potencial v_{ab} y v_{bc}? *b*) Mucho tiempo (es decir, muchas constantes de tiempo) después de haber cerrado S_1, ¿cuáles son v_{ab} y v_{bc} ? *c*) ¿Cuáles son v_{ab} y v_{bc} en un tiempo intermedio cuando $i = 0.150$ A?

30.27. Remítase al ejercicio 30.19. *a*) ¿Cuál es la potencia de alimentación al inductor desde la batería como función del tiempo, si el circuito se completa en $t = 0$? *b*) ¿Cuál es la tasa de disipación de energía en la resistencia del inductor como función del tiempo? *c*) ¿Cuál es la tasa a la que aumenta la energía del campo magnético en el inductor, como función del tiempo? Compare los resultados de los incisos *a*), *b*) y *c*).

Sección 30.5 El circuito *L-C*

30.28. Un capacitor de 20.0 μF se carga mediante una fuente de energía de 150.0 V, después se desconecta de la fuente y se conecta en serie con un inductor de 0.280 mH. Calcule: *a*) la frecuencia de oscilación del circuito; *b*) la energía almacenada en el capacitor en el momento $t = 0$ ms (cuando se conecta con el inductor); *c*) la energía almacenada en el inductor en $t = 1.30$ ms.

30.29. Un capacitor de 7.50 nF se carga a 12.0 V, luego se desconecta de la fuente de energía y se conecta en serie con una bobina. Después se mide el periodo de oscilación del circuito, el cual resulta ser de 8.60×10^{-5} s. Calcule *a*) la inductancia de la bobina; *b*) la carga máxima en el capacitor; *c*) la energía total del circuito; y *d*) la corriente máxima en el circuito.

30.30. Se coloca un capacitor de 18.0 μF entre las terminales de una batería de 22.5 V durante varios segundos y luego se conecta entre los extremos de un inductor de 12.0 mH que no tiene resistencia apreciable. *a*) Determine la corriente máxima en el circuito después de conectar entre sí el capacitor y el inductor. Cuando la corriente alcanza su valor máximo, ¿cuál es la carga en el capacitor? *b*) Después de conectar entre sí el capacitor y el inductor, ¿cuánto tiempo tarda el capacitor en descargarse totalmente por primera vez? ¿Y por segunda vez? *c*) Dibuje gráficas de la carga en las placas del capacitor y de la corriente a través del inductor, como funciones del tiempo.

30.31. Oscilaciones de *L-C*. Un capacitor con capacitancia de 6.00×10^{-5} F se carga conectándolo a una batería de 12.0 V. El capacitor se desconecta de la batería y se conecta entre los extremos de un inductor con $L = 1.50$ H. *a*) ¿Cuáles son la frecuencia angular ω de las oscilaciones eléctricas y el periodo de estas oscilaciones (el tiempo de una oscilación)? *b*) ¿Cuál es la carga inicial en el capacitor? *c*) ¿Cuánta energía hay almacenada inicialmente en el capacitor? *d*) ¿Cuál es la carga en el capacitor 0.0230 s después de haberlo conectado con el

inductor? Interprete el signo de la respuesta. *e*) En el momento citado en el inciso *d*), ¿cuál es la corriente en el inductor? Interprete el signo de su respuesta. *f*) En el momento citado en el inciso *d*), ¿cuánta energía eléctrica hay almacenada en el capacitor y cuánta en el inductor?

30.32. Circuito de sintonización de un radio. La capacitancia mínima de un capacitor variable de un radio es de 4.18 pF. *a*) ¿Cuál es la inductancia de una bobina conectada a este capacitor si la frecuencia de oscilación del circuito *L-C* es de 1600×10^3 Hz, correspondiente a un extremo de la banda de radiodifusión de AM, cuando se ajusta el capacitor a su capacitancia mínima? *b*) La frecuencia en el otro extremo de la banda de difusión es de 540×10^3Hz. ¿Cuál es la capacitancia máxima del capacitor si la frecuencia de oscilación es ajustable en todo el intervalo de la banda de difusión?

30.33. Un circuito *L-C*, que contiene un inductor de 80.0 mH y un capacitor de 1.25 nF, oscila con una corriente máxima de 0.750 A. Calcule: *a*) la carga máxima en el capacitor y *b*) la frecuencia de oscilación del circuito. *c*) Suponiendo que el capacitor tiene su carga máxima en el momento $t = 0$, calcule la energía almacenada en el inductor después de 2.50 ms de oscilación.

30.34. En un circuito *L-C*, $L = 85.0$ mH y $C = 3.20\ \mu$F. Durante las oscilaciones, la corriente máxima en el inductor es de 0.850 mA. *a*) ¿Cuál es la carga máxima en el capacitor? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la carga en el capacitor en el instante en que la corriente en el inductor tiene una magnitud de 0.500 mA?

30.35. *a*) Con base en las ecuaciones (30.21) y (30.23) para un circuito *L-C*, escriba expresiones para la energía almacenada tanto en el capacitor como en el inductor, como funciones del tiempo. *b*) Con base en la ecuación (30.22) y la identidad trigonométrica $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$, demuestre que la energía total en el circuito *L-C* es constante e igual a $Q^2/2C$.

30.36. Demuestre que la ecuación diferencial de la ecuación (30.20) es satisfecha por la función $q = Q\cos(\omega t + \phi)$, con ω dada por $1/\sqrt{LC}$.

30.37. Demuestre que $\sqrt{LC}$ tiene unidades de tiempo.

Sección 30.6 El circuito *L-R-C* en serie

30.38. Para el circuito de la figura 30.17, sea $C = 15.0$ nF, $L = 22$ mH y $R = 75.0\ \Omega$. *a*) Calcule la frecuencia de oscilación del circuito una vez que el capacitor ha sido cargado y el interruptor se ha conectado al punto *a*. *b*) ¿Cuánto tiempo se requerirá para que la amplitud de las oscilaciones disminuya al 10.0% de su valor original? *c*) ¿Qué valor de *R* daría como resultado un circuito críticamente amortiguado?

30.39. *a*) En la ecuación (13.41), sustituya *q* por *x*, *L* por *m*, $1/C$ por *k*, y *R* por la constante de amortiguamiento *b*. Demuestre que el resultado es la ecuación (30.27). *b*) Efectúe las mismas sustituciones en la ecuación (13.43) y demuestre que resulta la ecuación (30.29). *c*) Realice las mismas sustituciones en la ecuación (13.42) y demuestre que el resultado es la ecuación (30.28).

30.40. *a*) Obtenga la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de *q* dada por la ecuación (30.28), y demuestre que el resultado es una solución de la ecuación (30.27). *b*) En $t = 0$ se acciona el interruptor de la figura 30.17 en forma tal que conecta los puntos *d* y *a*; en ese instante, $q = Q$ e $i = dq/dt = 0$. Demuestre que las constantes ϕ y *A* en la ecuación (30.28) están dadas por

$$\tan\phi = -\frac{R}{2L\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} \quad \text{y} \quad A = \frac{Q}{\cos\phi}$$

30.41. Un circuito *L-R-C* tiene $L = 0.450$ H, $C = 2.50 \times 10^{-5}$ F y resistencia *R*. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular del circuito cuando $R = 0$? *b*) ¿Qué valor debe tener *R* para que dé una disminución del 5% en la frecuencia angular, en comparación con el valor calculado en el inciso *a*)?

30.42. Demuestre que la cantidad $\sqrt{L/C}$ tiene unidades de resistencia (ohms).

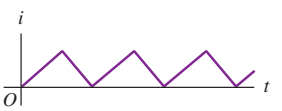
Problemas

30.43. Un solenoide está centrado dentro de otro. El solenoide exterior tiene una longitud de 50.0 cm y contiene 6750 espiras, mientras que el solenoide interior coaxial mide 3.0 cm de largo, 0.120 cm de diámetro y contiene 15 espiras. La corriente en el solenoide exterior cambia a 37.5 A/s. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua de los solenoides? *b*) Calcule la fem inducida en el solenoide interno.

30.44. Una bobina tiene 400 espiras y una autoinductancia de 3.50 mH. La corriente en la bobina varía con el tiempo de acuerdo con $i = (680\text{ mA})\cos(\pi t/0.0250\text{ s})$. *a*) ¿Cuál es la fem máxima inducida en la bobina? *b*) ¿Cuál es el flujo medio máximo a través de cada espira de la bobina? *c*) En $t = 0.0180$ s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida?

30.45. Un circuito diferenciador. Se hace variar la corriente con el tiempo en un inductor sin resistencia como se ilustra en la figura 30.19. *a*) Dibuje el patrón que se observaría en la pantalla de un osciloscopio conectado a las terminales del inductor. (El osciloscopio realiza un barrido horizontal a lo ancho de la pantalla con rapidez constante, y su desviación vertical es proporcional a la diferencia del potencial entre las terminales del inductor.) *b*) Explique por qué un circuito con un inductor se puede describir como un "circuito diferenciador".

Figura 30.19 Problema 30.45.



30.46. Un inductor de 0.250 H conduce una corriente variable en el tiempo, dada por la expresión $i = (124\text{ mA})\cos[(240\pi/\text{s})\,t]$. *a*) Encuentre una expresión para la fem inducida como función del tiempo. Grafique la corriente y la fem inducida como funciones del tiempo, de $t = 0$ a $t = \frac{1}{60}$ s. *b*) ¿Cuál es la fem máxima? ¿Cuál es la corriente cuando la fem inducida es máxima? *c*) ¿Cuál es la corriente máxima? ¿Cuál es la fem inducida cuando la corriente es máxima?

30.47. Inductores en serie y en paralelo. Se tienen dos inductores, uno de autoinductancia L_1 y el otro de autoinductancia L_2. *a*) Usted conecta los dos inductores en serie y los dispone de manera que su inductancia mutua sea insignificante. Demuestre que la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = L_1 + L_2$. *b*) Ahora conecta los dos inductores en paralelo, disponiéndolos también de forma que su inductancia mutua sea insignificante. Demuestre que la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = (1/L_1 + 1/L_2)^{-1}$. (*Sugerencia:* para cualquier combinación, en serie o en paralelo, la diferencia de potencial entre los extremos de la combinación es $L_{eq}(di/dt)$, donde *i* es la corriente a través de la combinación. En el caso de una combinación en paralelo, *i* es la suma de las corrientes a través de los dos inductores.)

30.48. Cable coaxial. Un conductor sólido y pequeño, con radio *a*, está sostenido por discos aislantes no magnéticos sobre el eje de un tubo de paredes delgadas con radio interior *b*. Los conductores interior y exterior transportan corrientes iguales *i* en sentidos opuestos. *a*) Con base en la ley de Ampère, determine el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores. *b*) Escriba la expresión para el flujo $d\Phi_B$ a través de una banda angosta de longitud *l* paralela al eje, de ancho *dr*, a una distancia *r* del eje del cable, y que se encuentra en el plano que contiene al eje. *c*) Integre su expresión del inciso *b*) con respecto al volumen comprendido entre los dos conductores para determinar el flujo total producido por una corriente *i* en el conductor central. *d*) Demuestre que la inductancia de un tramo del cable de longitud *l* es

$$L = l\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e) Use la ecuación (30.9) para calcular la energía almacenada en el campo magnético para una longitud *l* del cable.

30.49. Considere el cable coaxial del problema 30.48. Los conductores transportan corrientes iguales i en sentidos opuestos. *a*) Con base en la ley de Ampère, determine el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores. *b*) A partir de la densidad de energía para un campo magnético, ecuación (30.10), calcule la energía almacenada en una coraza delgada y cilíndrica entre los dos conductores. La coraza cilíndrica tiene un radio interior r, un radio exterior $r + dr$, y longitud l. *c*) Integre su resultado del inciso *b*) con respecto al volumen comprendido entre los dos conductores para determinar la energía total almacenada en el campo magnético correspondiente a un tramo de longitud l del cable. *d*) Utilice su resultado del inciso *c*) y la ecuación (30.9) para calcular la inductancia L de un tramo de longitud l del cable. Compare su resultado con el valor de L calculado en el inciso *d*) del problema 30.48.

30.50. Un solenoide toroidal tiene un radio medio r y área de sección transversal A, y está devanado de manera uniforme con N_1 espiras. Un segundo solenoide toroidal con N_2 espiras está devanado de manera uniforme alrededor del primero. Las dos bobinas están devanadas en el mismo sentido. *a*) Obtenga una expresión para la inductancia L_1 cuando sólo se usa la primera bobina, y otra expresión para L_2 cuando sólo se utiliza la segunda bobina. *b*) Demuestre que $M^2 = L_1L_2$.

30.51. *a*) ¿Cuál tiene que ser la autoinductancia de un solenoide para que almacene 10.0 J de energía cuando a través de él circule una corriente de 1.50 A? *b*) Si el diámetro de la sección transversal de este solenoide es de 4.00 cm y se devanan sus bobinas con una densidad de 10 espiras/mm, ¿qué tan largo tendría que ser el solenoide? (Véase el ejercicio 30.11.) ¿Ésta es una longitud realista para el uso común en un laboratorio?

30.52. Un inductor está conectado a las terminales de una batería que tiene una fem de 12.0 V y resistencia interna insignificante. La corriente es de 4.86 mA a 0.725 ms después de completar la conexión. Transcurrido un tiempo largo, la corriente es de 6.45 mA. ¿Cuáles son *a*) la resistencia R del inductor y *b*) la inductancia L del inductor?

30.53. Continuación de los ejercicios 30.19 y 30.27. *a*) ¿Cuánta energía está almacenada en el campo magnético del inductor una constante de tiempo después de que se ha conectado la batería? Calcule esto tanto con la integración de la expresión en el ejercicio 30.27*c*) como con la ecuación (30.9), y compare los resultados. *b*) Integre la expresión obtenida en el ejercicio 30.27*a*) para determinar la energía *total* suministrada por la batería durante el intervalo de tiempo considerado en el inciso *a*). *c*) Integre la expresión obtenida en el ejercicio 30.27*b*) para determinar la energía *total* disipada en la resistencia del inductor durante el mismo periodo. *d*) Compare los resultados obtenidos en los incisos *a*), *b*) y *c*).

30.54. Continuación del ejercicio 30.25. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada inicialmente en el inductor? *b*) En $t = 4.00 \times 10^{-4}$s, ¿con qué tasa disminuye la energía almacenada en el inductor? c) En $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s, ¿con qué tasa se convierte la energía eléctrica en energía térmica en el resistor? *d*) Obtenga una expresión para la tasa con que la energía eléctrica se convierte en energía térmica en el resistor como función del tiempo. Integre esta expresión desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ para obtener la energía eléctrica total disipada en el resistor. Compare el resultado con el del inciso *a*).

30.55. La ecuación que precede a la (30.27) puede convertirse en una relación para la energía. Multiplique ambos lados de esa ecuación por $-i = -dq/dt$. El primer término se vuelve i^2R. Demuestre que el segundo se puede escribir como $d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)/dt$, y que es posible escribir el tercero como $d(q^2/2C)/dt$. ¿Qué dice la ecuación resultante acerca de la conservación de la energía en el circuito?

30.56. Un capacitor de 5.00 μF inicialmente está cargado a un potencial de 16.0 V. Después se conecta en serie con un inductor de 3.75 mH. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en este circuito? *b*) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor? ¿Cuál es la carga en las placas del capacitor en el instante en que la corriente en el inductor es máxima?

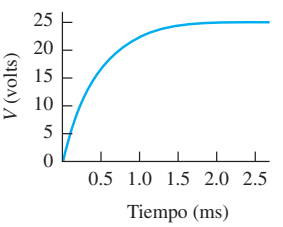
30.57. Alarma electromagnética para automóvil. Su invento más reciente es una alarma para automóvil que produce un sonido de una frecuencia particularmente molesta de 3500 Hz. Para lograrlo, los circuitos de la alarma deben producir una corriente eléctrica alterna de la misma frecuencia. Ésa es la razón por la que su diseño incluye un inductor y un capacitor en serie. El voltaje máximo entre los extremos del capacitor va a ser de 12.0 V (el mismo que la batería del vehículo). Para producir un sonido suficientemente fuerte, el capacitor debe almacenar 0.0160 J de energía. ¿Qué valores de capacitancia e inductancia se deben elegir para el circuito de la alarma?

30.58. Un circuito L-C consiste en un inductor de 60.0 mH y un capacitor de 250 μF. La carga inicial en el capacitor es de 6.00 μC, y la corriente inicial en el inductor es igual a cero. *a*) ¿Cuál es el voltaje máximo entre los extremos del capacitor? *b*) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor? *c*) ¿Cuál es la energía máxima almacenada en el inductor? *d*) Cuando la corriente en el inductor es de la mitad de su valor máximo, ¿cuál es la carga en el capacitor y cuál la energía almacenada en el inductor?

30.59. Energía magnética solar. Los campos magnéticos dentro de una mancha solar llegan a tener una intensidad tan grande como 0.4 T. (En comparación, el campo magnético terrestre es de alrededor de 1/10,000 de ese valor.) Las manchas solares tienen hasta 25,000 km de radio. El material en una mancha solar tiene una densidad de cerca de 3×10^{-4} kg/m^3. Suponga que μ para el material de la mancha solar es μ_0. Si el 100% de la energía del campo magnético almacenada en una mancha se pudiera usar para expulsar de la superficie del Sol el material de la mancha, ¿con qué rapidez sería expulsado el material? Compare el resultado con la rapidez de escape del Sol, que es de aproximadamente 6×10^5 m/s. (*Sugerencia:* calcule la energía cinética que podría proveer el campo magnético a 1 m^3 de material de la mancha solar.)

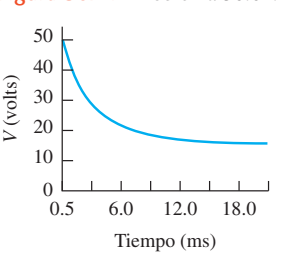
30.60. Al estudiar una bobina de inductancia y resistencia interna desconocidas, se le conecta en serie con una batería de 25.0 V y un resistor de 150 Ω. Después se coloca un osciloscopio entre los extremos de uno de estos elementos de circuito y se usa para medir el voltaje entre los extremos del elemento como función del tiempo. El resultado se ilustra en la figura 30.20. *a*) ¿A qué elemento de circuito (bobina o resistor) está conectado el osciloscopio? ¿Cómo se sabe esto? *b*) Calcule la inductancia y resistencia interna de la bobina. *c*) Elabore con cuidado un diagrama cuantitativo que muestre el voltaje contra el tiempo que se observaría si se situara el osciloscopio entre los extremos del otro elemento de circuito (resistor o bobina).

Figura **30.20** Problema 30.60.



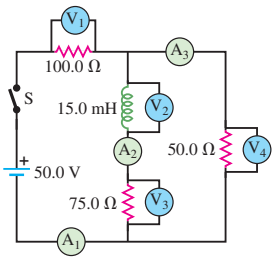
30.61. En el laboratorio usted trata de determinar la inductancia y resistencia interna de un solenoide. Para ello, lo conecta en serie con una batería cuya resistencia interna es despreciable, un resistor de 10.0 Ω y un interruptor. A continuación acopla un osciloscopio entre los extremos de uno de estos elementos de circuito para medir el voltaje entre los extremos del elemento de circuito como función del tiempo. Se cierra el interruptor y el osciloscopio indica el voltaje contra el tiempo, como se aprecia en la figura 30.21. *a*) ¿A cuál elemento de circuito (solenoide o resistor) está conectado el osciloscopio? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Por qué la gráfica no tiende a cero cuando $t \to \infty$? *c*) ¿Cuál es la fem de la batería? *d*) Determine la corriente máxima en el circuito. *e*) ¿Cuáles son la resistencia interna y la autoinductancia del solenoide?

Figura **30.21** Problema 30.61.



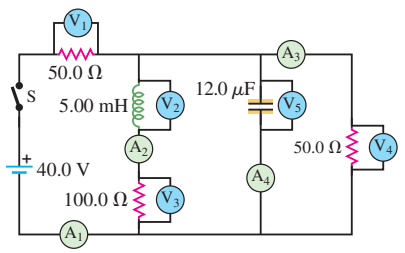
30.62. En el circuito que se ilustra en la figura 30.22, determine la lectura en cada amperímetro y voltímetro *a*) justo después de haber cerrado el interruptor S, y *b*) después de que S ha estado cerrado durante mucho tiempo.

Figura **30.22** Problema 30.62.



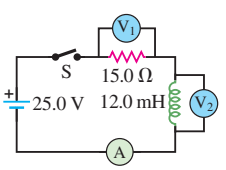
30.63. En el circuito que se ilustra en la figura 30.23, el interruptor S se cierra en el instante $t = 0$, sin carga inicial en el capacitor. *a*) Determine la lectura de cada amperímetro y voltímetro inmediatamente después de cerrar S. *b*) Determine la lectura de cada instrumento de medición después de que ha transcurrido mucho tiempo. *c*) Calcule la carga máxima en el capacitor. *d*) Dibuje una gráfica cualitativa de la lectura del voltímetro V_2 como función del tiempo.

Figura **30.23** Problema 30.63.



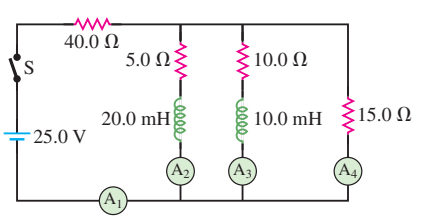
30.64. En el circuito que se ilustra en la figura 30.24, la batería y el inductor no tienen resistencia interna apreciable y no hay corriente en el circuito. Después de cerrar el interruptor, calcule las lecturas del amperímetro (A) y los voltímetros (V_1 y V_2), *a*) en el instante después de cerrar el interruptor, y *b*) después de que el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo. *c*) ¿Cuáles respuestas de los incisos *a*) y *b*) cambiarían si la inductancia fuera de 24.0 mH?

Figura **30.24** Problema 30.64.



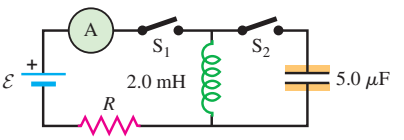
30.65. En el circuito que se aprecia en la figura 30.25, el interruptor S se cierra en el instante $t = 0$. *a*) Determine la lectura de cada instrumento de medición justo después de cerrar S. *b*) ¿Cuál es la lectura de cada instrumento mucho después de haber cerrado S?

Figura **30.25** Problema 30.65.



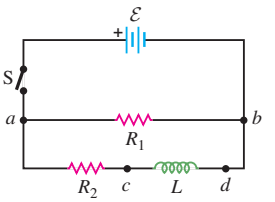
30.66. En el circuito que se observa en la figura 30.26, el interruptor S ha estado cerrado durante un tiempo prolongado, por lo que la lectura de la corriente es un valor estable de 3.50 A. De pronto, simultáneamente se cierra el interruptor S_2 y se abre el S_1. *a*) ¿Cuál es la carga máxima que recibirá el capacitor? *b*) En ese momento, ¿cuál es la corriente en el inductor?

Figura **30.26** Problema 30.66.



30.67. En el circuito que se presenta en la figura 30.27, $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R_1 = 40.0\ \Omega$, $R_2 = 25.0\ \Omega$ y $L = 0.300$ H. El interruptor S se cierra en $t = 0$. Inmediatamente después de cerrar el interruptor, *a*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor R_1; *b*) ¿cuál punto, *a* o *b*, está a un potencial más alto?; *c*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{cd} entre los extremos del inductor *L*? *d*) ¿Cuál punto, *c* o *d*, está a un potencial más alto? Se deja cerrado el interruptor durante mucho tiempo y después se abre. Inmediatamente después de abrir el interruptor, *e*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor R_1?; *f*) ¿cuál punto, *a* o *b*, está a un potencial más alto?; *g*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{cd} entre los extremos del inductor *L*?; *h*) ¿cuál punto, *c* o *d*, está a un potencial más alto?

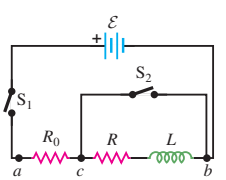
Figura **30.27** Problemas 30.67, 30.68 y 30.75.



30.68. En el circuito que se ilustra en la figura 30.27, $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R_1 = 40.0\ \Omega$, $R_2 = 25.0\ \Omega$ y $L = 0.300$ H. *a*) El interruptor S está cerrado. En cierto momento *t* posterior, la corriente en el inductor aumenta a una tasa de $di/dt = 50.0$ A/s. En ese instante, ¿cuáles son la corriente i_1 a través de R_1 y la corriente i_2 a través de R_2? (*Sugerencia:* analice dos mallas separadas: una que contenga a $\mathcal{E}$ y R_1, y la otra a $\mathcal{E}$, R_2 y *L*.) *b*) Después de que el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo, se abre de nuevo. Inmediatamente después de abrirlo, ¿cuál es la corriente a través de R_1?

30.69. Considere el circuito que aparece en la figura 30.28. Sea $\mathcal{E} = 36.0$ V, $R_0 = 50.0\ \Omega$, $R = 150\ \Omega$ y $L = 4.00$ H. *a*) El interruptor S_1 está cerrado y el S_2 se deja abierto. Inmediatamente después de cerrar S_1, ¿cuáles son la corriente i_0 a través de R_0 y las diferencias de potencial v_{ac} y v_{cb}? *b*) Después de que S_1 ha estado cerrado mucho tiempo (S_2 sigue abierto), de manera que la corriente ha alcanzado su valor final y estable, ¿cuáles son i_0, v_{ac} y v_{cb}? *c*) Encuentre las expresiones para i_0, v_{ac} y v_{cb} como funciones del tiempo *t* desde que S_1 fue cerrado. Los resultados deben concordar con el inciso *a*) cuando $t = 0$ y con el inciso *b*) cuando $t \to \infty$. Elabore una gráfica de i_0, v_{ac} y v_{cb} contra el tiempo.

Figura **30.28** Problemas 30.69 y 30.70.



30.70. Una vez que la corriente en el circuito de la figura 30.28 ha alcanzado su valor final y estable, con el interruptor S_1 cerrado y el S_2 abierto, se cierra este interruptor S_2, lo que hace que el inductor quede en cortocircuito. (El interruptor S_1 permanece cerrado. Véase el problema 30.69 para tener los valores numéricos de los elementos de circuito.) *a*) Justo después de cerrar S_2, ¿cuáles son los valores de v_{ac} y v_{cb}, y cuáles los de las corrientes a través de R_0, *R* y S_2? *b*) Mucho tiempo después de haberse cerrado S_2, ¿cuáles son v_{ac} y v_{cb}, y cuáles son las corrientes a través de R_0, *R* y S_2? *c*) Obtenga expresiones para las corrientes a través de R_0, *R* y S_2 como funciones del tiempo *t* que ha transcurrido desde que se cerró S_2. Sus resultados deben concordar con el inciso *a*) cuando $t = 0$, y con el *b*) cuando $t \to \infty$. Grafique estas tres corrientes contra el tiempo.

30.71. En el circuito que se ilustra en la figura 30.29, el interruptor ha estado abierto durante un largo periodo y de pronto se cierra. Ni la batería ni los inductores tienen una resistencia apreciable. Revise los resultados del problema 30.47. *a*) ¿Cuáles son las lecturas del amperímetro y

el voltímetro inmediatamente después de cerrar S? *b*) ¿Cuáles son las lecturas del amperímetro y el voltímetro después de que S ha estado cerrado mucho tiempo? *c*) ¿Cuáles son las lecturas del amperímetro y el voltímetro 0.115 ms después de haberse cerrado S?

30.72. En el circuito que se ilustra en la figura 30.30, ni la batería ni los inductores tienen una resistencia apreciable, los capacitores están inicialmente descargados, y el interruptor S ha estado mucho tiempo en la posición 1. Revise los resultados del problema 30.47. *a*) ¿Cuál es la corriente en el circuito? *b*) Ahora se acciona repentinamente el interruptor a la posición 2. Calcule la carga máxima que recibirá cada capacitor y cuánto tiempo se requerirá para adquirir esa carga a partir del momento en que fue accionado el interruptor.

30.73. Se han ignorado las variaciones del campo magnético en toda la sección transversal de un solenoide toroidal. Estudiemos la validez de ese enfoque. Cierto solenoide toroidal tiene sección transversal rectangular (figura 30.31). Tiene N espiras espaciadas de manera uniforme, con aire en el interior. El campo magnético en un punto dentro del toroide está dado por la ecuación obtenida en el ejemplo 28.11 (sección 28.7). *No* suponga que el campo es uniforme en toda la sección transversal. *a*) Demuestre que el flujo magnético a través de una sección transversal del toroide es

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Demuestre que la inductancia del solenoide toroidal está dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) La fracción b/a se puede escribir como

$$\frac{b}{a} = \frac{a + b - a}{a} = 1 + \frac{b - a}{a}$$

Use la expansión de series de potencias $\ln(1 + z) = z + z^2/2 + \cdots$, válida para $|z| < 1$, para demostrar que cuando $b - a$ es mucho menor que a, la inductancia es aproximadamente igual a

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h (b - a)}{2\pi a}$$

Compare este resultado con el que se dio en el ejemplo 30.3 (sección 30.2).

30.74. En la figura 30.32, el interruptor está cerrado y el capacitor tiene la polaridad que se indica. Determine el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la espira rectangular de alambre A.

30.75. Demostración de la inductancia. Una demostración común de la inductancia emplea un circuito como el de la figura 30.27. El interruptor S se encuentra cerrado y la bombilla eléctrica (representada por la resistencia R_1) apenas ilumina. Después de cierto tiempo, se abre el interruptor S y la bombilla se enciende con brillantez durante un breve tiempo. Para entender este efecto, piense en un inductor como un dispositivo que genera "inercia" en la corriente, lo que impide un cambio discontinuo en la corriente que pasa por él. *a*) Obtenga, como funciones explícitas del tiempo, expresiones para i_1 (la corriente a través de la bombilla) e i_2 (la corriente a través del inductor) después de cerrar el interruptor S. *b*) Después de un tiempo prolongado, las corrientes i_1 e i_2 alcanzan sus valores de estado estable. Obtenga expresiones para estas corrientes de estado estable. *c*) Ahora se abre el interruptor S. Obtenga una expresión para la corriente a través del inductor y la bombilla, como función explícita del tiempo. *d*) Se ha pedido al lector que diseñe un aparato para hacer una demostración usando el circuito que se ilustra en la figura 30.27, con un inductor de 22.0 H y una bombilla de 40.0 W. Va a conectarse en serie un resistor con el inductor, y R_2 representa la suma de esa resistencia más la resistencia interna del inductor. Cuando el interruptor S se abre, se genera una corriente momentánea que comienza en 0.600 A, la cual no debe disminuir a menos de 0.150 A antes de 0.0800 s. Para simplificar, suponga que la resistencia de la bombilla es constante e igual a la resistencia que la bombilla deberá tener para disipar 40.0 W a 120 V. Determine R_2 y $\mathcal{E}$ para las consideraciones de diseño dadas. *e*) Con los valores numéricos determinados en el inciso *d*), ¿cuál es la corriente a través de la bombilla justo antes de abrir el interruptor? ¿Este resultado confirma la descripción cualitativa de lo que se observa en la demostración?

Figura 30.29 Problema 30.71.

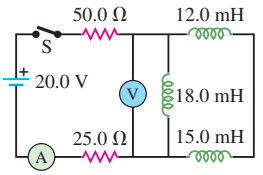


Figura 30.30 Problema 30.72.

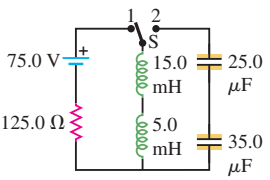


Figura 30.31 Problema 30.73.

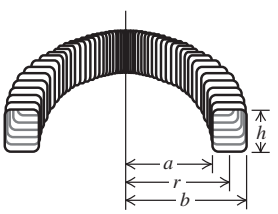
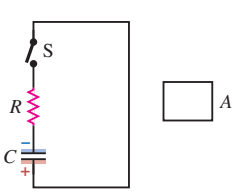


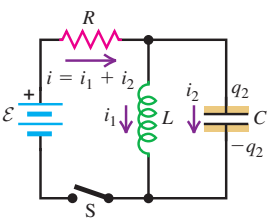
Figura 30.32 Problema 30.74.



Problemas de desafío

30.76. Considere el circuito que se ilustra en la figura 30.33. Los elementos de circuito son los siguientes: $\mathcal{E} = 32.0$ V, $L = 0.640$ H, $C = 2.00\ \mu$F y $R = 400\ \Omega$. En el instante $t = 0$, el interruptor se cierra. La corriente a través del inductor es i_1, la corriente a través del ramal del capacitor es i_2, y la carga en el capacitor es q_2. a) Con base en las leyes de Kirchhoff, verifique las ecuaciones de circuito

Figura 30.33 Problema de desafío 30.76.



$$R(i_1 + i_2) + L\left(\frac{di_1}{dt}\right) = \mathcal{E}$$

$$R(i_1 + i_2) + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$$

b) ¿Cuáles son los valores iniciales de i_1, i_2 y q_2? *c*) Por sustitución directa, demuestre que las siguientes soluciones para i_1 y q_2 satisfacen las ecuaciones de circuito del inciso *a*). Asimismo, demuestre que satisfacen las condiciones iniciales

$$i_1 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)\left[1 - e^{-\beta t}\{(2\omega RC)^{-1}\operatorname{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)\}\right]$$

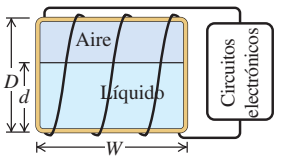
$$q_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{\omega R}\right) e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t)$$

donde $\beta = (2RC)^{-1}$ y $\omega = [(LC)^{-1} - (2RC)^{-2}]^{1/2}$. *d*) Determine el tiempo t_1 en el que i_2 disminuye a cero por primera vez.

30.77. Medidor de volumen. Un tanque que contiene un líquido tiene espiras de alambre enrolladas, lo que hace que actúe como inductor.

El contenido líquido del tanque puede medirse usando su inductancia para determinar la altura que alcanza el líquido en el interior del tanque. La inductancia del tanque cambia de un valor de L_0 correspondiente a una permeabilidad relativa de 1, cuando el tanque está vacío, a un valor de L_f que corresponde a una permeabilidad relativa de K_m (la permeabilidad relativa del líquido) cuando el tanque está lleno. Los circuitos electrónicos apropiados son capaces de determinar la inductancia con cinco cifras significativas y, por lo tanto, la permeabilidad relativa efectiva de la combinación de aire y líquido dentro de la cavidad rectangular del tanque. Los cuatro lados del tanque tienen una anchura de W y altura D (figura 30.34). La altura del líquido en el tanque es d. Pueden ignorarse los efectos de los bordes y suponga que también se puede ignorar la permeabilidad relativa del material de que está hecho el tanque. *a*) Obtenga una expresión para d como función de L, la inductancia correspondiente a cierta altura de fluido, L_0, L_f y D. *b*) ¿Cuál es la inductancia (con cinco cifras significativas) para un tanque con su contenido a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, y lleno por completo, si contiene oxígeno líquido? Tome $L_0 = 0.63000$ H. La susceptibilidad magnética del oxígeno líquido es $\chi_m = 1.52 \times 10^{-3}$. *c*) Repita el inciso *b*) para el mercurio. La susceptibilidad magnética del mercurio se da en la tabla 28.1. *d*) ¿Para cuál material es más práctico este medidor de volumen?

Figura **30.34** Problema de desafío 30.77.



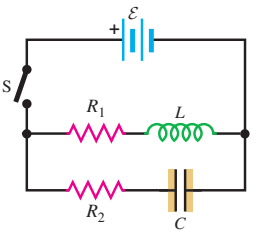
30.78. Dos bobinas están enrolladas una alrededor de la otra, como se ilustra en la figura 30.3. La corriente fluye en el mismo sentido alrededor de cada bobina. Una de ellas tiene autoinductancia L_1 y la otra una autoinductancia L_2. La inductancia mutua de las dos bobinas es M. *a*) Demuestre que si las dos bobinas se conectan en serie, la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$. *b*) Demuestre que si las dos bobinas están conectadas en paralelo, la inductancia equivalente de la combinación es

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

(*Sugerencia:* véase la sugerencia para el problema 30.47.)

30.79. Considere el circuito que se ilustra en la figura 30.35. El interruptor S se cierra en el instante $t = 0$, lo que ocasiona una corriente i_1 a través del ramal inductivo, y una corriente i_2 a través del ramal del capacitor. La carga inicial en el capacitor es igual a cero, y la carga en el momento t es q_2. *a*) Obtenga expresiones para i_1, i_2 y q_2 como funciones del tiempo. Exprese sus respuestas en términos de $\mathcal{E}$, L, C, R_1, R_2 y t. Para el resto del problema, los elementos de circuito tendrán los siguientes valores: $\mathcal{E} = 48$ V, $L = 8.0$ H, $C = 20$ μF, $R_1 = 25\ \Omega$ y $R_2 = 5000\ \Omega$. *b*) ¿Cuál es la corriente inicial a través del ramal inductivo? *c*) ¿Cuáles son las corrientes a través de los ramales del inductor y del capacitor mucho tiempo después de que se ha cerrado el interruptor? ¿Cuánto es "mucho tiempo"? Explique su respuesta. *d*) En qué tiempo t_1 (con una exactitud de dos cifras significativas) serán iguales las corrientes i_1 e i_2? (*Sugerencia:* tal vez deba considerar el empleo de las expansiones de series en el caso de las exponenciales.) *e*) Para las condiciones del inciso *d*), calcule i_1. *f*) La corriente total a través de la batería es $i = i_1 + i_2$. ¿En qué momento t_2 (con exactitud de dos cifras significativas) será i igual a la mitad de su valor final? (*Sugerencia:* el trabajo numérico se simplifica mucho si se hacen las aproximaciones adecuadas. Una gráfica de i_1 e i_2 contra t tal vez lo ayude a decidir cuáles aproximaciones son válidas.)

Figura **30.35** Problema de desafío 30.79.



CORRIENTE ALTERNA

31

? Las ondas de una radiodifusora producen una corriente alterna en los circuitos de un receptor de radio (como el de este automóvil clásico). Si se sintoniza un radio en una estación cuya frecuencia es de 1000 kHz, ¿el receptor también detecta las transmisiones de otra estación que emite a 600 kHz?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La forma en que los fasores facilitan la descripción de cantidades que varían en forma sinusoidal.
- Cómo usar la reactancia para describir el voltaje a través de un elemento del circuito que conduce una corriente alterna.
- A analizar un circuito *L*-*R*-*C* en serie con fem sinusoidal.
- Qué determina la cantidad de energía que fluye hacia dentro o hacia fuera de un circuito de corriente alterna.
- Cómo responde un circuito en serie *L*-*R*-*C* a fuentes de fem sinusoidales de diferentes frecuencias.
- Por qué son útiles los transformadores y cómo funcionan.

Durante la década de 1880 en Estados Unidos hubo un acalorado y enconado debate entre dos inventores acerca del mejor método de distribución de energía eléctrica. Thomas Edison estaba a favor de la corriente directa (cd), es decir, la corriente estable que no varía con el tiempo. George Westinghouse se inclinaba por la **corriente alterna (ca)**, con voltajes y corrientes que varían en forma sinusoidal. Westinghouse argumentaba que con la ca se podían usar transformadores (los cuales estudiaremos en este capítulo) para aumentar y reducir el voltaje, pero no con cd; los voltajes bajos son más seguros de usar por los consumidores, pero los altos voltajes y las correspondientes corrientes bajas son mejores para la transmisión de energía a grandes distancias para reducir al mínimo las pérdidas de i^2R en los cables.

Finalmente prevaleció el punto de vista de Westinghouse, y en la actualidad la mayoría de los sistemas de distribución de energía para uso doméstico e industrial operan con corriente alterna. Cualquier aparato que se conecte a una toma de pared usa ca, y muchos dispositivos energizados con baterías, como radios y teléfonos inalámbricos, emplean la cd que suministran las baterías para crear o amplificar corrientes alternas. Los circuitos de los equipos modernos de comunicación, incluidos los localizadores y la televisión, también utilizan ampliamente la ca.

En este capítulo aprenderemos cómo se comportan los resistores, inductores y capacitores en circuitos con voltajes y corrientes que cambian en forma sinusoidal. Son aplicables muchos de los principios que fueron útiles en los capítulos 25, 28 y 30, al igual que varios conceptos nuevos relacionados con el comportamiento de los inductores y capacitores en el circuito. Un concepto clave en este análisis es la *resonancia*, que estudiamos en el capítulo 13 en relación con los sistemas mecánicos.

31.1 Fasores y corrientes alternas

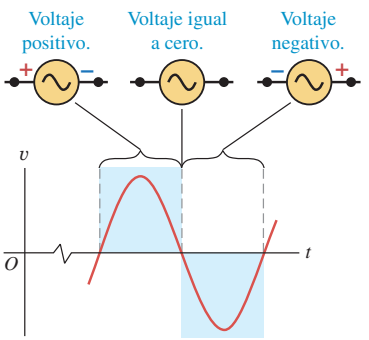
Para suministrar una corriente alterna a un circuito se requiere una fuente de fem o voltaje alternos. Un ejemplo de esto es una bobina de alambre que gira con velocidad angular constante en un campo magnético, lo que se estudió en el ejemplo 29.4 (sección 29.2). Esto crea una fem alterna sinusoidal y es el prototipo del generador comercial de corriente alterna o *alternador* (véase la figura 29.8).

Se aplica el término **fuente de ca** a cualquier dispositivo que suministre un voltaje (diferencia de potencial) v o corriente i que varía en forma sinusoidal. El símbolo habitual de una fuente de ca en los diagramas de circuito es

Un voltaje sinusoidal queda descrito por una función como

$$v = V\cos\omega t \tag{31.1}$$

31.1 Voltaje a través de una fuente de ca sinusoidal.



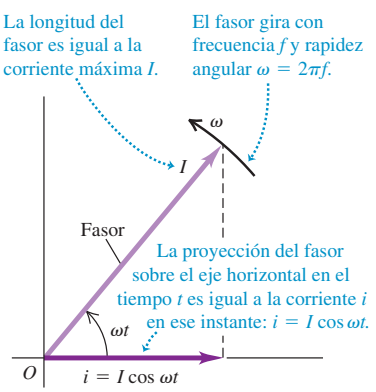
En esta expresión, v (minúscula) es la diferencia de potencial *instantánea*; V (mayúscula) es la diferencia de potencial máxima, y se llama **amplitud del voltaje**; y ω es la *frecuencia angular*, igual a 2π veces la frecuencia f (figura 31.1).

En Estados Unidos y Canadá los sistemas comerciales de distribución de energía eléctrica siempre usan una frecuencia de $f = 60$ Hz, que corresponde a $\omega = (2\pi \text{ rad})(60 \text{ s}^{-1}) = 377$ rad/s; en gran parte del resto del mundo se emplea $f = 50$ Hz ($\omega = 314$ rad/s). De manera similar, una corriente sinusoidal se describe como

$$i = I\cos\omega t \tag{31.2}$$

donde i (minúscula) es la corriente instantánea, e I (mayúscula) es la corriente máxima o **amplitud de la corriente**.

31.2 Diagrama de fasores.



Diagramas de fasores

Para representar voltajes y corrientes que varían en forma sinusoidal usaremos diagramas de vectores giratorios similares a los empleados en el estudio del movimiento armónico simple en la sección 13.2 (véanse las figuras 13.5b y 13.6). En estos diagramas el valor instantáneo de una cantidad que varía sinusoidalmente con respecto al tiempo se representa mediante la *proyección* sobre un eje horizontal de un vector con longitud igual a la amplitud de la cantidad. El vector gira en el sentido antihorario con rapidez angular constante ω. Estos vectores giratorios reciben el nombre de **fasores**, y los diagramas que los contienen se llaman **diagramas de fasores**. La figura 31.2 muestra un diagrama de fasores de la corriente sinusoidal descrita por la ecuación (31.2). La proyección del fasor sobre el eje horizontal en el tiempo t es $I\cos\omega t$; ésta es la razón por la que en la ecuación (31.2) elegimos usar la función coseno y no la de seno.

CUIDADO **Pero, ¿qué es un fasor?** Un fasor no es una cantidad física real con una dirección en el espacio, como la velocidad, la cantidad de movimiento o el campo eléctrico, sino que es una entidad *geométrica* que nos ayuda a describir y analizar cantidades físicas que varían de manera sinusoidal con el tiempo. En la sección 13.2 usamos un solo fasor para representar la posición de una masa puntual con movimiento armónico simple. En este capítulo usaremos fasores para *sumar* voltajes y corrientes sinusoidales, de manera que la combinación de cantidades sinusoidales con diferencias de fase se convierte en un asunto de sumar vectores. En el capítulo 35 encontraremos un uso similar de los fasores, y en el 36 los emplearemos en el estudio de los efectos de interferencia de la luz.

Corriente alterna rectificada

¿Cómo se mide una corriente que varía de manera sinusoidal? En la sección 26.3 usamos un galvanómetro de d'Arsonval para medir corrientes estables. Pero si hacemos pasar una corriente *sinusoidal* a través de un medidor de d'Arsonval, el par de torsión sobre la bobina móvil varía sinusoidalmente, en un sentido la mitad del tiempo y con el sentido opuesto durante la otra mitad. La aguja quizá oscile un poco si la frecuencia es suficientemente baja, pero su desviación media es igual a cero. De ahí que un galvanómetro de d'Arsonval no sea muy útil para medir corrientes alternas.

Para obtener una corriente mensurable en un solo sentido podemos emplear *diodos*, los cuales describimos en la sección 25.3. Un diodo (o rectificador) es un dispositivo que conduce mejor en un sentido que en el otro; un diodo ideal presenta resistencia nula en un sentido de la corriente y una resistencia infinita en el otro. En la figura 31.3a se presenta una configuración posible. La corriente a través del galvanómetro G siempre es hacia arriba, sin importar el sentido de la corriente desde la fuente de ca (es decir, en qué parte del ciclo esté la fuente). La corriente a través de G es como se ilustra en la gráfica en la figura 31.2b. Oscila, pero siempre tiene el mismo sentido y la desviación media del medidor *no* es igual a cero. Este arreglo de diodos se llama *circuito rectificador de onda completa*.

La **corriente de valor medio rectificada** I_{vmr} se define de manera que, durante cualquier número entero de ciclos, la carga total que fluye es la misma que habría si la corriente fuera constante con un valor igual a I_{vmr}. La notación I_{vmr} y el nombre corriente *de valor medio rectificada* ponen de relieve que éste *no* es el promedio de la corriente sinusoidal original. En la figura 31.3b la carga total que fluye en el tiempo t corresponde al área bajo la curva de i en función de t (recuerde que $i = dq/dt$, por lo que q es la integral de t); esta área debe ser igual al área rectangular con altura I_{vmr}. Se observa que I_{vmr} es menor que la corriente máxima I; las dos están relacionadas mediante la expresión

$$I_{\text{vmr}} = \frac{2}{\pi} I = 0.637 I \qquad \text{(valor medio rectificado de una corriente sinusoidal)} \tag{31.3}$$

(El factor de $2/\pi$ es el valor medio de $|\cos \omega t|$ o de $|\text{sen}\, \omega t|$; véase el ejemplo 29.5 en la sección 29.2.) La desviación del galvanómetro es proporcional a I_{vmr}. La escala del galvanómetro se calibra para que lea I, I_{vmr} o, más comúnmente I_{rms} (que se estudiará a continuación).

Valores cuadráticos medios (rms)

Una forma más útil de describir una cantidad positiva o negativa es el *valor eficaz* o *valor cuadrático medio* (*rms*, por las siglas de *root mean square*). En la sección 18.3 usamos valores rms en relación con la rapidez de las moléculas de un gas. Se *eleva al cuadrado* la corriente instantánea i, se obtiene el valor *promedio* (media) de i^2 y, por último, se saca la *raíz cuadrada* de ese valor. Este procedimiento define la **corriente eficaz**, que se denota con I_{rms} (figura 31.4). Aun cuando i sea negativa, i^2 siempre será positiva, por lo que I_{rms} nunca es igual a cero (a menos que i fuera cero en todo instante).

A continuación se ilustra cómo obtener I_{rms} para una corriente sinusoidal como la de la figura 31.4. Si la corriente instantánea está dada por $i = I \cos \omega t$, entonces

$$i^2 = I^2 \cos^2 \omega t$$

Aplicando una fórmula trigonométrica para ángulos dobles,

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

se obtiene

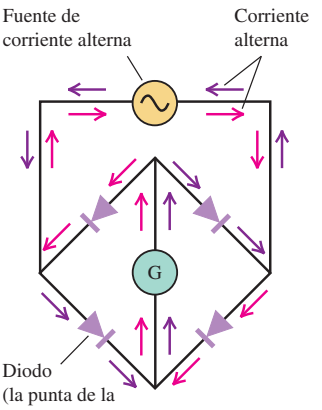
$$i^2 = I^2 \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) = \frac{1}{2} I^2 + \frac{1}{2} I^2 \cos 2\omega t$$

El promedio de $\cos 2\omega t$ es igual a cero porque la mitad del tiempo tiene un valor positivo y la otra mitad tiene un valor negativo. Así, el promedio de i^2 simplemente es $I^2/2$. La raíz cuadrada de esto es I_{rms}.

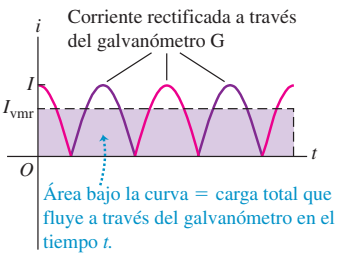
$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad \text{(valor cuadrático medio de una corriente sinusoidal)} \tag{31.4}$$

31.3 a) Circuito rectificador de onda completa. b) Gráfica de la corriente resultante a través del galvanómetro G.

a) Circuito rectificador de onda completa



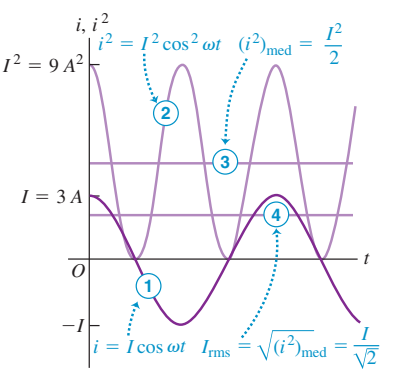
b) Gráfica de la corriente rectificada de onda completa y su valor medio, la corriente de valor medio rectificada I_{vmr}



31.4 Cálculo del valor cuadrático medio (rms) de una corriente alterna.

Significado del valor rms de una cantidad sinusoidal (aquí, una corriente alterna con $I = 3$ A):

1. Grafique la corriente i contra el tiempo.
2. *Eleve al cuadrado* la corriente instantánea i.
3. Obtenga el valor *promedio* (media) de i^2.
4. Obtenga la *raíz cuadrada* de ese promedio.



31.5 Esta toma de pared entrega un voltaje eficaz de 120 V. Sesenta veces por segundo, el voltaje instantáneo entre sus terminales varía de $(\sqrt{2})(120\ \text{V}) = 170\ \text{V}$ a -170 V y viceversa.

De la misma manera, el valor cuadrático medio de un voltaje sinusoidal con amplitud (máximo valor) V es

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad \text{(valor cuadrático medio de un voltaje sinusoidal)} \qquad (31.5)$$

Si se agrega un resistor en serie se puede convertir un amperímetro rectificador en un voltímetro, igual que se hizo en el caso de cd analizado en la sección 26.3. Los medidores usados para medir voltajes y corrientes ca casi siempre están calibrados para leer valores rms, no el promedio máximo o rectificado. Los voltajes y las corrientes en los sistemas de distribución de energía siempre se describen en términos de sus valores rms. La línea de energía habitual de tipo doméstico, de "120 volts ca", tiene un voltaje rms de 120 V (figura 31.5). La amplitud del voltaje es

$$V = \sqrt{2}V_{\text{rms}} = \sqrt{2}(120\ \text{V}) = 170\ \text{V}$$

Ejemplo 31.1 Corriente en una computadora personal

La placa en la parte posterior de una computadora personal indica que toma 2.7 A de una línea de 120 V y 60 Hz. Para esta computadora, ¿cuáles son los valores de *a*) la corriente media, *b*) la media del cuadrado de la corriente y *c*) la amplitud de la corriente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es sobre corriente alterna.

PLANTEAR: En los incisos *b*) y *c*) se emplea la idea de que la corriente eficaz, dada por la ecuación (31.4) es la *raíz cuadrada* de la *media* (promedio) del *cuadrado* de la corriente.

EJECUTAR: *a*) El promedio de *cualquier* corriente alterna sinusoidal, en cualquier número de ciclos, es igual a cero.

b) La corriente dada es el valor rms: $I_{\text{rms}} = 2.7$ A. La variable buscada $(i^2)_{\text{med}}$ es la *media* del *cuadrado* de la corriente. La corriente eficaz rms es la raíz cuadrada de esta incógnita, por lo que

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{(i^2)_{\text{med}}} \quad \text{o bien} \quad (i^2)_{\text{med}} = (I_{\text{rms}})^2 = (2.7\ \text{A})^2 = 7.3\ \text{A}^2$$

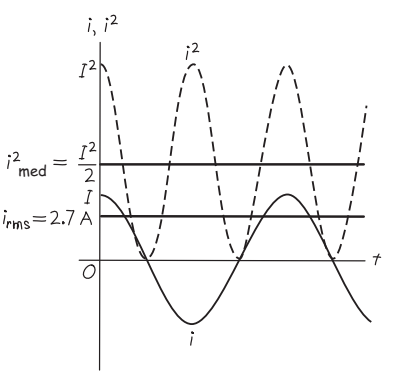
c) De la ecuación (31.4), la amplitud de la corriente I es

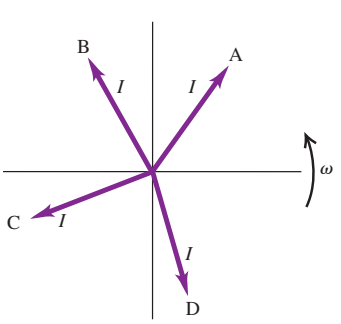
$$I = \sqrt{2}I_{\text{rms}} = \sqrt{2}(2.7\ \text{A}) = 3.8\ \text{A}$$

La figura 31.6 muestra las gráficas de i e i^2.

EVALUAR: ¿Por qué habríamos de estar interesados en el valor medio del cuadrado de la corriente? Recuerde que la tasa con la que se disipa energía en un resistor R es igual a i^2R. Esta tasa varía si la corriente es alterna, por lo que su valor medio la describe mejor, $(i^2)_{\text{med}}R = I_{\text{rms}}{}^2R$. En la sección 31.4 se utiliza esta idea.

31.6 Gráficas de la corriente i y el cuadrado de la corriente i^2 contra el tiempo t.





Evalúe su comprensión de la sección 31.1 La figura de la izquierda muestra cuatro fasores de corriente diferentes con la misma frecuencia angular ω. En el momento ilustrado, ¿cuál fasor corresponde a *a*) una corriente positiva que se está haciendo más positiva; *b*) una corriente positiva que disminuye hacia cero; *c*) una corriente negativa que se está haciendo más negativa; *d*) una corriente negativa cuya magnitud disminuye hacia cero?

31.2 Resistencia y reactancia

En esta sección obtendremos las relaciones de voltaje y corriente para elementos de circuitos individuales que conducen una corriente sinusoidal. Consideraremos resistores, inductores y capacitores.

Resistores en un circuito de ca

En primer lugar, consideremos un resistor con resistencia R a través del cual circula una corriente sinusoidal dada por la ecuación (31.2): $i = I\cos\omega t$. El sentido positivo de la corriente es antihorario alrededor del circuito, como se ilustra en la figura 31.7a. La amplitud de la corriente (máxima corriente) es I. Según la ley de Ohm, el potencial instantáneo v_R del punto a con respecto al punto b (es decir, la diferencia de potencial entre los extremos del resistor) es

$$v_R = iR = (IR)\cos\omega t \tag{31.6}$$

El voltaje máximo V_R, la *amplitud del voltaje*, es el coeficiente de la función coseno:

$$V_R = IR \text{ (amplitud del voltaje entre los extremos de un resistor, circuito ca)} \tag{31.7}$$

Por lo tanto, también podemos escribir

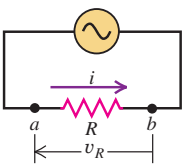
$$v_R = V_R\cos\omega t \tag{31.8}$$

La corriente i y el voltaje v_R son proporcionales a $\cos\omega t$, así que la corriente está *en fase* con el voltaje. La ecuación (31.7) muestra que las amplitudes de corriente y de voltaje están relacionadas del mismo modo que en un circuito de cd.

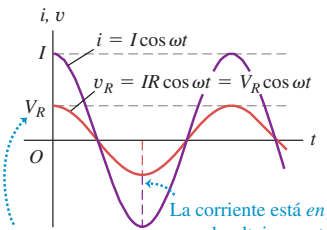
La figura 31.7b presenta las gráficas de i y v_R como funciones del tiempo. Las escalas verticales para la corriente y el voltaje son distintas, de manera que las alturas de las dos curvas no son significativas. La figura 31.7c muestra el diagrama de fasores correspondiente. Como i y v_R están *en fase* y tienen la misma frecuencia, los fasores de corriente y de voltaje giran juntos; son paralelos en todo instante. Sus proyecciones sobre el eje horizontal representan la corriente y el voltaje instantáneos, respectivamente.

31.7 Resistencia R conectada a través de una fuente de ca.

a) Circuito con una fuente de ca y un resistor



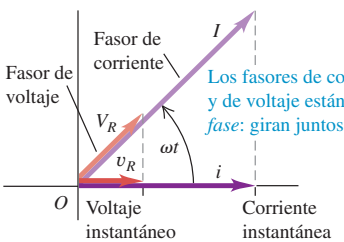
b) Gráficas de la corriente y el voltaje contra el tiempo



Las amplitudes están en la misma relación que para un circuito de cd: $V_R = IR$.

La corriente está *en fase* con el voltaje: crestas y valles se presentan juntos.

c) Diagrama de fasores



Los fasores de corriente y de voltaje están *en fase*: giran juntos.

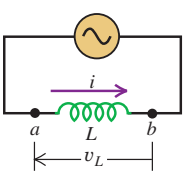
Inductor en un circuito de ca

A continuación sustituimos el resistor en la figura 31.7 con un inductor con autoinductancia L y resistencia igual a cero (figura 31.8a). Una vez más, suponemos que la corriente es $i = I\cos\omega t$, con el sentido positivo de la corriente tomada en sentido antihorario alrededor del circuito.

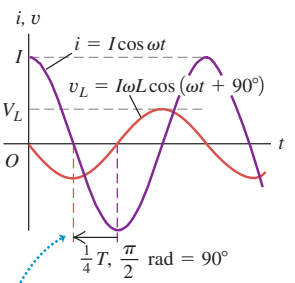
Aunque no hay resistencia, sí hay una diferencia de potencial v_L entre las terminales del inductor a y b porque la corriente varía con el tiempo, lo que da lugar a una fem autoinducida. Esta fem inducida en el sentido de i está dada por la ecuación (30.7), $\mathcal{E} = -L\,di/dt$; sin embargo, el voltaje v_L *no* es simplemente igual a $\mathcal{E}$. Para ver por qué, observe que si la corriente en el inductor fluye en el sentido positivo (antihorario) de a a b y va en aumento, entonces di/dt es positiva y la fem inducida se dirige hacia la izquierda para oponerse al aumento de la corriente; así, el punto a está a un potencial más alto que el punto b. Por lo tanto, el potencial al punto a con respecto al b es positivo y está dado por $v_L = +L\,di/dt$, el *negativo* de la fem inducida. (Compruebe

31.8 Inductancia L conectada a través de una fuente de ca.

a) Circuito con fuente de ca e inductor



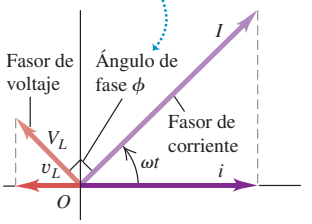
b) Gráficas de corriente y voltaje contra el tiempo



La curva del voltaje *adelanta* a la de la corriente por un cuarto de ciclo (correspondiente a $\phi = \pi/2$ rad $= 90°$).

c) Diagrama de fasores

El fasor de voltaje *adelanta* al fasor de corriente en $\phi = \pi/2$ rad $= 90°$.



Activ ONLINE Physics
14.3 Circuitos de ca: el oscilador excitador (preguntas de la 1 a la 5)

por su cuenta que esta expresión da el signo correcto de v_L en *todos* los casos, incluso cuando i va en el sentido antihorario y disminuye, cuando i va en el sentido horario y aumenta, y cuando i va en el sentido horario y disminuye; también es recomendable repasar la sección 30.2.) Por lo tanto, tenemos

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I\cos\omega t) = -I\omega L\,\text{sen}\,\omega t \tag{31.9}$$

El voltaje v_L entre los extremos del inductor en cualquier instante es proporcional a la *tasa de cambio* de la corriente. Los puntos de máximo voltaje en la gráfica corresponden a la inclinación máxima de la curva de la corriente, y los puntos de voltaje igual a cero son aquellos en los que la curva de la corriente se estabiliza por un instante en sus valores máximo y mínimo (figura 31.8b). El voltaje y la corriente "pierden el paso", es decir están *fuera de fase*, por un cuarto de ciclo. Como los máximos de voltaje se presentan un cuarto de ciclo antes que los máximos de la corriente, se dice que el voltaje *se adelanta* a la corriente por 90°. El diagrama de fasores en la figura 31.8c también muestra esta relación; el fasor del voltaje está 90° adelante del fasor de la corriente.

Esta relación de fase también se obtiene si se rescribe la ecuación (31.9) utilizando la identidad $\cos(A + 90°) = -\text{sen}\,A$

$$v_L = I\omega L\cos(\omega t + 90°) \tag{31.10}$$

Este resultado indica que el voltaje puede verse como una función coseno con una "ventaja" de 90° en relación con la corriente.

Como hicimos en la ecuación (31.10), por lo general describiremos la fase del *voltaje* en relación con la *corriente*, y no a la inversa. De esta forma, si la corriente i en un circuito es

$$i = I\cos\omega t$$

y el voltaje v de un punto con respecto a otro es

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$

Se llama ϕ al **ángulo de fase**, el cual indica la fase del *voltaje* en relación con la *corriente*. Para un resistor, $\phi = 0$, y para un inductor $\phi = 90°$.

De la ecuación (31.9) o (31.10), la amplitud V_L del voltaje inductor es

$$V_L = I\omega L \tag{31.11}$$

Se define la **reactancia inductiva** X_L de un inductor como

$$X_L = \omega L \qquad \text{(reactancia inductiva)} \tag{31.12}$$

Utilizando X_L, podemos escribir la ecuación (31.11) en una forma similar a la (31.7) para un resistor ($V_R = IR$):

$$V_L = IX_L \text{ (amplitud de voltaje entre los extremos de un inductor, circuito de ca)} \tag{31.13}$$

Como X_L es la razón entre un voltaje y una corriente, su unidad en el SI es el ohm, la misma que la de la resistencia.

CUIDADO **El voltaje y la corriente en el inductor no están en fase** Recuerde que la ecuación (31.13) es una relación entre las *amplitudes* de voltaje y de corriente oscilantes del inductor en la figura 31.8a. *No* dice que el voltaje en cualquier instante sea igual a la corriente en ese instante multiplicada por X_L. Como se ilustra en la figura 31.8b, el voltaje y la corriente están 90° fuera de fase. El voltaje y la corriente están en fase sólo en el caso de los resistores, como en la ecuación (31.6).

Significado de la reactancia inductiva

La reactancia inductiva X_L en realidad es una descripción de la fem autoinducida que se opone a cualquier cambio en la corriente a través del inductor. De acuerdo con la ecuación (31.13), para una amplitud de corriente dada I, el voltaje $v_L = +L\,di/dt$ entre los extremos del inductor y la fem autoinducida $\mathcal{E} = -L\,di/dt$ tienen ambos una amplitud V_L que es directamente proporcional a X_L. De acuerdo con la ecuación (31.12), la reactancia inductiva y la fem autoinducida se incrementan cuando la variación de la corriente es más rápida (es decir, con el incremento de la frecuencia angular ω) y cuando la inductancia L aumenta.

Si se aplica un voltaje oscilante de una amplitud dada V_L entre las terminales del inductor, la corriente resultante tendrá una amplitud más pequeña I para valores más grandes de X_L. Como X_L es proporcional a la frecuencia, un voltaje de alta frecuencia aplicado al inductor sólo genera una corriente pequeña, mientras que un voltaje de baja frecuencia de la misma amplitud origina una corriente más grande. Los inductores se usan en ciertas aplicaciones de circuitos, tales como los sistemas de suministro de energía eléctrica y los filtros de interferencias de radio, para bloquear altas frecuencias al mismo tiempo que se permite el paso de frecuencias bajas o de cd. Un dispositivo de circuito que usa un inductor para este propósito se llama *filtro de paso bajo* (véase el problema 31.50).

Ejemplo 31.2 Inductor en un circuito de ca

Suponga que se desea que la amplitud de la corriente en un inductor de un receptor de radio sea de 250 μA cuando la amplitud del voltaje es de 3.60 V a una frecuencia de 1.60 MHz (correspondiente al extremo superior de la banda de transmisión de AM). *a*) ¿Cuál es la reactancia inductiva que se necesita? *b*) Si la amplitud del voltaje se mantiene constante, ¿cuál será la amplitud de la corriente a través de este inductor a 16.0 MHz? ¿Y a 160 kHz?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: No se dice nada de los demás elementos de circuito del que forma parte el inductor, pero no debemos preocuparnos demasiado por ello porque, desde el punto de vista de este ejemplo, todo lo que hacen es suministrar al inductor un voltaje oscilante. De ahí que todos los demás elementos de circuito estén agrupados en la fuente de ca, como se ilustra en la figura 31.8a.

PLANTEAR: Se da la amplitud de la corriente I y la del voltaje V. Las incógnitas en el inciso *a*) son la reactancia inductiva X_L a 1.60 MHz y la inductancia L, que se obtiene con las ecuaciones (31.13) y (31.12). Una vez que conocemos L, usamos estas mismas dos ecuaciones para determinar la reactancia inductiva y la amplitud de la corriente en cualquier otra frecuencia.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (31.13),

$$X_L = \frac{V_L}{I} = \frac{3.60\ \text{V}}{250 \times 10^{-6}\ \text{A}} = 1.44 \times 10^4\ \Omega = 14.4\ \text{k}\Omega$$

A partir de la ecuación (31.12), con $\omega = 2\pi f$, se obtiene

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{1.44 \times 10^4\ \Omega}{2\pi(1.60 \times 10^6\ \text{Hz})} = 1.43 \times 10^{-3}\ \text{H} = 1.43\ \text{mH}$$

b) Al combinar las ecuaciones (31.12) y (31.13), se determina que la amplitud de la corriente es $I = V_L/X_L = V_L/\omega L = V_L/2\pi fL$. Así, la amplitud de la corriente es inversamente proporcional a la frecuencia f. Como $I = 250\ \mu$A con $f = 1.60$ MHz, la amplitud de la corriente a 16.0 MHz (esto es, 10 veces la frecuencia original) será un décimo de aquel valor, es decir, 25.0 μA; a 160 kHz = 0.160 MHz (un décimo de la frecuencia original), la amplitud de la corriente es 10 veces mayor, o 2500 μA = 2.50 mA.

EVALUAR: En general, cuanto más baja sea la frecuencia de un voltaje oscilante aplicado entre las terminales de un inductor, mayor será la amplitud de la corriente oscilante que resulta.

Capacitor en un circuito de ca

Por último, al conectar con la fuente un capacitor cuya capacitancia es C, como se aprecia en la figura 31.9a, se produce una corriente $i = I\cos\omega t$ a través del capacitor. De nuevo, el sentido positivo de la corriente es antihorario alrededor del circuito.

CUIDADO **Corriente alterna a través del capacitor** El lector tal vez objete que la carga en realidad no se puede desplazar a través del capacitor porque sus dos placas están aisladas una de la otra. Eso es cierto, pero conforme el capacitor se carga y se descarga, en cada instante hay una corriente i que entra en una placa, una corriente igual que sale de la otra placa y una corriente de *desplazamiento* igual entre las placas, exactamente igual que si la carga se desplazara a través del capacitor. (Tal vez desee repasar el análisis de la corriente de desplazamiento en la sección 29.7.) Por eso es frecuente que hablemos de la corriente alterna *a través* de un capacitor.

Para encontrar el voltaje instantáneo v_C entre las terminales del capacitor —es decir, el potencial del punto a con respecto al punto b—, primero dejamos que q denote la carga en la placa izquierda del capacitor de la figura 31.9a (por lo que $-q$ es la carga en la placa del lado derecho). La corriente i se relaciona con q por medio de $i = dq/dt$; con esta definición, la corriente positiva corresponde a una carga en aumento en la placa izquierda del capacitor. Entonces,

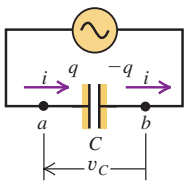
$$i = \frac{dq}{dt} = I\cos\omega t$$

Al integrar esto se obtiene

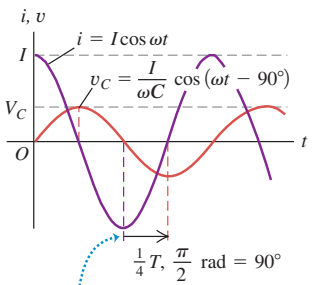
$$q = \frac{I}{\omega}\operatorname{sen}\omega t \qquad (31.14)$$

31.9 Capacitor C conectado a una fuente de ca.

a) Circuito con fuente de ca y capacitor

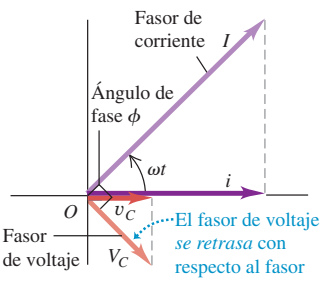


b) Gráficas de corriente y voltaje contra el tiempo



La curva del voltaje *se retrasa* con respecto a la curva de corriente por un cuarto de ciclo (correspondiente a $\phi = \pi/2$ rad $= 90°$).

c) Diagrama de fasores



El fasor de voltaje *se retrasa* con respecto al fasor de la corriente por $\phi = -\pi/2$ rad $= -90°$.

Asimismo, de la ecuación (24.1), la carga q es igual al voltaje v_C multiplicado por la capacitancia, $q = Cv_C$. Al usar esta expresión en la ecuación (31.14) se obtiene

$$v_C = \frac{I}{\omega C}\operatorname{sen}\omega t \tag{31.15}$$

La corriente instantánea i es igual a la tasa de cambio dq/dt de la carga en el capacitor q; como $q = Cv_C$, i también es proporcional a la tasa de cambio del voltaje. (Compare con un inductor, para el que la situación es la contraria y v_L es proporcional a la tasa de cambio de i.) La figura 31.9b presenta a v_C y a i como funciones de t. Como $i = dq/dt = C\,dv_C/dt$, la corriente tiene su magnitud más grande cuando la curva v_C sube o baja con mayor inclinación, y es igual a cero cuando la curva se estabiliza por un instante en sus valores máximo y mínimo.

El voltaje y la corriente del capacitor están fuera de fase por un cuarto de ciclo. Los máximos del voltaje se presentan un cuarto de ciclo *después* de los correspondientes máximos de la corriente, y se dice que el voltaje va con un *retraso* de 90° con respecto a la corriente. El diagrama de fasores de la figura 31.9c muestra esta relación; el fasor de voltaje está detrás del fasor de corriente por un cuarto de ciclo, o 90°.

También se puede obtener esta diferencia de fase si se rescribe la ecuación (31.15) empleando la identidad $\cos(A - 90°) = \operatorname{sen} A$:

$$v_C = \frac{I}{\omega C}\cos(\omega t - 90°) \tag{31.16}$$

Esto corresponde a un ángulo de fase $\phi = -90°$. Esta función coseno tiene un "rezago" de 90° en comparación con la corriente $i = I\cos\omega t$.

Las ecuaciones (31.15) y (31.16) indican que el voltaje *máximo* V_C (la amplitud del voltaje) es

$$V_C = \frac{I}{\omega C} \tag{31.17}$$

Para escribir esta expresión en una forma similar a la ecuación (31.17) de un resistor, $V_R = IR$, definimos una cantidad X_C, llamada **reactancia capacitiva** del capacitor, como

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{(reactancia inductiva)} \tag{31.18}$$

En esas condiciones,

$$V_C = IX_C \qquad \text{(amplitud de voltaje a través de un inductor, circuito de ca)} \tag{31.19}$$

La unidad del SI para X_C es el ohm, al igual que para la resistencia y la reactancia inductiva, ya que X_C es la razón entre un voltaje y una corriente.

CUIDADO **El voltaje y la corriente de un capacitor no están en fase** Recuerde que la ecuación (31.19) referente a un capacitor, como la ecuación (31.13) de un inductor, *no* es un enunciado acerca de los valores instantáneos del voltaje y la corriente. Los valores instantáneos en realidad están 90° fuera de fase, como se ilustra en la figura 31.9b. Más bien, la ecuación (31.19) relaciona la *amplitud* del voltaje y la corriente.

Significado de la reactancia capacitiva

La reactancia capacitiva de un capacitor es inversamente proporcional tanto a la capacitancia C como a la frecuencia angular ω; cuanto mayores sean la capacitancia y la frecuencia, *menor* será la reactancia capacitiva X_C. Los capacitores tienden a pasar corriente de alta frecuencia y a bloquear las corrientes de baja frecuencia y la cd; exactamente al contrario de los inductores. Un dispositivo que permite que pasen señales de alta frecuencia en forma preferencial se llama *filtro de paso alto* (véase el problema 31.49).

Ejemplo 31.3 Resistor y capacitor en un circuito de ca

Un resistor de 200 Ω está conectado en serie con un capacitor de 5.0 μF. El voltaje a través del resistor es $v_R = (1.20\ \text{V})\cos(2500\ \text{rad/s})t$. *a*) Obtenga una expresión para la corriente en el circuito. *b*) Determine la reactancia capacitiva del capacitor. *c*) Obtenga una expresión para el voltaje a través del capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como éste es un circuito en serie, la corriente es la misma tanto a través del capacitor como a través del resistor. Las incógnitas son la corriente i, la reactancia capacitiva X_C y el voltaje en el capacitor v_C.

PLANTEAR: La figura 31.10 ilustra el circuito. Con la ecuación (31.6) se calcula la corriente a través del resistor y, por lo tanto, a través del circuito como un todo. Utilizamos la ecuación (31.18) para obtener la reactancia capacitiva X_C, la ecuación (31.19) para determinar la amplitud del voltaje, y la ecuación (31.16) nos permite escribir una expresión para el voltaje instantáneo a través del capacitor.

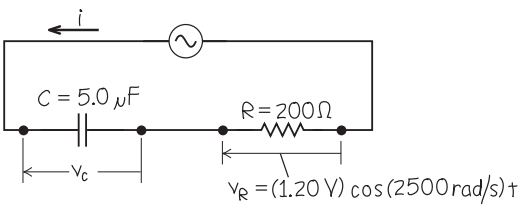
EJECUTAR: *a*) A partir de $v_R = iR$ se obtiene que la corriente i en el resistor y a través del circuito como un todo, es

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{(1.20\ \text{V})\cos(2500\ \text{rad/s})t}{200\ \Omega}$$
$$= (6.0 \times 10^{-3}\ \text{A})\cos(2500\ \text{rad/s})t$$

b) De acuerdo con la ecuación (31.18), la reactancia capacitiva en $\omega = 2500$ rad/s es

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2500\ \text{rad/s})(5.0 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 80\ \Omega$$

31.10 Diagrama para este problema.



c) De la ecuación (31.19), la amplitud V_C del voltaje a través del capacitor es

$$V_C = IX_C = (6.0 \times 10^{-3}\ \text{A})(80\ \Omega) = 0.48\ \text{V}$$

La reactancia del capacitor de 80 Ω es el 40% de la resistencia del resistor de 200 Ω, así que el valor de V_C es el 40% el de V_R. El voltaje instantáneo del capacitor v_C está dado por la ecuación (31.16):

$$v_C = V_C\cos(\omega t - 90°)$$
$$= (0.48\ \text{V})\cos[(2500\ \text{rad/s})t - \pi/2\ \text{rad}]$$

EVALUAR: Aunque la *corriente* a través del capacitor es la misma que a través del resistor, los *voltajes* entre las terminales de estos dos dispositivos son diferentes tanto en amplitud como en fase. Observe que en la expresión para el v_C convertimos los 90° a $\pi/2$ rad, de manera que todas las cantidades angulares tienen las mismas unidades. En el análisis de un circuito de ca, es frecuente que los ángulos de fase estén dados en grados, por lo que se debe tener el cuidado de convertirlos a radianes cuando sea necesario.

Comparación de los elementos de un circuito de ca

La tabla 31.1 resume las relaciones de las amplitudes de corriente y voltaje correspondientes a los tres elementos de circuito que acabamos de estudiar. Observe de nuevo que el voltaje y la corriente *instantáneos* son proporcionales en un resistor, donde hay una diferencia de fase de cero entre v_R e i (véase la figura 31.7b). El voltaje y la corriente instantáneos *no* son proporcionales en un inductor ni en un capacitor ya que en ambos casos hay una diferencia de fase de 90° (véanse las figuras 31.8b y 31.9b).

La figura 31.11 ilustra el modo en que varían la resistencia de un resistor y las reactancias de un inductor y un capacitor con la frecuencia angular ω. La resistencia R es independiente de la frecuencia, mientras que las reactancias X_L y X_C no lo son. Si $\omega = 0$, que es el caso de un circuito de cd, *no* hay corriente a través de un capacitor porque $X_C \to \infty$, y no hay efecto inductivo porque $X_L = 0$. En el límite $\omega \to \infty$, X_L también tiende a infinito, y la corriente a través de un inductor disminuye hasta casi desaparecer; recuerde que la fem autoinducida se opone a los cambios de la corriente. En este mismo límite, tanto X_C como el voltaje a través del capacitor tienden a cero; la corriente cambia de sentido tan rápido que no se acumula carga en ninguna placa.

La figura 31.12 ilustra una aplicación del análisis anterior en un sistema de altavoces. Los sonidos de baja frecuencia son producidos por el *woofer*, o bafle de graves,

31.11 Gráficas de R, X_L y X_C como funciones de la frecuencia angular ω.

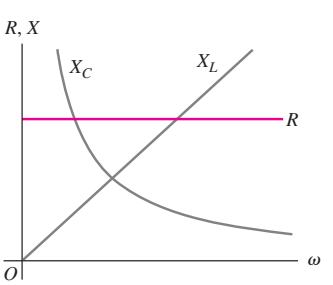
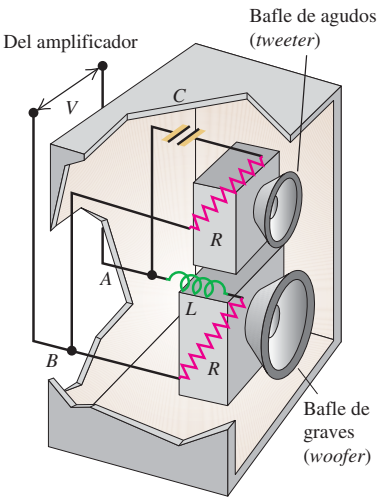


Tabla 31.1 Elementos de circuito con corriente alterna

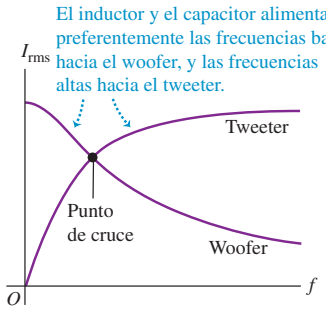
Elemento de circuito	Relación de amplitudes	Cantidad de circuito	Fase de v
Resistor	$V_R = IR$	R	En fase con i
Inductor	$V_L = IX_L$	$X_L = \omega L$	Se adelanta 90° a i
Capacitor	$V_C = IX_C$	$X_C = 1/\omega C$	Se retrasa 90° con respecto a i

31.12 a) Los dos bafles en este sistema de altavoz están conectados en paralelo con el amplificador. b) Gráficas de la amplitud de corriente en el *tweeter*, o bafle de agudos, y el *woofer*, o bafle de graves, como funciones de la frecuencia para una amplitud de voltaje de amplificador dada.

a) Red de cruce de un sistema de altavoces



b) Gráficas de la corriente rms como funciones de la frecuencia para un voltaje de amplificador dado



que es un altavoz de diámetro grande, mientras que el *tweeter*, o bafle de agudos, es un altavoz de diámetro pequeño que produce sonidos de alta frecuencia. Para dirigir señales de frecuencia diferente al altavoz apropiado, el bafle de graves y el bafle de agudos se conectan en paralelo con los extremos de la salida del amplificador. El capacitor del ramal del tweeter bloquea los componentes de baja frecuencia del sonido, pero deja pasar las frecuencias más altas; el inductor del ramal del woofer hace lo contrario.

Evalúe su comprensión de la sección 31.2 Se aplica un voltaje oscilante de amplitud fija a través de un elemento de circuito. Si se incrementa la frecuencia de este voltaje, ¿la amplitud de la corriente a través del elemento i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual, si se trata de *a*) un resistor, *b*) un inductor o *c*) un capacitor?

31.3 El circuito *L-R-C* en serie

Muchos de los circuitos de ca usados en sistemas electrónicos prácticos implican resistencia, reactancia inductiva y reactancia capacitiva. Un ejemplo sencillo es un circuito en serie que contiene un resistor, un inductor, un capacitor y una fuente de ca, como el que se ilustra en la figura 31.13a. (En la sección 30.6 se consideró el comportamiento de la corriente en un circuito *L-R-C* en serie *sin* una fuente.)

Para analizar este circuito y otros similares se empleará un diagrama de fasores que incluye los fasores de voltaje y de corriente para cada uno de los componentes. En este circuito, en virtud de la regla de Kirchhoff de las espiras, el voltaje *total* instantáneo v_{ad} entre las terminales de los tres componentes es igual al voltaje de la fuente en ese instante. Demostraremos que el fasor que representa este voltaje total es la *suma vectorial* de los fasores de los voltajes individuales. En las figuras 31.13b y 31.13c se ilustran los diagramas de fasores completos para este circuito. Quizá parezcan complejos, pero los explicaremos paso a paso.

Supongamos que la fuente suministra una corriente i dada por $i = I\cos\omega t$. Como los elementos de circuito están conectados en serie, la corriente en cualquier instante es la misma en cada punto del circuito. Así, un *solo fasor* I, con longitud proporcional a la amplitud de la corriente, representa la corriente en *todos* los elementos de circuito.

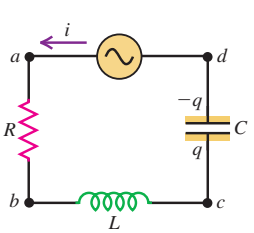
Al igual que en la sección 31.2, representaremos los voltajes instantáneos entre los extremos de R, L y C mediante los símbolos v_R, v_L y v_C, y los voltajes máximos con los símbolos V_R, V_L y V_C. Denotaremos los voltajes instantáneo y máximo de la *fuente* con v y V. Así, en la figura 31.13a, $v = v_{ad}$, $v_R = v_{ab}$, $v_L = v_{bc}$ y $v_C = v_{cd}$.

Hemos demostrado que la diferencia de potencial entre las terminales de un resistor está *en fase* con la corriente en el resistor y que su valor máximo V_R está dado por la ecuación (31.7):

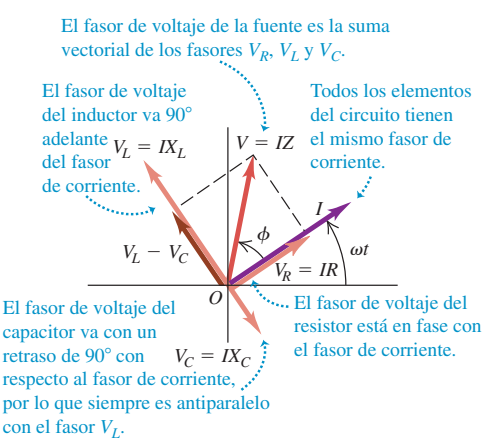
$$V_R = IR$$

31.13 Circuito *L-R-C* en serie con fuente de ca.

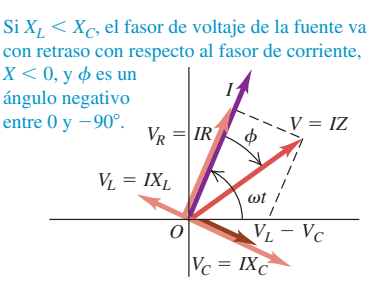
a) Circuito en serie *R-L-C*



b) Diagrama de fasores para el caso $X_L > X_C$



c) Diagrama de fasores para el caso $X_L < X_C$



El fasor V_R en la figura 31.13b, en fase con el fasor de corriente I, representa el voltaje a través del resistor. Su proyección en el eje horizontal en cualquier instante da la diferencia de potencial instantánea v_R.

El voltaje a través de un inductor *se adelanta* 90° a la corriente. Su amplitud de voltaje está dada por la ecuación (31.13):

$$V_L = IX_L$$

El fasor V_L en la figura 31.13b representa el voltaje a través del inductor, y su proyección sobre el eje horizontal en cualquier instante es igual a v_L.

El voltaje a través de un capacitor *se retrasa* 90° con respecto a la corriente. Su amplitud de voltaje está dada por la ecuación (31.19):

$$V_C = IX_C$$

El fasor V_C en la figura 31.13b representa el voltaje a través del capacitor y su proyección en el eje horizontal en cualquier instante es igual a v_C.

La diferencia de potencial instantánea v entre las terminales a y d es igual en todo instante a la suma (algebraica) de las diferencias de potencial v_R, v_L y v_C. Es decir, es igual a la suma de las *proyecciones* de los fasores V_R, V_L y V_C. Pero la suma de las proyecciones de estos fasores es igual a la *proyección* de su *suma vectorial*. Por lo tanto, la suma de vectores V debe ser el fasor que represente el voltaje de fuente v y el voltaje total instantáneo v_{ad} a través de la serie de elementos.

Para realizar esta suma vectorial primero se resta el fasor V_C del fasor V_L. (Estos dos fasores siempre están a lo largo de la misma línea, con sentidos opuestos.) Esto da el fasor $V_L - V_C$, que siempre forma un ángulo recto con el fasor V_R, por lo que, según el teorema de Pitágoras, la magnitud del fasor V es

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} \quad \text{o}$$

$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{31.20}$$

Definimos la **impedancia** Z de un circuito de ca como la razón entre la amplitud del voltaje entre las terminales del circuito y la amplitud de la corriente en el circuito. De la ecuación (31.20), la impedancia del circuito en serie *L-R-C* es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \tag{31.21}$$

así que la ecuación (31.20) se puede rescribir como

$$V = IZ \qquad \text{(amplitud de voltaje entre los extremos de un circuito de ca)} \tag{31.22}$$

Si bien la ecuación (31.21) es válida sólo para un circuito en serie *L-R-C*, es posible emplear la ecuación (31.22) para definir la impedancia de *cualquier* red de resistores, inductores y capacitores como la razón de la amplitud del voltaje entre las terminales de la red con respecto a la amplitud de la corriente. La unidad del SI para la impedancia es el ohm.

Significado de la impedancia y el ángulo de fase

La ecuación (31.22) es análoga a $V = IR$, con la impedancia Z de un circuito de ca en el papel de la resistencia R en un circuito de cd. Así como la corriente directa tiende a seguir la trayectoria de menor resistencia, la corriente alterna tiende a seguir la trayectoria de mínima impedancia (figura 31.14). Sin embargo, observe que la impedancia en realidad es función de R, L y C, así como de la frecuencia angular ω. Podemos ver con claridad esto si en la ecuación (31.21) sustituimos X_L por la ecuación (31.12) y X_C por la (31.18), lo que da la siguiente expresión completa para Z en un circuito en serie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \qquad \text{(impedancia de un circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie)} \tag{31.23}$$

Activ Online Physics
14.3 Circuitos de ca: el oscilador excitador (preguntas 6, 7 y 10)

31.14 Esta esfera llena de gas tiene un voltaje alterno entre su superficie y el electrodo en su centro. Los rayos brillantes muestran la corriente alterna resultante que pasa a través del gas. Cuando una niña toca la superficie exterior de la esfera, las puntas de los dedos y la superficie interior actúan como las placas de un capacitor, y la esfera y el cuerpo, en conjunto, forman un circuito *L-R-C* en serie. La corriente (que es suficientemente baja e inofensiva) se dirige hacia los dedos porque la trayectoria a través del cuerpo tiene una impedancia baja.

De ahí que para una amplitud dada V del voltaje de fuente aplicado al circuito, la amplitud $I = V/Z$ de la corriente resultante será diferente a distintas frecuencias. Esta dependencia de la frecuencia se estudiará con más detalle en la sección 31.5.

En el diagrama de fasores que se ilustra en la figura 31.13b, el ángulo ϕ entre los fasores de voltaje y de corriente es el ángulo de fase del voltaje de fuente v con respecto a la corriente i; es decir, es el ángulo con el que el voltaje de fuente se adelanta a la corriente. De acuerdo con el diagrama,

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I(X_L - X_C)}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad \text{(ángulo de fase de un circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie)} \quad (31.24)$$

Si la corriente es $i = I\cos\omega t$, entonces el voltaje de fuente v es

$$v = V\cos(\omega t + \phi) \quad (31.25)$$

La figura 31.13b ilustra el comportamiento de un circuito en el que $X_L > X_C$, y en la 31.13c el caso en que $X_L < X_C$; el fasor de voltaje V está en el lado opuesto del fasor de corriente I y el voltaje va *retrasado* con respecto a la corriente. En este caso, la diferencia $X_L - X_C$ es *negativa*, la tan ϕ es negativa, y ϕ es un ángulo negativo entre 0 y $-90°$. Como X_L y X_C dependen de la frecuencia, el ángulo de fase ϕ también depende de la frecuencia. Examinaremos las consecuencias de esto en la sección 31.5.

Todas las expresiones que hemos desarrollado para un circuito L-R-C en serie siguen siendo válidas en ausencia de uno de los elementos del circuito. Si falta el resistor, se fija $R = 0$; si falta el inductor, se establece $L = 0$. Pero si falta el capacitor, se fija $C = \infty$, lo que corresponde a la ausencia de toda diferencia de potencial ($v_C = q/C = 0$) o reactancia capacitiva ($X_C = 1/\omega C = 0$).

En todo este análisis se han descrito las magnitudes de los voltajes y las corrientes en términos de sus valores *máximos*, que son las *amplitudes* de voltaje y de corriente. Pero al final de la sección 31.1 se recalcó que estas cantidades, por lo general, están descritas en términos de valores rms, no de amplitudes. Para una cantidad que varíe en forma sinusoidal, el valor rms siempre es el producto de $1/\sqrt{2}$ por la amplitud. Todas las relaciones entre el voltaje y la corriente que hemos obtenido en esta sección y las anteriores siguen siendo válidas si en ellas se utilizan cantidades rms en vez de las amplitudes. Por ejemplo, si se divide la ecuación (31.22) entre $\sqrt{2}$, se obtiene

$$\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}}Z$$

que se rescribe como

$$V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}}Z \quad (31.26)$$

Las ecuaciones (31.7), (31.13) y (31.19) se traducen exactamente de la misma forma.

Sólo hemos considerado circuitos de ca en los que un inductor, un resistor y un capacitor están conectados en serie. El mismo análisis se puede hacer para un circuito L-R-C conectado en *paralelo*; véase el problema 31.54.

Por último, se resalta que en esta sección se ha descrito la condición de *estado estable* de un circuito, que es el que existe después de que el circuito ha estado conectado a la fuente durante mucho tiempo. Cuando la fuente se conecta por primera vez, existen voltajes y corrientes adicionales que reciben el nombre de *oscilaciones momentáneas*, cuya naturaleza depende del momento del ciclo en que el circuito se completa inicialmente. El análisis detallado de las oscilaciones momentáneas está más allá de nuestros objetivos. Estas oscilaciones siempre se extinguen al cabo de un tiempo suficientemente largo y no afectan el comportamiento del estado estable del circuito. Sin embargo, pueden ocasionar oleadas peligrosas y dañinas en las líneas de conducción, razón por la que es frecuente que a los sistemas electrónicos delicados, como las computadoras, se les provea de protectores contra oleadas de línea de energía eléctrica.

Estrategia para resolver problemas 31.1 Circuitos de corriente alterna

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Todos los conceptos que se usan para analizar circuitos de corriente directa también se aplican a los circuitos de corriente alterna. Sin embargo, debemos tener cuidado para diferenciar entre las amplitudes de corrientes y voltajes alternos y sus valores instantáneos. También es necesario recordar las diferencias entre la resistencia (de resistores), la reactancia (de inductores o capacitores) y la impedancia (de circuitos compuestos).

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Dibuje un diagrama del circuito e identifique todas las cantidades conocidas y desconocidas.
2. Determine las variables buscadas.

EJECUTAR *la solución* de la siguiente forma:

1. Use las relaciones obtenidas en las secciones 31.2 y 31.3 para calcular los valores de las variables buscadas, aplicando las siguientes recomendaciones.
2. En problemas de circuitos de ca, casi siempre lo más fácil es trabajar con la frecuencia angular ω. Si se da la frecuencia ordinaria f, expresada en Hz, hay que convertirla mediante la relación $\omega = 2\pi f$.
3. Recuerde algunos hechos básicos sobre las relaciones de fase. En el caso de un resistor, el voltaje y la corriente siempre están *en fase*, y los dos fasores correspondientes en el diagrama de fasores siempre tienen el mismo sentido. En el caso de un inductor, el voltaje siempre *se adelanta* 90° a la corriente (esto es, $\phi = +90°$), y el fasor de voltaje siempre está a 90° en sentido antihorario con respecto al fasor de corriente. En el caso de un capacitor, el voltaje siempre *se retrasa* 90° con respecto a la corriente (es decir, $\phi = -90°$), y el fasor de voltaje siempre está a 90° en sentido horario con respecto al fasor de corriente.
4. No olvide que con los circuitos de ca, todos los voltajes y las corrientes son funciones sinusoidales del tiempo, en vez de ser constantes, pero las reglas de Kirchhoff se cumplen en todo momento. Así, en un circuito en serie, la corriente instantánea es la misma en todos los elementos de circuito; en un circuito en paralelo, la diferencia de potencial instantánea es la misma a través de todos los elementos de circuito.
5. La reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia son análogas a la resistencia; cada una representa la razón entre la amplitud de voltaje V y la amplitud de corriente I en un elemento o combinación de elementos de circuito. Sin embargo, recuerde que las relaciones de fase desempeñan un papel esencial. Los efectos de la resistencia y la reactancia tienen que combinarse mediante la suma *vectorial* de los fasores de voltaje correspondientes, como se ilustra en las figuras 31.13b y 31.13c. Por ejemplo, cuando se tienen varios elementos de un circuito en serie, no se puede simplemente *sumar* todos los valores numéricos de la resistencia y la reactancia para obtener la impedancia; eso ignoraría las relaciones de fase.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando se trabaja con un circuito en serie *L-R-C*, los resultados se pueden comprobar comparando los valores de la reactancia inductiva X_L y la reactancia capacitiva X_C. Si $X_L > X_C$, entonces la amplitud del voltaje entre las terminales del inductor es mayor que entre las terminales del capacitor, y el ángulo de fase ϕ es positivo (entre 0 y 90°). Si $X_L < X_C$, la amplitud del voltaje entre los extremos del inductor es menor que entre los extremos del capacitor, y el ángulo de fase ϕ es negativo (entre 0 y −90°).

Ejemplo 31.4 Circuito *L-R-C* en serie I

En el circuito en serie de la figura 31.13a, suponga que $R = 300\ \Omega$, $L = 60$ mH, $C = 0.50\ \mu$F, $V = 50$ V y $\omega = 10{,}000$ rad/s. Determine las reactancias X_L y X_C, la impedancia Z, la amplitud de corriente I, el ángulo de fase ϕ y la amplitud de voltaje a través de cada elemento de circuito.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa las ideas desarrolladas en la sección 31.2 y en esta sección acerca del comportamiento de los elementos de un circuito de ca.

PLANTEAR: Se aplican las ecuaciones (31.12) y (31.18) para determinar las reactancias, y la (31.23) para calcular la impedancia. Después se utiliza la ecuación (31.22) para determinar la amplitud de corriente, y la ecuación (31.24) para obtener el ángulo de fase. Dada esta información, las relaciones en la tabla 31.1 nos indican las amplitudes de voltaje.

EJECUTAR: Las reactancias inductiva y capacitiva son

$$X_L = \omega L = (10{,}000\ \text{rad/s})(60\ \text{mH}) = 600\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(10{,}000\ \text{rad/s})(0.50 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 200\ \Omega$$

La impedancia Z del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (600\ \Omega - 200\ \Omega)^2} = 500\ \Omega$$

Con una amplitud de voltaje de fuente $V = 50$ V, la amplitud de corriente es

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0.10\ \text{A}$$

El ángulo de fase ϕ es

$$\phi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\frac{400\ \Omega}{300\ \Omega} = 53°$$

De acuerdo con la tabla 31.1, las amplitudes del voltaje V_R, V_L y V_C a través del resistor, inductor y capacitor, respectivamente, son

$$V_R = IR = (0.10\ \text{A})(300\ \Omega) = 30\ \text{V}$$

$$V_L = IX_L = (0.10\ \text{A})(600\ \Omega) = 60\ \text{V}$$

$$V_C = IX_C = (0.10\ \text{A})(200\ \Omega) = 20\ \text{V}$$

EVALUAR: Observe que $X_L > X_C$, por lo tanto, la amplitud de voltaje entre las terminales del inductor es mayor que entre las terminales del capacitor, y ϕ es negativo. El valor $\phi = -53°$ significa que el voltaje *se adelanta* 53° a la corriente; esta situación es como la que se ilustra en la figura 31.13b.

Note que la amplitud de voltaje de la fuente, $V = 50$ V, *no* es igual a la suma de las amplitudes del voltaje entre los extremos de los elementos separados del circuito. (Es decir, $50\ \text{V} \neq 30\ \text{V} + 60\ \text{V} + 20\ \text{V}$.) ¡Asegúrese de que comprende por qué!

Ejemplo 31.5 Circuito *L-R-C* en serie II

Para el circuito *L-R-C* en serie descrito en el ejemplo 31.4, describa la dependencia de la corriente instantánea y cada voltaje instantáneo con respecto al tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 31.4 se encontraron las *amplitudes* de la corriente y los voltajes. Nuestra tarea ahora es obtener expresiones para los *valores instantáneos* de la corriente y los voltajes. Como se vio en la sección 31.2, el voltaje entre las terminales de un resistor está en fase con la corriente, no así los voltajes entre las terminales de un inductor o capacitor. En esa sección también vimos que ϕ es el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente de la fuente.

PLANTEAR: Si se describe la corriente mediante la ecuación (31.2), los voltajes están dados por la ecuación (31.8) para el resistor, por la ecuación (31.10) para el inductor, la ecuación (31.16) para el capacitor, y la ecuación (31.25) para la fuente.

EJECUTAR: La corriente y todos los voltajes oscilan con la misma frecuencia angular, $\omega = 10{,}000$ rad/s y, por lo tanto, con el mismo periodo, $2\pi/\omega = 2\pi/(10{,}000 \text{ rad/s}) = 6.3 \times 10^{-4}$ s $= 0.63$ ms. Según la ecuación (31.2), la corriente es

$$i = I\cos\omega t = (0.10 \text{ A})\cos(10{,}000 \text{ rad/s})t$$

Esta elección significa simplemente que elegimos como $t = 0$ un instante en el que la corriente es máxima. El voltaje del resistor se encuentra *en fase* con la corriente, así que

$$v_R = V_R\cos\omega t = (30 \text{ V})\cos(10{,}000 \text{ rad/s})t$$

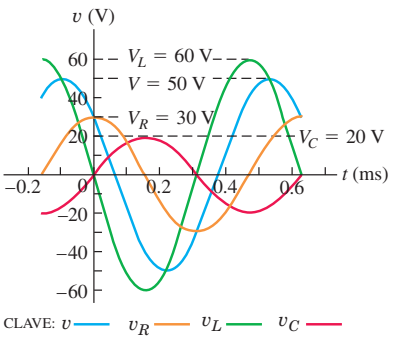
El voltaje del inductor *se adelanta* a la corriente por 90°, de manera que

$$\begin{aligned} v_L &= V_L\cos(\omega t + 90°) = -V_L\operatorname{sen}\omega t \\ &= -(60 \text{ V})\operatorname{sen}(10{,}000 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

El voltaje del capacitor *se retrasa* 90° con respecto a la corriente, por lo que

$$\begin{aligned} v_C &= V_C\cos(\omega t - 90°) = V_C\operatorname{sen}\omega t \\ &= (20 \text{ V})\operatorname{sen}(10{,}000 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

31.15 Gráficas del voltaje de fuente v, el voltaje de resistor v_R, el voltaje de inductor v_L y el voltaje de capacitor v_C en función del tiempo para la situación del ejemplo 31.4. La corriente, que no se ilustra, está en fase con el voltaje de resistor.



Por último, el voltaje de fuente (igual al voltaje a través de toda la combinación de resistor, inductor y capacitor) *se adelanta* a la corriente por $\phi = 53°$, por lo que

$$\begin{aligned} v &= V\cos(\omega t + \phi) \\ &= (50 \text{ V})\cos\left[(10{,}000 \text{ rad/s})t + \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360°}\right)(53°)\right] \\ &= (50 \text{ V})\cos[(10{,}000 \text{ rad/s})t + 0.93 \text{ rad}] \end{aligned}$$

EVALUAR: En la figura 31.15 aparecen las gráficas de los distintos voltajes en función del tiempo. El voltaje de inductor tiene una amplitud mayor que el voltaje de capacitor porque $X_L > X_C$. Si bien la amplitud del voltaje de fuente V no es igual a la suma de las amplitudes de los voltajes individuales V_R, V_L y V_C, el voltaje *instantáneo* de fuente v siempre es igual a la suma de los voltajes instantáneos v_R, v_L y v_C. Verifique esto por su cuenta midiendo los valores de los voltajes que se muestran en la gráfica para distintos valores del tiempo t.

Evalúe su comprensión de la sección 31.3 Ordene los siguientes circuitos de ca según sus amplitudes de corriente, de mayor a menor. i) El circuito en el ejemplo 31.4; ii) el circuito en el ejemplo 31.4 sin el capacitor ni el inductor; iii) el circuito en el ejemplo 31.4 sin el resistor ni el capacitor; iv) el circuito en el ejemplo 31.4 sin el resistor ni el inductor.

31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna

La corriente alterna desempeña un papel central en los sistemas para distribuir, convertir y usar energía eléctrica, por lo que es importante estudiar las relaciones de potencia en los circuitos de ca. Para un circuito de ca con corriente instantánea i y amplitud de corriente I, consideraremos uno de sus elementos a través del cual la diferencia de potencial instantánea es v, con amplitud de voltaje V. La potencia instantánea p entregada a este elemento de circuito es

$$p = vi$$

Primero veamos lo que esto significa para los elementos individuales de circuito. Supondremos que en cada caso $i = I\cos\omega t$.

Potencia de un resistor

En primer lugar, suponga que el elemento de circuito es un *resistor puro R*, como en la figura 31.7a; así que $v = v_R$ está *en fase* con i. La gráfica que representa p se obtiene multiplicando las alturas de las gráficas de v e i en la figura 31.7b en cada instante. Esta gráfica se indica en color negro en la figura 31.16a. El producto vi siempre es positivo porque los valores de v e i siempre son los dos positivos o los dos negativos. De ahí que en todo momento se suministre energía *al* resistor para ambos sentidos de i, aunque la potencia no sea constante.

La curva de potencia correspondiente a un resistor es simétrica con respecto a un valor igual a la mitad de su valor máximo VI, así que la *potencia media* P_{med} es

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}VI \qquad \text{(para un resistor)} \tag{31.27}$$

Una expresión equivalente es

$$P_{\text{med}} = \frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \qquad \text{(para un resistor)} \tag{31.28}$$

Asimismo, $V_{\text{rms}} = I_{\text{rms}}R$, así que P_{med} se puede expresar mediante cualquiera de las formas equivalentes

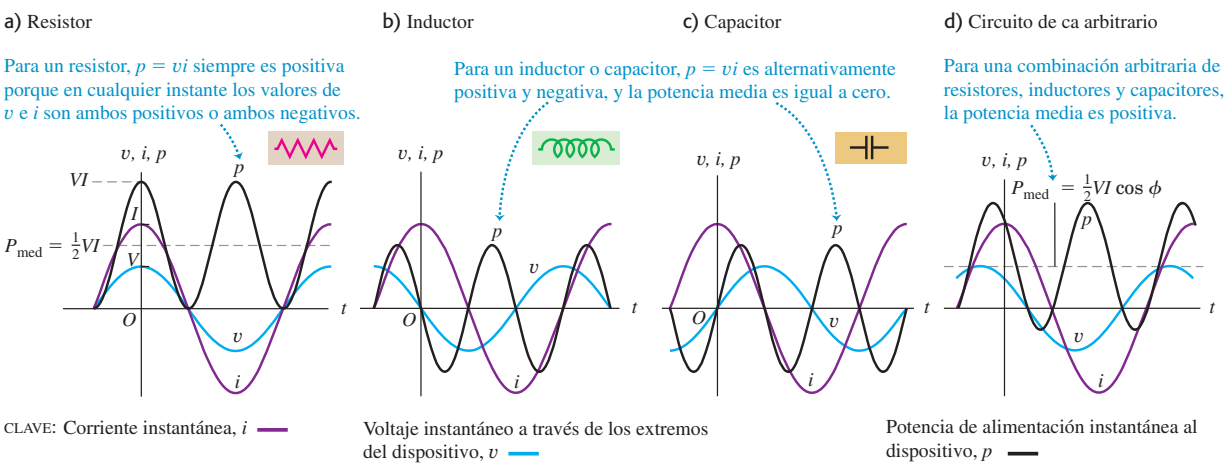
$$P_{\text{med}} = I_{\text{rms}}^2R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}} \qquad \text{(para un resistor)} \tag{31.29}$$

Observe que las expresiones en la ecuación (31.29) tienen la misma forma que las relaciones correspondientes para un circuito de cd, ecuación (25.18). Además, note que sólo son válidas para resistores puros, no para combinaciones más complicadas de elementos de circuito.

Potencia de un inductor

A continuación, conectamos la fuente a un inductor L, como en la figura 31.8a. El voltaje $v = v_L$ se adelanta 90° a la corriente. Cuando se multiplican las curvas de v e i, el producto vi es *negativo* durante la mitad del ciclo cuando v e i tienen signos *opuestos*. La curva de potencia, que se aprecia en la figura 31.16b, es simétrica con respecto al eje horizontal; es positiva la mitad del tiempo y negativa la otra mitad, y la potencia media es igual a cero. Cuando p es positiva, la energía se suministra para establecer el campo magnético en el inductor; cuando p es negativa, el campo desaparece y el inductor devuelve energía a la fuente. La transferencia neta de energía en un ciclo es igual a cero.

31.16 Gráficas de corriente, voltaje y potencia, como funciones del tiempo para a) un resistor, b) un inductor, c) un capacitor y d) un circuito de ca arbitrario que puede tener resistencia, inductancia y capacitancia.



Potencia de un capacitor

Por último, conectamos la fuente a un capacitor C, como en la figura 31.9a. El voltaje $v = v_C$ se retrasa 90° con respecto a la corriente. La figura 31.16c muestra la curva de la potencia; de nuevo, la potencia media es igual a cero. Se suministra energía para cargar el capacitor y se devuelve a la fuente cuando el capacitor se descarga. La transferencia neta de energía en un ciclo es, una vez más, igual a cero.

Potencia de un circuito general de ca

En *cualquier* circuito de ca, con cualquier combinación de resistores, capacitores e inductores, el voltaje v a través de todo el circuito tiene un ángulo de fase ϕ con respecto a la corriente i. Así, la potencia instantánea p está dada por

$$p = vi = [V\cos(\omega t + \phi)][I\cos\omega t] \tag{31.30}$$

La curva de potencia instantánea tiene la forma que se presenta en la figura 31.16d. El área entre las espiras positivas y el eje horizontal es mayor que el área entre las espiras negativas y el eje horizontal, y la potencia media es positiva.

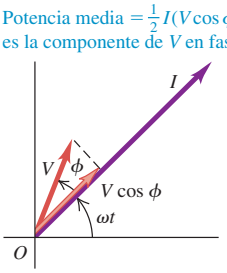
A partir de la ecuación (31.30) podemos deducir una expresión de la potencia *media* P_{med} con la ayuda de la identidad del coseno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} p &= [V(\cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi)][I\cos\omega t] \\ &= VI\cos\phi\cos^2\omega t - VI\operatorname{sen}\phi\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

Según el análisis de la sección 31.1 que llevó a la ecuación (31.4), se observa que el valor medio de $\cos^2\omega$t (en un ciclo) es igual a $\frac{1}{2}$. El valor medio de $\cos\omega t\operatorname{sen}\omega t$ es cero porque este producto es igual a $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\omega t$, cuyo promedio en un ciclo es cero. Por lo tanto, la potencia media P_{med} es

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}VI\cos\phi = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos\phi \qquad \text{(potencia media en un circuito general de ca)} \tag{31.31}$$

31.17 Uso de fasores para calcular la potencia media para un circuito de ca arbitrario.



Cuando v e i están en fase, de manera que $\phi = 0$, la potencia media es igual a $\frac{1}{2}VI = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$; cuando v e i están 90° fuera de fase, la potencia media es igual a cero. En el caso general, cuando v tiene un ángulo de fase ϕ con respecto a i, la potencia media es igual al producto de $\frac{1}{2}I$ por $V\cos\phi$, la componente del fasor de voltaje que está *en fase* con el fasor de corriente. La figura 31.17 muestra la relación general de los fasores de corriente y voltaje. Para el circuito *L-R-C* en serie, las figuras 31.13b y 31.13c indican que $V\cos\phi$ es igual a la amplitud de voltaje V_R para el resistor; por lo tanto, la ecuación (31.31) es la potencia media disipada en el resistor. En promedio, no hay flujo de energía hacia dentro o hacia fuera del inductor ni del capacitor, por lo que nada de la P_{med} va hacia alguno de estos elementos de circuito.

El factor $\cos\phi$ se llama **factor de potencia** del circuito. En el caso de una resistencia, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ y $P_{\text{med}} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$. En el caso de un inductor o capacitor, $\phi = \pm 90°$, $\cos\phi = 0$ y $P_{\text{med}} = 0$. En el caso de un circuito *L-R-C* en serie, el factor de potencia es igual a R/Z; la prueba de este ejercicio se deja como ejercicio para el lector (véase el ejercicio 31.27).

Por lo general, en los circuitos de potencia no es deseable un factor bajo de potencia (un gran ángulo ϕ de retraso o adelanto). La razón es que para una diferencia de potencial dada, se necesita una corriente grande que suministre una cantidad determinada de potencia. Esto da como resultado grandes pérdidas de i^2R en las líneas de transmisión. La compañía de energía eléctrica tal vez cobre una tarifa más alta a un cliente con bajo factor de potencia. Muchos tipos de maquinaria de ca toman una corriente *retrasada*; es decir, la corriente en la maquinaria está retrasada con respecto al voltaje aplicado. Por consiguiente, el voltaje se adelanta a la corriente, de manera que $\phi > 0$ y $\cos\phi < 1$. El factor de potencia se puede corregir para aproximarlo al valor ideal de 1 conectando un capacitor en paralelo con la carga. La corriente que toma el capacitor *se adelanta* al voltaje (es decir, el voltaje a través del capacitor va con retraso en relación con la corriente), lo que compensa la corriente retrasada en el otro ramal del circuito. El capacitor en sí no absorbe potencia neta de la línea.

Ejemplo 31.6 Potencia en una secadora para el cabello

Una secadora eléctrica para el cabello está especificada a 1500 W y 120 V. La potencia nominal de esta secadora de cabello, o de cualquier otro dispositivo de ca, es la potencia *media* que consume, y el voltaje nominal es el voltaje *eficaz* (*rms*). Calcule *a*) la resistencia, *b*) la corriente rms eficaz y *c*) la potencia instantánea máxima. Suponga que la secadora es un resistor. (El elemento que genera calor actúa como resistor.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Suponemos que la secadora es un resistor. Se da la potencia media $P_{med} = 1500$ W y el voltaje rms $V_{rms} = 120$ V. Nuestras incógnitas son la resistencia R, la corriente rms I_{rms} y el valor máximo de la potencia instantánea p.

PLANTEAR: Resolvemos la ecuación (31.29) para determinar la resistencia R. Encontramos la corriente rms a partir de V_{rms} y P_{med} mediante la ecuación (31.28), y la potencia instantánea máxima se calcula con la ecuación (31.30).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (31.29), la resistencia es

$$R = \frac{V_{rms}^2}{P_{med}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1500\ \text{W}} = 9.6\ \Omega$$

b) De la ecuación (31.28),

$$I_{rms} = \frac{P_{med}}{V_{rms}} = \frac{1500\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 12.5\ \text{A}$$

c) Para un resistor, el voltaje y la corriente están en fase, y el ángulo de fase es igual a cero. Así, de acuerdo con la ecuación (31.30), la potencia instantánea es $p = VI\cos^2\omega t$, y la potencia instantánea máxima es $p_{máx} = VI$. Según la ecuación (31.27), esto es el doble de la potencia media P_{med}, de manera que

$$p_{máx} = VI = 2P_{med} = 2(1500\ \text{W}) = 3000\ \text{W}$$

EVALUAR: Nuestro resultado del inciso *b*) se confirma con la ecuación (31.7): $I_{rms} = V_{rms}/R = (120\ \text{V})/(9.6\ \Omega) = 12.5$ A. Advierta que algunos fabricantes de amplificadores estereofónicos especifican las salidas de potencia en términos del valor máximo y no del valor medio, que es menor, con la intención de confundir al incauto consumidor.

Ejemplo 31.7 Potencia en un circuito *L-R-C* en serie

Para el circuito *L-R-C* en serie del ejemplo 31.4, *a*) calcule el factor de potencia; y *b*) calcule la potencia media entregada a todo el circuito y a cada uno de sus elementos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Podemos utilizar todos los resultados del ejemplo 31.4.

PLANTEAR: El factor de potencia es simplemente el coseno del ángulo de fase ϕ, y la ecuación (31.31) permite obtener la potencia media entregada en términos de ϕ y las amplitudes de voltaje y de corriente.

EJECUTAR: *a*) El factor de potencia es $\cos\phi = \cos 53° = 0.60$.

b) De acuerdo con la ecuación (31.31), la potencia media entregada al circuito es

$$P_{med} = \frac{1}{2}VI\cos\phi = \frac{1}{2}(50\ \text{V})(0.10\ \text{A})(0.60) = 1.5\ \text{W}$$

EVALUAR: Si bien P_{med} es la potencia media entregada a la combinación *L-R-C*, toda ella se disipa en el resistor. La potencia media entregada a un inductor o capacitor siempre es igual a cero (véanse las figuras 31.16b y 31.16c).

Evalúe su comprensión de la sección 31.4 La figura 31.16d indica que durante parte de un ciclo de oscilación, la potencia instantánea entregada al circuito es negativa. Esto significa que se está extrayendo energía del circuito. *a*) ¿De dónde se extrae esta energía? i) Del resistor; ii) del inductor; iii) del capacitor; iv) de la fuente de ca; v) de más de uno de estos elementos. *b*) ¿A dónde va la energía? i) Al resistor; ii) al inductor; iii) al capacitor; iv) a la fuente de ca; v) a más de uno de estos elementos.

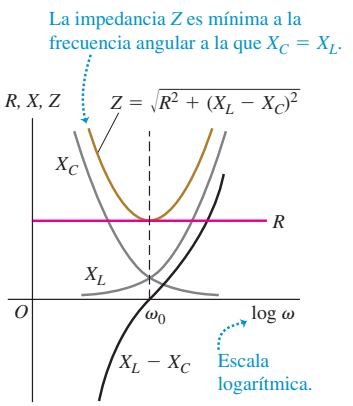
31.5 Resonancia en los circuitos de corriente alterna

Gran parte de la importancia práctica de los circuitos *L-R-C* en serie estriba en la forma en que tales circuitos responden a las fuentes de diferente frecuencia angular ω. Por ejemplo, un tipo de circuito sintonizador usado en los receptores de radio es simplemente un circuito *L-R-C* en serie. Una señal de radio de cualquier frecuencia dada produce una corriente de la misma frecuencia en el circuito receptor, pero la amplitud de la corriente es *máxima* si la frecuencia de la señal es igual a la frecuencia particular a la cual se "sintoniza" el circuito receptor. Este efecto se llama *resonancia*. El circuito está diseñado de manera que señales con frecuencias distintas de la sintonizada produzcan corrientes demasiado pequeñas para conseguir que los altavoces del radio emitan un sonido audible.

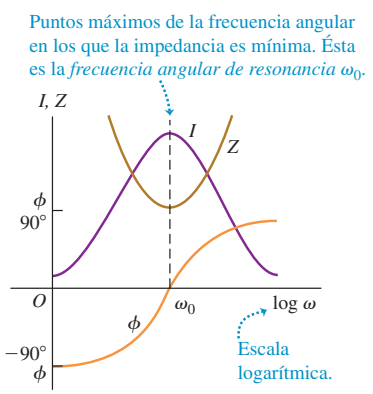
Activ Online Physics
14.3 Circuitos de ca: el oscilador excitador (preguntas 8, 9 y 11)

31.18 Forma en que las variaciones en la frecuencia angular de un circuito de ca afectan **a)** las reactancias, la resistencia y la impedancia, y **b)** la impedancia, la amplitud de corriente y el ángulo de fase.

a) Reactancia, resistencia e impedancia como funciones de la frecuencia angular



b) Impedancia, corriente y ángulo de fase como funciones de la frecuencia angular



Para ver cómo se puede utilizar un circuito *L*-*R*-*C* en serie de ese modo, suponga que se conecta una fuente de ca con amplitud de voltaje constante V pero frecuencia angular ajustable ω a través de un circuito *L*-*R*-*C* en serie. La corriente que aparece en el circuito tiene la misma frecuencia angular que la fuente, y una amplitud de corriente $I = V/Z$, donde Z es la impedancia del circuito *L*-*R*-*C* en serie. Esta impedancia depende de la frecuencia, como lo muestra la ecuación (31.23). La figura 31.18a presenta gráficas de R, X_L, X_C y Z como funciones de ω. Hemos usado una escala logarítmica de frecuencias angulares para abarcar un amplio intervalo de frecuencias. A medida que aumenta la frecuencia, X_L se incrementa y X_C disminuye; por lo tanto, siempre hay una frecuencia a la cual X_L y X_C son iguales y la diferencia $X_L - X_C$ es igual a cero. A esta frecuencia, la impedancia $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ tiene su valor *más pequeño*, que simplemente es igual a la resistencia R.

Comportamiento de un circuito en resonancia

A medida que varía la frecuencia angular ω de la fuente, la amplitud de corriente $I = V/Z$ se modifica como se ilustra en la figura 31.18b; el valor *máximo* de I se presenta a la frecuencia a la que la impedancia Z es *mínima*. Este crecimiento máximo de la amplitud de corriente a cierta frecuencia se llama **resonancia**. La frecuencia angular ω_0 a la que se presenta el máximo de resonancia se denomina **frecuencia angular de resonancia**. Ésta es la frecuencia angular a la que las reactancias inductiva y capacitiva son iguales; por lo tanto, en la resonancia,

$$X_L = X_C \qquad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{(circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie, en resonancia)} \tag{31.32}$$

Advierta que esto es igual a la frecuencia angular natural de oscilación de un circuito *L*-*C*, que se obtuvo en la sección 30.5, ecuación (30.22). La **frecuencia de resonancia** f_0 es $\omega_0/2\pi$. Ésta es la frecuencia a la que aparece la corriente máxima en el circuito con una amplitud de voltaje de fuente determinada; en otras palabras, f_0 es la frecuencia a la que está "sintonizado" el circuito.

Es ilustrativo observar lo que sucede con los *voltajes* en un circuito *L*-*R*-*C* en serie y en resonancia. La corriente en cualquier instante es la misma en L y C. El voltaje entre los extremos de un inductor siempre *se adelanta* 90° a la corriente, o $\frac{1}{4}$ de ciclo, y el voltaje entre los extremos de un capacitor siempre *se retrasa* 90° con respecto a la corriente. Por lo tanto, los voltajes instantáneos entre los extremos de L y C siempre difieren en su fase 180°, o $\frac{1}{2}$ ciclo; tienen signos opuestos en todo momento. A la frecuencia de resonancia, y *sólo* a la frecuencia de resonancia, $X_L = X_C$ y las amplitudes de voltaje $V_L = IX_L$ y $V_C = IX_C$ son *iguales*; en esas condiciones, los voltajes instantáneos entre las terminales de L y C suman cero en cada instante, y el voltaje *total* v_{bd} entre las terminales de la combinación *L*-*C* en la figura 31.13a es exactamente cero. De esta forma, el voltaje entre los extremos del resistor es igual al voltaje de fuente. Por lo tanto, a la frecuencia de resonancia, ¡el circuito se comporta como si el inductor y el capacitor no estuvieran ahí!

La *fase* del voltaje con respecto a la corriente está dada por la ecuación (31.24). A frecuencias por debajo de la de resonancia, X_C es mayor que X_L; la reactancia capacitiva domina, el voltaje *se retrasa* en relación con la corriente, y el ángulo de fase ϕ está entre cero y $-90°$. Por arriba de la resonancia, domina la reactancia inductiva; el voltaje *se adelanta* a la corriente y el ángulo de fase está entre cero y $+90°$. Esta variación de ϕ con la frecuencia angular se ilustra en la figura 31.18b.

Diseño de un circuito de ca

Si podemos variar la inductancia L o la capacitancia C de un circuito, también es posible variar la frecuencia de resonancia. Ésta es exactamente la forma en que un equipo receptor de radio o televisión se "sintonizan" para captar una estación particular. En los primeros días de la radio esto se llevaba a cabo por medio de capacitores con placas metálicas movibles cuyo traslape podía variarse para modificar C. (Esto es lo que se hace al girar la perilla de sintonía del radio que aparece en la fotografía de inicio de

capítulo.) Un enfoque más moderno consiste en variar L por medio de una bobina con núcleo de ferrita que se desliza hacia dentro o hacia fuera.

En un circuito L-R-C en serie, la impedancia alcanza su valor mínimo y la corriente su valor máximo en la frecuencia de resonancia. La curva del medio en la figura 31.19 es una gráfica de la corriente como función de la frecuencia para ese circuito, con amplitud de voltaje de fuente $V = 100$ V, $L = 2.0$ H, $C = 0.50\ \mu$F y $R = 500\ \Omega$. Esta curva se llama *curva de respuesta* o *curva de resonancia*. La frecuencia angular de resonancia es $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 1000$ rad/s. Como era de esperarse, la curva tiene un máximo a esta frecuencia angular.

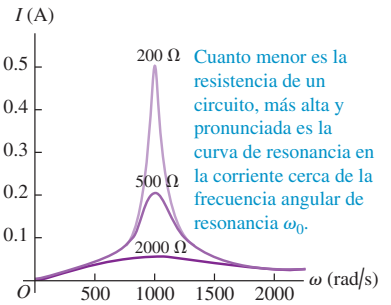
La frecuencia de resonancia está determinada por L y C; ¿qué pasa cuando se modifica R? La figura 31.19 también muestra gráficas de I como función de ω para $R = 200\ \Omega$ y $R = 2000\ \Omega$. Las curvas son similares en el caso de frecuencias alejadas de la resonancia, donde la impedancia está dominada por X_L o X_C. Pero cerca de la resonancia, donde X_L y X_C casi se cancelan entre sí, la curva es más alta y aguda para valores pequeños de R, y más ancha y aplanada con valores más grandes de R. En la resonancia, $Z = R$ e $I = V/R$; así pues, la altura máxima de la curva es inversamente proporcional a R.

La forma de la curva de respuesta es importante en el diseño de los circuitos receptores de radio y televisión. La curva con máximo pronunciado es lo que hace posible discriminar entre dos estaciones emisoras que transmiten en bandas de frecuencia adyacentes. Pero si el máximo es *demasiado* pronunciado, se pierde parte de la información en la señal receptora, como los sonidos de alta frecuencia de la música. La forma de la curva de resonancia también se relaciona con las oscilaciones sobreamortiguadas y subamortiguadas que se describieron en la sección 30.6. Una curva de resonancia con un máximo pronunciado corresponde a un valor pequeño de R y a un sistema oscilante ligeramente amortiguado; una curva ancha y aplanada corresponde a un valor grande de R y a un sistema muy amortiguado.

En esta sección hemos estudiado la resonancia en un circuito L-R-C en *serie*. La resonancia también ocurre en un circuito de ca en el que el inductor, el resistor y el capacitor están conectados en *paralelo*. Le dejamos los detalles a usted (véase el problema 31.55).

Los fenómenos de resonancia ocurren no sólo en los circuitos de ca, sino en todas las áreas de la física. En las secciones 13.8 y 16.5 dimos ejemplos de resonancia en sistemas *mecánicos*. La amplitud de una oscilación mecánica alcanza un máximo cuando la frecuencia de la fuerza impulsora se aproxima a una frecuencia natural del sistema; esto es análogo a la aparición de máximos de corriente en un circuito L-R-C en serie. Sugerimos al lector que repase en este momento las secciones sobre resonancia mecánica e identifique las analogías. Otros ejemplos importantes de resonancia se presentan en la física atómica y nuclear, así como en el estudio de las partículas fundamentales (física de alta energía).

31.19 Gráfica de la amplitud de la corriente I como función de la frecuencia angular ω para un circuito L-R-C en serie con $V = 100$ V, $L = 2.0$ H, $C = 0.50\ \mu$F y tres valores diferentes de la resistencia R.



Ejemplo 31.8 Sintonización de un radio

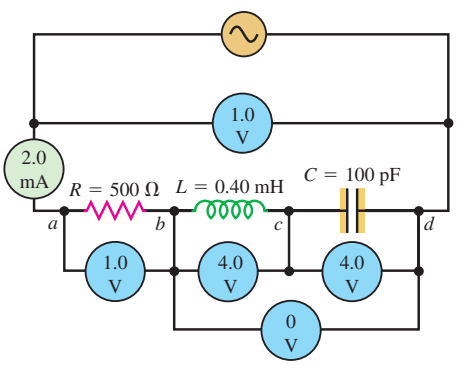
El circuito en serie de la figura 31.20 es similar a las configuraciones que en ocasiones se emplean en los circuitos de sintonización de radios. Este circuito está conectado a las terminales de una fuente de ca con voltaje terminal rms constante de 1.0 V y frecuencia variable. Calcule *a*) la frecuencia de resonancia; *b*) la reactancia inductiva; la reactancia capacitiva, y la impedancia a la frecuencia de resonancia; *c*) la corriente rms en la resonancia; y *d*) el voltaje rms entre las terminales de cada elemento de circuito en la resonancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El circuito en la figura 31.20 es un circuito L-R-C en serie, pero con instrumentos de medición incluidos para cuantificar la corriente rms y los voltajes (que son las variables buscadas).

PLANTEAR: La ecuación (31.32) incluye la fórmula para la frecuencia angular de resonancia ω_0, a partir de la cual se encuentra la frecuencia de resonancia f_0. Las incógnitas restantes se encuentran con los resultados de las secciones 31.2 y 31.3.

31.20 Circuito de sintonización de radio en la resonancia. Los círculos denotan corriente y voltajes rms.



continúa

EJECUTAR: *a*) La frecuencia angular de resonancia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.40 \times 10^{-3}\ \text{H})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})}}$$
$$= 5.0 \times 10^6\ \text{rad/s}$$

La frecuencia correspondiente $f_0 = \omega_0/2\pi$ es

$$f_0 = 8.0 \times 10^5\ \text{Hz} = 800\ \text{kHz}$$

Esto corresponde a la parte inferior de la banda AM de radio.

b) A esta frecuencia,

$$X_L = \omega L = (5.0 \times 10^6\ \text{rad/s})(0.40 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 2000\ \Omega$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(5.0 \times 10^6\ \text{rad/s})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})} = 2000\ \Omega$$

Como $X_L = X_C$ y $X_L - X_C = 0$, la ecuación (31.23) indica que la impedancia Z en la resonancia es igual a la resistencia: $Z = R = 500\ \Omega$.

c) De acuerdo con la ecuación (31.26), la corriente rms en la resonancia es

$$I_{\text{rms}} = \frac{V_{\text{rms}}}{Z} = \frac{V_{\text{rms}}}{R} = \frac{1.0\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0.0020\ \text{A} = 2.0\ \text{mA}$$

d) La diferencia de potencial rms entre las terminales del resistor es

$$V_{R\text{-rms}} = I_{\text{rms}}R = (0.0020\ \text{A})(500\ \Omega) = 1.0\ \text{V}$$

Las diferencias de potencial rms entre las terminales del inductor y el capacitor son, respectivamente:

$$V_{L\text{-rms}} = I_{\text{rms}}X_L = (0.0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4.0\ \text{V}$$
$$V_{C\text{-rms}} = I_{\text{rms}}X_C = (0.0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4.0\ \text{V}$$

EVALUAR: Las diferencias de potencial entre las terminales del inductor y el capacitor tienen valores rms y amplitudes iguales, pero están 180° fuera de fase, por lo que suman cero en todo momento. Advierta también que en la resonancia, $V_{R\text{-rms}}$ es igual al voltaje de fuente V_{rms}, mientras que en este ejemplo tanto $V_{L\text{-rms}}$ como $V_{C\text{-rms}}$ son considerablemente *mayores* que V_{rms}.

Evalúe su comprensión de la sección 31.5 ¿Cómo cambia la frecuencia de resonancia de un circuito *L*-*R*-*C* en serie si las placas del capacitor se acercan hasta juntarse? i) Se incrementa; ii) disminuye; iii) no se ve afectada.

31.6 Transformadores

Una de las grandes ventajas de la ca sobre la cd en la distribución de energía eléctrica es que es mucho más fácil subir y bajar los voltajes con la ca que con la cd. Para la transmisión a grandes distancias es deseable usar un voltaje tan elevado y una corriente tan pequeña como sea posible; esto reduce las pérdidas de i^2R en las líneas de transmisión, y permite utilizar alambres delgados, con lo cual se reducen los costos de los materiales. Las líneas de transmisión actuales operan de manera rutinaria con voltajes eficaces del orden de 500 kV. Por otro lado, consideraciones de seguridad y requerimientos de aislamiento imponen voltajes relativamente bajos en el equipo de generación y en las líneas de distribución domésticas e industriales. El voltaje estándar para el cableado doméstico es de 120 V en Estados Unidos y Canadá, y de 240 V en muchos otros países. La conversión necesaria del voltaje se lleva a cabo por medio de **transformadores**.

Cómo funcionan los transformadores

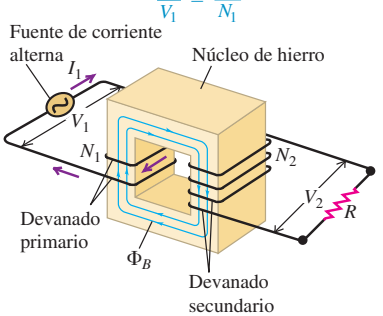
La figura 31.21 ilustra un transformador idealizado. Sus componentes clave son dos bobinas o *devanados*, aislados eléctricamente uno del otro pero enrollados en el mismo núcleo, que por lo general está hecho de un material, como el hierro, con una permeabilidad relativa K_m muy grande. Esto mantiene las líneas del campo magnético debidas a una corriente en un devanado casi completamente dentro del núcleo. Por consiguiente, casi todas las líneas de este campo pasan a través del otro devanado y maximizan la *inductancia mutua* de los dos devanados (véase la sección 30.1). El devanado al que se suministra energía se llama **primario**, y el devanado del que se toma energía recibe el nombre de **secundario**. El símbolo de un transformador con núcleo de hierro en un circuito, como los que se usan en los sistemas de distribución, es

A continuación se describe el modo en que funciona un transformador. La fuente de ca ocasiona una corriente alterna en el primario, lo que establece un flujo alterno en el núcleo; esto induce una fem en cada devanado, de acuerdo con la ley de Faraday.

31.21 Diagrama de un transformador elevador idealizado. El devanado primario está conectado a una fuente de ca; el secundario está conectado a un dispositivo con resistencia R.

La fem inducida *por espira* es la misma en las dos bobinas, por lo que podemos ajustar la razón de los voltajes terminales modificando la razón de las espiras:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$



La fem inducida en el secundario da lugar a una corriente alterna en el secundario, y esto entrega energía al dispositivo al que está conectado el secundario. Todas las corrientes y las fem tienen la misma frecuencia que la fuente de ca.

Veamos cómo se consigue que el voltaje entre los extremos del secundario tenga una amplitud mayor o menor que el voltaje entre los extremos del primario. Se ignora la resistencia de los devanados y se supone que todas las líneas de campo magnético están confinadas al núcleo de hierro, de manera que en cualquier instante el flujo magnético Φ_B es el mismo en cada espira de los devanados primario y secundario. El devanado primario tiene N_1 espiras, y el secundario tiene N_2 espiras. Cuando el flujo magnético cambia como resultado de la modificación de las corrientes en las dos bobinas, las fem inducidas resultantes son

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.33}$$

El flujo *por espira* Φ_B es el mismo tanto en el primario como en el secundario, por lo que las ecuaciones (31.33) indican que la fem inducida *por espira* es la misma en cada uno. La razón entre la fem secundaria $\mathcal{E}_2$ y la fem primaria $\mathcal{E}_1$ es, por lo tanto, igual en cualquier instante a la razón entre las espiras del secundario y las espiras del primario:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.34}$$

Como $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ oscilan con la misma frecuencia que la fuente de ca, la ecuación (31.34) también da la razón de las amplitudes o de los valores rms de las fem inducidas. Si los devanados tienen una resistencia de cero, las fem inducidas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son iguales a los voltajes entre terminales a través del primario y el secundario, respectivamente; por lo tanto,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{(voltajes terminales del transformador primario y secundario)} \tag{31.35}$$

donde V_1 y V_2 son las amplitudes o los valores rms de los voltajes terminales. Al elegir la razón apropiada de las espiras N_2/N_1, se puede obtener cualquier voltaje secundario deseado a partir de un voltaje primario dado. Si $N_2 > N_1$, como en la figura 31.21, entonces $V_2 > V_1$ y tenemos un transformador *elevador*; si $N_2 < N_1$, entonces $V_2 < V_1$ y tenemos un transformador *reductor*. En una estación generadora de energía eléctrica se utilizan transformadores elevadores; el primario se conecta a la fuente de energía y el secundario a las líneas de transmisión, con lo cual se obtiene el alto voltaje que se requiere para la transmisión. Cerca del consumidor se usan transformadores reductores que disminuyen el voltaje a un valor apropiado para el uso doméstico o industrial (figura 31.22).

Aun el voltaje relativamente bajo provisto por una toma de pared doméstica es demasiado elevado para muchos dispositivos electrónicos, por lo que es necesario un transformador reductor adicional. Éste es el papel que cumple un "adaptador de ca" (también llamado "cubo de potencia" o "adaptador de potencia"), como los que se utilizan para recargar un teléfono móvil o una computadora portátil con el voltaje de la línea. Tales adaptadores contienen un transformador reductor que convierte el voltaje de línea a uno de un valor menor, generalmente de 3 a 12 volts, así como diodos para convertir la corriente alterna a la corriente directa que requieren esos pequeños aparatos electrónicos (figura 31.23).

Consideraciones de energía para los transformadores

Si se completa el circuito secundario con una resistencia R, entonces la amplitud o el valor rms de la corriente en el circuito secundario es $I_2 = V_2/R$. Con base en consideraciones de energía, la potencia entregada al primario es igual a la que sale del secundario (puesto que no hay resistencia en los devanados); por lo tanto,

$$V_1I_1 = V_2I_2 \quad \text{(voltajes terminales del transformador primario y secundario)} \tag{31.36}$$

31.22 La lata cilíndrica cerca del extremo superior de este poste es un transformador reductor. Convierte el alto voltaje de la ca en las líneas de transmisión en un voltaje bajo (120 V) de ca, que luego se distribuye a los hogares y oficinas cercanos.

31.23 Los adaptadores de ca como éste convierten la ca doméstica en una cd de bajo voltaje que puede utilizarse con aparatos electrónicos. Contiene un transformador reductor para bajar el voltaje y diodos para rectificar la corriente de salida (véase la figura 31.3).

Podemos combinar las ecuaciones (31.35) y (31.36) y la relación $I_2 = V_2/R$ para eliminar V_2 e I_2; así, se obtiene

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{(N_2/N_1)^2} \tag{31.37}$$

Esto demuestra que, cuando se completa el circuito secundario a través de una resistencia R, el resultado es el mismo que si se hubiera conectado la *fuente* directamente a una resistencia igual a R dividida entre el cuadrado de la razón de espiras $(N_2/N_1)^2$. En otras palabras, el transformador "transforma" no sólo voltajes y corrientes, sino también resistencias. Desde un punto de vista más general, se puede considerar que un transformador "transforma" la *impedancia* de la red a la que está acoplado el circuito del secundario.

La ecuación (31.37) tiene numerosas consecuencias prácticas. La energía suministrada por una fuente a un resistor depende de las resistencias tanto del resistor como de la fuente. Se puede demostrar que la transferencia de potencia es máxima cuando las dos resistencias son *iguales*. El mismo principio se aplica tanto a los circuitos de cd como a los de ca. Cuando una fuente de ca de impedancia elevada debe conectarse a un circuito de baja impedancia, como un amplificador de audio conectado a un altavoz, se puede *igualar* la impedancia de la fuente con la del circuito mediante el uso de un transformador con una razón apropiada de espiras N_2/N_1.

Los transformadores reales siempre tienen algunas pérdidas de energía. (Por eso, un adaptador de ca, como el que se ilustra en la figura 31.23, se siente caliente al tacto después de haberse usado durante cierto tiempo; el transformador se calienta por la energía disipada.) Los devanados tienen cierta resistencia, lo que produce pérdidas de i^2R. También hay pérdidas de energía por histéresis en el núcleo (véase la sección 28.8). Las pérdidas por histéresis se minimizan utilizando hierro dulce con una espira de histéresis estrecha.

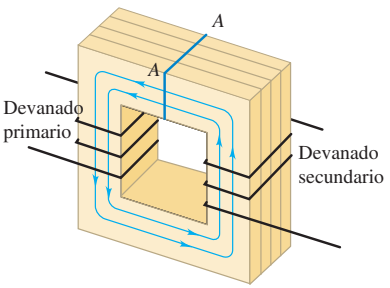
Otro mecanismo importante de pérdida de energía en el núcleo de un transformador tiene que ver con las corrientes parásitas (véase la sección 29.6). Considere la sección AA a través del núcleo de hierro de un transformador (figura 31.24a). Como el hierro es conductor, cualquier sección como ésa se puede considerar como varios circuitos conductores, uno dentro de otro (figura 31.24b). El flujo a través de cada uno de estos circuitos cambia continuamente; en consecuencia, hay corrientes parásitas que circulan por todo el volumen del núcleo, con líneas de flujo que forman planos perpendiculares al flujo. Estas corrientes parásitas son sumamente indeseables porque desperdician energía a través del calentamiento de i^2R y establecen un flujo opuesto.

Los efectos de las corrientes parásitas se minimizan mediante el empleo de un núcleo *laminado*, es decir, uno hecho de láminas delgadas, o laminillas. La gran resistencia eléctrica superficial de cada lámina, debida a un revestimiento natural de óxido o a un barniz aislante, confina con eficacia las corrientes parásitas a las láminas individuales (figura 31.24c). Las posibles trayectorias de las corrientes parásitas son más angostas, la fem inducida en cada trayectoria es menor, y las corrientes parásitas se reducen considerablemente. El campo magnético alterno ejerce fuerzas sobre las láminas portadoras de corriente que las hace vibrar hacia un lado y otro; esta vibración es la que ocasiona el zumbido característico de un transformador en funcionamiento. Este mismo zumbido se escucha en la bobina de inductancia magnética de una lámpara fluorescente (véase la sección 30.2).

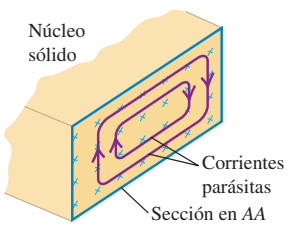
Gracias al uso de núcleos de hierro dulce y a la laminación, las eficiencias de los transformadores son, por lo general, superiores al 90%; en instalaciones grandes alcanza el 99%.

31.24 a) Devanados primario y secundario en un transformador. b) Corrientes parásitas en el núcleo de hierro, ilustradas en la sección transversal en AA. c) El uso de un núcleo laminado reduce las corrientes parásitas.

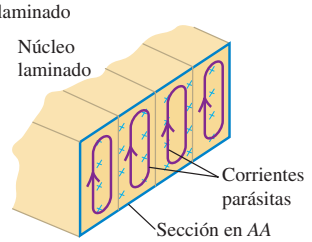
a) Esquema de un transformador



b) Corrientes parásitas grandes en un núcleo sólido



c) Corrientes parásitas más pequeñas en un núcleo laminado



Ejemplo 31.9 "¡Despierte y perciba el aroma del (transformador)!"

Una amiga trae de Europa un aparato que, según ella, es la mejor cafetera del mundo. Por desgracia, el aparato está diseñado para operar en una línea de 240 V y obtener los 960 W de potencia que necesita. *a*) ¿Qué puede hacer nuestra amiga para utilizar la cafetera a 120 V? *b*) ¿Qué corriente tomará la cafetera de la línea de 120 V? *c*) ¿Cuál es la resistencia de la cafetera? (Los voltajes son valores rms.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra amiga necesita un transformador elevador para convertir los 120 V de ca de la línea doméstica en los 240 V que requiere la cafetera. Este problema es acerca de las propiedades de este transformador.

PLANTEAR: Se usa la ecuación (31.35) para determinar la razón de espiras del transformador, N_2/N_1, la relación $P_{med} = V_{rms}I_{rms}$ de los resistores para encontrar el consumo de corriente, y la ecuación (31.37) para calcular la resistencia.

EJECUTAR: *a*) Para obtener $V_2 = 240$ V de $V_1 = 120$ V, la razón de espiras requerida es $N_2/N_1 = V_2/V_1 = (240\text{ V})/(120\text{ V}) = 2$. Es decir, la bobina secundaria (conectada a la cafetera) debe tener el doble de espiras que la bobina primaria (conectada a la línea de 120 V).

b) La corriente rms I_1 en el primario se obtiene mediante la relación $P_{med} = V_1I_1$, donde P_{med} es la potencia media que consume la cafetera y, por lo tanto, la potencia suministrada por la línea de 120 V. (Suponemos que en el transformador no hay pérdidas de energía.) Así pues, $I_1 = P_{med}/V_1 = (960\text{ W})/(120\text{ V}) = 8.0$ A. Y la corriente secundaria es $I_2 = P_{med}/V_2 = (960\text{ W})/(240\text{ V}) = 4.0$ A.

c) Se tiene $V_1 = 120$ V, $I_1 = 8.0$ A y $N_2/N_1 = 2$, por lo tanto,

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{120\text{ V}}{8.0\text{ A}} = 15\ \Omega$$

De acuerdo con la ecuación (31.37),

$$R = 2^2(15\ \Omega) = 60\ \Omega$$

EVALUAR: Como comprobación, $V_2/R = (240\text{ V})/(60\ \omega) = 4.0\text{ A} = I_2$, el mismo valor obtenido antes. También se puede comprobar este resultado de r mediante la expresión $P_{med} = V_2^2/R$ de la potencia que consume la cafetera.

Evalúe su comprensión de la sección 31.6 Cada uno de los siguientes cuatro transformadores tiene 1000 espiras en su bobina primaria. Ordénelos según el número de espiras en la bobina secundaria, de mayor a menor. i) Convierte 120 V de ca en 6.0 V de ca; ii) convierte 120 V de ca en 240 V de ca; iii) convierte 240 V de ca en 6.0 V ca; iv) convierte 240 V en 120 V de ca.

CAPÍTULO 31 RESUMEN

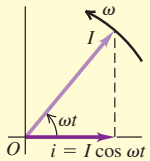
Fasores y corriente alterna: Un alternador o fuente de ca produce una fem que varía en forma sinusoidal con el tiempo. Un voltaje o corriente sinusoidal se puede representar mediante un fasor, que es un vector que gira en sentido antihorario con velocidad angular constante ω igual a la frecuencia angular de la cantidad sinusoidal. Su proyección sobre el eje horizontal en cualquier instante representa el valor instantáneo de la cantidad.

Para una corriente sinusoidal, las corrientes media rectificada y eficaz (rms, cuadrática media) son proporcionales a la amplitud de corriente I. De manera similar, el valor rms de un voltaje sinusoidal es proporcional a la amplitud de voltaje V. (Véase el ejemplo 31.1.)

$$I_{\text{vmr}} = \frac{2}{\pi} I = 0.637 I \tag{31.3}$$

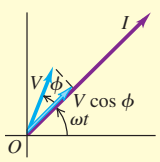
$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \tag{31.4}$$

$$V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \tag{31.5}$$



Voltaje, corriente y ángulo de fase: En general, el voltaje instantáneo entre dos puntos en un circuito de ca no está en fase con la corriente instantánea que pasa a través de esos puntos. La cantidad ϕ se llama ángulo de fase del voltaje con respecto a la corriente.

$$i = I\cos\omega t$$
$$v = V\cos(\omega t + \phi) \tag{31.2}$$

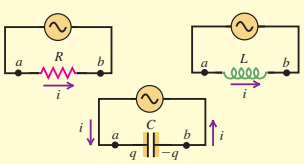


Resistencia y reactancia: El voltaje entre las terminales de un resistor R está en fase con la corriente. El voltaje entre las terminales de un inductor L se adelanta a la corriente en 90° ($\phi = +90°$), mientras que el voltaje entre las terminales de un capacitor C tiene un retraso de 90° ($\phi = -90°$) con respecto a la corriente. La amplitud del voltaje entre las terminales de cada tipo de dispositivo es proporcional a la amplitud de la corriente I. Un inductor tiene reactancia inductiva $X_L = \omega L$, y un capacitor tiene reactancia capacitiva $X_C = 1/\omega C$. (Véanse los ejemplos 31.2 y 31.3.)

$$V_R = IR \tag{31.7}$$

$$V_L = IX_L \tag{31.13}$$

$$V_C = IX_C \tag{31.19}$$

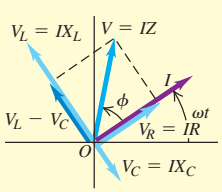


Impedancia y el circuito *L-R-C* en serie: En un circuito de ca general, las amplitudes del voltaje y la corriente están relacionadas mediante la impedancia del circuito Z. En un circuito L-R-C en serie, los valores de L, R, C y la frecuencia angular ω determinan la impedancia y el ángulo de fase ϕ del voltaje en relación con la corriente. (Véanse los ejemplos 31.4 y 31.5.)

$$V = IZ \tag{31.22}$$

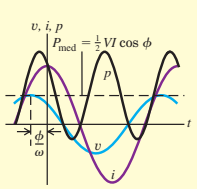
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \tag{31.23}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{31.24}$$



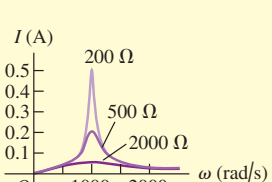
Potencia en circuitos de ca: La potencia media de alimentación, P_{med}, a un circuito de ca depende de las amplitudes de voltaje y de corriente (o, de manera equivalente, de sus valores rms) y del ángulo de fase ϕ del voltaje en relación con la corriente. La cantidad $\cos\phi$ se llama *factor de potencia*. (Véanse los ejemplos 31.6 y 31.7.)

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2} VI\cos\phi = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos\phi \tag{31.31}$$



Resonancia en circuitos de ca: En un circuito L-R-C en serie, la corriente es máxima y la impedancia mínima a cierta frecuencia angular llamada frecuencia angular de resonancia. Este fenómeno se llama resonancia. En la resonancia, el voltaje y la corriente están en fase, y la impedancia Z es igual a la resistencia R. (Véase el ejemplo 31.8.)

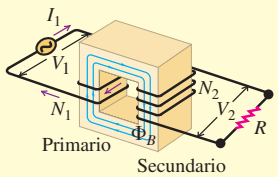
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{31.32}$$



Transformadores: Un transformador se utiliza para transformar los niveles de voltaje y de corriente en un circuito de ca. En un transformador ideal sin pérdidas de energía, si el devanado primario tiene N_1 espiras y el secundario tiene N_2 espiras, las amplitudes (o valores rms) de los dos voltajes están relacionadas por medio de la ecuación (31.35). Las amplitudes (o valores rms) de los voltajes y las corrientes del primario y del secundario están relacionadas por la ecuación (31.36). (Véase el ejemplo 31.9.)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.35}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{31.36}$$



Términos clave

corriente alterna (ca), *1061*
fuente de ca, *1062*
amplitud de voltaje, *1062*
amplitud de corriente, *1062*
fasor, *1062*
diagrama de fasores, *1062*
corriente de valor medio rectificada, *1063*
corriente eficaz (rms), *1063*
ángulo de fase, *1066*
reactancia inductiva, *1066*
reactancia capacitiva, *1068*
impedancia, *1071*
factor de potencia, *1076*
resonancia, *1078*
frecuencia angular de resonancia, *1078*
frecuencia de resonancia, *1078*
transformador, *1080*
primario, *1080*
secundario, *1080*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Sí. En realidad el radio detecta simultáneamente transmisiones en *todas* las frecuencias. Sin embargo, un radio es un circuito *L-R-C* en serie y, en cualquier momento dado, se sintoniza para que tenga una resonancia en una sola frecuencia. De ahí que la respuesta del radio a esa frecuencia sea mucho mayor que a cualquier otra; por eso, sólo se escucha una estación transmisora a través del altavoz del radio. (En ocasiones se oye una segunda estación si su frecuencia está suficientemente cerca de la que se sintoniza.)

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

31.1 Respuestas: *a*) D; *b*) A; *c*) B; *d*) C Para cada fasor, la corriente real está representada por la proyección de ese fasor sobre el eje horizontal. Todos los fasores giran en sentido antihorario alrededor del origen con rapidez angular ω, por lo que en el instante mostrado, la proyección del fasor A es positiva, pero tiende a cero; la proyección del fasor B es negativa y se hace más negativa; la proyección del fasor C es negativa y tiende a cero; y la proyección del fasor D es positiva y se hace más positiva.

31.2 Respuestas: *a*) iii); *b*) ii); *c*) i) En el caso de un resistor $V_R = IR$, así que $I = V_R/R$. La amplitud de voltaje V_R y la resistencia R no cambian con la frecuencia, de manera que la amplitud de corriente I permanece constante. En el caso de un inductor, $V_L = IX_L = I\omega L$, por lo que $I = V_L/\omega L$. La amplitud de voltaje V_L y la inductancia L son constantes, así que la amplitud de la corriente I disminuye a medida que la frecuencia aumenta. En el caso de un capacitor, $V_C = IX_C = I/\omega C$, por lo que $I = V_C\omega C$. La amplitud de voltaje V_C y la capacitancia C son constantes, de manera que la amplitud de corriente I aumenta a medida que la frecuencia se incrementa.

31.3 Respuestas: iv), ii), i), iii) Para el circuito del ejemplo 31.4, $I = V/Z = (50\text{ V})/(500\ \Omega) = 0.10$ A. Si se eliminan el capacitor y el inductor, de manera que sólo permanezcan la fuente de ca y el resistor, el circuito es como el que se aprecia en la figura 31.7a; de esta forma, $I = VR = (50\text{ V})/(300\ \Omega) = 0.17$ A. Si se eliminan el resistor y el capacitor, de manera que sólo queden la fuente de ca y el inductor, el circuito es como el que se ilustra en la figura 31.8a; en tal caso, $I = V/X_L = (50\text{ V})/(600\ \Omega) = 0.083$ A. Por último, si el resistor y el inductor se eliminan, de manera que sólo continúen la fuente de ca y el capacitor, el circuito es como el de la figura 31.9a; en ese caso, $I = V/X_C = (50\text{ V})/(200\ \Omega) = 0.25$ A.

31.4 Respuestas: *a*) v); *b*) iv) La energía no puede ser extraída del resistor, puesto que en éste se disipa y no se recupera. En vez de ello, la energía debe extraerse ya sea del inductor (que almacena energía del campo magnético) o del capacitor (que almacena energía del campo eléctrico). La potencia positiva significa que la energía se está transfiriendo de la fuente de ca al circuito, de manera que la potencia *negativa* implica que la energía se transfiere de regreso a la fuente.

31.5 Respuesta: ii) La capacitancia C aumenta si disminuye la separación de las placas (véase la sección 24.1). Por ello, disminuye la frecuencia de resonancia $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/2\pi\sqrt{LC}$.

31.6 Respuestas: ii), iv), i), iii) De la ecuación (31.35), la razón de espiras es $N_2/N_1 = V_2/V_1$; por lo tanto, el número de espiras en el secundario es $N_2 = N_1V_2/V_1$. De esta forma, para los cuatro casos se tiene que i) $N_2 = (1000)(6.0\text{ V})/(120\text{ V}) = 50$ espiras; ii) $N_2 = (1000)(240\text{ V})/(120\text{ V}) = 2000$ espiras; iii) $N_2 = (1000)(6.0\text{ V})/(240\text{ V}) = 25$ espiras; y iv) $N_2 = (1000)(120\text{ V})/(240\text{ V}) = 500$ espiras. Advierta que i), iii) y iv) son transformadores reductores con menos espiras en el secundario que en el primario, mientras que ii) es un transformador elevador con más espiras en el secundario que en el primario.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P31.1. La energía eléctrica para consumo doméstico se suministra a 240 V en la mayor parte de Europa, y no a 120 V como en Estados Unidos y Canadá. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada sistema?

P31.2. La corriente en una línea de energía de ca cambia de sentido 120 veces por segundo, y su valor medio es de cero. Explique cómo es posible que se transmita energía en un sistema así.
P31.3. En un circuito de ca, ¿por qué valen cero la potencia media para un inductor y un capacitor, pero no para un resistor?
P31.4. La ecuación (31.14) se obtuvo mediante la relación $i = dq/dt$ entre la corriente y la carga en el capacitor. En la figura 31.9a la corriente positiva en sentido antihorario incrementa la carga en el capacitor. Cuando la carga en la placa izquierda es positiva, pero disminuye con el tiempo, ¿sigue siendo correcta la relación $i = dq/dt$ o debe ser $i = -dq/dt$? Cuando la placa derecha tiene carga positiva cuya magnitud aumenta o disminuye, ¿sigue siendo correcta la relación $i = dq/dt$? Explique su respuesta.
P31.5. Las lámparas fluorescentes utilizan con frecuencia un inductor, llamado bobina de inductancia, para limitar la corriente entre los tubos. ¿Por qué es mejor usar un inductor en vez de un resistor para tal propósito?
P31.6. La ecuación (31.9) dice que $v_{ab} = L\, di/dt$ (véase la figura 31.8a). Con base en la ley de Faraday, explique por qué el punto *a* está a un potencial mayor que el *b* cuando tiene el sentido que se indica en la figura 31.8a y su magnitud va en aumento. Cuando *i* va en sentido antihorario y disminuye su magnitud, ¿aún es correcta la relación $v_{ab} = L\, di/dt$, o debería ser $v_{ab} = -Ldi/dt$? ¿Cuándo *i* va en el sentido horario y aumenta o disminuye su magnitud, sigue siendo correcta la relación $v_{ab} = L\, di/dt$? Explique su respuesta.
P31.7. ¿Es posible que el factor de potencia de un circuito *L-R-C* en serie valga cero? Justifique su respuesta en términos *físicos*.
P31.8. En un circuito en serie *L-R-C*, ¿el voltaje instantáneo a través del capacitor puede superar el voltaje de fuente en ese mismo instante? ¿Puede esto ser verdad para el voltaje instantáneo entre las terminales del inductor? ¿Y entre las terminales del resistor? Explique su respuesta.
P31.9. En un circuito en serie *L-R-C*, ¿cuáles son el ángulo de fase ϕ y el factor de potencia cos ϕ cuando la resistencia es mucho menor que la reactancia inductiva o capacitiva y el circuito funciona alejado de la resonancia? Explique su respuesta.
P31.10. Cuando un circuito *L-R-C* en serie está conectado a través de una línea de ca de 120 V, es posible que se exceda el voltaje nominal del capacitor aun cuando éste es de 200 o 400 V. ¿Cómo es posible esto?
P31.11. En el ejemplo 31.6 (sección 31.4), se trató una secadora para el cabello como resistor. Pero como hay bobinas en el elemento calefactor y en el motor que mueve el ventilador, una secadora también tiene inductancia. En términos cualitativos, la inclusión de la inductancia ¿incrementa o disminuye los valores de *R*, I_{rms} y *P*?
P31.12. Una bombilla eléctrica y un capacitor de placas paralelas con aire entre ellas están conectados en serie a una fuente de ca. ¿Qué pasa con el brillo de la bombilla cuando se inserta un dieléctrico entre las placas del capacitor? Explique su respuesta.
P31.13. Una bobina de alambre enrollado alrededor de un tubo hueco y una bombilla eléctrica están conectadas en serie a una fuente de ca. ¿Qué pasa con el brillo de la bombilla cuando se inserta una varilla de hierro en el tubo?
P31.14. Un circuito consiste en una bombilla eléctrica, un capacitor y un inductor conectados en serie a una fuente de ca. ¿Qué pasa con el brillo de la bombilla cuando se retira el inductor? ¿Y cuando se deja el inductor en el circuito, pero se retira el capacitor? Dé una explicación.
P31.15. Un circuito consiste en una bombilla eléctrica, un capacitor y un inductor conectados en serie a una fuente de ca. ¿Es posible retirar tanto el capacitor como el inductor sin que esto altere el brillo que emite la bombilla? Explique su respuesta.
P31.16. ¿Un transformador se puede utilizar con cd? Explique por qué. ¿Qué sucede si un transformador diseñado para ca a 120 V se conecta a una línea de cd a 120 V?
P31.17. Un transformador ideal tiene N_1 devanados en el primario y N_2 en su secundario. Si se duplica el número de devanados sólo en el secundario, ¿en qué factor cambia *a*) la amplitud de voltaje en el secundario y *b*) la resistencia efectiva del circuito secundario?
P31.18. Algunos aparatos eléctricos operan igualmente bien con ca o con cd, y otros sólo funcionan con ca o sólo con cd. Dé ejemplos de cada uno y explique las diferencias.

Ejercicios

Sección 31.1 Fasores y corrientes alternas

31.1. La placa en la parte posterior de cierto escáner de computadora indica que la unidad consume una corriente de 0.34 A de una línea de 120 V a 60 Hz. Determine *a*) la corriente eficaz (rms), *b*) la amplitud de corriente, *c*) la corriente media y *d*) el cuadrático medio de la corriente.
31.2. Una corriente sinusoidal $i = I\cos\omega t$ tiene un valor rms $I_{\text{rms}} = 2.10$ A. *a*) ¿Cuál es la amplitud de corriente? *b*) La corriente se hace pasar a través de un circuito rectificador de onda completa. ¿Cuál es la corriente de valor medio rectificada? *c*) ¿Qué es mayor: I_{rms} o I_{vmr}? Explique utilizando gráficas de i^2 y de la corriente rectificada.
31.3. El voltaje entre las terminales de una fuente de energía de ca varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación (31.1). La amplitud de voltaje es $V = 45.0$ V. ¿Cuáles son *a*) la diferencia de potencial cuadrática media, V_{rms}? y *b*) ¿la diferencia de potencial media V_{med} entre las dos terminales de la fuente de energía?

Sección 31.2 Resistencia y reactancia

31.4. Un capacitor de 2.20 μF está conectado a una fuente de ca cuya amplitud de voltaje se mantiene constante a 60.0 V, pero cuya frecuencia varía. Determine la amplitud de corriente cuando la frecuencia angular es de *a*) 100 rad/s; *b*) 1000 rad/s; *c*) 10,000 rad/s. *d*) Muestre los resultados de los incisos *a*) a *c*) en una gráfica de log *I* en función de log ω.
31.5. Un inductor de 5.00 H con resistencia insignificante está conectado a la fuente de ca del ejercicio 31.4. Determine la amplitud de corriente cuando la frecuencia angular es *a*) 100 rad/s; *b*) 1000 rad/s; *c*) 10,000 rad/s. *d*) Muestre los resultados de los incisos *a*) a *c*) en una grafica de log *I* en función de log ω.
31.6. Una capacitancia *C* y una inductancia *L* se operan a la misma frecuencia angular. *a*) ¿A qué frecuencia angular tendrán la misma reactancia? *b*) Si $L = 5.00$ mH y $C = 3.50$ μF, ¿cuál es el valor numérico de la frecuencia angular del inciso *a*), y cuál es la reactancia de cada elemento?
31.7. En cada circuito descrito a continuación, una fuente de voltaje de ca que produce una corriente $i = I\cos\omega t$ se conecta a un elemento adicional de circuito. *a*) La fuente de ca está conectada a las terminales de un resistor *R*. Elabore las gráficas de la corriente en el circuito y la diferencia de potencial entre las terminales del resistor, como funciones del tiempo, correspondientes a dos ciclos de oscilación. Dibuje las dos curvas juntas, en los *mismos* ejes, para que pueda compararlas. *b*) Haga lo mismo que en el inciso *a*), pero suponga que el resistor se sustituye por un inductor *L*. Construya las mismas gráficas que en el inciso *a*), sólo que esta vez considerando el inductor en vez del resistor. *c*) Haga lo mismo que en el inciso *a*), pero suponga que el resistor se sustituye por un capacitor *C*. Elabore las mismas gráficas del inciso *a*), sólo que ahora considerando el capacitor en vez del resistor. *d*) Elabore un diagrama de fasores para cada uno de los casos anteriores.
31.8. *a*) Calcule la reactancia de un inductor de 0.450 H a frecuencias de 60.0 H y 600 Hz. *b*) Calcule la reactancia de un capacitor de 2.50 μF a las mismas frecuencias. *c*) ¿A qué frecuencia la reactancia de un inductor de 0.450 H es igual a la de un capacitor de 2.50 μF?
31.9. *a*) ¿Cuál es la reactancia de un inductor de 3.00 H a una frecuencia de 80.0 Hz? *b*) ¿Cuál es la inductancia de un inductor cuya reactancia es de 120 Ω a 80.0 Hz? *c*) ¿Cuál es la reactancia de un capacitor de

4.00 μF a una frecuencia de 80.0 Hz? *d*) ¿Cuál es la capacitancia de un capacitor cuya reactancia es de 120 Ω a 80.0 Hz?

31.10. Inductor de radio. Se desea que la amplitud de corriente a las terminales de un inductor de 0.450 mH (parte de los circuitos de un receptor de radio) sea de 2.60 mA cuando a través del inductor se aplica un voltaje sinusoidal con amplitud de 12.0 V. ¿Cuál es la frecuencia que se requiere?

31.11. Capacitancia en una cocina. El sistema eléctrico de un refrigerador contiene un capacitor de arranque. Se aplica un voltaje con amplitud de 170 V y frecuencia de 60.0 Hz a las terminales del capacitor para producir una amplitud de corriente de 0.850 A a través del capacitor. ¿Cuál es la capacitancia C que se necesita?

31.12. Un resistor de 250 Ω está conectado en serie con un capacitor de 4.80 μF. El voltaje en las terminales del capacitor es $v_C = (7.60\text{ V})$ sen $[(120\text{ rad/s})t]$. *a*) Determine la reactancia capacitiva del capacitor. *b*) Obtenga una expresión para el voltaje v_R entre las terminales del resistor.

31.13. Un resistor de 150 Ω está conectado en serie con un inductor de 0.250 H. El voltaje en las terminales del resistor es $v_R = (3.80\text{ V})$ cos $[(720\text{ rad/s})t]$. *a*) Obtenga una expresión para la corriente de circuito. *b*) Determine la reactancia inductiva del inductor. *c*) Obtenga una expresión para el voltaje v_L en las terminales del inductor.

Sección 31.3 El circuito *L-R-C* en serie

31.14. Usted tiene un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.400 H y un capacitor de 6.00 μF. Suponga que toma el resistor y el inductor y construye un circuito en serie con una fuente de voltaje que tiene una amplitud de 30.0 V y una frecuencia angular de 250 rad/s. *a*) ¿Cuál es la impedancia del circuito? *b*) ¿Cuál es la amplitud de corriente? *c*) ¿Cuáles son las amplitudes de voltaje en las terminales del resistor y en las terminales del inductor? *d*) ¿Cuál es el ángulo de fase ϕ del voltaje de fuente con respecto de la corriente? ¿La fuente de voltaje se adelanta o se atrasa en relación con la corriente? *e*) Construya el diagrama de fasores.

31.15. *a*) Para el circuito *R-L* del circuito del ejercicio 31.14, construya la gráfica de v, v_R y v_L en función de t, que vaya de $t = 0$ a $t = 50.0$ ms. La corriente está dada por $i = I\cos\omega t$, por lo que $v = V\cos(\omega t + \phi)$. *b*) ¿Cuáles son los valores de v, v_R y v_L en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_L$ con v en este instante. *c*) Repita el inciso *b*) para $t = 40.0$ ms.

31.16. Repita el ejercicio 31.14 pero considerando que el circuito consiste sólo en el capacitor y el inductor en serie. Para el inciso *c*), calcule las amplitudes de voltaje a través del capacitor y a través del inductor.

31.17. Repita el ejercicio 31.14 pero considerando que el circuito consiste sólo en el resistor y el capacitor en serie. Para el inciso *c*), calcule las amplitudes de voltaje a través del resistor y a través del capacitor.

31.18. *a*) Para el circuito *R-C* del ejercicio 31.17, elabore la gráfica de v, v_R y v_C en función de t, que vaya de $t = 0$ a $t = 50.0$ ms. La corriente está dada por $i = I\cos\omega t$, de manera que $v = V\cos(\omega t + \phi)$. *b*) ¿Cuáles son los valores de v, v_R y v_C en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_C$ con v en ese momento. *c*) Repita el inciso *b*) para $t = 40.0$ ms.

31.19. El resistor, el inductor, el capacitor y la fuente de voltaje descritos en el ejercicio 31.14 están conectados de manera que forman un circuito *L-R-C* en serie. *a*) ¿Cuál es la impedancia del circuito? *b*) ¿Cuál es la amplitud de corriente? *c*) ¿Cuál es el ángulo de fase del voltaje de fuente con respecto a la corriente? ¿El voltaje en la fuente se retrasa o se adelanta con respecto a la corriente? *d*) ¿Cuáles son las amplitudes de voltaje a través del resistor, del inductor y del capacitor? *e*) Explique cómo es posible que la amplitud de voltaje sea mayor a través del capacitor que a través de la fuente.

31.20. *a*) Para el circuito *L-R-C* del ejercicio 31.19, elabore la gráfica de v, v_R, v_L y v_C en función del t, que vaya de $t = 0$ a $t = 50.0$ ms. La corriente está dada por $i = I\cos\omega t$, de manera que $v = V\cos(\omega t + \phi)$. *b*) ¿Cuáles son los valores de v, v_R, v_L y v_C en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_L$ con v en ese instante. *c*) Repita el inciso *b*) para $t = 40.0$ ms.

31.21. Análisis de un circuito *L-R-C*. Se tiene un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.400 H, un capacitor de 5.00 μF y una fuente de ca de frecuencia variable con amplitud de 3.00 V. Se conectan los cuatro elementos para formar un circuito en serie. *a*) ¿A qué frecuencia será máxima la corriente en el circuito? ¿Cuál será la amplitud de corriente a esta frecuencia? *b*) ¿Cuál será la amplitud de corriente a una frecuencia angular de 400 rad/s? A esta frecuencia, ¿el voltaje en la fuente se adelanta o se atrasa en relación con la corriente?

31.22. Un circuito *L-R-C* en serie se construye usando un resistor de 175 Ω, un capacitor de 12.5 μF y un inductor de 8.00 mH, todos conectados a una fuente de ca que tiene frecuencia variable y una amplitud de voltaje de 25.0 V. *a*) ¿A qué frecuencia angular la impedancia será mínima, y cuál será su valor? *b*) A la frecuencia angular del inciso *a*), ¿cuál es la corriente máxima a través del inductor? *c*) A la frecuencia angular del inciso *a*), determine la diferencia de potencial a través de la fuente de ca, el resistor, el capacitor y el inductor en el instante en que la corriente es igual a la mitad de su valor positivo más grande. *d*) En el inciso *c*), ¿cómo están relacionadas las diferencias de potencial entre las terminales del resistor, el inductor y el capacitor con la diferencia de potencial entre las terminales de la fuente de ca?

31.23. En un circuito *L-R-C* en serie, el voltaje rms entre las terminales del resistor es de 30.0 V, entre las terminales del capacitor es de 90.0 V, y entre las terminales del inductor es de 50.0 V. ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?

31.24. Defina la reactancia X de un circuito *L-R-C* como $X = X_L - X_C$. *a*) Demuestre que $X = 0$ cuando la frecuencia angular ω de la corriente es igual a la frecuencia angular de resonancia ω_0. *b*) ¿Cuál es el signo de X cuando $\omega > \omega_0$? *c*) ¿Cuál es el signo de X cuando $\omega < \omega_0$? *d*) Grafique X en función de ω.

Sección 31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna

31.25. La potencia de cierto reproductor de CD que opera a 120 V rms es de 20.0 W. Suponga que el reproductor de CD se comporta como una resistencia pura, y calcule *a*) la potencia instantánea máxima, *b*) la corriente eficaz (rms) y *c*) la resistencia del reproductor.

31.26. En un circuito *L-R-C* en serie, los componentes tienen los siguientes valores: $L = 20.0$ mH, $C = 140$ nF y $R = 350$ Ω. El generador tiene un voltaje rms de 120 V y una frecuencia de 1.25 kHz. Determine *a*) la potencia suministrada por el generador y *b*) la potencia disipada en el resistor.

31.27. *a*) Demuestre que para un circuito *L-R-C* en serie, el factor de potencia es igual a R/Z (*Sugerencia:* Use el diagrama de fasores; consulte la figura 31.13b.) *b*) Demuestre que para cualquier circuito de ca, no sólo uno que nada más contenga una resistencia pura, la potencia media entregada por la fuente de voltaje está dada por $P_{\text{med}} = I_{\text{rms}}{}^2R$.

31.28. Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de 120 Hz que tiene $V_{\text{rms}} = 80.0$ V. El circuito tiene una resistencia de 75.0 Ω y una impedancia a esta frecuencia de 105 Ω. ¿Cuál es potencia media que la fuente entrega al circuito?

31.29. Un circuito *L-R-C* en serie, con $L = 0.120$ H, $R = 240$ Ω y $C = 7.30$ μF, conduce una corriente rms de 0.450 A con una frecuencia de 400 Hz. *a*) ¿Cuáles son el ángulo de fase y el factor de potencia de este circuito? *b*) ¿Cuál es la impedancia del circuito? *c*) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente? *d*) ¿Cuál es la potencia media que entrega la fuente? *e*) ¿Cuál es la tasa media a la que la energía eléctrica se convierte en energía térmica en el resistor? *f*) ¿Cuál es la tasa media a la que se disipa la energía eléctrica (es decir, se convierte en otras formas) en el capacitor? *g*) ¿Y en el inductor?

31.30. Un circuito en serie de ca contiene un resistor de 250 Ω, un inductor de 15 mH, un capacitor de 3.5 μF, y una fuente de potencia de ca con amplitud de voltaje de 45 V que opera a una frecuencia angular de 360 rad/s. *a*) ¿Cuál es el factor de potencia de este circuito? *b*) Calcule la potencia media entregada a todo el circuito. *c*) ¿Cuál es la potencia media aportada al resistor, al capacitor y al inductor?

Sección 31.5 Resonancia en los circuitos de corriente alterna

31.31. En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 300\ \Omega$, $L = 0.400$ H y $C = 6.00 \times 10^{-8}$ F. Cuando la fuente de ca opera a la frecuencia de resonancia del circuito, la amplitud de la corriente es de 0.500 A. *a*) ¿Cuál es la amplitud de voltaje de la fuente? *b*) ¿Cuál es la amplitud de voltaje entre las terminales del resistor, entre las terminales del inductor y entre las terminales del capacitor? *c*) ¿Cuál es la potencia media que suministra la fuente?

31.32. Un circuito *L-R-C* en serie consiste en una fuente con amplitud de voltaje de 120 V y frecuencia angular de 50.0 rad/s, un resistor con $R = 400\ \Omega$, un inductor con $L = 9.00$ H, y un capacitor con capacitancia *C*. *a*) ¿Para qué valor de *C* será máxima la amplitud de la corriente en el circuito? *b*) Cuando *C* tiene el valor calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la amplitud del voltaje entre las terminales del inductor?

31.33. En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 150\ \Omega$, $L = 0.750$ H y $C = 0.0180\ \mu$F. La fuente tiene una amplitud de voltaje $V = 150$ V y una frecuencia igual a la frecuencia de resonancia del circuito. *a*) ¿Cuál es el factor de potencia? *b*) ¿Cuál es la potencia media que entrega la fuente? *c*) Se sustituye el capacitor por otro con $C = 0.0360\ \mu$F y se ajusta la frecuencia de la fuente al nuevo valor de resonancia. En esas condiciones, ¿cuál es la potencia media que entrega la fuente?

31.34. En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 400\ \Omega$, $L = 0.350$ H y $C = 0.0120\ \mu$F. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito? *b*) El capacitor es capaz de manejar un voltaje máximo de 550 V. Si la fuente de voltaje opera a la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud máxima de voltaje que puede tener si no debe rebasarse el voltaje máximo del capacitor?

31.35. Un circuito en serie consiste en una fuente de ca de frecuencia variable, un resistor de 115 Ω, un capacitor de 1.25 μF y un inductor de 4.50 mH. Calcule la impedancia de este circuito cuando la frecuencia angular de la fuente de ca se ajusta a *a*) la frecuencia angular de resonancia; *b*) el doble de la frecuencia angular de resonancia; *c*) la mitad de la frecuencia angular de resonancia.

31.36. En un circuito *L-R-C* en serie, $L = 0.280$ H y $C = 4.00\ \mu$F. La amplitud de voltaje de la fuente es de 120 V. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito? *b*) Cuando la fuente opera a la frecuencia angular de resonancia, la amplitud de corriente en el circuito es de 1.70 A. ¿Cuál es la resistencia *R* del resistor? *c*) A la frecuencia angular de resonancia, ¿cuáles son los máximos de voltaje entre las terminales del inductor, el capacitor y el resistor?

Sección 31.6 Transformadores

31.37. Transformador reductor. Un transformador conectado a una línea de ca de 120 V (rms) debe suministrar 12.0 V (rms) a un dispositivo electrónico portátil. La resistencia de la carga en el secundario es de 5.00 Ω. *a*) ¿Cuál debe ser la razón entre las espiras del primario y el secundario del transformador? *b*) ¿Qué corriente rms debe suministrar el secundario? *c*) ¿Cuál es la potencia media que se entrega a la carga? *d*) ¿Qué resistencia conectada directamente a la línea de 120 V consumiría la misma potencia que el transformador? Demuestre que ésta es igual al producto de 5.00 Ω por el cuadrado de la razón entre las espiras del primario y el secundario.

31.38. Transformador elevador. Un transformador conectado a una línea de ca de 120 V (rms) debe suministrar 13,000 V (rms) para un anuncio de neón. Para reducir el peligro de una descarga, se inserta un fusible en el circuito primario, el cual se funde cuando la corriente rms en el circuito secundario rebasa los 8.50 mA. *a*) ¿Cuál es la razón entre las espiras del primario y el secundario del transformador? *b*) ¿Cuál es la potencia que debe suministrarse al transformador cuando la corriente rms en el secundario es de 8.50 mA? *c*) ¿Cuál es la corriente nominal que debe tener el fusible en el circuito primario?

31.39. ¡A Europa! Usted planea llevar su secadora para el cabello a Europa, donde las tomas eléctricas son de 240 V en vez de 120 V, como en Estados Unidos. El aparato genera 1600 W a 120 V. *a*) ¿Qué podría hacer para poder operar su secadora en la línea de 240 V en Europa? *b*) ¿Cuál es la corriente que tomaría la secadora de una toma en Europa? *c*) ¿Qué resistencia parecería tener la secadora al operar a 240 V?

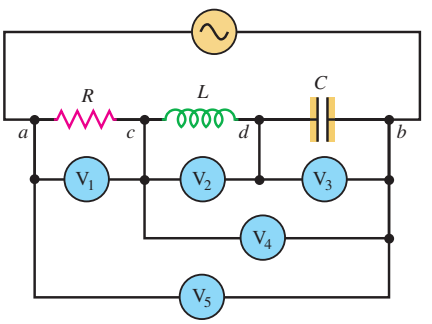
Problemas

31.40. La figura 31.12a ilustra la red de cruce de un sistema de altavoces. Un ramal consiste en un capacitor *C* y un resistor *R* en serie (el tweeter). Este ramal está en paralelo con otro (el woofer) que consiste en un inductor *L* y un resistor *R* en serie. A cada ramal en paralelo se aplica la misma fuente de voltaje con frecuencia angular ω. *a*) ¿Cuál es la impedancia del ramal del tweeter? *b*) ¿Cuál es la impedancia del ramal del woofer? *c*) Explique por qué las corrientes en los dos ramales son iguales cuando las impedancias de los ramales son iguales. *d*) Obtenga una expresión para la frecuencia *f* que corresponde al punto de cruce en la figura 31.12b.

31.41. Una bobina tiene resistencia de 48.0 Ω. A una frecuencia de 80.0 Hz, el voltaje entre las terminales de la bobina se adelanta 52.3° a la corriente. Determine la inductancia de la bobina.

31.42. Cinco voltímetros de impedancia infinita, calibrados para leer valores rms, están conectados como se ilustra en la figura 31.25. Sea $R = 200\ \Omega$, $L = 0.400$ H, $C = 6.00\ \mu$F y $V = 30.0$ V. ¿Cuál es la lectura de cada voltímetro si *a*) $\omega = 200$ rad/s, y *b*) $\omega = 1000$ rad/s?

Figura **31.25** Problema 31.42.



31.43. Una corriente sinusoidal está dada por $i = I\cos\omega t$. La corriente rectificada de onda completa se ilustra en la figura 31.3b. *a*) Sean t_1 y t_2 los dos tiempos positivos más pequeños a los que la corriente rectificada es igual a cero. Exprese t_1 y t_2 en términos de ω. *b*) Encuentre el área bajo la *i* rectificada en función de *t*, entre t_1 y t_2, calculando la integral $\int_{t_1}^{t_2} i\,dt$. Como $dq = i\,dt$, esta área es igual a la carga que fluye durante el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2. *c*) Iguale el resultado del inciso *b*) con $I_{vmr} = (t_2 - t_1)$ y calcule I_{vmr} en términos de la amplitud de corriente *I*. Compare su respuesta con la ecuación (31.3).

31.44. Se conecta una bobina electromagnética grande a una fuente de ca de 120 Hz. La bobina tiene una resistencia de 400 Ω y, a esa frecuencia de la fuente, la bobina tiene una reactancia inductiva de 250 Ω. *a*) ¿Cuál es la inductancia de la bobina? *b*) ¿Cuál debe ser el voltaje rms de la fuente para que la bobina consuma una potencia eléctrica media de 800 W?

31.45. Un circuito en serie tiene una impedancia de 60.0 Ω y un factor de potencia de 0.720 a 50.0 Hz. El voltaje de fuente lleva un retraso con respecto a la corriente. *a*) ¿Qué elemento de circuito, un inductor o

un capacitor, debe colocarse en serie con el circuito para elevar su factor de potencia? *b*) ¿De qué tamaño debe ser el elemento para elevar el factor de potencia a la unidad?

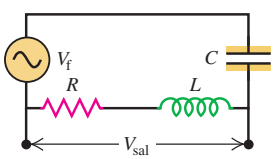
31.46. Un circuito consiste en un resistor y un capacitor en serie con una fuente de ca que suministra un voltaje rms de 240 V. A la frecuencia de la fuente, la reactancia del capacitor es de 50.0 Ω. La corriente rms en el circuito es de 3.00 A. ¿Cuál es la potencia media que suministra la fuente?

31.47. Un circuito *L-R-C* en serie consiste en un resistor de 50.0 Ω, un capacitor de 10.0 μF, un inductor de 3.50 mH y una fuente de voltaje con amplitud de 60.0 V que opera a 1250 Hz. *a*) Determine la amplitud de corriente y las amplitudes de voltaje entre las terminales del inductor, el resistor y el capacitor. ¿Por qué las amplitudes de voltaje suman *más* de 60.0 V? *b*) Si ahora se duplica la frecuencia, pero todo lo demás permanece constante, ¿cuál(es) de las cantidades del inciso *a*) cambiará(n)? Calcule esos nuevos valores.

31.48. A una frecuencia ω_1, la reactancia de cierto capacitor es igual a la de cierto inductor. *a*) Si la frecuencia cambia a $\omega_2 = 2\omega_1$, ¿cuál es la razón entre la reactancia del inductor y la del capacitor? ¿Cuál reactancia es mayor? *b*) Si la frecuencia cambia a $\omega_3 = \omega_1/3$, ¿cuál es la razón entre la reactancia del inductor y la del capacitor? ¿Cuál reactancia es más grande? *c*) Si el capacitor y el inductor se colocan en serie con un resistor de resistencia *R* para formar un circuito *L-R-C* en serie, ¿cuál será la frecuencia de resonancia angular del circuito?

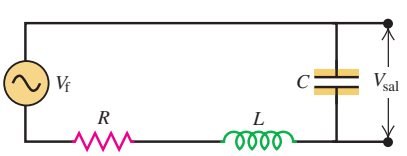
31.49. Filtro de paso alto. Una aplicación de los circuitos *L-R-C* en serie es en los filtros de paso alto o de paso bajo, que filtran ya sea las componentes de alta frecuencia o las de baja frecuencia de una señal. En la figura 31.26 se presenta un filtro de paso alto, donde el voltaje de salida se toma entre los extremos de la combinación *L-R*. (La combinación *L-R* representa una bobina inductiva que también tiene una resistencia que se debe a la gran longitud del alambre de la bobina.) Obtenga una expresión para V_{sal}/V_f, la razón entre las amplitudes de los voltajes de salida y de la fuente. Demuestre que cuando ω es pequeña, esta razón es proporcional a ω, y por lo tanto es pequeña, y demuestre que la razón tiende a la unidad en el límite de las frecuencias grandes.

Figura 31.26 Problema 31.49.



31.50. Filtro de paso bajo. La figura 31.27 representa un filtro de paso bajo (véase el problema 31.49); el voltaje de salida se toma entre los extremos del capacitor en un circuito *L-R-C* en serie. Obtenga una expresión para V_{sal}/V_f, la razón entre las amplitudes del voltaje de salida y de la fuente, como función de la frecuencia angular ω de la fuente. Demuestre que cuando ω es grande, esta razón es proporcional a ω^{-2}, y por lo tanto es muy pequeña, y demuestre que la razón se aproxima a la unidad en el límite de las frecuencias pequeñas.

Figura 31.27 Problema 31.50.



31.51. Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje *V* constante y frecuencia angular ω variable. *a*) Demuestre que la amplitud de corriente como función de ω es

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

b) Demuestre que la potencia media disipada en el resistor es

$$P = \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

c) Demuestre que *tanto I como P* son máximas cuando $\omega = 1/\sqrt{LC}$; es decir, cuando la frecuencia de la fuente es igual a la frecuencia de resonancia del circuito. *d*) Grafique *P* como función de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. Compare con la curva de color púrpura claro en la figura 31.19. Analice el comportamiento de *I* y *P* en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$.

31.52. Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante *V* y frecuencia angular ω variable. Con los resultados del problema 31.51, encuentre una expresión para *a*) la amplitud V_L del voltaje a través del inductor como función de ω; y *b*) la amplitud V_C del voltaje a través del capacitor como función de ω. *c*) Grafique V_L y V_C como funciones de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. *d*) Analice el comportamiento de V_L y V_C en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. ¿Para qué valor de ω es $V_L = V_C$? ¿Cuál es la importancia de este valor de ω?

31.53. Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante *V* y frecuencia angular variable ω. *a*) Demuestre que la energía promediada en el tiempo que se almacena en el inductor es $U_B = \frac{1}{4}LI^2$, y que la energía promediada en el tiempo que se almacena en el capacitor es $U_E = \frac{1}{4}CV^2$. *b*) Utilice los resultados de los problemas 31.51 y 31.52 para encontrar expresiones para U_B y U_E como funciones de ω. *c*) Grafique U_B y U_E como funciones de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. *d*) Analice el comportamiento de U_B y U_E en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. ¿Para qué valor de ω es $U_B = U_E$? ¿Cuál es la importancia de este valor de ω?

31.54. Circuito *L-R-C* en paralelo. Un resistor, un inductor y un capacitor están conectados en paralelo a una fuente de ca con amplitud de voltaje *V* y frecuencia angular ω. El voltaje de fuente está dado por $v = V\cos\omega t$. *a*) Demuestre que los voltajes instantáneos v_R, v_L y v_C en cualquier instante son todos iguales a *v* y que $i = i_R + i_L + i_C$, donde *i* es la corriente a través de la fuente, e i_R, i_L e i_C son las corrientes a través del resistor, el inductor y el capacitor, respectivamente. *b*) ¿Cuáles son las fases de i_R, i_L e i_C con respecto a *v*? Use los fasores de corriente para representar *i*, i_R, i_L e i_C. En un diagrama de fasores, muestre las fases de estas cuatro corrientes con respecto a *v*. *c*) Use el diagrama de fasores del inciso *b*) para demostrar que la amplitud de corriente *I* para la corriente *i* a través de la fuente está dada por $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$. *d*) Demuestre que el resultado del inciso *c*) se puede escribir como $I = V/Z$, con $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$.

31.55. Resonancia en paralelo. En el problema 31.54 se obtuvo la impedancia de un circuito *L-R-C* en paralelo. *a*) Demuestre que a la frecuencia angular de resonancia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $I_C = I_L$, y que *I* es un *mínima*. *b*) Puesto que *I* es mínima en la resonancia, ¿es correcto decir que la potencia entregada al resistor también es mínima en $\omega = \omega_0$? Explique su respuesta. *c*) En la resonancia, ¿cuál es el ángulo de fase de la corriente de fuente con respecto al voltaje de fuente? ¿Cómo se compara esto con el ángulo de fase para un circuito *L-R-C en serie* en la resonancia? *d*) Dibuje el diagrama de un circuito *L-R-C* en paralelo, y acomode los elementos de circuito de manera que el resistor sea el elemento más cercano a la fuente de ca. Justifique el siguiente enunciado: Cuando la frecuencia angular de la fuente es $\omega = \omega_0$, *no* hay corriente que fluya entre i) la parte del circuito que incluye la fuente y el resistor, y ii) la parte que incluye el inductor y el capacitor, por lo que podrían cortarse los alambres que conectan esas dos partes del circuito sin afectar a las corrientes. *e*) ¿Sigue siendo válido el enunciado del inciso *d*) si se considera que cualquier inductor o capacitor real también tiene cierta resistencia propia? Explique su respuesta.

31.56. Un resistor de 400 Ω y un capacitor de 6.00 μF están conectados en paralelo a un generador de ca que suministra un voltaje rms de 220 V a una frecuencia angular de 360 rad/s. Use los resultados del problema 31.54. Advierta que como en el circuito no hay inductor, el término $1/\omega L$ no está presente en la expresión para Z. Encuentre *a*) la amplitud de corriente en el resistor; *b*) la amplitud de corriente en el capacitor; *c*) el ángulo de fase de la corriente de fuente con respecto al voltaje de fuente; *d*) la amplitud de corriente a través del generador. *e*) ¿La corriente de fuente se retrasa o se adelanta con respecto al voltaje de fuente?

31.57. Un circuito *L-R-C* en paralelo está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω. *a*) Con los resultados del problema 31.54, encuentre expresiones para las amplitudes I_R, I_L e I_C de las corrientes a través del resistor, el inductor y el capacitor como funciones de ω. *b*) Grafique I_R, I_L e I_C como funciones de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. *c*) Analice el comportamiento de I_L e I_C en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. Explique por qué I_L e I_C se comportan como lo hacen en esos límites. *d*) Calcule la frecuencia de resonancia (en Hz) del circuito y dibuje el diagrama de fasores en la frecuencia de resonancia. *e*) En la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de corriente a través de la fuente? *f*) En la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de corriente a través del resistor, a través del inductor y a través del capacitor?

31.58. Un circuito *L-R-C* en serie se compone de un capacitor de 2.50 μF, un inductor de 5.00 mH y un resistor de 75.0 Ω conectados a través de una fuente de ca con amplitud de voltaje de 15.0 V de frecuencia variable. *a*) ¿En qué circunstancias la potencia media entregada al circuito es igual a $\frac{1}{2}V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$? *b*) En las condiciones del inciso *a*), ¿cuál es la potencia media entregada a cada elemento de circuito, y cuál la corriente máxima a través del capacitor?

31.59. En un circuito *L-R-C* en serie, la magnitud del ángulo de fase es de 54.0°, con el voltaje de fuente en retraso con respecto a la corriente. La reactancia del capacitor es de 350 Ω, y la resistencia del resistor es de 180 Ω. La potencia media que entrega la fuente es de 140 W. Determine *a*) la reactancia del inductor; *b*) la corriente rms; *c*) el voltaje rms de la fuente.

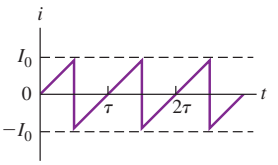
31.60. Un circuito *L-R-C* en serie tiene $R = 500\ \Omega$, $L = 2.00$ H, $C = 0.500\ \mu$F y $V = 100$ V. *a*) Para $\omega = 800$ rad/s, calcule V_R, V_L, V_C y ϕ. Con un solo par de ejes, elabore la gráfica de v, v_R, v_L y v_C como funciones del tiempo. En la gráfica incluya dos ciclos de v. *b*) Repita el inciso *a*) para $\omega = 1000$ rad/s. *c*) Repita el inciso *a*) para $\omega = 1250$ rad/s.

31.61. En un circuito *L-R-C* en serie, la fuente tiene una amplitud de voltaje de 120 V, $R = 80.0\ \Omega$ y la reactancia del capacitor es de 480 Ω. La amplitud del voltaje entre las terminales del capacitor es de 360 V. *a*) ¿Cuál es la amplitud de corriente en el circuito? *b*) ¿Cuál es la impedancia? *c*) ¿Cuáles son los dos valores que puede tener la reactancia del inductor? *d*) ¿Para cuál de los dos valores del inciso *c*) la frecuencia angular es menor que la frecuencia angular de resonancia? Explique su respuesta.

31.62. Un circuito en serie se compone de un inductor de 1.50 mH, un resistor de 125 Ω y un capacitor de 25.0 nF, conectados a una fuente de ca que tiene un voltaje rms de 35.0 V y frecuencia variable. *a*) ¿A qué frecuencia angular la amplitud de la corriente será igual a $\frac{1}{3}$ de su valor máximo posible? *b*) A la frecuencia hallada en el inciso *a*), ¿cuáles son las amplitudes de corriente y de voltaje a través de cada uno de los elementos del circuito (incluida la fuente de ca)?

31.63. En cierto circuito la corriente varía con el tiempo, como se ilustra en la figura 31.28. Determine la corriente media y la corriente rms en términos de I_0.

Figura **31.28** Problema 31.63.



31.64. Anchura de resonancia. Considere un circuito *R-L-C* en serie con un inductor de 1.80 H, un capacitor de 0.900 μF y un resistor de 300 Ω. La fuente tiene un voltaje rms terminal de $V_{\text{rms}} = 60.0$ V y frecuencia angular variable ω. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia ω_0 del circuito? *b*) ¿Cuál es la corriente rms a través del circuito en la resonancia, $I_{\text{rms-0}}$? *c*) ¿Para cuáles dos valores de la frecuencia angular, ω_1 y ω_2, es la corriente rms la mitad del valor de resonancia? *d*) La cantidad $|\omega_1 - \omega_2|$ define la *anchura de resonancia*. Calcule $I_{\text{rms-0}}$ y la anchura de resonancia para $R = 300\ \Omega$, 30.0 Ω y 3.00 Ω. Describa cómo se comparan sus resultados con el análisis realizado en la sección 31.5.

31.65. Un inductor, un capacitor y un resistor están conectados en serie a una fuente de ca. Si se duplican la resistencia, la inductancia y la capacitancia, ¿en qué factor cambia cada una de las siguientes cantidades? Indique si aumentan o disminuyen: *a*) la frecuencia angular de resonancia; *b*) la reactancia inductiva; *c*) la reactancia capacitiva. *d*) ¿Se duplica la impedancia?

31.66. Un transformador consta de 275 devanados primarios y 834 devanados secundarios. Si la diferencia de potencial a través de la bobina primaria es de 25.0 V, *a*) ¿cuál es el voltaje a través de la bobina secundaria? Y *b*) ¿cuál es la resistencia de carga efectiva de la bobina secundaria si está conectada a través de un resistor de 125 Ω?

31.67. Se desea duplicar la frecuencia angular de resonancia de un circuito *R-L-C* en serie cambiando sólo los elementos *pertinentes* de circuito, todos en el mismo factor. *a*) ¿Cuáles deben cambiar? *b*) ¿En qué factor deben cambiarse?

31.68. Una resistencia R, una capacitancia C y una inductancia L están conectadas en serie a una fuente de voltaje de amplitud V y frecuencia angular variable ω. Si $\omega = \omega_0$, la frecuencia angular de resonancia, determine *a*) la corriente máxima en el resistor; *b*) el voltaje máximo a través del capacitor; *c*) el voltaje máximo a través del inductor; *d*) la energía máxima almacenada en el capacitor; *e*) la energía máxima almacenada en el inductor. Dé las respuestas en términos de R, C, L y V.

31.69. Repita el problema 31.68 para el caso en que $\omega = \omega_0/2$.

31.70. Repita el problema 31.68 para el caso en que $\omega = 2\omega_0$.

31.71. Cómo determinar una inductancia desconocida. Su jefe le da un inductor y le pide que mida su inductancia. Usted dispone de un resistor, un voltímetro de ca de alta impedancia, un capacitor y una fuente de ca. Explique cómo los usaría para determinar la inductancia y mencione cualquier otro elemento de equipo que necesite. Asegúrese de explicar con claridad el modo en que emplearía el equipo y qué es lo que necesita medir para determinar la inductancia desconocida.

31.72. Un circuito *L-R-C* en serie toma 220 W a partir de una línea de ca de 120 V (rms) y 50.0 Hz. El factor de potencia es 0.560, y el voltaje de fuente se adelanta a la corriente. *a*) ¿Cuál es la resistencia neta R del circuito? *b*) Encuentre la capacitancia del capacitor en serie que dará como resultado un factor de potencia de la unidad cuando se agregue al circuito original. *c*) ¿Qué potencia se tomará entonces a partir de la línea de suministro?

31.73. En un circuito *L-R-C* en serie, la corriente está dada por $i = I\cos\omega t$. Las amplitudes de voltaje para el resistor, el inductor y el capa-

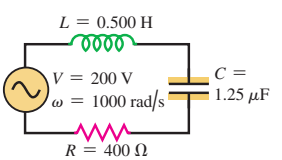
citor son V_R, V_L y V_C. *a*) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al resistor es $p_R = V_R I\cos^2\omega t = \frac{1}{2}V_R I(1 + \cos 2\omega t)$. ¿Qué alimentación de potencia media al resistor da esta expresión? *b*) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al inductor es $p_L = -V_L I\,\text{sen}\,\omega t\cos\omega t = -\frac{1}{2}V_L I\,\text{sen}\,2\omega t$. ¿Qué alimentación de potencia media al inductor da esta expresión? *c*) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al capacitor es $p_C = V_C I\text{sen}\omega t\cos\omega t = \frac{1}{2}V_C I\,\text{sen}\,2\omega t$. ¿Qué alimentación de potencia media al capacitor da esta expresión? *d*) En la sección 31.4 se demuestra que la potencia instantánea que entrega la fuente es $p = VI\cos\omega t\,(\cos\phi\cos\omega t - \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\omega t)$. Demuestre que $p_R + p_L + p_C$ es igual a p en cada instante del tiempo.

Problemas de desafío

31.74. *a*) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *resistor* de un circuito *L-R-C* en serie? *b*) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *inductor*? *c*) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *capacitor*? (Tal vez quiera consultar los resultados del problema 31.52.)

31.75. Números complejos en un circuito. El voltaje entre los extremos de un elemento de circuito de ca no necesariamente está en fase con la corriente que fluye entre los extremos de ese elemento de circuito. Por lo tanto, las amplitudes de voltaje a través de los elementos de un ramal de un circuito de ca no se suman algebraicamente. Un método de uso común para simplificar el análisis de un circuito de ca alimentado por una fuente sinusoidal es representar la impedancia Z como un número *complejo*. Se toma la resistencia R como la parte real de la impedancia, y la reactancia $X = X_L - X_C$ como la parte imaginaria. Así, en el caso de un ramal que contiene un resistor, un inductor y un capacitor en serie, la impedancia compleja es $Z_{cmp} = R + iX$, donde $i^2 = -1$. Si la amplitud de voltaje a través del ramal es V_{cmp}, definimos una amplitud de corriente *compleja* como $I_{cmp} = V_{cmp}/Z_{cmp}$. La amplitud de corriente *real* es el valor absoluto de la amplitud de corriente compleja, es decir, $I = (I^*_{cmp}\,I_{cmp})^{1/2}$. El ángulo de fase ϕ de la corriente con respecto al voltaje de fuente está dado por $\tan\phi = \text{Im}(I_{cmp})/\text{Re}(I_{cmp})$. Las amplitudes del voltaje, $V_{R\text{-cmp}}$, $V_{L\text{-cmp}}$ y $V_{C\text{-cmp}}$ entre los extremos de la resistencia, la inductancia y la capacitancia, respectivamente, se encuentran multiplicando I_{cmp} por R, iX_L o $-iX_C$, respectivamente. Empleando la representación compleja de las amplitudes de voltaje, el voltaje entre los extremos de un ramal es simplemente la suma algebraica de los voltajes a través de cada elemento del circuito; $V_{cmp} = V_{R\text{-cmp}} + V_{L\text{-cmp}} + V_{C\text{-cmp}}$. El valor real de cualquier amplitud de corriente o de voltaje es el valor absoluto de la cantidad compleja correspondiente. Considere el circuito *L-R-C* en serie que se ilustra en la figura 31.29, en la que se indican los valores de los elementos de circuito, la amplitud de voltaje de fuente y la frecuencia angular de fuente. Aplique las técnicas de diagramas de fasores presentadas en la sección 31.1 para despejar *a*) la amplitud de corriente y *b*) el ángulo de fase ϕ de la corriente con respecto al voltaje de fuente. (Advierta que este ángulo es el negativo del ángulo de fase definido en la figura 31.13.) A continuación analice el mismo circuito utilizando el enfoque de números complejos. *c*) Determine la impedancia compleja del circuito Z_{cmp}. Tome el valor absoluto para obtener Z, la impedancia real del circuito. *d*) Tome la amplitud de voltaje de la fuente, V_{cmp}, como la parte real, y determine la amplitud de corriente compleja I_{cmp}. Determine la amplitud de corriente real calculando el valor absoluto de I_{cmp}. *e*) Calcule el ángulo de fase de la corriente con respecto al voltaje de fuente con base en las partes real e imaginaria de I_{cmp}, según se explicó. *f*) Obtenga las representaciones complejas de los voltajes a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia. *g*) Sumando las respuestas del inciso *f*), compruebe que la suma de estos números complejos es real e igual a 200 V, el voltaje de la fuente.

Figura **31.29** Problema de desafío 31.75.



32 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Por qué en una onda luminosa están presentes campos eléctricos y magnéticos.
- Cómo se relaciona la rapidez de la luz con las constantes fundamentales de la electricidad y el magnetismo.
- Cómo describir la propagación de una onda electromagnética sinusoidal.
- Qué determina la cantidad de potencia transportada por una onda electromagnética.
- Cómo describir las ondas electromagnéticas estacionarias.

? Los objetos metálicos reflejan no sólo la luz visible, sino también las ondas de radio. ¿Qué característica de los metales los hace tan reflejantes?

¿Qué es la luz? Durante siglos, los seres humanos se han hecho esta pregunta; sin embargo, no hubo respuesta hasta que la electricidad y el magnetismo se unificaron en la disciplina del *electromagnetismo*, descrita por las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones muestran que un campo magnético variable en el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, y que un campo eléctrico que varía con el tiempo genera un campo magnético. Estos campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ se sostienen uno al otro y forman una *onda electromagnética* que se propaga a través del espacio. La luz visible emitida por el filamento incandescente de una bombilla eléctrica es un ejemplo de onda electromagnética; otras clases de ondas electromagnéticas son las producidas por fuentes tales como las estaciones de radio y televisión, los osciladores de microondas para hornos y radares, las máquinas de rayos x y los núcleos radiactivos.

En este capítulo usaremos las ecuaciones de Maxwell como base teórica para comprender las ondas electromagnéticas. Veremos que estas ondas transportan tanto energía como cantidad de movimiento. En las ondas electromagnéticas sinusoidales, los campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ son funciones sinusoidales del tiempo y la posición, con frecuencia y longitud de onda definidas. Los distintos tipos de ondas electromagnéticas —luz visible, ondas de radio, rayos x y otras— difieren sólo en su frecuencia y longitud de onda. Nuestro estudio de la óptica en capítulos posteriores se basará en parte en la naturaleza electromagnética de la luz.

A diferencia de las ondas en una cuerda o las del sonido en un fluido, las ondas electromagnéticas no requieren un medio material; la luz que se observa por la noche procedente de las estrellas ha viajado sin dificultad a través de decenas o cientos de años luz del espacio (casi) vacío. No obstante, las ondas electromagnéticas y las ondas mecánicas tienen mucho en común y se describen en un lenguaje muy similar. Antes de avanzar en este capítulo, es recomendable repasar las propiedades de las ondas mecánicas que se estudiaron en los capítulos 15 y 16.

32.1 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

En los últimos capítulos estudiamos distintos aspectos de los campos eléctricos y magnéticos. Aprendimos que cuando estos campos no varían con el tiempo —como en el caso del campo eléctrico producido por cargas en reposo o el campo magnético de una corriente estable—, podemos analizar los campos eléctricos y magnéticos de forma independiente, sin considerar las interacciones entre ellos. Pero cuando los campos varían con el tiempo, dejan de ser independientes. La ley de Faraday (véase la sección 29.2) plantea que un campo magnético variable en el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, como lo demuestran las fem inducidas en los inductores y transformadores. La ley de Ampère, incluyendo la corriente de desplazamiento descubierta por Maxwell (véase la sección 29.7), afirma que un campo eléctrico que cambia con el tiempo actúa como una fuente de campo magnético. Esta interacción mutua entre los dos campos se resume en las ecuaciones de Maxwell, presentadas en la sección 29.7.

Así, cuando un campo, *ya sea* eléctrico o magnético, cambia con el tiempo, induce un campo del otro tipo en las regiones adyacentes del espacio. Esto nos lleva (como a Maxwell) a considerar la posibilidad de la existencia de una perturbación electromagnética, consistente en campos eléctricos y magnéticos que se modifican con el tiempo, capaz de propagarse a través del espacio de una región a otra, aun cuando no exista materia en la región intermedia. Tal perturbación, en caso de existir, tendrá las propiedades de una *onda*, por lo que el término apropiado para nombrarla es **onda electromagnética**.

Tales ondas existen; las transmisiones de radio y televisión, la luz, los rayos x y muchas otras clases de radiación son ejemplos de ondas electromagnéticas. Nuestro objetivo en este capítulo es ver la forma en que los principios del electromagnetismo que hemos estudiado hasta este momento pueden explicar esas ondas y examinar sus propiedades.

Electricidad, magnetismo y luz

Como ocurre con frecuencia en el desarrollo de la ciencia, la comprensión teórica de las ondas electromagnéticas siguió un camino mucho más sinuoso que el que acabamos de describir. En los primeros días de la teoría electromagnética (a principios del siglo XIX), se utilizaban dos unidades distintas de carga eléctrica: una para los fenómenos electrostáticos y otra para los magnéticos que implicaban corrientes. En el sistema de unidades empleado en ese tiempo, estas dos unidades de carga tenían dimensiones físicas distintas. Su *razón* tenía unidades de velocidad, y las mediciones demostraron que la razón tenía un valor numérico que era exactamente igual a la rapidez de la luz, 3.00×10^8 m/s. En esa época, los físicos veían esto como una coincidencia extraordinaria y no tenían idea de cómo explicarla.

En su búsqueda por entender este resultado, Maxwell (figura 32.1) demostró en 1865 que una perturbación electromagnética debe propagarse en el espacio libre con una rapidez igual a la de la luz, por lo que era probable que la naturaleza de las ondas de luz fuera electromagnética. Al mismo tiempo descubrió que los principios básicos del electromagnetismo podían expresarse en términos de las cuatro ecuaciones que hoy conocemos como **ecuaciones de Maxwell** y que estudiamos en la sección 29.7. Estas cuatro ecuaciones son: 1) la ley de Gauss de los campos eléctricos; 2) la ley de Gauss de los campos magnéticos, que demuestra la inexistencia de monopolos magnéticos; 3) la ley de Ampère, que incluye la corriente de desplazamiento; y 4) la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss)} \tag{29.18}$$

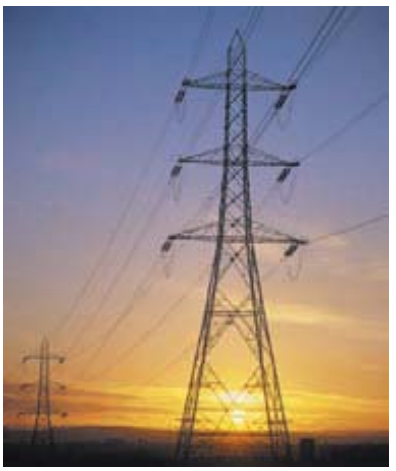
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(ley de Gauss del magnetismo)} \tag{29.19}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{enc}} \qquad \text{(ley de Ampère)} \tag{29.20}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(ley de Faraday)} \tag{29.21}$$

32.1 James Clerk Maxwell (1831-1879) fue la primera persona que comprendió verdaderamente la naturaleza fundamental de la luz. También hizo contribuciones importantes a la termodinámica, la óptica, la astronomía y la fotografía en color. Albert Einstein describió los logros de Maxwell como "los más profundos y fructíferos que la física ha experimentado desde la época de Newton".

32.2 a) Todo teléfono móvil, módem inalámbrico o aparato transmisor de radio emite señales en forma de ondas electromagnéticas causadas por cargas en aceleración. b) Las líneas de transmisión de energía eléctrica conducen una corriente alterna intensa, lo que significa que hay una cantidad sustancial de carga que acelera hacia delante y atrás y genera ondas electromagnéticas. Estas ondas son las que producen el zumbido en el radio del automóvil cuando conducimos cerca de las líneas de transmisión.



Estas ecuaciones se aplican a los campos eléctricos y magnéticos *en el vacío*. Si está presente un material, la permitividad ϵ_0 y la permeabilidad μ_0 del espacio libre se sustituyen por la permitividad ϵ y la permeabilidad μ del material. Si los valores de ϵ y μ son diferentes en puntos distintos en las regiones de integración, entonces ϵ y μ deben transferirse al lado izquierdo de las ecuaciones (29.18) y (29.20), respectivamente, y colocarse dentro de las integrales. El término ϵ en la ecuación (29.20) también tiene que incluirse en la integral cuyo resultado es $d\Phi_E/dt$.

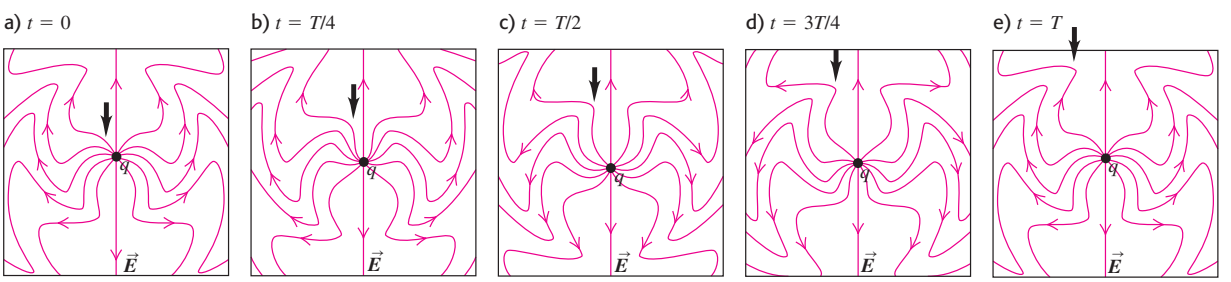
De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, una carga puntual en reposo produce un campo $\vec{E}$ estático pero no un campo $\vec{B}$; una carga puntual en movimiento con velocidad constante (véase la sección 28.1) produce los dos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell también se usan para demostrar que para que una carga puntual produzca ondas electromagnéticas, la carga debe *acelerar*. De hecho, un resultado general de las ecuaciones de Maxwell es que *toda* carga acelerada irradia energía electromagnética (figura 32.2).

Generación de la radiación electromagnética

Una manera de conseguir que una carga puntual emita ondas electromagnéticas es haciéndola oscilar en movimiento armónico simple, de manera que tenga una aceleración casi en todo instante (excepto cuando la carga pasa por la posición de equilibrio). La figura 32.3 muestra algunas líneas de campo eléctrico producidas por una carga puntual oscilante. Las líneas de campo *no* son objetos materiales; sin embargo, es útil pensar que se comportan como cuerdas que se extienden de la carga puntual al infinito. La oscilación de la carga hacia arriba y abajo hace que las ondas se propaguen hacia fuera de la carga a lo largo de estas "cuerdas". Observe que la carga no emite ondas en todas direcciones por igual; las ondas son más intensas a 90° con respecto al eje de movimiento de la carga, en tanto que *no* hay ondas a lo largo de este eje. Ésta es la conclusión a la que se llega con la analogía de la "cuerda". Además, hay una perturbación *magnética* que se extiende hacia fuera de la carga, lo que no se ilustra en la figura 32.3. Puesto que las perturbaciones eléctricas y magnéticas se dispersan o irradian desde la fuente, se utiliza de manera indistinta el nombre de **radiación electromagnética** o el de "ondas electromagnéticas".

El físico alemán Heinrich Hertz generó por primera vez ondas electromagnéticas con longitudes de onda macroscópicas en el laboratorio en 1887. Como fuente de ondas, Hertz utilizó cargas oscilantes en circuitos *L-C* de la clase que estudiamos en la sección 30.5 y detectó las ondas electromagnéticas resultantes mediante otros circuitos sintonizados a la misma frecuencia. Hertz también produjo *ondas electromagnéticas estacionarias* y midió la distancia entre nodos adyacentes (media longitud de onda) para determinar la longitud de onda. Una vez que determinó la frecuencia de resonancia de sus circuitos, encontró la rapidez de las ondas a partir de la relación entre su longitud de onda y su frecuencia, $v = \lambda f$, y estableció que era igual a la rapidez de la luz; esto comprobó directamente la predicción teórica de Maxwell. La unidad del SI para la frecuencia recibió su nombre en honor de Hertz: un hertz (1 Hz) es igual a un ciclo por segundo.

32.3 Líneas de campo eléctrico de una carga puntual que oscila con movimiento armónico simple, vistas en cinco instantes durante un periodo de oscilación T. La trayectoria de la carga está en el plano de los dibujos. En $t = 0$, la carga puntual se encuentra en su máximo desplazamiento ascendente. La flecha muestra cómo se propaga una "vuelta" de las líneas de $\vec{E}$ a medida que se propaga hacia fuera de la carga puntual. El campo magnético (no se ilustra) comprende círculos que se hallan en planos perpendiculares a las figuras y son concéntricos con respecto al eje de oscilación.



El valor moderno de la rapidez de la luz, que se denota con el símbolo c, es 299,792,458 m/s. (Recuerde que en la sección 1.3 vimos que este valor es la base de nuestra unidad estándar de longitud: un metro se define como la distancia que recorre la luz en 1/299,792,458 de segundo.) Para nuestros propósitos, el valor de 3.00×10^8 m/s tiene suficiente exactitud.

Al parecer, el posible uso de las ondas electromagnéticas para la comunicación a larga distancia no se le ocurrió a Hertz, y fue gracias a Marconi y a otros investigadores que la comunicación por radio se convirtió en una experiencia cotidiana en el hogar. En un *transmisor* de radio se hacen oscilar las cargas eléctricas a lo largo de la antena conductora, lo que produce perturbaciones oscilatorias de campo, como las que se ilustran en la figura 32.3. Como en la antena hay muchas cargas que oscilan juntas, las perturbaciones son mucho más intensas que las de una sola carga y se detectan a una distancia mucho mayor. En un *receptor* de radio la antena también es un conductor, los campos de la onda que emana desde un transmisor distante ejercen fuerzas sobre las cargas libres dentro de la antena receptora, lo que produce una corriente oscilante que es detectada y amplificada por los circuitos del receptor.

En lo que resta del capítulo nos ocuparemos de las ondas electromagnéticas en sí mismas, dejando a un lado el complejo problema de cómo se generan.

El espectro electromagnético

Las ondas electromagnéticas cubren un espectro extremadamente amplio de longitudes de onda y frecuencia. Este **espectro electromagnético** incluye las ondas de radio y televisión, la luz visible, la radiación infrarroja y ultravioleta, los rayos x y los rayos gamma. Se han detectado ondas electromagnéticas con frecuencias desde 1 hasta 10^{24} Hz; en la figura 32.4 se representa la parte más común del espectro, y se indican los intervalos de longitud de onda y frecuencia aproximados de sus diferentes segmentos. A pesar de las muchas diferencias en su uso y medios de producción, todas ellas son ondas electromagnéticas con la misma rapidez de propagación (en el vacío), $c = 299{,}792{,}458$ m/s. Las ondas electromagnéticas difieren en frecuencia f y longitud de onda λ, pero la relación $c = \lambda f$ en el vacío se cumple para cada una.

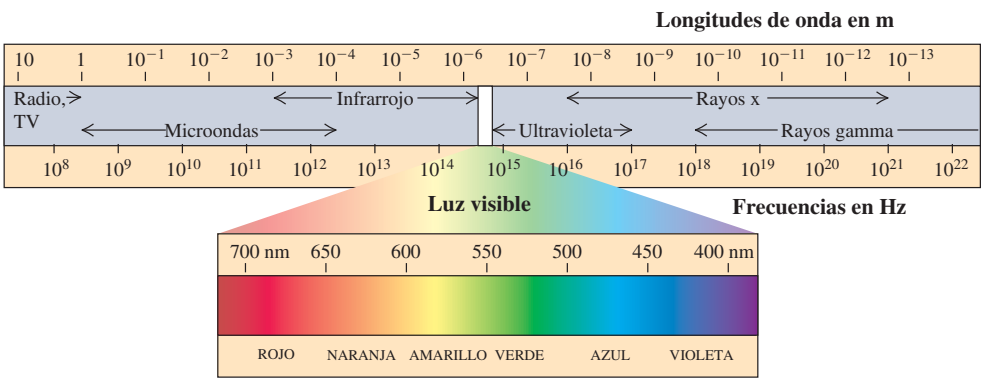
Nosotros sólo podemos detectar directamente una parte muy pequeña del espectro con nuestro sentido de la vista, y a ese intervalo lo denominamos **luz visible**. Su intervalo de longitud de onda va de 400 a 700 nm (400 a 700×10^{-9} m), con frecuencias correspondientes de 750 a 430 THz (7.5 a 4.3×10^{14} Hz) aproximadamente. Las distintas partes del espectro visible evocan en los humanos las sensaciones de los diferentes colores. En la tabla 32.1 se presentan las longitudes de onda de los colores en la parte visible del espectro.

Tabla 32.1 Longitudes de onda de la luz visible

400 a 440 nm	Violeta
440 a 480 nm	Azul
480 a 560 nm	Verde
560 a 590 nm	Amarillo
590 a 630 nm	Naranja
630 a 700 nm	Rojo

La luz blanca ordinaria incluye todas las longitudes de onda visibles. Sin embargo, con el uso de fuentes o filtros especiales es posible seleccionar una banda angosta de longitudes de onda dentro de un intervalo de unos cuantos nm. Esa luz es aproximadamente *monocromática* (de un solo color). La luz totalmente monocromática con

32.4 El espectro electromagnético. Las frecuencias y longitudes de onda que se encuentran en la naturaleza se extienden en un intervalo tan amplio que se tiene que usar una escala logarítmica para indicar todas las bandas importantes. Las fronteras entre las bandas son un tanto arbitrarias.



una sola longitud de onda es una idealización inalcanzable. Cuando usamos la expresión "luz monocromática con $\lambda = 550$ nm" en relación con un experimento de laboratorio, en realidad nos referimos a una banda pequeña de longitudes de onda *alrededor* de 550 nm. La luz *láser* está mucho más cerca de ser monocromática que cualquiera que se obtenga de otra manera.

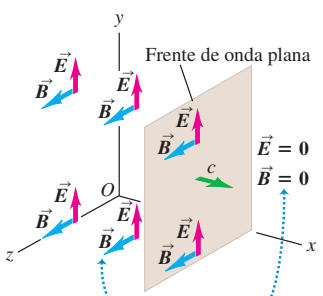
Las formas invisibles de la radiación electromagnética no son menos importantes que la luz visible. Por ejemplo, nuestro sistema de comunicaciones globales depende de las ondas de radio: la radio AM utiliza ondas con frecuencias de 5.4×10^5 Hz a 1.6×10^6 Hz, mientras que las emisiones de radio en FM tienen lugar en las frecuencias de 8.8×10^7 Hz a 1.08×10^8 Hz. (Las emisoras de televisión usan frecuencias que incluyen la banda de FM.) Las microondas también se utilizan para la comunicación (por ejemplo, en los teléfonos celulares y las redes inalámbricas) y en los radares meteorológicos (con frecuencias cercanas a 3×10^9 Hz). Muchas cámaras tienen un dispositivo que emite un haz de radiación infrarroja; al analizar las propiedades de la radiación infrarroja reflejada por el sujeto, la cámara determina a qué distancia se encuentra éste y se enfoca de manera automática. La radiación ultravioleta tiene longitudes de onda más cortas que la luz visible; como veremos en el capítulo 36, esta propiedad le permite enfocarse dentro de haces muy estrechos para aplicaciones de alta precisión, como la cirugía ocular LASIK. Los rayos x son capaces de pasar a través del tejido muscular, lo que los hace invaluables en la odontología y la medicina. La radiación electromagnética con la longitud de onda más corta, los rayos gamma, es producida en la naturaleza por los materiales radiactivos (véase el capítulo 43). Los rayos gamma, que tienen una gran cantidad de energía, se utilizan en medicina para destruir células cancerosas.

Evalúe su comprensión de la sección 32.1 *a*) ¿Es posible tener una onda puramente eléctrica que se propague a través del espacio vacío, es decir, una onda constituida por un campo eléctrico pero no por un campo magnético? *b*) ¿Y una onda puramente magnética, con campo magnético pero sin un campo eléctrico?

32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

Estamos listos para formular las ideas básicas de las ondas electromagnéticas y su relación con los principios del electromagnetismo. Nuestro procedimiento consistirá en postular una configuración simple de campo eléctrico que tenga un comportamiento ondulatorio. Supondremos un campo eléctrico $\vec{E}$ que tenga sólo una componente y, y un campo magnético $\vec{B}$ sólo con una componente z, y supondremos que ambos campos se mueven juntos en la dirección $+x$ con una rapidez c que al principio es desconocida. (Conforme avancemos quedará claro por qué elegimos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ fueran perpendiculares a la dirección de propagación y entre sí.) Después evaluaremos si estos campos son físicamente posibles indagando si son congruentes con las ecuaciones de Maxwell, en particular con las leyes de Ampère y Faraday. Veremos que la respuesta es *sí*, siempre y cuando c tenga un valor particular. También veremos que la *ecuación de onda*, que encontramos durante nuestro estudio de las ondas mecánicas en el capítulo 15, se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell.

32.5 Frente de una onda electromagnética. El plano que representa el frente de onda se mueve hacia la derecha (en la dirección positiva del eje x) con rapidez c.



Los campos eléctrico y magnético son uniformes detrás del frente de onda que avanza, y cero por delante de éste.

Una onda electromagnética plana simple

Si tomamos como base un sistema de coordenadas xyz (figura 32.5), suponemos que todo el espacio está dividido en dos regiones por un plano perpendicular al eje x (y paralelo al plano yz). En cada punto a la izquierda de este plano hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ en la dirección $+y$ y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección $+z$, como se ilustra. Además, supongamos que el plano limítrofe, al que llamaremos *frente de onda*, se desplaza hacia la derecha en la dirección $+x$ con rapidez constante c, un valor que por el momento dejaremos indeterminado. Así, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ viajan a la derecha hacia regiones hasta ahora libres de campo con rapidez definida. En resumen, la situación describe una onda electromagnética rudimentaria. Una onda como ésta, en la que en cualquier instante los campos son uniformes en toda la extensión de

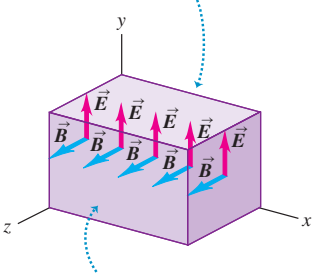
cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación, se llama **onda plana**. En el caso que se ilustra en la figura 32.5, los campos son igual a cero para los planos que están a la derecha del frente de onda y tienen los mismos valores en todos los planos ubicados a la izquierda del frente de onda; más adelante estudiaremos ondas planas más complejas.

No nos ocuparemos del problema de *generar* efectivamente una configuración de campo de este tipo; sólo preguntaremos si es congruente con las leyes del electromagnetismo, es decir, con las ecuaciones de Maxwell. Consideraremos sucesivamente cada una de estas ecuaciones.

En primer lugar, verifiquemos si nuestra onda satisface la primera y segunda ecuaciones de Maxwell, es decir, las leyes de Gauss de los campos eléctrico y magnético. Para ello, tomaremos como nuestra superficie gaussiana una caja rectangular con lados paralelos a los planos coordenados *xy*, *xz* y *yz* (figura 32.6). La caja no encierra cargas eléctricas. Se puede demostrar que los flujos eléctrico y magnético totales a través de la caja son iguales a cero, aun si parte de la caja está en la región en la que $E = B = 0$. Esto *no* sería el caso si $\vec{E}$ o $\vec{B}$ tuvieran una componente *x*, paralela a la dirección de propagación. La prueba se deja como ejercicio para el lector (véase el problema 32.42). Así, para satisfacer las ecuaciones primera y segunda de Maxwell, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares a la dirección de propagación; es decir, la onda debe ser **transversal**.

32.6 Superficie gaussiana para una onda electromagnética plana.

El campo eléctrico es el mismo en las caras superior e inferior de la superficie gaussiana, por lo que el flujo eléctrico total a través de la superficie es igual a cero.



El campo magnético es el mismo en las caras izquierda y derecha de la superficie gaussiana, por lo que el flujo magnético total a través de la superficie es igual a cero.

La siguiente ecuación de Maxwell por considerar es la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{32.1}$$

Para probar si nuestra onda satisface la ley de Faraday, aplicamos esta ley a un rectángulo *efgh* paralelo al plano *xy* (figura 32.7a). Como se observa en la figura 32.7b, la cual representa un corte transversal en el plano *xy*, este rectángulo tiene altura *a* y anchura Δx. En el instante que se ilustra, el frente de onda ha avanzado parcialmente a través del rectángulo, y $\vec{E}$ es igual a cero a lo largo del lado *ef*. Al aplicar la ley de Faraday suponemos que el área vectorial $d\vec{A}$ del rectángulo *efgh* está en la dirección $+z$. Con esta elección, la regla de la mano derecha indica que se requiere integrar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ *en sentido antihorario* alrededor del rectángulo. $\vec{E}$ es igual a cero en todos los puntos del lado *ef*. En cada punto de los lados *fg* y *he*, $\vec{E}$ es igual a cero o perpendicular a $d\vec{l}$. Sólo el lado *gh* contribuye a la integral, y sobre él $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ son opuestos, por lo que se obtiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea \tag{32.2}$$

Por consiguiente, el lado izquierdo de la ecuación (32.1) es diferente de cero.

Para satisfacer la ley de Faraday, ecuación (32.1), debe haber una componente de $\vec{B}$ en la dirección *z* (perpendicular a $\vec{E}$) de manera que pueda haber un flujo magnético Φ_B distinto de cero a través del rectángulo *efgh* y una derivada $d\Phi_B/dt$ diferente de cero. En realidad, nuestra onda $\vec{B}$ tiene *sólo* la componente *z*. Hemos supuesto que esta componente tiene la dirección *z positiva*; veamos si esta suposición es congruente con la ley de Faraday. Durante un intervalo de tiempo *dt*, el frente de onda se desplaza una distancia *c dt* hacia la derecha en la figura 32.7b, y recorre un área *ac dt* del rectángulo *efgh*. Durante este intervalo, el flujo magnético Φ_B a través del rectángulo *efgh* se incrementa en $d\Phi_B = B(ac\,dt)$, por lo que la tasa de cambio del flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bac \tag{32.3}$$

Ahora, sustituimos las ecuaciones (32.2) y (32.3) en la ley de Faraday, ecuación (32.1), y obtenemos

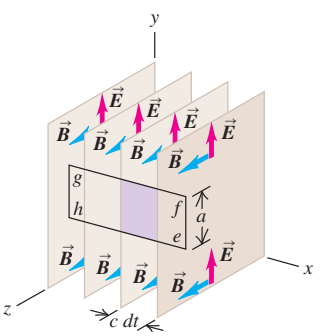
$$-Ea = -Bac$$

$$E = cB \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \tag{32.4}$$

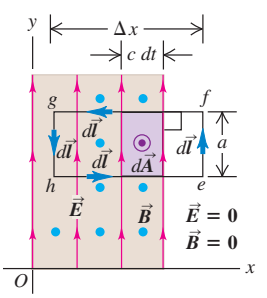
Así, hemos demostrado que nuestra onda es congruente con la ley de Faraday sólo si su rapidez *c* y las magnitudes de los vectores perpendiculares $\vec{E}$ y $\vec{B}$ guardan la

32.7 a) Aplicación de la ley de Faraday a una onda plana. b) En el momento *dt*, el flujo magnético a través del rectángulo en el plano *xy* se incrementa en una cantidad $d\Phi_B$. Este incremento es igual al flujo a través del rectángulo sombreado, con área *ac dt*; es decir, $d\Phi_B = Bac\,dt$. Por lo tanto, $d\Phi_B/dt = Bac$.

a) En el momento *dt*, el frente de onda se desplaza una distancia *c dt* en la dirección $+x$.



b) Vista lateral de la situación en a)



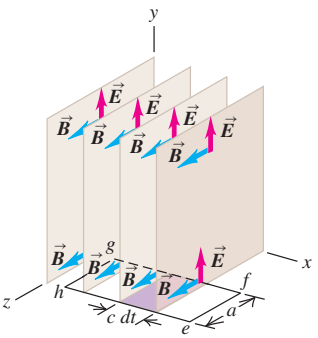
relación que describe la ecuación (32.4). Observe que si supusiéramos que $\vec{B}$ estaba en la dirección z *negativa*, habría un signo menos adicional en la ecuación (32.4); como E, c y B son todas magnitudes positivas no habría sido posible ninguna solución. Además, ninguna componente de $\vec{B}$ en la dirección y (paralela a $\vec{E}$) habría contribuido al flujo magnético cambiante Φ_B a través del rectángulo *efgh* (que es paralelo al plano xy), por lo que no sería parte de la onda.

Por último, se hace un cálculo similar empleando la ley de Ampère, el miembro restante de las ecuaciones de Maxwell. No hay corriente de conducción ($i_C = 0$), por lo que la ley de Ampère es

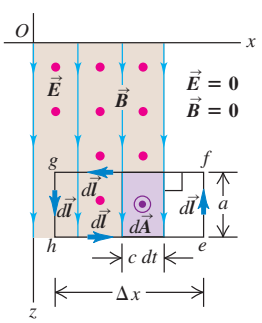
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{32.5}$$

32.8 a) Aplicación de la ley de Ampère a una onda plana. (Compare con la figura 32.7a). b) En un tiempo dt, el flujo eléctrico a través del rectángulo en el plano xz se incrementa en una cantidad $d\Phi_E$. Este incremento es igual al flujo a través del rectángulo sombreado con área $ac\,dt$; es decir, $d\Phi_E = Eac\,dt$. Por lo tanto, $d\Phi_E/dt = Eac$.

a) En un tiempo dt, el frente de onda se desplaza una distancia $c\,dt$ en la dirección $+x$.



b) Vista superior de la situación en a)



Para comprobar si nuestra onda es congruente con la ley de Ampère movemos nuestro rectángulo de manera que esté sobre el plano xz, como se ilustra en la figura 32.8, y de nuevo observamos la situación en un momento en que el frente de onda haya viajado parcialmente a través del rectángulo. Tomamos el área vectorial $d\vec{A}$ en la dirección $+y$, y así, la regla de la mano derecha demanda que integremos $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ en sentido antihorario alrededor del rectángulo. El campo $\vec{B}$ es igual a cero en todos los puntos a lo largo del lado *ef*, y en todos los puntos sobre los lados *fg* y *he* es cero o perpendicular a $d\vec{l}$. Sólo el lado *gh*, donde $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, contribuye a la integral, por lo que se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Ba \tag{32.6}$$

Por consiguiente, el lado izquierdo de la ley de Ampère, ecuación (32.5), es diferente de cero; el lado derecho también debe ser diferente de cero. Así, $\vec{E}$ debe tener una componente y (perpendicular a $\vec{B}$) para que el flujo eléctrico Φ_E a través del rectángulo y la derivada con respecto al tiempo $d\Phi_E/dt$ puedan ser diferentes de cero. Llegamos a la misma conclusión que inferimos a partir de la ley de Faraday: en una onda electromagnética, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deben ser perpendiculares entre sí.

En un intervalo de tiempo dt, el flujo eléctrico Φ_E a través del rectángulo se incrementa en $d\Phi_E = E(ac\,dt)$. Como elegimos que $d\vec{A}$ estuviera en la dirección $+y$, este cambio de flujo es positivo; la tasa de cambio del campo eléctrico es

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = Eac \tag{32.7}$$

Al sustituir las ecuaciones (32.6) y (32.7) en la ley de Ampère [ecuación (32.5)], se encuentra

$$Ba = \epsilon_0 \mu_0 Eac$$

$$B = \epsilon_0 \mu_0 cE \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \tag{32.8}$$

De esta forma, la onda que hemos supuesto obedece la ley de Ampère sólo si la relación entre B, c y E es la que describe la ecuación (32.8).

Nuestra onda electromagnética debe obedecer *tanto* la ley de Ampère *como* la de Faraday, de manera que las ecuaciones (32.4) y (32.8) deben satisfacerse. Esto sólo ocurre si $\epsilon_0 \mu_0 c = 1/c$, o:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \qquad \text{(rapidez de las ondas electromagnéticas en el vacío)} \tag{32.9}$$

Al sustituir los valores numéricos de estas cantidades, encontramos que

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2})}}$$
$$= 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

La onda que supusimos es congruente con todas las ecuaciones de Maxwell, siempre y cuando su frente de onda se desplace con la rapidez indicada, la cual reconocemos de inmediato como ¡la rapidez de la luz! Observe que el valor *exacto* de c está definido como 299,792,458 m/s; el valor moderno de ϵ_0 se define de manera que concuerde con esto cuando se utiliza en la ecuación (32.9) (véase la sección 21.3).

Propiedades clave de las ondas electromagnéticas

Para nuestro estudio elegimos una onda simple con la finalidad de evitar complicaciones matemáticas, pero este caso especial ilustra varias características importantes de *todas* las ondas electromagnéticas:

1. La onda es *transversal*; tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Los campos eléctrico y magnético también son perpendiculares entre sí. La dirección de propagación es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ (figura 32.9).
2. Hay una razón definida entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$: $E = cB$.
3. La onda viaja en el vacío con rapidez definida e invariable.
4. A diferencia de las ondas mecánicas, que necesitan de partículas oscilantes de un medio —como el agua o aire— para transmitirse, las ondas electromagnéticas no requieren un medio. Lo que "ondula" en una onda electromagnética son los campos eléctricos y magnéticos.

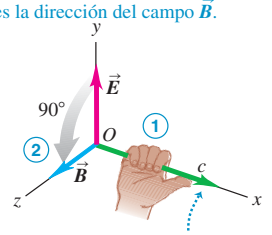
32.9 La regla de la mano derecha para las ondas electromagnéticas relaciona las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con la dirección de propagación.

Regla de la mano derecha para una onda electromagnética

(1) Apunte el pulgar de su mano derecha en la dirección de propagación de la onda.

(2) Imagine que hace girar 90° el campo vectorial $\vec{E}$ en el sentido en que se doblan sus dedos.

Ésa es la dirección del campo $\vec{B}$.



Dirección de propagación = dirección de $\vec{E} \times \vec{B}$.

Podemos generalizar este análisis a una situación más realista. Suponga que tenemos varios frentes de onda en forma de planos paralelos perpendiculares al eje x, todos los cuales se desplazan hacia la derecha con rapidez c. Imagine que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales en todos los puntos dentro de una sola región comprendida entre dos planos, pero que los campos difieren de una región a otra. La onda en su conjunto es plana, pero en ella los campos varían por etapas a lo largo del eje x. Se podría construir una onda de este tipo sobreponiendo varias de las ondas de etapa sencilla que acabamos de estudiar (ilustradas en la figura 32.5). Esto es posible porque los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ obedecen el principio de superposición en las ondas de la misma forma que en las situaciones estáticas: cuando dos ondas se superponen, el campo total $\vec{E}$ en cada punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las ondas individuales, y de manera similar para el campo $\vec{B}$ total.

Podemos ampliar lo anterior para demostrar que una onda con campos que varían por etapas también es congruente con las leyes de Ampere y Faraday, siempre y cuando todos los frentes de onda se desplacen con la rapidez c dada por la ecuación (32.9). En el límite en que las etapas individuales se hacen infinitesimalmente pequeñas, se tiene una onda en la que, en cualquier instante, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ varían *continuamente* a lo largo del eje x. Todo el patrón del campo se traslada hacia la derecha con rapidez c. En la sección 32.3 se considerarán ondas en las que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones *sinusoidales* de x y t. Como en cada punto las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están relacionadas de acuerdo con $E = cB$, las variaciones periódicas de los dos campos en cualquier onda periódica viajera deben estar *en fase*.

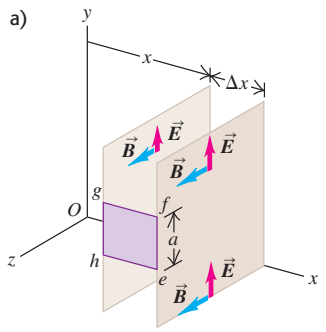
Las ondas electromagnéticas tienen la propiedad de **polarización**. En el análisis anterior, la asignación de la dirección y para $\vec{E}$ fue arbitraria. De igual manera podríamos haber especificado el eje z para $\vec{E}$; en tal caso, $\vec{B}$ habría estado en la dirección $-y$. Se dice que una onda en la que $\vec{E}$ siempre es paralelo a cierto eje está **polarizada linealmente** a lo largo de ese eje. Más en general, *cualquier* onda que viaje en la dirección x se puede representar como una superposición de ondas polarizadas linealmente en las direcciones y y z. En el capítulo 33 estudiaremos la polarización con más detalle, con especial atención a la polarización de la luz.

*Deducción de la ecuación de onda electromagnética

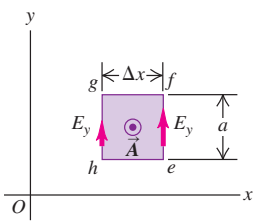
A continuación se presenta otra deducción de la ecuación (32.9) que describe la rapidez de las ondas electromagnéticas. Tiene más profundidad matemática que el tratamiento anterior, pero incluye una deducción de la ecuación de onda para las ondas electromagnéticas. Esta parte de la sección puede omitirse sin perder continuidad en el estudio del capítulo.

32.10 Ley de Faraday aplicada a un rectángulo con altura a y anchura Δx paralelo al plano xy.

a)

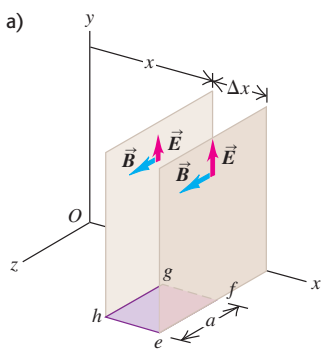


b) Vista lateral de la situación en a)

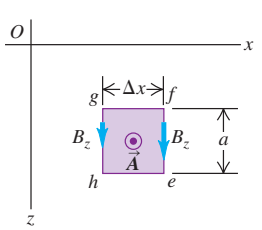


32.11 Ley de Ampère aplicada a un rectángulo con altura a y anchura Δx paralelo al plano xz.

a)



b) Vista superior de la situación en a)



En nuestro análisis de las ondas mecánicas en la sección 15.3, demostramos que una función $y(x, t)$, la cual representa el desplazamiento de cualquier punto en una onda mecánica que viaja a lo largo del eje x, debe satisfacer la ecuación diferencial (15.12):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{32.10}$$

Esta ecuación se llama **ecuación de onda**, y v es la rapidez de propagación de la onda.

Para deducir la ecuación correspondiente para una onda electromagnética, consideramos una vez más una onda plana. Es decir, suponemos que en cada instante, E_y y B_z son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular al eje x, la dirección de propagación. Pero ahora dejamos que E_y y B_z varíen continuamente a medida que se avanza sobre el eje x; en esas condiciones, ambas son funciones de x y t. Consideremos los valores de E_y y B_z en dos planos perpendiculares al eje x, uno en x y otro en $x + \Delta x$.

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, aplicamos la ley de Faraday a un rectángulo que yace paralelo al plano xy, como se ilustra en la figura 32.10. Esta figura es similar a la 32.7. El extremo izquierdo gh del rectángulo está en la posición x, y el extremo derecho ef se localiza en la posición $(x + \Delta x)$. En el instante t, los valores de E_y en estos dos lados son $E_y(x, t)$ y $E_y(x + \Delta x, t)$, respectivamente. Cuando aplicamos la ley de Faraday a este rectángulo, encontramos que en vez de $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea$ como antes, tenemos

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -E_y(x,t)a + E_y(x+\Delta x,t)a \\ &= a[E_y(x+\Delta x,t) - E_y(x,t)]\end{aligned} \tag{32.11}$$

Para determinar el flujo magnético Φ_B a través de este rectángulo, se supone que Δx es suficientemente pequeño como para que B_z sea casi uniforme en todo el rectángulo. En ese caso, $\Phi_B = B_z(x, t)A = B_z(x, t)a\,\Delta x$, y

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Se utiliza notación de derivadas parciales porque B_z es función tanto de x como de t. Al sustituir esta expresión y la ecuación (32.11) en la ley de Faraday, ecuación (32.1), se obtiene

$$a[E_y(x+\Delta x,t) - E_y(x,t)] = -\frac{\partial B_z}{\partial t} a\,\Delta x$$

$$\frac{E_y(x+\Delta x,t) - E_y(x,t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Por último, imaginemos que el rectángulo se encoge hasta quedar como una astilla, de manera que Δx tiende a cero. Cuando se toma el límite de esta ecuación como $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} \tag{32.12}$$

Esta ecuación demuestra que si hay una componente B_z del campo magnético que varía con el tiempo, también debe haber una componente E_y del campo eléctrico que se modifica con x, y a la inversa. Por el momento dejaremos a un lado esta ecuación, pero volveremos a ella dentro de poco.

A continuación se aplica la ley de Ampère al rectángulo que se ilustra en la figura 32.11. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ se convierte en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_z(x+\Delta x,t)a + B_z(x,t)a \tag{32.13}$$

Suponiendo una vez más que el rectángulo es angosto, tomamos como aproximación del flujo eléctrico Φ_E a través de él la expresión $\Phi_E = E_y(x, t)A = E_y(x, t)a\,\Delta x$. Por lo tanto, la tasa de cambio de Φ_E, que necesitamos para la ley de Ampère, es

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Ahora sustituimos esta expresión y la ecuación (32.13) en la ley de Ampère, ecuación (32.5):

$$-B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}a\,\Delta x$$

De nuevo, dividimos ambos lados entre $a\,\Delta x$ y tomamos el límite como $\Delta x \to 0$. Así, se encuentra que

$$-\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} \tag{32.14}$$

Ahora viene el paso final. Tomamos las derivadas parciales con respecto a x en ambos lados de la ecuación (32.12) y las derivadas parciales con respecto a t en ambos lados de la ecuación (32.14). Los resultados son

$$-\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x \partial t}$$
$$-\frac{\partial^2 B_z(x, t)}{\partial x \partial t} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2}$$

Se combinan estas dos ecuaciones para eliminar B_z y finalmente encontramos

$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{(ecuación de onda electromagnética en el vacío)} \tag{32.15}$$

Esta expresión tiene la misma forma que la ecuación general de onda [ecuación (32.10)]. Como el campo eléctrico E_y debe satisfacer esta ecuación, se comporta como una onda con una configuración que viaja por el espacio con rapidez definida. Además, la comparación de las ecuaciones (32.15) y (32.10) demuestra que la rapidez de la onda v está dada por

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon_0\mu_0 \qquad \text{o} \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Esto concuerda con la ecuación (32.9) de la rapidez c de las ondas electromagnéticas.

Se puede demostrar que B_z también debe satisfacer la misma ecuación de onda que E_y, ecuación (32.15). Para ello, se toma la derivada parcial de la ecuación (32.12) con respecto a t y la derivada parcial de la ecuación (32.14) con respecto a x y se combinan los resultados. Esto se deja como ejercicio para el lector (véase el problema 32.37).

Evalúe su comprensión de la sección 32.2 Para cada una de las siguientes ondas electromagnéticas, indique la dirección del campo magnético. *a*) La onda se propaga en la dirección z positiva, y $\vec{\boldsymbol{E}}$ está en la dirección x positiva; *b*) la onda se propaga en la dirección y positiva, y $\vec{\boldsymbol{E}}$ está en la dirección z negativa; *c*) la onda se propaga en la dirección x negativa, y $\vec{\boldsymbol{E}}$ está en la dirección z positiva.

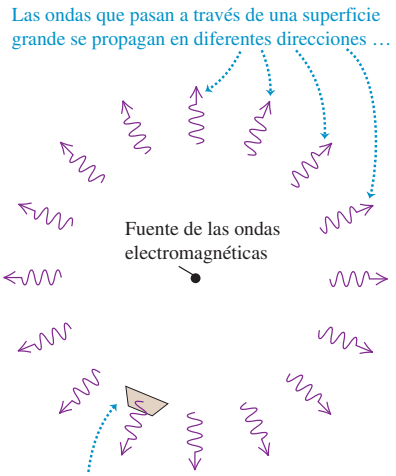
32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales

Las ondas electromagnéticas sinusoidales son directamente análogas a las ondas mecánicas transversales sinusoidales que se forman en una cuerda estirada, las cuales estudiamos en la sección 15.3. En una onda electromagnética sinusoidal, $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en cualquier punto del espacio son funciones sinusoidales del tiempo, y en cualquier instante la variación *espacial* de los campos también es sinusoidal.

Activ Online Physics
10.1 Propiedades de las ondas mecánicas

Algunas ondas electromagnéticas sinusoidales son *ondas planas*; comparten con las ondas descritas en la sección 32.2 la propiedad de que en cualquier instante los campos son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. La distribución en conjunto viaja en la dirección de propagación con rapidez c. Las direcciones de $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ son perpendiculares a la dirección de propagación (y entre sí), por lo que la onda es *transversal*. Las ondas electromagnéticas producidas por una carga puntual oscilante, mostrada en la figura 32.3, son un ejemplo de ondas sinusoidales que *no* son ondas planas. Pero si restringimos nuestras observaciones a

32.12 Las ondas que pasan a través de una pequeña área a una distancia suficientemente grande de la fuente pueden considerarse como ondas planas.



una región relativamente pequeña del espacio a una distancia suficientemente grande de la fuente, las ondas planas son una buena aproximación de estas ondas (figura 32.12). Del mismo modo, la superficie curva de la Tierra (casi) esférica nos parece plana en virtud de nuestro pequeño tamaño en relación con el radio terrestre. En esta sección restringiremos nuestro análisis a las ondas planas.

La frecuencia f, la longitud de onda λ y la rapidez de propagación c de cualquier onda periódica guardan entre sí la conocida relación entre longitud de onda y frecuencia, $c = \lambda f$. Si la frecuencia f es la frecuencia de la línea de energía eléctrica de 60 Hz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{60 \text{ Hz}} = 5 \times 10^6 \text{ m} = 5000 \text{ km}$$

¡que es del orden del radio de la Tierra! Para una onda con esta frecuencia, incluso una distancia de muchos kilómetros incluye sólo una pequeña fracción de la longitud de onda. Pero si la frecuencia es 10^8 Hz (100 MHz), común para las emisiones de radio de FM, la longitud de onda es

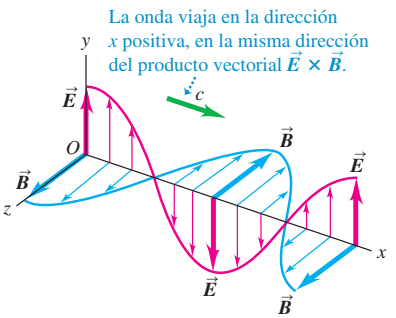
$$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^8 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

y una distancia moderada incluye muchas ondas completas.

Campos de una onda sinusoidal

La figura 32.13 muestra una onda electromagnética polarizada sinusoidal que viaja en la dirección $+x$. Se muestran los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ correspondientes a unos cuantos puntos sobre el eje x positivo. Observe que los campos eléctrico y magnético oscilan en fase: $\vec{E}$ es máximo donde $\vec{B}$ también lo es, y $\vec{E}$ es igual a cero donde $\vec{B}$ también vale cero. Advierta también que donde $\vec{E}$ está en la dirección $+y$, $\vec{B}$ tiene la dirección $+z$; y donde $\vec{E}$ está en la dirección $-y$, $\vec{B}$ está en la dirección $-z$. En todos los puntos, el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ está en la dirección en que se propaga la onda (la dirección $+x$). Esto se mencionó en la sección 32.2 como una de las características de las ondas electromagnéticas.

32.13 Representación de los campos eléctricos y magnéticos como funciones de x correspondientes a una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada. Se ilustra una longitud de onda de la onda en el tiempo $t = 0$. Los campos se indican sólo para puntos a lo largo del eje x.



CUIDADO **En una onda plana, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están en todas partes** La figura 32.13 podría dar la impresión errónea de que los campos eléctricos y magnéticos existen únicamente a lo largo del eje x. En realidad, en una onda plana sinusoidal hay campos eléctricos y magnéticos en *todos* los puntos del espacio. Imagine un plano perpendicular al eje x (es decir, paralelo al plano yz) en un punto particular, en un momento dado; los campos tienen los mismos valores en todos los puntos del plano. Los valores son diferentes para distintos planos.

Podemos describir las ondas electromagnéticas por medio de *funciones de onda*, como se hizo en la sección 15.3 para el caso de las ondas en una cuerda. La ecuación (15.7) es una forma de la función de onda para una onda transversal que viaja en la dirección $+x$ a lo largo de una cuerda estirada:

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

donde $y(x, t)$ es el desplazamiento transversal de su posición de equilibrio en el tiempo t de un punto con coordenada x sobre la cuerda. La cantidad A es el desplazamiento máximo, o *amplitud*, de la onda; ω es su *frecuencia angular*, igual al producto de 2π por la frecuencia f; y k es el *número de onda*, igual a $2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda.

Dejemos que $E_y(x, t)$ y $B_z(x, t)$ representen los valores instantáneos de la componente y de $\vec{E}$ y la componente z de $\vec{B}$, respectivamente, en la figura 32.13, y sea que $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ representen los valores máximos, o *amplitudes*, de estos campos. De esta forma, las funciones de onda para la onda son

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t) \qquad B_z(x, t) = B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t) \qquad (32.16)$$

(onda electromagnética sinusoidal plana que se propaga en la dirección $+x$)

También es posible escribir las funciones de onda en forma vectorial:

$$\vec{E}(x,t) = \hat{j}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t) \qquad (32.17)$$

CUIDADO **El símbolo *k* tiene dos significados** Advierta que existen dos k diferentes: el vector unitario $\hat{k}$ en la dirección z, y el número de onda k. ¡No los confunda!

Las curvas sinusoidales de la figura 32.13 representan valores instantáneos de los campos eléctricos y magnéticos como funciones de x en el tiempo $t = 0$, es decir, $\vec{E}(x, t = 0)$ y $\vec{B}(x, t = 0)$. Conforme transcurre el tiempo, la onda viaja hacia la derecha con rapidez c. Las ecuaciones (32.16) y (32.17) indican que en cualquier punto las oscilaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se encuentran *en fase*. De la ecuación (32.4) se desprende que las amplitudes deben estar relacionadas mediante la expresión

$$E_{\text{máx}} = cB_{\text{máx}} \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \qquad (32.18)$$

Estas relaciones de amplitud y fase también son requisitos para que $E(x, t)$ y $B(x, t)$ satisfagan las ecuaciones (32.12) y (32.14), que provienen de la ley de Faraday y la ley de Ampère, respectivamente. ¿Puede usted comprobar esto? (Véase el problema 32.36.)

La figura 32.14 muestra los campos eléctrico y magnético de una onda que viaja en la dirección x *negativa*. En los puntos donde $\vec{E}$ está en la dirección y positiva, $\vec{B}$ se encuentra en la dirección z *negativa*; y donde $\vec{E}$ está en la dirección y negativa, $\vec{B}$ está en la dirección z *positiva*. Las funciones de onda correspondientes a esta onda son

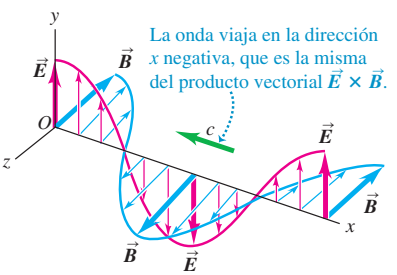
$$E_y(x,t) = E_{\text{máx}}\cos(kx + \omega t) \quad B_z(x,t) = -B_{\text{máx}}\cos(kx + \omega t) \qquad (32.19)$$

(onda electromagnética sinusoidal plana, que se propaga en la dirección $-x$)

Al igual que ocurre con la onda que viaja en la dirección $+x$, las oscilaciones sinusoidales de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en cualquier punto se encuentran *en fase*, y el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en la dirección de propagación.

Las ondas sinusoidales que se ilustran en las figuras 32.13 y 32.14 están linealmente polarizadas en la dirección y; el campo $\vec{E}$ siempre es paralelo al eje y. El ejemplo 32.1 se refiere a una onda linealmente polarizada en la dirección z.

32.14 Representación de una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada, que viaja en la dirección x negativa en el instante $t = 0$. Sólo se ilustran los campos correspondientes a puntos a lo largo del eje x. (Compare con la figura 32.13.)



$\vec{E}$: sólo componente y
$\vec{B}$: sólo componente z

Estrategia para resolver problemas 32.1 Ondas electromagnéticas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Muchas de las mismas ideas que se aplican a las ondas mecánicas (que estudiamos en los capítulos 15 y 16) también se aplican a las ondas electromagnéticas. La característica novedosa es que la onda queda descrita por dos cantidades, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$, en vez de una sola cantidad, como el desplazamiento de una cuerda.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Dibuje un diagrama que señale la dirección de propagación de la onda y las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.
2. Determine las variables buscadas.

EJECUTAR *la solución*, como sigue:

1. Para problemas que impliquen ondas electromagnéticas, el mejor enfoque es concentrarse en las relaciones básicas, como la relación entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (tanto de magnitud como de dirección), el modo en que se determina la rapidez de la onda, la naturaleza transversal de las ondas, etcétera. Hay que recordar estas relaciones mientras se trabaja con los detalles matemáticos.
2. Para ondas electromagnéticas sinusoidales, es necesario utilizar el lenguaje desarrollado en los capítulos 15 y 16 para ondas mecánicas sinusoidales. No dude en regresar para repasar el material expuesto en ellos, incluyendo las estrategias sugeridas para resolver problemas.
3. Recuerde las relaciones básicas para las ondas periódicas: $v = \lambda f$ y $\omega = vk$. Para las ondas electromagnéticas en el vacío, $v = c$. Tenga cuidado en diferenciar entre la frecuencia ordinaria f, que por lo general se expresa en hertz, y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, que se expresa en rad/s. También recuerde que el número de onda es $k = 2\pi/\lambda$.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que el resultado sea razonable. En el caso de las ondas electromagnéticas en el vacío, la magnitud del campo magnético expresada en teslas es mucho menor (en un factor de 3.00×10^8) que la del campo eléctrico expresada en volts por metro. Si la respuesta sugiere otra cosa, es probable que se haya cometido un error al usar la relación $E = cB$. (Más adelante en esta sección, veremos que la relación entre E y B es diferente para las ondas electromagnéticas en un medio material.)

Ejemplo 32.1 Campos de un rayo láser

Un láser de dióxido de carbono emite una onda electromagnética sinusoidal que viaja en el vacío en la dirección x negativa. La longitud de onda es 10.6 μm y el campo $\vec{E}$ es paralelo al eje z, con magnitud máxima de 1.5 MV/m. Escriba las ecuaciones vectoriales para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ como funciones del tiempo y la posición.

SOLUCIÓN

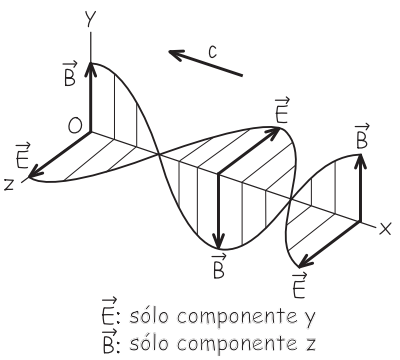
IDENTIFICAR: Este problema tiene que ver con una onda electromagnética sinusoidal del tipo descrito en esta sección.

PLANTEAR: Las ecuaciones (32.19) describen una onda que viaja en la dirección x negativa con $\vec{E}$ a lo largo del eje y, es decir, una onda linealmente polarizada a lo largo del eje y. En contraste, la onda de este ejemplo está linealmente polarizada a lo largo del eje z. En los puntos en los que $\vec{E}$ está en la dirección z positiva, $\vec{B}$ debe estar en la dirección y positiva para que el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ esté en la dirección x negativa (que es la dirección de propagación). La figura 32.15 ilustra una onda que satisface estos requerimientos.

EJECUTAR: Un par de posibles funciones de onda que describen la onda que se representa en la figura 32.15 son

$$\vec{E}(x, t) = \hat{k} E_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t)$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{j} B_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t)$$

32.15 Diagrama para este problema.



El signo más en los argumentos de las funciones coseno indica que la onda se propaga en la dirección x negativa, como debería. La ley de Faraday requiere que $E_{\text{máx}} = cB_{\text{máx}}$ [ecuación (32.18)], de manera que

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{1.5 \times 10^6 \text{ V/m}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ T}$$

Para comprobar la consistencia de las unidades, advierta que 1 V = 1 Wb/s, y que 1 Wb/m^2 = 1 T.

Se tiene que $\lambda = 10.6 \times 10^{-6}$ m, por lo que el número de onda y la frecuencia angular son

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{10.6 \times 10^{-6} \text{ m}} = 5.93 \times 10^5 \text{ rad/m}$$
$$\omega = ck = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})$$
$$= 1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s}$$

Al sustituir estos valores en las funciones de onda anteriores se obtiene

$$\vec{E}(x, t) = \hat{k}(1.5 \times 10^6 \text{ V/m}) \cos[(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})x + (1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t]$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{j}(5.0 \times 10^{-3} \text{ T}) \cos[(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})x + (1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t]$$

Con estas ecuaciones es posible encontrar los campos en el rayo láser en cualquier posición y tiempo en particular sustituyendo los valores específicos de x y t.

EVALUAR: Como se esperaba, la magnitud $B_{\text{máx}}$ en teslas es mucho menor que la magnitud de $E_{\text{máx}}$ en volts por metro. Para comprobar las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$, observe que $\vec{E} \times \vec{B}$ está en la dirección de $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$. Esto es lo correcto para una onda que se propaga en la dirección x negativa.

Nuestras expresiones para $\vec{E}(x, t)$ y $\vec{B}(x, t)$ no son las únicas soluciones posibles. Siempre es posible agregar una fase ϕ a los argumentos de la función coseno, de manera que $kx + \omega t$ se volvería $kx + \omega t + \phi$. Para determinar el valor de ϕ se necesitaría conocer $\vec{E}$ y $\vec{B}$ como funciones de x en un momento dado t o como funciones de t en una coordenada dada x. Sin embargo, el enunciado del problema no incluye esta información.

Ondas electromagnéticas en la materia

Hasta este momento, nuestro análisis de las ondas electromagnéticas se ha restringido a ondas en el *vacío*. Pero las ondas electromagnéticas también viajan en la *materia*; piense en la luz que viaja a través del aire, el agua o el vidrio. En este apartado ampliaremos nuestro estudio a las ondas electromagnéticas en materiales que no son conductores, es decir, en *dieléctricos*.

En un dieléctrico, la rapidez de la onda no es la misma que en el vacío, y la denotaremos con v en vez de con c. La ley de Faraday no se altera, pero en la ecuación (32.4), obtenida de ella, se sustituye la rapidez c por v. En la ley de Ampère, la corriente de desplazamiento está dada no por $\epsilon_0 \, d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie, sino por $\epsilon \, d\Phi_E/dt = K\epsilon_0 \, d\Phi_E/dt$, donde K es la constante dieléctrica y ϵ es la permitividad del dieléctrico. (Estas magnitudes se presentaron en la sección 24.4.) Asimismo, la constante μ_0 en la ley de Ampère debe sustituirse por $\mu = K_m\mu_0$, donde K_m es la permeabilidad relativa del dieléctrico y μ es su permeabilidad (véase la sección 28.8). Por ello, las ecuaciones (32.4) y (32.8) se sustituyen por

$$E = vB \qquad \text{y} \qquad B = \epsilon\mu v E \tag{32.20}$$

Con el mismo procedimiento que seguimos para las ondas en el vacío, encontramos que la rapidez de onda v es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \quad \text{(rapidez de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico)} \tag{32.21}$$

Para la mayoría de los dieléctricos, la permeabilidad relativa K_m se aproxima a la unidad (excepto para materiales ferromagnéticos aislantes). Cuando $K_m \cong 1$,

$$v = \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K}}$$

Como K siempre es mayor que la unidad, la rapidez v de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico siempre es *menor* que la rapidez c en el vacío en un factor de $1/\sqrt{K}$ (figura 32.16). La razón entre la rapidez c en el vacío y la rapidez v en un material se conoce en óptica como el **índice de refracción** n del material. Cuando $K_m \cong 1$,

$$\frac{c}{v} = n = \sqrt{KK_m} \cong \sqrt{K} \tag{32.22}$$

Por lo general, en esta ecuación no es posible utilizar los valores de K que se dan en la tabla 24.1 porque esos valores se miden con base en campos eléctricos *constantes*. Cuando los campos oscilan con rapidez, normalmente no hay tiempo para que ocurra la reorientación de los dipolos eléctricos que tiene lugar con los campos estáticos. Los valores de K con campos que varían con rapidez, en general, son *más pequeños* que los valores de la tabla. Por ejemplo, el valor de K para el agua es de 80.4 con campos estables, pero sólo de 1.8 en el intervalo de frecuencias de la luz visible. Así, la "constante" dieléctrica K en realidad es función de la frecuencia, que en estudios más avanzados recibe el nombre de *función dieléctrica*.

32.16 La constante dieléctrica K del agua es alrededor de 1.8 para la luz visible, por lo que la rapidez de la luz visible en el agua es menor que en el vacío en un factor de $1/\sqrt{K} = 1/\sqrt{1.8} = 0.75$.

Ejemplo 32.2 Ondas electromagnéticas en diferentes materiales

a) Cierta noche, durante una visita a una joyería, usted sostiene un diamante contra la luz de una lámpara del alumbrado público. El vapor de sodio caliente de la lámpara emite luz amarilla con frecuencia de 5.09×10^{14} Hz. Determine la longitud de onda en el vacío, la velocidad de propagación de la onda en el diamante y la longitud de onda en este último. A esa frecuencia, el diamante tiene las propiedades $K = 5.84$ y $K_m = 1.00$. *b*) Una onda de radio con frecuencia de 90.0 MHz (en la banda de radio de FM) pasa del vacío hacia un núcleo de ferrita aislante (un material ferromagnético que se utiliza en los cables de computadora para eliminar la interferencia de radio). Determine la longitud de onda en el vacío, la rapidez de propagación de la onda en la ferrita, y la longitud de onda en la ferrita. A esta frecuencia, la ferrita tiene propiedades $K = 10.0$ y $K_m = 1000$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se usa la relación entre la rapidez de onda, la longitud de onda y la frecuencia. También se emplea la relación entre la rapidez de las ondas electromagnéticas en un medio y los valores de la constante dieléctrica K y la permeabilidad relativa K_m para el medio.

PLANTEAR: En cada caso se determina la longitud de onda en el vacío por medio de $c = \lambda f$. La rapidez de onda v está dada por la ecuación (32.21). Una vez que se conoce el valor de v, se emplea $v = \lambda f$ para determinar la longitud de onda en el material en cuestión.

EJECUTAR: *a*) La longitud de onda de la luz de sodio en el vacío es

$$\lambda_{\text{vacío}} = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m} = 589 \text{ nm}$$

La rapidez de onda en el diamante es

$$v_{\text{diamante}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(5.84)(1.00)}} = 1.24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Esto es alrededor de dos quintos de la rapidez en el vacío. La longitud de onda es proporcional a la rapidez de onda, por lo que se reduce en el mismo factor.

$$\lambda_{\text{diamante}} = \frac{v_{\text{diamante}}}{f} = \frac{1.24 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$
$$= 2.44 \times 10^{-7} \text{ m} = 244 \text{ nm}$$

b) Siguiendo los mismos pasos que en el inciso *a*) se sabe que la longitud de onda de la onda de radio en el vacío es

$$\lambda_{\text{vacío}} = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{90.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3.33 \text{ m}$$

La rapidez de onda en la ferrita es

$$v_{\text{ferrita}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(10.0)(1000)}} = 3.00 \times 10^6 \text{ m/s}$$

continúa

Esto es sólo el 1% de la rapidez de la luz en el vacío, por lo que la longitud de onda es también el 1% de la longitud de onda en el vacío:

$$\lambda_{\text{ferrita}} = \frac{v_{\text{ferrita}}}{f} = \frac{3.00 \times 10^9\ \text{m/s}}{90.0 \times 10^6\ \text{Hz}} = 3.33 \times 10^{-2}\ \text{m} = 3.33\ \text{cm}$$

EVALUAR: Normalmente, la rapidez de la luz en los materiales transparentes como el diamante es entre c y $0.2c$. Como indican nuestros resultados en el inciso *b*), la rapidez de las ondas electromagnéticas en los materiales densos como la ferrita puede ser *mucho menor* que en el vacío.

Evalúe su comprensión de la sección 32.3 La primera de las ecuaciones (32.17) da el campo eléctrico para una onda plana medida en puntos a lo largo del eje x. Para esta onda plana, ¿en qué difiere el campo eléctrico en puntos *afuera* del eje x, de la expresión en las ecuaciones (32.17)? i) La amplitud es diferente; ii) la fase es diferente; iii) tanto la amplitud como la fase son diferentes; iv) ninguna de las opciones anteriores es válida.

32.4 Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas

Es un hecho muy conocido que hay energía asociada con las ondas electromagnéticas; piense en la energía de la radiación solar. Las aplicaciones prácticas de las ondas electromagnéticas —como los hornos de microondas, los trasmisores de radio y rayos láser para cirugía ocular— utilizan la energía que esas ondas transportan. Para comprender cómo se aprovecha esta energía, resulta útil deducir relaciones detalladas de la energía de una onda electromagnética.

Comencemos con las expresiones obtenidas en las secciones 24.3 y 30.3 para las **densidades de energía** en campos eléctricos y magnéticos; sugerimos al lector que las revise en este momento. Las ecuaciones (24.11) y (30.10) indican que en una región de espacio vacío donde están presentes los campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ la densidad total de energía u está dada por

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{32.23}$$

donde ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del espacio libre. Para las ondas electromagnéticas en el vacío, las magnitudes E y B están relacionadas por

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,E \tag{32.24}$$

Al combinar las ecuaciones (32.23) y (32.24) también se puede expresar la densidad de energía u en una onda electromagnética simple en el vacío como

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\,E)^2 = \epsilon_0 E^2 \tag{32.25}$$

Esto demuestra que en el vacío, la densidad de energía asociada con el campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ en nuestra onda simple es igual a la densidad de energía del campo $\vec{\boldsymbol{B}}$. En general, la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición y el tiempo, igual que para la onda sinusoidal descrita por las ecuaciones (32.16); así, la densidad de energía u de una onda electromagnética, dada por la ecuación (32.25), también depende en general de la posición y el tiempo.

Flujo de energía electromagnética y el vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas como las que hemos descrito son ondas que *viajan* y transportan energía de una región a otra. Por ejemplo, en la onda descrita en la sección 32.2, los campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ avanzan con el tiempo hacia regiones en las que originalmente no había campos, y llevan consigo la densidad de energía u conforme avanzan. Esta transferencia de energía se puede describir en términos de la energía transferida *por unidad de tiempo por unidad de área de sección transversal*, o *potencia por unidad de área*, para un área perpendicular a la dirección en que viaja la onda.

Para ver cómo se relaciona el flujo de energía con los campos, considere un plano estacionario, perpendicular al eje x, que coincida con el frente de onda en cierto momento. En un tiempo dt después de eso, el frente de onda se desplaza una distancia $dx = c\,dt$ hacia la derecha del plano. Si se considera un área A sobre este plano estacionario (figura 32.17), advertimos que la energía del espacio a la derecha de esta área debió haber pasado a través del área para llegar a la nueva ubicación. El volumen dV de la región en cuestión es el producto del área de la base A por la longitud $c\,dt$, y la energía dU de esta región es el producto de la densidad de energía u por este volumen:

$$dU = u\,dV = (\epsilon_0 E^2)(Ac\,dt)$$

Esta energía pasa a través del área A en el tiempo dt. El flujo de energía por unidad de tiempo por unidad de área, que llamaremos S, es

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \qquad \text{(en el vacío)} \tag{32.26}$$

Si empleamos las ecuaciones (32.15) y (32.25), obtenemos las siguientes formas alternativas:

$$S = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \qquad \text{(en el vacío)} \tag{32.27}$$

La deducción de la ecuación (32.27) a partir de la (32.26) se deja al lector (véase el ejercicio 32.29). Las unidades S son energía por unidad de tiempo por unidad de área, o potencia por unidad de área. La unidad del SI para S es 1 J/s · m^2 o 1 W/m^2.

Es posible definir una cantidad *vectorial* que describa tanto la magnitud como la dirección de la tasa del flujo de energía:

$$\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} \qquad \text{(vector de Poynting en el vacío)} \tag{32.28}$$

El vector $\vec{\boldsymbol{S}}$ se denomina **vector de Poynting**, y fue introducido por el físico británico John Poynting (1852-1914). Su dirección es la misma que la dirección en que se propaga la onda (figura 32.18). Como $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ son perpendiculares, la magnitud de $\vec{\boldsymbol{S}}$ es $S = EB/\mu_0$; según las ecuaciones (32.26) y (32.27), éste es el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo a través de un área de sección transversal perpendicular a la dirección de propagación. El flujo total de energía por unidad de tiempo (potencia, P) hacia fuera de cualquier superficie cerrada es la integral de $\vec{\boldsymbol{S}}$ sobre la superficie:

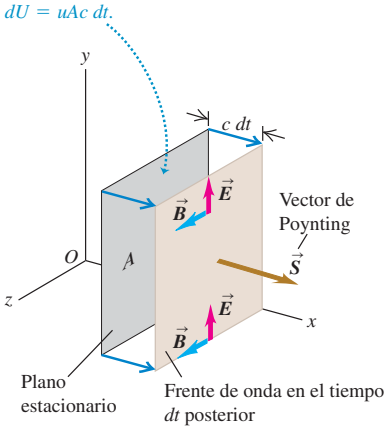
$$P = \oint \vec{\boldsymbol{S}} \cdot d\vec{\boldsymbol{A}}$$

En el caso de las ondas sinusoidales que estudiamos en la sección 32.3, así como en el de otras ondas más complejas, los campos eléctricos y magnéticos en un punto cualquiera varían con el tiempo, por lo que el vector de Poynting en cualquier punto también es función del tiempo. Puesto que las frecuencias de las ondas electromagnéticas comunes son muy altas, la variación en el tiempo del vector Poynting es tan rápida que lo más apropiado es examinar su valor *medio*. La magnitud del valor medio de $\vec{\boldsymbol{S}}$ en un punto recibe el nombre de **intensidad** de la radiación en ese punto. La unidad del SI para la intensidad es la misma que para S: 1 W/m^2 (watt por metro cuadrado).

Veamos cuál es la intensidad de la onda sinusoidal descrita por las ecuaciones (32.17). Primero sustituimos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en la ecuación (32.28):

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{S}}(x,t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{E}}(x,t) \times \vec{\boldsymbol{B}}(x,t)\\ &= \frac{1}{\mu_0}[\hat{\boldsymbol{\jmath}}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] \times [\hat{\boldsymbol{k}}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)]\end{aligned}$$

32.17 Frente de onda en el momento dt después de haber pasado a través del plano estacionario con área A.



32.18 Estos paneles solares en el techo de un edificio están inclinados hacia el Sol, es decir, de frente al vector Poynting de las ondas electromagnéticas provenientes del Sol; de esta forma, los paneles pueden absorber la máxima cantidad de energía de las ondas.

El producto vectorial de los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\imath}}$, y $\cos^2(kx - \omega t)$ nunca es negativo, por lo que $\vec{\boldsymbol{S}}(x, t)$ siempre apunta en la dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda). La componente x del vector de Poynting es

$$S_x(x, t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}\cos^2(kx - \omega t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}[1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$

El valor medio del tiempo de $\cos 2(kx - \omega t)$ es igual a cero porque, en cualquier punto, es positivo durante la mitad de un ciclo y negativo durante la otra mitad. Por lo tanto, el valor medio del vector de Poynting en un ciclo completo es $\vec{\boldsymbol{S}}_{\text{med}} = \hat{\boldsymbol{\imath}}S_{\text{med}}$, donde

$$S_{\text{med}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}$$

Es decir, la magnitud del valor medio de $\vec{\boldsymbol{S}}$ para una onda sinusoidal (la intensidad I de la onda) es $\frac{1}{2}$ del valor máximo. Con base en las relaciones $E_{\text{máx}} = B_{\text{máx}}c$ y $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, podemos expresar la intensidad en varias formas equivalentes:

$$I = S_{\text{med}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{{E_{\text{máx}}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}{E_{\text{máx}}}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c{E_{\text{máx}}}^2$$

(intensidad de una onda sinusoidal en el vacío) (32.29)

Se invita al lector a que compruebe que estas expresiones son equivalentes.

En el caso de una onda que viaja en la dirección $-x$, representada por las ecuaciones (32.19), el vector de Poynting tiene la dirección $-x$ en todos los puntos, pero su magnitud es la misma que en el caso de una onda que viaja en la dirección $+x$. Se invita al lector a comprobar estas afirmaciones (véase el ejercicio 32.24).

CUIDADO **Vector de Poynting contra intensidad** En cualquier punto x, la magnitud del vector de Poynting varía con el tiempo. En consecuencia, la tasa *instantánea* con la que la energía electromagnética en una onda plana sinusoidal llega a la superficie no es constante. Esto tal vez parezca contradecir la experiencia cotidiana; la luz del Sol, la de una bombilla eléctrica o la del rayo láser de un escáner en la tienda de comestibles parecen estables y de intensidad invariable. En realidad, el vector de Poynting de estas fuentes *sí* varía con el tiempo, pero esta variación es imperceptible ya que la frecuencia de oscilación es muy alta (alrededor de 5×10^{14} Hz en el caso de la luz visible). Lo único que percibimos es la tasa *media* con que la energía llega al ojo; por esta razón, es común usar la intensidad (valor medio de S) para describir la intensidad de la radiación electromagnética.

A lo largo de este análisis hemos considerado sólo ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío. Sin embargo, si las ondas viajan en un medio dieléctrico, deben modificarse las expresiones para la densidad de energía [ecuación (32.23)], el vector de Poynting [ecuación (32.28)] y la intensidad de una onda sinusoidal [ecuación (32.29)]. Los cambios requeridos son muy sencillos: basta con sustituir ϵ_0 por la permitividad ϵ del dieléctrico, μ_0 por la permeabilidad μ del dieléctrico, y c por la rapidez v de las ondas electromagnéticas en el dieléctrico. De manera sorprendente, las densidades de energía en los campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ son iguales incluso en un dieléctrico.

Ejemplo 32.3 Energía en una onda no sinusoidal

Con respecto a la onda no sinusoidal descrita en la sección 32.2, suponga que $E = 100$ V/m $= 100$ N/C. Determine el valor B, la densidad de energía y la tasa de flujo de energía por unidad de área S.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En la onda descrita en la sección 32.2, los campos eléctrico y magnético son uniformes detrás del frente de onda. Por lo tanto, las incógnitas B, u y S también deben ser uniformes detrás del frente de onda.

PLANTEAR: Dado el valor de la magnitud E, calculamos la magnitud de B con la ecuación (32.4), la densidad de energía u con la ecuación (32.25), y la tasa de flujo de energía por unidad de área S con la ecuación (32.27). (Observe que no es posible utilizar la ecuación (32.29), ya que sólo se aplica a ondas sinusoidales.)

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (32.4),

$$B = \frac{E}{c} = \frac{100 \text{ V/m}}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Según la ecuación (32.25),

$$u = \epsilon_0 E^2 = (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(100\ \mathrm{N/C})^2$$
$$= 8.85 \times 10^{-8}\ \mathrm{N/m^2} = 8.85 \times 10^{-8}\ \mathrm{J/m^3}$$

La magnitud del vector de Poynting es

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{(100\ \mathrm{V/m})(3.33 \times 10^{-7}\ \mathrm{T})}{4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}}$$
$$= 26.5\ \mathrm{V \cdot A/m^2} = 26.5\ \mathrm{W/m^2}$$

EVALUAR: El resultado para S puede comprobarse aplicando una fórmula alternativa de la ecuación (32.26):

$$S = \epsilon_0 c E^2$$
$$= (8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})(100\ \mathrm{N/C})^2$$
$$= 26.5\ \mathrm{W/m^2}$$

Como $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ tienen los mismos valores en todos los puntos detrás del frente de onda, la densidad de energía u y la magnitud del vector de Poynting S también tienen el mismo valor en toda la región detrás del frente de onda. Por delante del frente de onda, $\vec{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0}$ y $\vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0}$, por lo que $u = 0$ y $S = 0$; donde no hay campos, no hay energía de campo.

Ejemplo 32.4 Energía en una onda sinusoidal

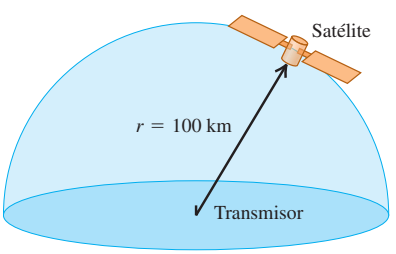
Una estación de radio en la superficie terrestre emite una onda sinusoidal con una potencia total media de 50 kW (figura 32.19). Suponiendo que el trasmisor irradia por igual en todas direcciones sobre el terreno (lo que es improbable en situaciones reales), calcule las amplitudes $E_{máx}$ y $B_{máx}$ detectadas por un satélite ubicado a 100 km de la antena.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ésta es una onda sinusoidal, así que aplicamos la idea de que la intensidad es igual a la magnitud del valor medio del vector de Poynting. No se da el valor de la intensidad, pero *sí* el de la potencia total media del trasmisor. Se aprovecha la idea de que la intensidad es equivalente a la potencia media por unidad de área.

PLANTEAR: En la figura 32.19 se ilustra un hemisferio con radio de 100 km en cuyo centro se encuentra el transmisor. Para hallar la intensidad I a esta distancia del transmisor, se divide la potencia media del transmisor entre el área total del hemisferio. Después se utiliza la ecuación (32.29) para determinar la magnitud del campo eléctrico, y la ecuación (32.4) para encontrar la magnitud del campo magnético.

32.19 Una estación de radio irradia ondas hacia el interior del hemisferio que se ilustra.



EJECUTAR: El área de la superficie de un hemisferio de radio $r = 100$ km $= 1.00 \times 10^5$ m es

$$A = 2\pi R^2 = 2\pi(1.00 \times 10^5\ \mathrm{m})^2 = 6.28 \times 10^{10}\ \mathrm{m^2}$$

Toda la potencia radiada pasa a través de esta superficie, por lo que la potencia media por unidad de área (es decir, la intensidad) es

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi R^2} = \frac{5.00 \times 10^4\ \mathrm{W}}{6.28 \times 10^{10}\ \mathrm{m^2}} = 7.96 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$$

De acuerdo con las ecuaciones (32.29), $I = S_{med} = E_{máx}^2/2\mu_0 c$, de manera que

$$E_{máx} = \sqrt{2\mu_0 c S_{med}}$$
$$= \sqrt{2(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})(7.96 \times 10^{-7}\ \mathrm{W/m^2})}$$
$$= 2.45 \times 10^{-2}\ \mathrm{V/m}$$

De acuerdo con la ecuación (32.4) se tiene

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = 8.17 \times 10^{-11}\ \mathrm{T}$$

EVALUAR: Advierta que la magnitud de $E_{máx}$ es comparable con los campos que se observan comúnmente en el laboratorio, pero $B_{máx}$ es extremadamente pequeña en comparación con los campos $\vec{\boldsymbol{B}}$ estudiados en capítulos anteriores. Por esta razón, la mayoría de los detectores de radiación electromagnética responden al efecto del campo eléctrico, no del campo magnético. Una excepción son las antenas de espira para radio.

Flujo de cantidad de movimiento electromagnética y presión de radiación

A partir de la observación de que se requiere energía para establecer campos eléctricos y magnéticos, hemos demostrado que las ondas electromagnéticas transportan energía. También se puede demostrar que las ondas electromagnéticas llevan una *cantidad de movimiento* p con una densidad de cantidad de movimiento correspondiente (cantidad de movimiento dp por volumen dV) de magnitud

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \qquad (32.30)$$

Esta cantidad de movimiento es una propiedad del campo; no está asociada con la masa de una partícula en movimiento en el sentido habitual.

Existe además tasa de flujo de cantidad de movimiento correspondiente. El volumen dV ocupado por una onda electromagnética (rapidez c) que pasa a través de una

área A en el tiempo dt es $dV = Ac\,dt$. Cuando se sustituye esto en la ecuación (32.30) y se reordena, se encuentra que la tasa de flujo de la cantidad de movimiento por unidad de área es

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad \text{(tasa de flujo de la cantidad de movimiento electromagnética)} \tag{32.31}$$

Ésta es la cantidad de movimiento que se transfiere por unidad de área y por unidad de tiempo. Al sustituir S por $S_{\text{med}} = I$ en la ecuación (32.31) se obtiene la tasa *media* de transferencia de cantidad de movimiento por unidad de área.

Esta cantidad de movimiento es responsable del fenómeno llamado **presión de radiación**. Cuando una onda electromagnética es absorbida por completo por una superficie, la cantidad de movimiento de la onda también se transfiere a la superficie. Por sencillez, consideraremos una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Con base en las ideas desarrolladas en la sección 8.1, se observa que la tasa dp/dt con que se transfiere la cantidad de movimiento a la superficie absorbente es igual a la *fuerza* sobre la superficie. La fuerza media por unidad de área que se debe a la onda, o *presión de radiación* p_{rad}, es el valor medio de dp/dt dividido entre el área absorbente A. (Se utiliza el subíndice "rad" para distinguir la presión de la cantidad de movimiento, que también se representa mediante el símbolo p.) De la ecuación (32.31), la presión de radiación es

$$p_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{med}}}{c} = \frac{I}{c} \quad \text{(presión de radiación, onda absorbida totalmente)} \tag{32.32}$$

Si la onda se refleja por completo, el cambio en la cantidad de movimiento es dos veces más grande, y la presión es

$$p_{\text{rad}} = \frac{2S_{\text{med}}}{c} = \frac{2I}{c} \quad \text{(presión de radiación, onda reflejada totalmente)} \tag{32.33}$$

32.20 En el centro de esta nube de gas interestelar, hay un grupo de estrellas muy luminosas que ejercen una presión de radiación enorme sobre sus alrededores. Auxiliada por un "viento" de partículas que emana de las estrellas, en los últimos millones de años, la presión de radiación ha formado una burbuja dentro de la nube de 70 años luz de diámetro.

Por ejemplo, el valor de I (o S_{med}) para la luz solar directa, antes de que pase a través de la atmósfera terrestre, es aproximadamente de 1.4 kW/m^2. De acuerdo con la ecuación (32.32), la presión media correspondiente sobre una superficie totalmente absorbente es

$$p_{\text{rad}} = \frac{I}{c} = \frac{1.4 \times 10^3\ \text{W/m}^2}{3.0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 4.7 \times 10^{-6}\ \text{Pa}$$

De acuerdo con la ecuación (32.33), la presión media sobre una superficie totalmente *reflejante* es el doble de esto: $2I/c$, o 9.4×10^{-6} Pa. Éstas son presiones muy pequeñas, del orden de 10^{-10} atm, pero es posible medirlas con instrumentos sensibles.

La presión de la radiación de la luz solar es mucho mayor *dentro* del Sol que en la Tierra (véase el problema 32.43). En el interior de las estrellas que son mucho más masivas y luminosas que el Sol, la presión de radiación es tan grande que aumenta considerablemente la presión gaseosa en el interior de la estrella, lo que ayuda a impedir que ésta colapse bajo el efecto de su propia gravedad. En ciertos casos, la presión de radiación tiene efectos dramáticos sobre el material que rodea a las estrellas (figura 32.20).

Ejemplo 32.5 Potencia y presión de la luz solar

Un satélite en órbita alrededor de la Tierra tiene paneles recolectores de energía solar con área total de 4.0 m^2 (figura 32.21). Si la radiación del Sol es perpendicular a los paneles y es absorbida por completo, calcule la potencia solar media absorbida y la fuerza media asociada con la presión de radiación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las relaciones entre intensidad, potencia, presión de radiación y fuerza.

PLANTEAR: En el análisis anterior calculamos la intensidad I (potencia por unidad de área) de la luz solar, así como la presión de radiación p_{rad} (fuerza por unidad de área) de la luz solar sobre una superficie absorbente. (Estos valores se calcularon para puntos sobre la atmósfera, que es donde el satélite está en órbita). Al multiplicar cada valor por el área de los paneles solares se obtiene la potencia media absorbida y la fuerza neta de la radiación sobre los paneles.

EJECUTAR: La intensidad I (potencia por unidad de área) es 1.4×10^3 W/m^2. Aunque la luz proveniente del Sol no es una onda sinusoidal simple, es posible usar la relación según la cual la potencia media P es el producto de la intensidad I por el área A:

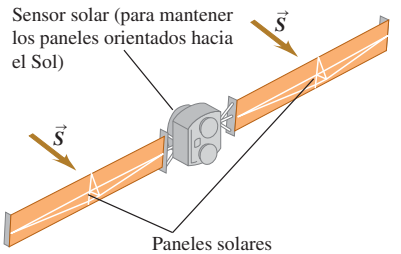
$$P = IA = (1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2)(4.0 \text{ m}^2)$$
$$= 5.6 \times 10^3 \text{ W} = 5.6 \text{ kW}$$

La presión de radiación de la luz solar sobre una superficie absorbente es $p_{rad} = 4.7 \times 10^{-6}$ Pa $= 4.7 \times 10^{-6}$ N/m^2. La fuerza total F es la presión p_{rad} por el área A:

$$F = p_{rad} A = (4.7 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2)(4.0 \text{ m}^2) = 1.9 \times 10^{-5} \text{ N}$$

EVALUAR: La potencia absorbida es considerable. Parte de ella se puede utilizar para alimentar los equipos a bordo del satélite; el resto calienta los paneles, ya sea directamente o por ineficiencias de sus celdas fotovoltaicas.

32.21 Paneles solares en un satélite.



La fuerza total de la radiación es comparable con el peso (en la Tierra) de un grano de sal. Sin embargo, con el tiempo, esta pequeña fuerza llega a tener un efecto apreciable en la órbita de un satélite como el de la figura 32.21, por lo que la presión de la radiación debe tomarse en cuenta.

Evalúe su comprensión de la sección 32.4 La figura 32.13 muestra una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal en el instante $t = 0$. ¿Para cuáles de los siguientes cuatro valores de x *a*) la densidad de energía es máxima; *b*) la densidad de energía es mínima; *c*) la magnitud instantánea (no media) del vector de Poynting alcanza su nivel máximo; *d*) la magnitud instantánea (no media) del vector de Poynting alcanza su nivel mínimo? i) $x = 0$; ii) $x = \lambda/4$; iii) $x = \lambda/2$; iv) $x = 3\lambda/4$.

32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias

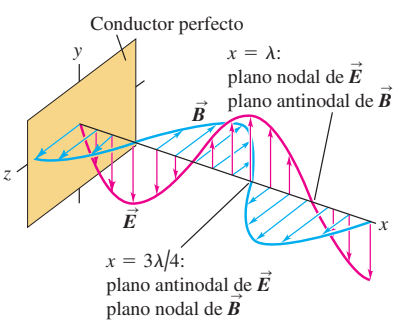
Las ondas electromagnéticas se *reflejan*; la superficie de un conductor (como una lámina metálica pulida) o de un dieléctrico (como una hoja de vidrio) pueden servir como reflectores. El principio de superposición se cumple para las ondas electromagnéticas igual que para los campos eléctricos y magnéticos. La superposición de una onda incidente y una onda reflejada forma una **onda estacionaria**. La situación es análoga a las ondas estacionarias en una cuerda estirada que se estudiaron en la sección 15.7; es recomendable repasar ese análisis.

Suponga que una hoja de un conductor perfecto (con resistividad igual a cero) se coloca en el plano yz de la figura 32.22, y una onda electromagnética linealmente polarizada que viaja en la dirección x negativa choca con ella. Como se vio en la sección 23.4, $\vec{E}$ no puede tener una componente paralela a la superficie de un conductor perfecto. Por lo tanto, en esa situación, $\vec{E}$ debe ser igual a cero en todo lugar del plano yz. El campo eléctrico de la onda electromagnética *incidente no* es cero en todo momento en el plano yz. Pero esta onda incidente induce corrientes oscilantes en la superficie del conductor, y estas corrientes dan origen a un campo eléctrico adicional. El campo eléctrico *neto*, que es la suma vectorial de este campo y del incidente $\vec{E}$, es igual a cero en todo lugar tanto en el interior como en la superficie del conductor.

Las corrientes inducidas sobre la superficie del conductor también producen una onda *reflejada* que viaja hacia fuera del plano en la dirección $+x$. Suponga que la onda incidente está descrita por las funciones de onda de las ecuaciones (32.19) (una onda sinusoidal que viaja en la dirección $-x$) y la onda reflejada por el negativo de las ecuaciones (32.16) (una onda sinusoidal que se desplaza en la dirección $+x$). Tomamos el *negativo* de la onda dada por las ecuaciones (32.16) de manera que los campos eléctricos incidente y reflejado se anulen en $x = 0$ (el plano del conductor, donde el campo eléctrico total debe ser cero). El principio de superposición establece que el campo total $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las ondas incidente y reflejada, y de manera análoga para el campo $\vec{B}$. Por lo tanto, las funciones de onda para la superposición de las dos ondas son las siguientes:

$$E_y(x, t) = E_{máx}[\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$
$$B_z(x, t) = B_{máx}[-\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$

32.22 Representación de los campos eléctricos y magnéticos de una onda estacionaria linealmente polarizada cuando $\omega t = 3\pi/4$ rad. En cualquier plano perpendicular al eje x, E es máxima (un antinodo) donde B es cero (un nodo), y viceversa. Conforme transcurre el tiempo, el patrón *no* se desplaza a lo largo del eje x; en vez de ello, los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ simplemente oscilan en todos los puntos.



Estas expresiones se pueden expandir y simplificar con ayuda de las identidades

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Los resultados son

$$E_y(x, t) = -2E_{\text{máx}} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \tag{32.34}$$

$$B_z(x, t) = -2B_{\text{máx}} \cos kx \cos \omega t \tag{32.35}$$

La ecuación (32.34) es análoga a la (15.28) para una cuerda estirada. Se observa que en $x = 0$, el campo eléctrico $E_y(x = 0, t)$ *siempre* es igual a cero; esto es una exigencia de la naturaleza del conductor ideal, que desempeña el mismo papel que un punto fijo al final de una cuerda. Además, $E_y(x, t)$ es cero en *todo* momento en los puntos de aquellos planos perpendiculares al eje x para los que $\operatorname{sen} kx = 0$; es decir, $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ Como $k = 2\pi/\lambda$, las posiciones de estos planos son

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \qquad \text{(planos nodales de } \vec{E}\text{)} \tag{32.36}$$

Estos planos se llaman **planos nodales** del campo $\vec{E}$; son el equivalente de los nodos, o puntos nodales, de una onda estacionaria en una cuerda. En el punto medio entre dos planos nodales adyacentes cualesquiera hay un plano en el que $\operatorname{sen} kx = \pm 1$; en cada uno de tales planos, la magnitud de $E(x, t)$ es igual al valor máximo posible de $2E_{\text{máx}}$ dos veces en cada ciclo de oscilación. Éstos son los **planos antinodales** de $\vec{E}$, que corresponden a los antinodos de las ondas en una cuerda.

El campo magnético total es igual a cero en todo momento en los puntos de los planos en los que $\cos kx = 0$. Esto ocurre donde

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots \qquad \text{(planos nodales de } \vec{B}\text{)} \tag{32.37}$$

Éstos son los planos nodales del campo $\vec{B}$; hay un plano antinodal de $\vec{B}$ en el punto medio entre dos planos nodales adyacentes cualesquiera.

La figura 32.22 muestra un patrón de onda estacionaria en cierto instante del tiempo. El campo magnético *no* es igual a cero en la superficie conductora ($x = 0$), y no hay razón por la que debiera serlo. Las corrientes superficiales que deben estar presentes para hacer que $\vec{E}$ sea exactamente cero en la superficie ocasionan campos magnéticos en esta última. Entre los planos nodales de cada campo hay una separación de media longitud de onda. Los planos nodales de un campo están en el punto medio entre los de otro; de esta forma, los nodos de $\vec{E}$ coinciden con los antinodos de $\vec{B}$, y a la inversa. Compare esta situación con la diferencia entre los nodos de presión y los nodos de desplazamiento que se vieron en la sección 16.4.

El campo eléctrico total es una función *seno* de t, y el campo magnético total es una función *coseno* de t. Por consiguiente, las variaciones sinusoidales de los dos campos están 90° fuera de fase en cada punto. En los momentos en que $\operatorname{sen} \omega t = 0$, el campo eléctrico es cero *en todo lugar*, y el campo magnético es máximo. Cuando $\cos \omega t = 0$, el campo magnético es cero en todo lugar, y el campo eléctrico es máximo. Esto contrasta con lo que ocurre en una onda que viaja en una dirección, como se describe en las ecuaciones (32.16) o (32.19) por separado, en las que las variaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en cualquier punto en particular están *en fase*. Es interesante comprobar que las ecuaciones (32.34) y (32.35) satisfacen la ecuación de onda [ecuación (32.15)]. También satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14) (equivalentes de las leyes de Faraday y Ampere); las pruebas de estos enunciados se dejan para el lector (véase el ejercicio 32.34).

Ondas estacionarias en una cavidad

Siguiendo con la analogía de la cuerda estirada, ahora es posible insertar un segundo plano conductor, paralelo al primero y a una distancia L de él, a lo largo del eje x. La

cavidad entre los dos planos es análoga a una cuerda estirada sujeta en los puntos $x = 0$ y $x = L$. Ambos planos conductores deben ser planos nodales para $\vec{E}$; una onda estacionaria puede presentarse sólo cuando el segundo plano está situado en alguna de las posiciones en las que $E(x, t) = 0$. Es decir, para que exista una onda estacionaria, L debe ser un múltiplo entero de $\lambda/2$. Las longitudes de onda que satisfacen esta condición son

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32.38}$$

Las frecuencias correspondientes son

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32.39}$$

Así, hay un conjunto de *modos normales* cada uno con frecuencia, forma de la onda y distribución nodal características (figura 32.23). Midiendo las posiciones nodales es posible medir la longitud de onda. Si se conoce la frecuencia, se puede determinar la rapidez de onda. Hertz fue el primero en utilizar esta técnica en la década de 1880 en sus investigaciones pioneras sobre las ondas electromagnéticas.

Un láser tiene dos espejos; en la cavidad comprendida entre ellos se establece una onda estacionaria. Uno de los espejos tiene una pequeña apertura, parcialmente transmisora, que permite que las ondas escapen por este extremo del láser.

Las superficies conductoras no son las únicas que reflejan a las ondas electromagnéticas. La reflexión también ocurre en la interfaz entre dos materiales aislantes con diferentes propiedades dieléctricas o magnéticas. El análogo mecánico es la unión de dos cuerdas con igual tensión pero distinta densidad de masa lineal. En general, una onda incidente sobre una superficie limítrofe de este tipo se transmite parcialmente al segundo material y se refleja parcialmente de regreso hacia el primero. Por ejemplo, la luz se transmite a través de una ventana de vidrio, pero sus superficies también reflejan la luz.

32.23 Un horno de microondas establece una onda electromagnética estacionaria con $\lambda = 12.2$ cm, una longitud de onda que el agua de los alimentos absorbe intensamente. Como la onda tiene nodos separados por una distancia $\lambda/2 = 6.1$ cm, es necesario hacer girar los alimentos mientras se cocinan; de lo contrario, las partes que se encuentran en un nodo, donde la amplitud del campo eléctrico es igual a cero, permanecerían frías.

Ejemplo 32.6 Intensidad en una onda estacionaria

Calcule la intensidad de la onda estacionaria estudiada en esta sección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La intensidad I de la onda es el valor medio S_{med} de la magnitud del vector de Poynting.

PLANTEAR: Primero se calcula el valor instantáneo del vector de Poynting, y luego se promedia sobre un número entero de ciclos de la onda para determinar I.

EJECUTAR: Con las funciones de onda de las ecuaciones (32.34) y (32.35) en la expresión del vector de Poynting $\vec{S}$, ecuación (32.28), se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{S}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x, t) \times \vec{B}(x, t)\\ &= \frac{1}{\mu_0}[-2\hat{j}E_{\text{máx}}\operatorname{sen}kx\cos\omega t] \times [-2\hat{k}B_{\text{máx}}\cos kx\operatorname{sen}\omega t]\\ &= \hat{\imath}\frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}(2\operatorname{sen}kx\cos kx)(2\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t)\\ &= \hat{\imath}S_x(x, t)\end{aligned}$$

Con base en la identidad $\operatorname{sen} 2A = 2\operatorname{sen}A\cos A$, podemos rescribir $S_x(x, t)$ como

$$S_x(x, t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}\operatorname{sen}2kx\operatorname{sen}2\omega t}{\mu_0}$$

El valor medio de una función seno con respecto a cualquier número entero de ciclos es igual a cero. Así, *el tiempo medio de $\vec{S}$ en cualquier punto es igual a cero*; $I = S_{\text{med}} = 0$.

EVALUAR: Esto es exactamente lo que cabe esperar. La onda estacionaria se forma con la superposición de dos ondas de la misma frecuencia y amplitud que viajan en sentidos opuestos. Toda la energía transferida por una de ellas se anula totalmente por una cantidad igual transferida en sentido opuesto por la otra onda. Cuando se utilicen ondas para transmitir potencia, es importante evitar reflexiones que originen ondas estacionarias.

Ejemplo 32.7 Ondas estacionarias en una cavidad

Se establecen ondas electromagnéticas estacionarias en una cavidad con dos paredes paralelas, altamente conductoras, separadas por una distancia de 1.50 cm. *a*) Calcule la longitud de onda más larga y la frecuencia más baja de las ondas electromagnéticas estacionarias entre las paredes. *b*) En el caso de la onda estacionaria con la longitud de onda más larga, ¿en qué parte de la cavidad $\vec{E}$ tiene su magnitud máxima? ¿Dónde es igual a cero el campo $\vec{E}$? ¿Dónde tiene $\vec{B}$ su magnitud máxima? ¿Dónde es igual a cero el campo $\vec{B}$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se basa en la idea de que sólo ciertos modos electromagnéticos normales son posibles para las ondas electromagnéticas en una cavidad, de igual forma que sólo ciertos modos normales son posibles para ondas estacionarias en una cuerda.

PLANTEAR: La longitud de onda más larga y la frecuencia más baja que son posibles corresponden al modo $n = 1$ en las ecuaciones (32.38) y (32.39). Estas ecuaciones se utilizan para determinar los valores de λ y f. Así, las ecuaciones (32.36) y (32.37) nos indican las ubicaciones de los planos nodales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$; los planos antinodales de cada campo están en el punto medio entre los planos adyacentes nodales.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (32.38), la longitud de onda $n = 1$ es

$$\lambda_1 = 2L = 2(1.50\text{ cm}) = 3.00\text{ cm}$$

La frecuencia correspondiente está dada por la ecuación (32.38) con $n = 1$:

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{3.00 \times 10^8\text{ m/s}}{2(1.50 \times 10^{-2}\text{ m})} = 1.00 \times 10^{10}\text{ Hz} = 10\text{ GHz}$$

b) Con $n = 1$ hay una sola media longitud de onda entre las paredes. El campo eléctrico tiene planos nodales ($\vec{E} = \mathbf{0}$) en las paredes y un plano antinodal (donde se presenta la magnitud máxima de $\vec{E}$) equidistante de ambas. El campo magnético tiene planos *antinodales* en las paredes y un plano nodal equidistante de ambas.

EVALUAR: Una aplicación de las ondas estacionarias de este tipo es la generación de un campo $\vec{E}$ oscilante de frecuencia definida, el cual, a la vez, se utiliza para probar el comportamiento de una pequeña muestra de material colocada en el interior de la cavidad. Para someter la muestra al campo más intenso posible, ésta debe colocarse cerca del centro de la cavidad, en el antinodo de $\vec{E}$.

Evalúe su comprensión de la sección 32.5 En la onda estacionaria descrita en el ejemplo 32.7, ¿hay algún punto en la cavidad en el que la densidad de la energía sea igual a cero en todo momento? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué?

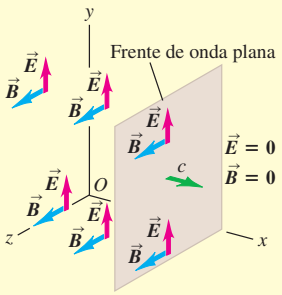
CAPÍTULO 32 RESUMEN

Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas: Las ecuaciones de Maxwell pronostican la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío con la rapidez de la luz c. El espectro electromagnético cubre frecuencias desde 1 Hz hasta 10^{24} Hz, y el correspondiente amplio intervalo de longitudes de onda. La luz visible, con longitudes de onda de 400 a 700 nm, es sólo una parte muy pequeña de ese espectro. En una onda plana, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son uniformes sobre cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Las leyes de Faraday y Ampere establecen relaciones entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$; la exigencia de que se satisfagan estas dos relaciones permite obtener una expresión para c en términos de ϵ_0 y μ_0. Las ondas electromagnéticas son transversales; los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y con respecto a la dirección de propagación, la cual es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$.

$$E = cB \tag{32.4}$$

$$B = \epsilon_0 \mu_0 c E \tag{32.8}$$

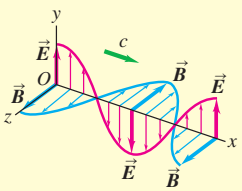
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{32.9}$$



Ondas electromagnéticas sinusoidales: Las ecuaciones (32.17) y (32.18) describen una onda electromagnética plana sinusoidal que viaja en el vacío en la dirección $+x$. (Véase el ejemplo 32.1.)

$$\vec{E}(x,t) = \hat{j} E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k} B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{32.17}$$

$$E_{\text{máx}} = cB_{\text{máx}} \tag{32.18}$$



Ondas electromagnéticas en la materia: Cuando una onda electromagnética viaja a través de un dieléctrico, la rapidez de onda v es menor que la rapidez de la luz en el vacío c. (Véase el ejemplo 32.2.)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{K K_{\text{m}}}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K K_{\text{m}}}} \tag{32.21}$$

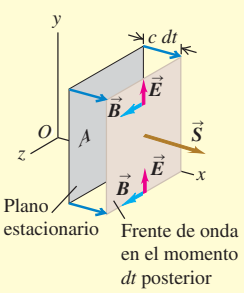
Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas: La tasa de flujo de energía (potencia por unidad de área) de una onda electromagnética en vacío está dada por el vector de Poynting $\vec{S}$. La magnitud del valor promediado en el tiempo del vector de Poynting se llama la intensidad I de la onda. Las ondas electromagnéticas también transportan cantidad de movimiento, y cuando una de ellas golpea una superficie ejerce una presión de radiación p_{rad}. Si la superficie es perpendicular a la dirección de propagación de la onda y es totalmente absorbente, $p_{\text{rad}} = I/c$; si la superficie es un reflector perfecto, $p_{\text{rad}} = 2I/c$. (Véanse los ejemplos 32.3 a 32.5.)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{32.28}$$

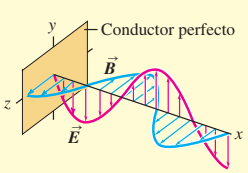
$$I = S_{\text{med}} = \frac{E_{\text{máx}} B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\text{máx}}^2 \tag{32.29}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \tag{32.31}$$

(tasa de flujo de cantidad de movimiento electromagnética)



Ondas electromagnéticas estacionarias: Si se coloca una superficie perfectamente reflejante en $x = 0$, las ondas incidente y reflejada forman una onda estacionaria. Los planos nodales para $\vec{E}$ se presentan en $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, y los planos nodales para $\vec{B}$ en $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$. En cada punto, las variaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con respecto al tiempo están 90° fuera de fase. (Véanse los ejemplos 32.6 y 32.7.)



Términos clave

onda electromagnética, *1093*
ecuaciones de Maxwell, *1093*
radiación electromagnética, *1094*
espectro electromagnético, *1095*
luz visible, *1095*
onda plana, *1097*
onda transversal, *1097*
polarización, *1099*
polarizada linealmente, *1099*
ecuación de onda, *1100*
índice de refracción, *1105*
densidad de energía, *1106*
vector de Poynting, *1107*
intensidad, *1107*
presión de radiación, *1110*
onda estacionaria, *1111*
plano nodal, *1112*
plano antinodal, *1112*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Los metales son reflejantes porque son buenos conductores de la electricidad. Cuando una onda electromagnética choca con un conductor, el campo eléctrico de la onda establece corrientes en la superficie del conductor que generan una onda reflejada. En el caso de un conductor perfecto, esta onda reflejada es tan intensa como la onda incidente. Los metales empañados son menos brillantes porque su superficie está oxidada y es menos conductora; si se pule el metal, se elimina el óxido y el metal conductor queda expuesto.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

32.1 Respuestas: *a*) no, *b*) no Una onda puramente eléctrica tendría un campo eléctrico variable. Un campo así necesariamente genera un campo magnético de acuerdo con la ley de Ampère, ecuación (29.20), por lo que es imposible que exista una onda puramente eléctrica. De la misma forma, es imposible una onda puramente magnética: el campo magnético variable en una onda de este tipo daría origen en forma automática a un campo eléctrico, según la ley de Faraday, ecuación (29.21).

32.2 Respuestas: *a*) positiva en la dirección *y*, *b*) negativa en la dirección *x*, *c*) positiva en la dirección *y* Podemos verificar estas respuestas utilizando la regla de la mano derecha para demostrar que $\vec{E} \times \vec{B}$ en cada caso está en la dirección de propagación, o por medio de la regla que se ilustra en la figura 32.9.

32.3 Respuesta: iv) En una onda electromagnética plana ideal, en cualquier instante, los campos son los mismos en todos los puntos en un plano perpendicular a la dirección de propagación. La onda plana descrita por las ecuaciones (32.17) se propaga en la dirección x, de manera que los campos dependen de la coordenada x y del tiempo t, pero *no* de las coordenadas y ni z.

32.4 Respuestas: *a*) i) y iii), *b*) ii) y iv), *c*) i) y iii), *d*) ii) y iv) Tanto la densidad de energía u como la magnitud del vector de Poynting S son máximas donde los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen sus magnitudes máximas. (La dirección de los campos no importa.) De acuerdo con la figura 32.13, esto ocurre en $x = 0$ y $x = \lambda/2$. Tanto u como S tienen un valor mínimo de cero; eso sucede cuando $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales a cero. De acuerdo con la figura 32.13, esto ocurre en $x = \lambda/4$ y $x = 3\lambda/4$.

32.5 Respuesta: no Hay lugares donde $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo momento (en las paredes) y la densidad de energía eléctrica $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ siempre es igual a cero. También hay lugares donde $\vec{B} = \mathbf{0}$ en todo momento (sobre el plano localizado en el punto medio entre las paredes) y la densidad de energía magnética $B^2/2\mu_0$ siempre es cero. Sin embargo, *no* hay lugares donde tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ sean siempre cero. Por consiguiente, la densidad de energía en cualquier punto de la onda estacionaria siempre es diferente de cero.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P32.1. Si se miden los campos eléctrico y magnético en un punto del espacio donde hay una onda electromagnética, ¿es posible determinar la dirección de donde proviene la onda? Explique su respuesta.

P32.2. De acuerdo con la ley de Ampère, ¿es posible tener al mismo tiempo una corriente de conducción y una corriente de desplazamiento? ¿Es posible que los efectos de las dos clases de corriente se anulen exactamente, de manera que *no* se genere un campo magnético? Explique su respuesta.

P32.3. Dé varios ejemplos de ondas electromagnéticas que se encuentren en la vida cotidiana. ¿En qué se parecen? ¿En qué difieren?

P32.4. En ocasiones se observa que los anuncios de neón, situados cerca de una estación de radio potente, brillan un poco durante la noche, aunque no estén encendidos. ¿Qué es lo que ocurre?

P32.5. ¿La polarización es una propiedad de todas las ondas electromagnéticas, o es exclusiva de la luz visible? ¿Las ondas sonoras se polarizan? ¿Cuál diferencia fundamental de las propiedades de las ondas está implicada? Explique su respuesta.

P32.6. Suponga que una carga puntual positiva q inicialmente se encuentra en reposo sobre el eje x, en la trayectoria de la onda electromagnética plana descrita en la sección 32.2. ¿La carga se moverá después de que el frente de onda la alcance? Si no es así, ¿por qué? Si la carga se mueve, describa su movimiento en términos cualitativos. (Recuerde que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo valor en todos los puntos detrás del frente de onda.)

P32.7. El haz de luz de un reflector llega a tener una magnitud de campo eléctrico de 1000 V/m, la cual corresponde a una diferencia de potencial de 1500 V entre la cabeza y los pies de una persona de 1.5 m de estatura iluminada por el reflector. ¿Esto provoca que la persona sienta una descarga eléctrica fuerte? ¿Por qué?

P32.8. Para cierta onda sinusoidal de intensidad I, la amplitud del campo magnético es B. ¿Cuál sería la amplitud (en términos de B) de una onda similar con el doble de intensidad?

P32.9. La amplitud del campo magnético de la onda electromagnética del láser descrito en el ejemplo 32.1 (sección 32.3) es alrededor de 100 veces mayor que el campo magnético terrestre. Si con la luz de ese láser se iluminara una brújula, ¿debemos esperar que la aguja se desvíe? ¿Por qué?

P32.10. La mayoría de los automóviles tienen antenas verticales para recibir emisiones de radio. Explique qué indica esto acerca de la dirección de polarización de $\vec{E}$ en las ondas de radio usadas en las transmisiones.

P32.11. Si un haz de luz tiene cantidad de movimiento, ¿una persona que sostiene una linterna de mano debería sentir un retroceso análogo al de un rifle al ser disparado? ¿Por qué no se observa este retroceso en la realidad?

P32.12. Una fuente de luz irradia una onda electromagnética sinusoidal uniformemente en todas direcciones. Esta onda ejerce una presión media p sobre una superficie perfectamente reflejante situada a una distancia R de ella. ¿Cuál es la presión media (en términos de p) que ejercería esta onda sobre una superficie perfectamente absorbente ubicada al doble de distancia de la fuente?

P32.13. ¿Tiene energía una onda electromagnética *estacionaria*? ¿Tiene cantidad de movimiento? ¿Sus respuestas a estas preguntas son las mismas para una onda *viajera*? ¿Por qué?

P32.14. Cuando se maneja sobre el nivel superior del Puente de la Bahía hacia el oeste, de Oakland a San Francisco, es fácil captar varias estaciones de radio en el receptor del automóvil. Pero cuando se viaja hacia el este sobre el nivel inferior del puente, que tiene vigas de acero a ambos lados para sostener el nivel superior, la recepción del radio es mucho más deficiente. ¿A qué se debe esta diferencia?

Ejercicios

Sección 32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

32.1. *a*) ¿Cuánto tiempo le toma a la luz viajar de la Luna a la Tierra, una distancia de 384,000 km? *b*) La luz de la estrella Sirio tarda 8.61 años para llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia, en kilómetros, de la estrella Sirio a la Tierra?

32.2. Fantasmas en el televisor. En una transmisión de televisión se forman imágenes fantasma cuando la señal de la transmisora viaja al receptor tanto en forma directa como indirecta después de reflejarse en un edificio o alguna otra masa metálica grande. En un televisor de 25 pulgadas, el fantasma aparece aproximadamente 1.0 cm a la derecha de la imagen principal, si la señal reflejada llega 0.60 μs después de la señal principal. En este caso, ¿cuál es la diferencia de longitud entre las trayectorias de las dos señales?

32.3. Para una onda electromagnética que se propaga en el aire, determine su frecuencia si tiene una longitud de onda de *a*) 5.0 km; *b*) 5.0 m; *c*) 5.0 μm; *d*) 5.0 nm.

32.4. Radiación ultravioleta. Hay dos categorías de luz ultravioleta. La ultravioleta A (UVA) tiene una longitud de onda que varía de 320 nm a 400 nm. No es tan dañina para la piel y es necesaria para la producción de vitamina D. La UVB, con longitud de onda entre 280 nm a 320 nm, es mucho más peligrosa porque causa cáncer de piel. *a*) Encuentre los intervalos de frecuencia de la UVA y la UVB. *b*) ¿Cuáles son los intervalos de los números de onda para la UVA y la UVB?

Sección 32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales

32.5. Una onda electromagnética sinusoidal, que tiene un campo magnético de amplitud 1.25 μT y longitud de onda de 432 nm, viaja en la dirección $+x$ a través del espacio vacío. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de esta onda? *b*) ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico asociado? *c*) Escriba las ecuaciones para los campos eléctrico y magnético como funciones de x y t en la forma de las ecuaciones (32.17).

32.6. Una onda electromagnética con longitud de onda de 435 nm viaja en el vacío en la dirección $-z$. El campo eléctrico tiene una amplitud de 2.70×10^{-3} V/m y es paralelo al eje x. ¿Cuáles son *a*) la frecuencia, y *b*) la amplitud del campo magnético? *c*) Escriba las ecuaciones vectoriales para $\vec{\boldsymbol{E}}(z, t)$ y $\vec{\boldsymbol{B}}(z, t)$.

32.7. Una onda electromagnética sinusoidal con frecuencia de 6.10×10^{14} Hz viaja en el vacío en la dirección $+z$. El campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ es paralelo al eje y y tiene amplitud de 5.80×10^{-4} T. Escriba las ecuaciones vectoriales para $\vec{\boldsymbol{E}}(z, t)$ y $\vec{\boldsymbol{B}}(z, t)$.

32.8. El campo eléctrico de una onda electromagnética sinusoidal obedece la ecuación $E = -(375 \text{ V/m}) \operatorname{sen}[(5.97 \times 10^{15} \text{ rad/s})t + (1.99 \times 10^{7} \text{ rad/m})x]$. *a*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de esta onda? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia, la longitud de onda y el periodo de la onda? ¿Esta luz es visible para los humanos? *c*) ¿Cuál es la rapidez de la onda?

32.9. Una onda electromagnética tiene un campo eléctrico dado por $\vec{\boldsymbol{E}}(y, t) = -(3.10 \times 10^{5} \text{ V/m})\hat{\boldsymbol{k}} \operatorname{sen}[ky - (12.65 \times 10^{12} \text{ rad/s})t]$. *a*) ¿En qué dirección viaja la onda? *b*) ¿Cuál es su longitud de onda? *c*) Escriba la ecuación vectorial para $\vec{\boldsymbol{B}}(y, t)$.

32.10. Una onda electromagnética tiene un campo magnético dado por $\vec{\boldsymbol{B}}(x, t) = (8.25 \times 10^{-9} \text{ T})\hat{\boldsymbol{j}} \operatorname{sen}[(1.38 \times 10^{4} \text{ rad/m})x + \omega t]$. *a*) ¿En qué dirección viaja la onda? *b*) ¿Cuál es la frecuencia f de la onda? *c*) Escriba la ecuación vectorial para $\vec{\boldsymbol{E}}(x, t)$.

32.11. La estación de radio WCCO en Minneapolis transmite su señal con una frecuencia de 830 kHz. En un punto a cierta distancia del transmisor, la amplitud del campo magnético de la onda electromagnética de WCCO es de 4.82×10^{-11} T. Calcule *a*) la longitud de onda; *b*) el número de la onda; *c*) la frecuencia angular; *d*) la amplitud del campo eléctrico.

32.12. La amplitud del campo eléctrico cerca de cierto trasmisor de radio es de 3.85×10^{-3} V/m. ¿Cuál es la amplitud de $\vec{\boldsymbol{B}}$? ¿Cómo se compara esta magnitud con la del campo terrestre?

32.13. Una onda electromagnética con frecuencia de 5.70×10^{14} Hz se propaga con una rapidez de 2.17×10^{8} m/s en cierta pieza de vidrio. Encuentre *a*) la longitud de onda en el vidrio; *b*) la longitud de onda de una onda de la misma frecuencia que se propaga en el aire; *c*) el índice de refracción n del vidrio para una onda electromagnética con esta frecuencia; *d*) la constante dieléctrica para el vidrio a esta frecuencia, suponiendo que la permeabilidad relativa es igual a 1.

32.14. Una onda electromagnética con frecuencia de 65.0 Hz viaja en un material magnético aislante que tiene constante dieléctrica de 3.64 y permeabilidad relativa de 5.18 a esta frecuencia. El campo eléctrico tiene una amplitud de 7.20×10^{-3} V/m. *a*) ¿Cuál es la rapidez de propagación de la onda? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda? *c*) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético? *d*) ¿Cuál es la intensidad de la onda?

Sección 32.4 Energía y cantidad de movimiento de las ondas electromagnéticas

32.15. Campos de una bombilla eléctrica. Una bombilla incandescente de 75 W se puede modelar en forma razonable como una esfera de 6.0 cm de diámetro. Es común que sólo el 5% de la energía se convierta en luz visible; el resto consiste sobre todo en radiación infrarroja invisible. *a*) ¿Cuál es la intensidad de la luz visible (en W/m^2) en la superficie de la bombilla? *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en esta superficie, para una onda sinusoidal con esta intensidad?

32.16. Considere cada una de las siguientes orientaciones de campos eléctricos y magnéticos. En cada caso indique cuál es la dirección de propagación de la onda. *a*) $\vec{\boldsymbol{E}} = E\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{B}} = -B\hat{\boldsymbol{\jmath}}$; *b*) $\vec{\boldsymbol{E}} = E\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{\imath}}$; *c*) $\vec{\boldsymbol{E}} = -E\hat{\boldsymbol{k}}$, $\vec{\boldsymbol{B}} = -B\hat{\boldsymbol{\imath}}$; *d*) $\vec{\boldsymbol{E}} = E\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\vec{\boldsymbol{B}} = -B\hat{\boldsymbol{k}}$.

32.17. Una onda electromagnética sinusoidal se propaga en el vacío en la dirección $+z$. Si en un instante específico y en cierto punto del espacio el campo eléctrico está en la dirección $+x$ y tiene magnitud de 4.00 V/m, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético de la onda en el mismo punto del espacio y en el mismo instante del tiempo?

32.18. Una onda electromagnética sinusoidal de una estación de radio pasa en forma perpendicular a través de una ventana abierta con área de 0.500 m^2. En la ventana, el campo eléctrico de la onda tiene un valor rms (eficaz) de 0.0200 V/m. ¿Cuánta energía transporta esta onda a través de la ventana durante un comercial de 30.0 s?

32.19. Prueba de un transmisor espacial de radio. Usted es un especialista en misiones de la NASA y está en su primer vuelo a bordo del transbordador espacial. Gracias a sus exhaustivos estudios de física, le han asignado la tarea de evaluar el desempeño de un nuevo transmisor de radio a bordo de la Estación Espacial Internacional (EEI). Encaramado en el brazo móvil del transbordador, usted apunta un detector sensible hacia la EEI, que se localiza a 2.5 km de distancia, y encuentra que la amplitud de campo eléctrico de las ondas de radio provenientes del transmisor en la EEI es de 0.090 V/m, y que la frecuencia de las ondas es de 244 MHz. Determine lo siguiente: *a*) la intensidad de la onda de radio donde usted se encuentra; *b*) la amplitud de campo magnético de la onda donde usted se encuentra; *c*) la potencia de salida

total del transmisor de radio de la EEI. *d*) ¿Qué suposiciones hizo, si es el caso, para sus cálculos?

32.20. La intensidad de un rayo láser cilíndrico es de 0.800 W/m^2. El área de sección transversal del haz es de 3.0×10^{-4} m^2, y la intensidad es uniforme en toda la sección transversal del rayo. *a*) ¿Cuál es la potencia de salida media del láser? *b*) ¿Cuál es el valor rms (eficaz) del campo eléctrico en el rayo?

32.21. Una sonda espacial situada a una distancia de 2.0×10^{10} m de una estrella mide la intensidad total de la radiación electromagnética de la estrella, la cual resulta ser de 5.0×10^{3} W/m^2. Si la estrella irradia de manera uniforme en todas direcciones, ¿cuál es la potencia de salida media total?

32.22. Una onda electromagnética sinusoidal emitida por un teléfono celular tiene una longitud de onda de 35.4 cm y una amplitud de campo eléctrico de 5.40×10^{-2} V/m a una distancia de 250 m de la antena. Calcule *a*) la frecuencia de la onda; *b*) la amplitud del campo magnético; *c*) la intensidad de la onda.

32.23. Una fuente de luz monocromática con una potencia de salida de 60.0 W irradia luz uniformemente en todas direcciones con una longitud de onda de 700 nm. Calcule $E_{máx}$ y $B_{máx}$ para la luz de 700 nm a una distancia de 5.00 m de la fuente.

32.24. Con respecto a la onda electromagnética representada por la ecuación (32.19), demuestre que el vector de Poynting *a*) tiene la misma dirección que la propagación de la onda, y *b*) tiene una magnitud media dada por las ecuaciones (32.29).

32.25. Una fuente de luz intensa irradia uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 5.0 m de la fuente, la presión de radiación sobre una superficie perfectamente absorbente es de 9.0×10^{-6} Pa. ¿Cuál es la potencia de salida total media de la fuente?

32.26. Emisora de televisión. La estación de televisión pública KQED de San Francisco emite una señal de radio sinusoidal con potencia de 316 kW. Suponga que la onda se difunde de manera uniforme en un hemisferio sobre el terreno. En una casa localizada a 5.00 km de la antena, *a*) ¿qué presión media ejerce esta onda sobre una superficie totalmente reflejante? *b*) ¿cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda?, y *c*) ¿cuál es la densidad media de la energía que transporta esta onda? *d*) Para la densidad de energía del inciso *c*), ¿qué porcentaje se debe al campo eléctrico y qué porcentaje al campo magnético?

32.27. Si la densidad de la luz solar directa en cierto punto sobre la superficie de la Tierra es de 0.78 kW/m^2, calcule *a*) la densidad de cantidad de movimiento media (cantidad de movimiento por unidad de volumen) de la luz solar, y *b*) la tasa de flujo media de la cantidad de movimiento de la luz solar.

32.28. En las instalaciones del Simulador Espacial de 25 pies en el Jet Propulsion Laboratory de la NASA, una serie de lámparas de arco elevadas producen luz con una intensidad de 2500 W/m^2 sobre el piso de las instalaciones. (Esto simula la intensidad de la luz solar cerca del planeta Venus.) Calcule la presión media de la radiación (en pascales y en atmósferas) sobre *a*) una sección totalmente absorbente del piso, y *b*) una sección totalmente reflejante del piso. *c*) Calcule la densidad de cantidad de movimiento media (cantidad de movimiento por unidad de volumen) de la luz en el piso.

32.29. Compruebe que todas las expresiones en las ecuaciones (32.27) son equivalentes a la ecuación (32.26).

Sección 32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias

32.30. Se establece una onda electromagnética estacionaria con frecuencia de 750 MHz, en el aire, conectando dos planos conductores separados por una distancia de 80.0 cm. ¿En qué posiciones entre los planos podría colocarse una carga puntual en reposo de manera que *permaneciera* en reposo? Explique su respuesta.

32.31. Una onda electromagnética estacionaria en cierto material tiene una frecuencia de 2.20×10^{10} Hz. Los planos nodales de $\vec{B}$ están separados por una distancia de 3.55 mm. Determine *a*) la longitud de onda de la onda en este material; *b*) la distancia entre planos nodales adyacentes del campo $\vec{E}$; *c*) la rapidez de propagación de la onda.

32.32. Una onda electromagnética estacionaria en el aire tiene una frecuencia de 75.0 MHz. *a*) ¿Cuál es la distancia entre planos nodales del campo $\vec{E}$? *b*) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{E}$ y el plano nodal más cercano de $\vec{B}$?

32.33. Una onda electromagnética estacionaria en cierto material tiene una frecuencia de 1.20×10^{10} Hz y rapidez de propagación de 2.10×10^{8} m/s. *a*) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{B}$ y el plano antinodal más cercano de $\vec{B}$? *b*) ¿Cuál es la distancia entre un plano antinodal de $\vec{E}$ y el plano antinodal más cercano de $\vec{B}$? *c*) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{E}$ y el plano nodal más cercano de $\vec{B}$?

32.34. Demuestre que los campos eléctricos y magnéticos de ondas estacionarias dados por las ecuaciones (32.34) y (32.35), *a*) satisfacen la ecuación de onda, ecuación (32.15), y *b*) satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14).

32.35. Horno de microondas. Las microondas en cierto horno tienen una longitud de onda de 12.2 cm. *a*) ¿Cuál debe ser el ancho del horno para que contenga cinco planos antinodales del campo eléctrico sobre su anchura en el patrón de onda estacionaria? *b*) ¿Cuál es la frecuencia de esas microondas? *c*) Suponga que hubo un error de manufactura y el horno se hizo 5.0 cm más largo de lo especificado en el inciso *a*). En este caso, ¿cuál tendría que ser la frecuencia de las microondas para que todavía hubiera cinco planos antinodales del campo eléctrico sobre la anchura del horno?

Problemas

32.36. Considere una onda electromagnética sinusoidal con campos $\vec{E} = E_{máx}\hat{j}\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t)$ y $\vec{B} = B_{máx}\hat{k}\,\mathrm{sen}\,(kx - \omega t + \phi)$, con $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Demuestre que si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deben satisfacer las ecuaciones (32.12) y (32.14), entonces $E_{máx} = cB_{máx}$ y $\phi = 0$. (El resultado $\phi = 0$ significa que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ oscilan en fase.)

32.37. Demuestre que el campo *magnético* $B_z(x, t)$ de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección $+x$ debe satisfacer la ecuación (32.15). (*Sugerencia:* obtenga la derivada parcial de la ecuación (32.12) con respecto a t y la derivada parcial de la ecuación (32.14) con respecto a x. Después combine los resultados.)

32.38. Con respecto a una onda electromagnética sinusoidal en el vacío, como la descrita por la ecuación (32.16), demuestre que la densidad de energía *media* del campo eléctrico es igual que la del campo magnético.

32.39. Un satélite que se encuentra a 575 km sobre la superficie terrestre transmite ondas electromagnéticas sinusoidales con frecuencia de 92.4 MHz uniformemente en todas direcciones, con una potencia de 25.0 kW. *a*) ¿Cuál es la intensidad de estas ondas cuando alcanzan un receptor en la superficie terrestre directamente abajo del satélite? *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en el receptor? *c*) Si el receptor tiene un panel totalmente absorbente que mide 15.0 cm por 40.0 cm, orientado con su plano perpendicular a la dirección en que viajan las ondas, ¿cuál es la fuerza media que ejercen estas ondas sobre el panel? ¿Esta fuerza es suficientemente grande para provocar efectos significativos?

32.40. Una onda electromagnética plana sinusoidal en el aire tiene una longitud de onda de 3.84 cm y una amplitud de campo $\vec{E}$ de 1.35 V/m. *a*) ¿Cuál es la frecuencia? *b*) ¿Cuál es la amplitud de campo $\vec{B}$? *c*) ¿Cuál es la intensidad? *d*) ¿Cuál es la fuerza media que ejerce esta radiación sobre una superficie totalmente absorbente con área de 0.240 m^2, perpendicular a la dirección de propagación?

32.41. Un rayo láser pequeño de helio-neón emite luz roja visible con potencia de 3.20 mW en un rayo cuyo diámetro es de 2.50 mm. *a*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la luz? *b*) ¿Cuáles son las densidades de energía medias asociadas con el campo eléctrico y con el campo magnético? *c*) ¿Cuál es la energía total contenida en un tramo del haz de 1.00 m de longitud?

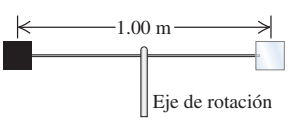
32.42. Considere una onda electromagnética plana como la que se ilustra en la figura 32.5, pero en la que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ también tienen componentes en la dirección x (a lo largo de la dirección de propagación de la onda). Con base en la ley de Gauss de los campos eléctricos y magnéticos, demuestre que las componentes E_x y B_x deben ser iguales a cero de manera que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ sean transversales. (*Sugerencia:* use una superficie gaussiana como la que se ilustra en la figura 32.6. De las dos caras paralelas al plano yz elija una para que esté a la izquierda del frente de onda y la otra para que se encuentre a la derecha.)

32.43. El Sol emite energía en forma de ondas electromagnéticas a razón de 3.9×10^{26} W. Esta energía es producto de reacciones nucleares en las profundidades del interior del Sol. *a*) Calcule la intensidad de la radiación electromagnética y la presión de radiación sobre un objeto absorbente en la superficie del Sol (radio $r = R = 6.96 \times 10^5$ km), y en $r = R/2$ en el interior del Sol. Ignore la dispersión que sufren las ondas cuando éstas salen radialmente desde el centro del Sol. Compare los resultados con los valores dados en la sección 32.4 para la luz solar inmediatamente antes de entrar a la atmósfera terrestre. *b*) La presión gaseosa en la superficie del Sol es de alrededor de 1.0×10^4 Pa; en $r = R/2$, la presión gaseosa calculada a partir de modelos del Sol es de aproximadamente 4.7×10^{13} Pa. Comparando con los resultados en el inciso *a*), ¿sería de esperar que la presión de radiación sea un factor importante para determinar la estructura del Sol? ¿Por qué?

32.44. Se ha propuesto colocar satélites que recolecten energía solar en la órbita terrestre. La energía así obtenida se enviaría a la Tierra en forma de un haz de radiación de microondas. En el caso de un haz de microondas con área de sección transversal de 36.0 m^2 y una potencia total de 2.80 kW en la superficie terrestre, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico del haz en la superficie del planeta?

32.45. Dos reflectores cuadrados, cada uno con 1.50 cm de lado y masa de 4.00 g, están ubicados en los extremos opuestos de una varilla delgada de 1.00 m, extremadamente ligera, que puede girar sin fricción en un vacío alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro (figura 32.24). Estos reflectores son suficientemente pequeños como para ser tratados como masas puntuales en los cálculos de momento de inercia. Los dos reflectores están iluminados en una cara por una onda luminosa sinusoidal que tiene un campo eléctrico con amplitud de 1.25 N/C y que cae uniformemente en ambas superficies y siempre llega a ellas en forma perpendicular al plano de las superficies. Un reflector tiene un recubrimiento perfectamente absorbente, y el otro tiene un recubrimiento perfectamente reflejante. ¿Cuál es la aceleración angular de este dispositivo?

Figura 32.24 Problema 32.45.



32.46. El plano de una superficie plana es perpendicular a la dirección de propagación de una onda electromagnética con intensidad I. La superficie absorbe una fracción w de la intensidad incidente, donde $0 \leq w \leq 1$, y refleja el resto. *a*) Demuestre que la presión de radiación sobre la superficie es igual a $(2 - w)I/c$. *b*) Demuestre que esta expresión da los resultados correctos para una superficie i) totalmente absorbente y ii) totalmente reflejante. *c*) En el caso de una intensidad incidente de 1.40 kW/m^2, ¿cuál es la presión de radiación para una absorción del 90%? ¿Y para una reflexión del 90%?

32.47. Un conductor cilíndrico con sección transversal circular tiene un radio a y resistividad ρ y transporta una corriente constante I. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto situado inmediatamente adentro del alambre, a una distancia a de su eje? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de campo magnético $\vec{B}$ en el mismo punto? *c*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector de Poynting $\vec{S}$ en el mismo punto? (La dirección de $\vec{S}$ es aquélla en la que fluye la energía electromagnética hacia dentro o hacia fuera del conductor.) *d*) Con base en el resultado del inciso *c*, determine la tasa de flujo de la energía hacia el volumen que ocupa un tramo de longitud l del conductor. (*Sugerencia:* integre $\vec{S}$ sobre la superficie de este volumen.) Compare su resultado con la tasa de generación de energía térmica en el mismo volumen. Analice por qué la energía disipada en un conductor portador de corriente, en virtud de su resistencia, puede verse como si entrara a través de los lados cilíndricos del conductor.

32.48. Una fuente de ondas electromagnéticas sinusoidales irradia uniformemente en todas direcciones. A 10.0 cm de esta fuente, la amplitud del campo eléctrico se mide y resulta ser de 1.50 N/C. ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico a una distancia de 20.0 cm desde la fuente?

32.49. Una espira circular de alambre se puede utilizar como antena. Si una antena de 18.0 cm de diámetro se localiza a 2.50 km de una fuente con 95.0 MHz y potencia total de 55.0 kW, ¿cuál es la fem máxima inducida en la espira? (Suponga que el plano de la espira de la antena es perpendicular a la dirección del campo magnético de la radiación y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones.)

32.50. En cierto experimento, un transmisor de radio emite ondas electromagnéticas sinusoidales con frecuencia de 110.0 MHz en direcciones opuestas dentro de una cavidad angosta con reflectores en ambos extremos, lo que hace que se forme un patrón de ondas estacionarias. *a*) ¿Qué tan separados están los planos nodales del campo magnético? *b*) Si se determina que el patrón de onda estacionario está en su octavo armónico, ¿qué tan larga es la cavidad?

32.51. Linterna al rescate. Usted es el único tripulante de la nave espacial interplanetaria *T:1339 Vorga*, que realiza viajes regulares de carga entre la Tierra y las colonias mineras en el cinturón de asteroides. Cierto día, se encuentra trabajando afuera de la nave a una distancia de 2.0 UA del Sol [1 UA (unidad astronómica) es la distancia media entre la Tierra y el Sol: 149,600,000 km)]. Por desgracia, usted pierde contacto con el casco de la nave y comienza a ir a la deriva en el espacio. Entonces intenta regresar hacia la nave con ayuda de los cohetes de su traje espacial, pero el combustible se agota y éstos dejan de funcionar antes de que usted consiga regresar a la nave. Está en problemas, flotando a 16.0 m de la nave espacial con velocidad cero con respecto de ella. Por fortuna, usted lleva una linterna de 200 W y la enciende para utilizar su haz como "cohete de luz" que lo impulse de regreso a su nave. *a*) Si usted, su traje espacial y la linterna tienen una masa combinada de 150 kg, ¿cuánto tiempo tardará en regresar a la nave? *b*) ¿Hay otra manera en que pudiera emplear la linterna para regresar a la nave?

32.52. Nicola Tesla, inventor del siglo XIX, propuso transmitir energía eléctrica por medio de ondas electromagnéticas sinusoidales. Suponga que se pretende transmitir energía eléctrica en un haz con área de sección transversal de 100 m^2. ¿Qué amplitudes de campo eléctrico y magnético se requieren para transmitir una cantidad de potencia equivalente a la que transportan las líneas de transmisión modernas (que conducen voltajes y corrientes del orden de 500 kV y 1000 A)?

32.53. Sistema de posicionamiento global (GPS). La red GPS consiste en 24 satélites, cada uno de los cuales completa a diario dos órbitas alrededor de la Tierra. Cada satélite transmite una señal electromagnética sinusoidal de 50.0 W (o incluso menos) en dos frecuencias, una de las cuales es 1575.42 MHz. Suponga que un satélite transmite la mitad de su potencia en cada frecuencia y que las ondas viajan uniformemente en forma de hemisferio hacia abajo. *a*) ¿Cuál es la intensidad media que recibe un receptor GPS en el terreno directamente abajo el satélite? (*Sugerencia:* primero utilice las leyes de Newton para encontrar la altitud del satélite.) *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético del receptor GPS del inciso *a*) y cuánto tiempo necesita la señal para llegar a él? *c*) Si el receptor es un panel cuadrado de 1.50 cm de lado que absorbe todo el haz, ¿cuál es la presión media que ejerce la señal sobre él? *d*) ¿Cuál es la longitud de onda a la que debe sintonizarse el receptor?

32.54. La NASA está dando importancia al concepto de *navegación solar*. Un velero solar utiliza una vela grande y de poca masa, y la energía y la cantidad de movimiento de la luz del Sol como elemento de propulsión. *a*) ¿La vela debe ser absorbente o reflejante? ¿Por qué? *b*) La producción total de potencia del Sol es de 3.9×10^{26} W. ¿Qué

tan grande debe ser una vela para impulsar un vehículo espacial de 10,000 kg contra la fuerza gravitacional del Sol? Exprese su resultado en kilómetros cuadrados. *c*) Explique por qué la respuesta del inciso *b*) es independiente de la distancia con respecto al Sol.

32.55. El espacio interplanetario contiene muchas partículas pequeñas conocidas como *polvo interplanetario*. La presión de radiación proveniente del Sol pone un límite inferior al tamaño de esas partículas. Para comprender el origen de este límite, considere una partícula esférica de polvo de radio R y densidad de masa ρ. *a*) Escriba una expresión para la fuerza gravitacional que ejerce el Sol (masa M) sobre esta partícula cuando esta última se encuentra a una distancia r del Sol. *b*) Sea L la luminosidad del Sol, equivalente a la tasa con la que emite energía en forma de radiación electromagnética. Calcule la fuerza ejercida sobre la partícula (totalmente absorbente) debido a la presión de radiación solar, recordando que la intensidad de la radiación solar también depende de la distancia r. El área pertinente es el área de sección transversal de la partícula, *no* su área total. Como parte de la respuesta, explique por qué es así. *c*) La densidad de masa de una partícula representativa de polvo interplanetario es de alrededor de 3000 kg/m^3. Determine el radio de la partícula R tal que las fuerzas gravitacional y de radiación que actúan sobre la partícula son de igual magnitud. La luminosidad del Sol es de 3.0×10^{26} W. ¿La respuesta depende de la distancia que hay entre la partícula y el Sol? ¿Por qué? *d*) Explique por qué es poco probable que en el Sistema Solar se encuentren partículas de polvo con un radio menor que el calculado en el inciso *c*). [*Sugerencia:* obtenga la razón de las dos expresiones de fuerza encontradas en los incisos *a*) y *b*).]

Problemas de desafío

32.56. El átomo clásico de hidrógeno. Se puede considerar que el electrón de un átomo de hidrógeno describe una órbita circular con radio de 0.0529 nm y energía cinética de 13.6 eV. Si el electrón se comporta de acuerdo con la física clásica, ¿cuánta energía irradiaría por segundo? (Véase el problema de desafío 32.57.) ¿Qué le dice esto sobre el uso de la física clásica para describir el átomo?

32.57. Las cargas que se aceleran emiten radiación electromagnética. La tasa con que se emite energía desde una de tales cargas q, con aceleración a, está dada por la expresión

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde c es la rapidez de la luz. *a*) Verifique que esta ecuación es dimensionalmente correcta. *b*) Si un protón con energía cinética de 6.0 MeV viaja en un acelerador de partículas en una órbita circular con radio de 0.750 m, ¿qué fracción de su energía irradia por segundo? *c*) Considere un electrón que describe la misma órbita con igual rapidez. ¿Qué fracción de su energía irradia por segundo?

32.58. Las ondas electromagnéticas se propagan en forma muy diferente en los *conductores* que en los dieléctricos o en el vacío. Si la resistividad del conductor es suficientemente baja (es decir, si es un conductor suficientemente bueno), el campo eléctrico oscilante de la onda da origen a una corriente de conducción oscilante mucho más grande que la corriente de desplazamiento. En este caso, la ecuación de onda de un campo eléctrico $\vec{E}(x, t) = E_y(x, t)\hat{j}$ que se propaga en la dirección $+x$ adentro de un conductor es

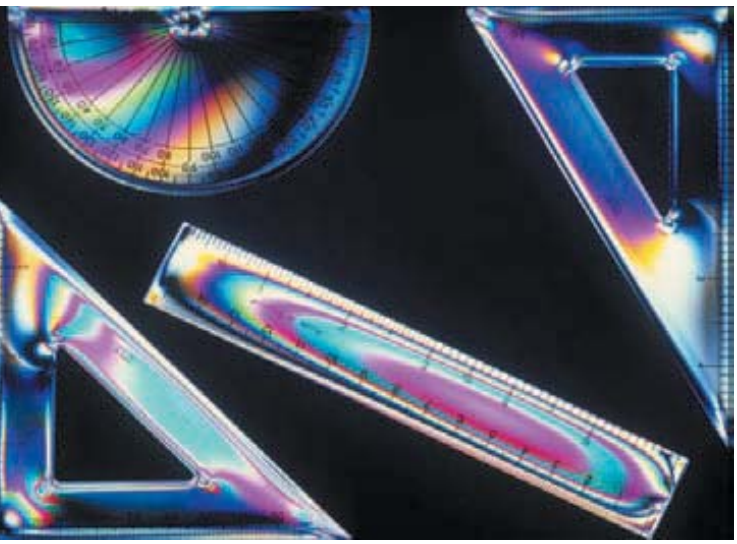
$$\frac{\partial^2 E_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t}$$

donde μ es la permeabilidad del conductor y ρ es su resistividad. *a*) Una solución para esta ecuación de onda es

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}} e^{-k_C x} \operatorname{sen}(k_C x - \omega t)$$

donde $k_C = \sqrt{\omega\mu/2\rho}$. Compruebe esto sustituyendo $E_y(x, t)$ en la ecuación de onda anterior. *b*) El término exponencial indica que el campo eléctrico disminuye en amplitud conforme se propaga. Explique por qué ocurre esto. (*Sugerencia:* considere que el campo realiza trabajo para mover las cargas dentro del conductor. La corriente de estas cargas en movimiento ocasiona un calentamiento de i^2R en el interior del conductor, lo que eleva su temperatura. ¿De dónde proviene la energía para hacer esto?) *c*) Demuestre que la amplitud del campo eléctrico disminuye en un factor de $1/e$ en una distancia $1/k_C = \sqrt{2\rho/\omega\mu}$, y calcule esta distancia para una onda de radio con frecuencia $f = 1.0$ MHz en el cobre (resistividad de $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$; permeabilidad $\mu = \mu_0$). Como esta distancia es muy corta, las ondas electromagnéticas de esta frecuencia difícilmente se propagan en el cobre. En vez de ello, son reflejadas por la superficie del metal. Ésta es la razón por la que las ondas de radio no penetran el cobre ni otros metales, y por qué la recepción de radio es deficiente en el interior de una estructura metálica.

33 NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ



?Estas herramientas de dibujo están hechas de plástico transparente, pero en ellas aparecen los colores de un arco iris cuando se las coloca entre dos filtros especiales llamados polarizadores. ¿Qué es lo que produce los colores?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué son los rayos de luz y cómo se relacionan con los frentes de onda.
- Las leyes que gobiernan la reflexión y la refracción de la luz.
- Las circunstancias en las que la luz se refleja totalmente en una interfaz.
- Cómo hacer luz polarizada a partir de luz ordinaria.
- Cómo ayuda el principio de Huygens a analizar los fenómenos de reflexión y refracción.

Quienquiera que tenga ojos para percibir los colores puede gozar de los lagos azules, los desiertos ocres, los bosques verdes y los arco iris multicolores. Pero al estudiar la rama de la física llamada **óptica**, que se ocupa del comportamiento de la luz y otras ondas electromagnéticas, es posible alcanzar una apreciación más profunda del mundo visible. El conocimiento de las propiedades de la luz nos permite entender el color azul del cielo, el diseño de dispositivos ópticos tales como telescopios, microscopios, cámaras, anteojos y el ojo humano. Los mismos principios básicos de la óptica se encuentran en el corazón de los equipos modernos como el láser, la fibra óptica, los hologramas, las computadoras ópticas y las novedosas técnicas para obtener imágenes con fines médicos.

La importancia de la óptica para la física en particular y para la ciencia e ingeniería en general es tan grande que dedicaremos los siguientes cuatro capítulos a su estudio. En este capítulo comenzaremos con el análisis de las leyes de la reflexión y refracción y los conceptos de dispersión y polarización de la luz. Sobre la marcha compararemos las distintas descripciones posibles de la luz en términos de partículas, rayos y ondas, y presentaremos el principio de Huygens, un eslabón importante que relaciona los puntos de vista basados en rayos y ondas. En el capítulo 34 usaremos la descripción de la luz en términos de rayos para entender cómo funcionan los espejos y las lentes, y veremos cómo se usan éstos en instrumentos ópticos tales como cámaras, microscopios y telescopios. Exploraremos las características ondulatorias de la luz con más detalle en los capítulos 35 y 36.

33.1 La naturaleza de la luz

Hasta la época de Isaac Newton (1642-1727), la mayoría de científicos pensaban que la luz consistía en corrientes de partículas (llamadas *corpúsculos*) emitidas por las fuentes luminosas. Galileo y otros intentaron (sin éxito) medir la rapidez de la luz.

Alrededor de 1665, comenzaron a descubrirse evidencias de las propiedades *ondulatorias* de la luz. A principios del siglo XIX, las evidencias de que la luz es una onda se habían vuelto muy convincentes.

En 1873 James Clerk Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y calculó su rapidez de propagación, como se vio en el capítulo 32. Este avance, así como el trabajo experimental que inició en 1887 Heinrich Hertz, demostró en forma concluyente que la luz en verdad es una onda electromagnética.

Las dos personalidades de la luz

Sin embargo, la concepción ondulatoria de la luz no ofrece una visión completa sobre su naturaleza. Varios efectos asociados con su emisión y absorción revelan un aspecto de partícula, en el sentido en que la energía transportada por las ondas luminosas se encuentra contenida en paquetes discretos llamados *fotones* o *cuantos*. Estas propiedades aparentemente contradictorias de onda y partícula se conciliaron a partir de 1930 con el desarrollo de la electrodinámica cuántica, una teoría integral que incluye *tanto* las propiedades ondulatorias como corpusculares. La *propagación* de la luz se describe mejor con el modelo ondulatorio, pero para comprender la emisión y la absorción se requiere un enfoque corpuscular.

33.1 Un elemento calentador eléctrico emite radiación infrarroja primaria. Pero si su temperatura es suficientemente elevada también emite una cantidad apreciable de luz visible.

Las fuentes fundamentales de toda la radiación electromagnética son las cargas eléctricas en movimiento acelerado. Todos los cuerpos emiten radiación electromagnética como resultado del movimiento térmico de sus moléculas; esta radiación, llamada *radiación térmica*, es una mezcla de diferentes longitudes de onda. A temperatura suficientemente alta, toda la materia emite suficiente luz visible para ser luminosa por sí misma; un cuerpo muy caliente parece estar al "rojo vivo" (figura 33.1) o al "rojo blanco". Así, la materia caliente en cualquiera de sus formas es una fuente luminosa. Algunos ejemplos conocidos son la llama de una vela, las brasas incandescentes de una fogata, las bobinas de un calentador doméstico y el filamento de una lámpara incandescente (que, por lo general, opera a una temperatura cercana a los 3000 °C).

La luz también se produce durante las descargas eléctricas a través de gases ionizados. El brillo azuloso de las lámparas de arco de mercurio, la luz amarillo naranja de las lámparas de vapor de sodio y los distintos colores de los anuncios de "neón" nos resultan familiares. Una variación de la lámpara de arco de mercurio es la lámpara *fluorescente* (véase la figura 30.7). Esta fuente luminosa emplea un *recubrimiento fosforescente* para convertir la radiación ultravioleta de un arco de mercurio en luz visible. Esta conversión hace que las lámparas fluorescentes sean más eficientes que las incandescentes para transformar energía eléctrica en luz.

33.2 Los cirujanos oftalmólogos usan láseres para reparar retinas desprendidas y para cauterizar vasos sanguíneos en retinopatías. Las pulsaciones de luz azul verdosa son ideales para este propósito, pues atraviesan la parte transparente del ojo sin causar daño, pero son absorbidos por los pigmentos rojos de la retina.

Una fuente luminosa que ha adquirido importancia en los últimos 40 años es el *láser*. En la mayoría de fuentes luminosas, la luz es emitida de forma independiente por diferentes átomos dentro de la fuente; en contraste, en un láser los átomos son inducidos a emitir luz en forma cooperativa y coherente. El resultado es un haz muy angosto de radiación que puede llegar a tener una enorme intensidad y que está mucho más cerca de ser *monocromático* o de una sola frecuencia, en comparación con la luz de cualquier otra fuente. Los rayos láser se utilizan en medicina para hacer microcirugía, en reproductores de discos compactos y computadoras para leer la información codificada en un disco compacto o en el CD-ROM; también se emplean en la industria para cortar acero y para fundir materiales con puntos de fusión elevados, y en muchas otras aplicaciones (figura 33.2).

Sin importar cuál sea su fuente, la radiación electromagnética viaja en el vacío con la misma rapidez. Como vimos en las secciones 1.3 y 32.1 la rapidez de la luz en el vacío es

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

o 3.00×10^8 m/s, con tres cifras significativas. La duración de un segundo está definida por el reloj de cesio (véase la sección 1.3), y un metro se define como la distancia que recorre la luz en 1/299,792,458 s.

Ondas, frentes de onda y rayos

A menudo se utiliza el concepto de **frente de onda** para describir la propagación de las ondas. Presentamos este concepto en la sección 32.2 para describir el borde frontal de una onda. De manera más general, un frente de onda se define como *el lugar geométrico de todos los puntos adyacentes en los cuales la fase de vibración de una can-*

tidad física asociada con la onda es la misma. Es decir, en cualquier instante, todos los puntos del frente de onda están en la misma parte de su ciclo de variación.

Cuando arrojamos una piedra en un estanque tranquilo, los círculos de expansión formados por las crestas de onda, al igual que los círculos formados por los valles de onda intermedios, son los frentes de onda. De manera similar, cuando las ondas de sonido viajan en el aire desde una fuente puntual, o cuando la radiación electromagnética se propaga desde un emisor puntual, cualquier superficie esférica concéntrica con respecto a la fuente es un frente de onda, como se ilustra en la figura 33.3. En los diagramas del movimiento ondulatorio, por lo general, sólo se dibujan partes de unos cuantos frentes de onda, y a menudo se eligen frentes de onda consecutivos que tengan la misma fase y que, por lo tanto, estén separados por una longitud de onda, como las crestas de las olas en el agua. De manera similar, un diagrama de ondas sonoras sólo muestra las "crestas de presión", que son las superficies sobre las cuales la presión es máxima, y un diagrama de ondas electromagnéticas sólo indica las "crestas" en las que el campo eléctrico o magnético es máximo.

Será frecuente que usemos diagramas para mostrar las formas de los frentes de onda o sus secciones transversales en algún plano de referencia. Por ejemplo, cuando se irradian ondas electromagnéticas desde una pequeña fuente luminosa, es posible representar los frentes de onda como superficies esféricas concéntricas con respecto a la fuente o, como se aprecia en la figura 33.4a, mediante las intersecciones circulares de estas superficies con el plano del diagrama. Lejos de la fuente, donde los radios de las esferas son muy grandes, una sección de superficie esférica se puede considerar como un plano, y así surge una onda *plana* como las que se examinaron en las secciones 32.2 y 32.3 (figura 33.4b).

Para describir las direcciones en las que se propaga la luz, a menudo conviene representar una onda luminosa por medio de **rayos** y no por frentes de onda. Los rayos se utilizaron para describir la luz mucho tiempo antes de que su naturaleza ondulatoria estuviera firmemente establecida. En la teoría corpuscular de la luz, los rayos son las trayectorias de las partículas. Desde el punto de vista ondulatorio *un rayo es una línea imaginaria a lo largo de la dirección de propagación de la onda*. En la figura 33.4a los rayos son los radios de los frentes de onda esféricos, y en la figura 33.4b son las líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda. Cuando las ondas viajan en un material isotrópico homogéneo (un material que tiene las mismas propiedades en todas las regiones y en todas direcciones), los rayos siempre son líneas rectas normales a los frentes de onda. En una superficie de frontera entre dos materiales, como la superficie de una placa de vidrio en el aire, la rapidez de la onda y la dirección de un rayo pueden cambiar, pero los segmentos de rayo en el aire y en el vidrio son líneas rectas.

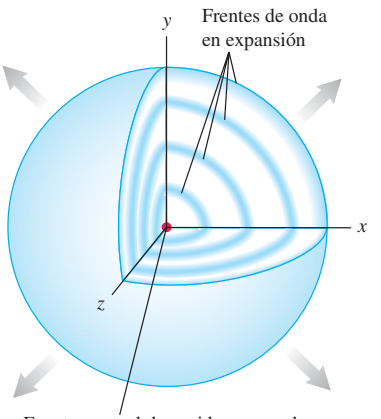
Los siguientes capítulos darán al lector muchas oportunidades de ver la interrelación de las descripciones de la luz como rayo, onda y partícula. La rama de la óptica en la cual resulta adecuada la descripción de rayos se llama **óptica geométrica**; la rama que se ocupa específicamente del comportamiento ondulatorio se llama **óptica física**. Este capítulo y el siguiente tratan sobre todo con la óptica geométrica. En los capítulos 35 y 36 estudiaremos fenómenos ondulatorios y la óptica física.

Evalúe su comprensión de la sección 33.1 Algunos cristales *no son* isotrópicos: la luz viaja a través del cristal con una rapidez mayor en ciertas direcciones que en otras. En un cristal en que la luz viaja con la misma rapidez en las direcciones x y z, pero con una rapidez mayor en la dirección y, ¿cuál sería la forma de los frentes de onda producidos por una fuente luminosa en el origen? i) Esférica, como la que se ilustra en la figura 33.3; ii) elipsoidal, aplanada a lo largo del eje y; iii) elipsoidal, estirada a lo largo del eje y.

33.2 Reflexión y refracción

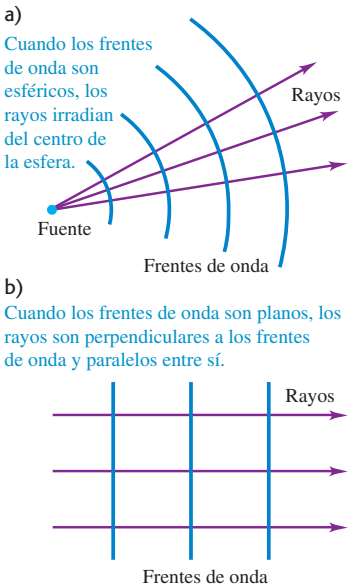
En esta sección usaremos el modelo de la luz basado en *rayos* para explorar dos de los aspectos más importantes de la propagación de la luz: **reflexión** y **refracción**. Cuando una onda luminosa incide en una interfaz lisa que separa dos materiales transparentes (como el aire y el vidrio o el agua y el vidrio), la onda en general es *reflejada* parcialmente y también *refractada* (transmitida) parcialmente hacia el segundo material, como se ilustra en la figura 33.5a. Por ejemplo, cuando usted mira a través de la ventana de un restaurante desde la calle, observa una reflexión de la escena en la calle, pero una persona en el interior del restaurante puede ver a través de la ventana la misma escena conforme la luz la alcanza por refracción.

33.3 Los frentes de onda esféricos de sonido se propagan de manera uniforme en todas direcciones desde una fuente puntual en un medio sin movimiento, como aire tranquilo, que tenga las mismas propiedades en todas las regiones y en todas las direcciones. Las ondas electromagnéticas en el vacío también se propagan como se ilustra aquí.



Fuente puntual de sonido que produce ondas sonoras esféricas (compresiones y rarefacciones alternativas del aire)

33.4 Frentes de onda (en color azul) y rayos (púrpura).



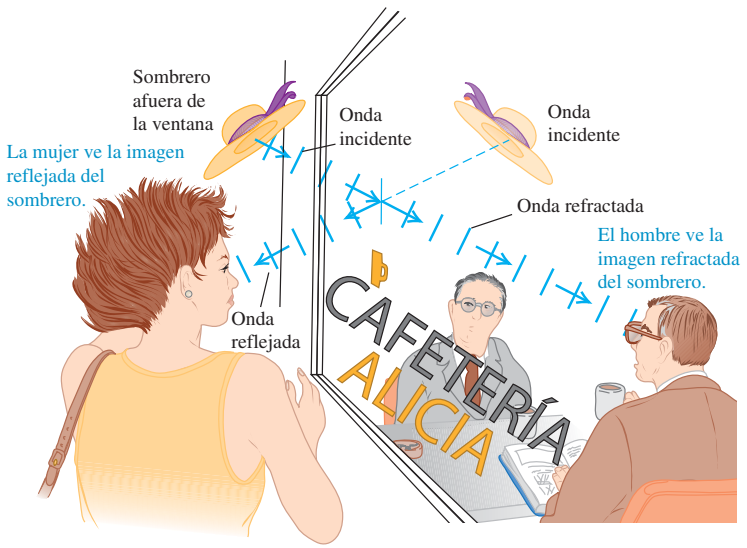
Activ Online Physics

15.1 Reflexión y refracción

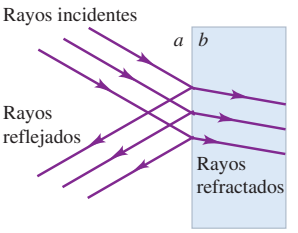
15.3 Aplicaciones de la refracción

33.5 a) Una onda plana es en parte reflejada y en parte refractada en la frontera entre dos medios (en este caso, aire y vidrio). La luz que alcanza el interior de la cafetería es refractada dos veces, una cuando entra al vidrio y otra al salir de éste. b) y c) ¿Cómo se comporta la luz en la interfaz entre el aire afuera de la cafetería (material *a*) y el vidrio (material *b*)? Para el caso que se ilustra, el material *b* tiene un índice de refracción mayor que el del material *a* ($n_b > n_a$) y el ángulo θ_b es más pequeño que θ_a.

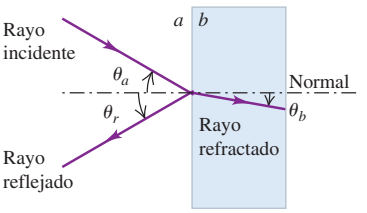
a) Ondas planas reflejadas y refractadas en una ventana



b) Las ondas en el aire del exterior y el vidrio representadas por rayos



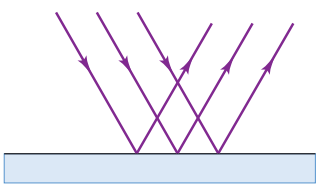
c) Representación simplificada para ilustrar sólo un conjunto de rayos



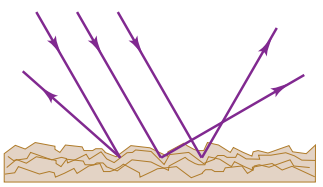
Los segmentos de ondas planas que se ilustran en la figura 33.5a pueden representarse por paquetes de rayos que forman *haces* de luz (figura 33.5b). Para simplificar, es frecuente que se dibuje un solo rayo de cada haz (figura 33.5c). La representación de estas ondas en términos de rayos es la base de la óptica geométrica. Comenzaremos nuestro estudio con el comportamiento de un rayo individual.

33.6 Dos tipos de reflexión.

a) Reflexión especular



b) Reflexión difusa



Describimos las direcciones de los rayos incidente, reflejado y refractado (transmitidos) en una interfaz lisa entre dos materiales ópticos en términos de los ángulos que forman con la *normal* (perpendicular) a la superficie en el punto de incidencia, como se ilustra en la figura 33.5c. Si la interfaz es rugosa, tanto la luz transmitida como la reflejada se dispersan en varias direcciones y no hay un ángulo único de transmisión o reflexión. La reflexión con un ángulo definido desde una superficie muy lisa se llama **reflexión especular** (del vocablo latino que significa "espejo"). La reflexión dispersa a partir de una superficie áspera se llama **reflexión difusa**. Esta diferencia se ilustra en la figura 33.6. Ambas clases de reflexión ocurren con materiales transparentes o con materiales *opacos* que no transmiten la luz. La gran mayoría de objetos en el ambiente (ropa, plantas, personas y este libro) son visibles porque reflejan la luz en una forma difusa desde sus superficies. Sin embargo, nuestro interés principal se centra en la reflexión especular a partir de una superficie muy lisa, como vidrio, plástico o metal muy pulido. A menos que se especifique otra cosa, cuando hablemos de "reflexión" siempre nos referiremos a la reflexión *especular*.

El **índice de refracción** de un material óptico, denotado por *n*, desempeña un papel central en la óptica geométrica. Es la razón entre la rapidez de la luz *c* en el vacío y la rapidez de la luz *v* en el material:

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{(índice de refracción)} \tag{33.1}$$

La luz siempre viaja con *más lentitud* en un material que en el vacío, por lo que el valor de *n* en cualquier material que no sea el vacío siempre es mayor que la unidad. Para el vacío, $n = 1$. Como *n* es una razón entre dos valores de rapidez, es un número

sin unidades. (La relación entre el valor de n y las propiedades eléctricas y magnéticas de un material se describe en la sección 32.3.)

CUIDADO **La rapidez de las ondas y el índice de refracción** Recuerde que la rapidez de las ondas v es *inversamente* proporcional al índice de refracción n. Cuanto mayor sea el índice de refracción de un material, *menor* será la rapidez de la onda en ese material. ¡Olvidar este punto puede originar serias confusiones! ▮

Leyes de reflexión y refracción

Los estudios experimentales de las direcciones de los rayos incidentes, reflejados y refractados en una interfaz lisa entre dos materiales ópticos condujeron a las siguientes conclusiones (figura 33.7):

1. **Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, yacen todos en el mismo plano.** El plano de los tres rayos es perpendicular al plano de la superficie de frontera o limítrofe entre los dos materiales. Siempre se dibujan los diagramas de los rayos de manera que los rayos incidente, reflejado y refractado estén en el plano del diagrama.
2. **El ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_a para todas las longitudes de onda y para cualquier par de materiales** Es decir, en la figura 33.5c,

$$\theta_r = \theta_a \qquad \text{(ley de reflexión)} \tag{33.2}$$

   Esta relación, junto con la observación de que los rayos incidente y reflejado y la normal yacen en el mismo plano, se conoce como **ley de reflexión**.
3. Para la luz monocromática y para un par dado de materiales, a y b, en lados opuestos de la interfaz, **la razón de los senos de los ángulos θ_a y θ_b, donde los dos ángulos están medidos a partir de la normal a la superficie, es igual al inverso de la razón de los dos índices de refracción**:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \tag{33.3}$$

   o bien,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b \qquad \text{(ley de refracción)} \tag{33.4}$$

   Este resultado experimental, junto con la observación de que los rayos incidente y refractado, así como la normal, se encuentran en el mismo plano se llama **ley de refracción** o **ley de Snell**, en honor del científico holandés Willebrord Snell (1591-1626). Actualmente hay algunas dudas de que Snell la haya descubierto en realidad. El descubrimiento de que $n = c/v$ fue muy posterior.

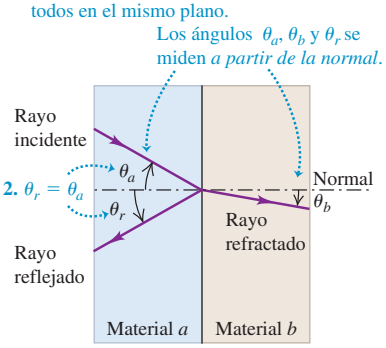
Si bien estos resultados fueron observados primero en forma experimental, es posible obtenerlos teóricamente a partir de la descripción ondulatoria de la luz, como veremos en la sección 33.7.

Las ecuaciones (33.3) y (33.4) indican que cuando un rayo pasa de un material a hacia otro material b que tiene un mayor índice de refracción ($n_b > n_a$) y, por lo tanto, una menor rapidez de onda, el ángulo θ_b que forma con la normal es *más pequeño* en el segundo material que el ángulo θ_a en el primero; por consiguiente, el rayo se desvía *hacia* la normal (figura 33.8a). Cuando el segundo material tiene un *menor* índice *de refracción* que el primero ($n_b < n_a$) y, por lo tanto, una mayor rapidez de onda, el rayo se desvía *alejándose* de la normal (figura 33.8b).

Sin importar cuáles sean los materiales en cada lado de la interfaz, en el caso de una incidencia *normal* el rayo transmitido no se desvía en absoluto (figura 33.8c). En este caso $\theta_a = 0$, y sen $\theta_a = 0$, por lo que de acuerdo con la ecuación (33.4), θ_b también es igual a cero, de manera que el rayo transmitido también es normal a la interfaz.

33.7 Las leyes de reflexión y refracción.

1. Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, yacen todos en el mismo plano.

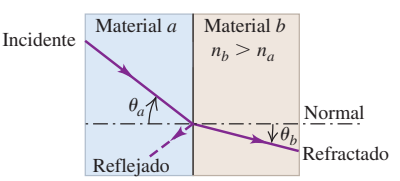


3. Cuando un rayo de luz monocromática cruza la interfaz entre dos materiales dados a y b, los ángulos θ_a y θ_b se relacionan con los índices de refracción de a y b por medio de

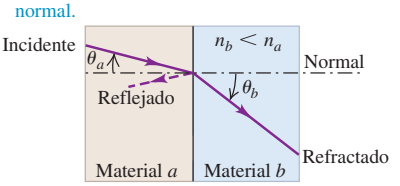
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

33.8 Refracción y reflexión en tres casos. a) El material b tiene un índice de refracción mayor que el material a. b) El material b tiene un índice de refracción menor que el material a. c) El rayo de luz incidente es normal a la interfaz entre los materiales.

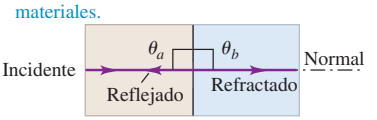
a) Un rayo que entra a un material con *mayor* índice de refracción se desvía *hacia* la normal.



b) Un rayo que entra a un material con *menor* índice de refracción se desvía *alejándose* de la normal.



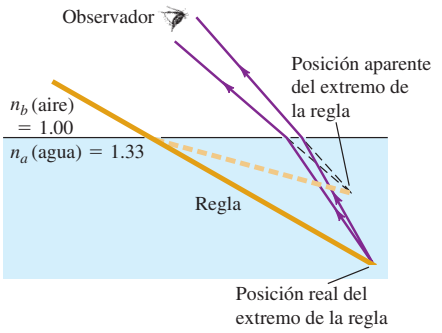
c) Un rayo orientado a lo largo de la normal no se desvía, sin importar cuáles sean los materiales.



33.9 a) Esta regla en realidad es recta, pero parece que se dobla en la superficie del agua. b) Los rayos de luz provenientes de cualquier objeto sumergido se desvían alejándose de la normal cuando salen al aire. Desde el punto de vista de un observador situado sobre la superficie del agua, el objeto parece estar mucho más cerca de la superficie de lo que en realidad está.

a) Una regla recta sumergida a la mitad en agua

b) ¿Por qué se ve doblada la regla?



La ecuación (33.2) indica que θ_r también es igual a cero, así que el rayo reflejado viaja de regreso a lo largo de la misma trayectoria que el rayo incidente.

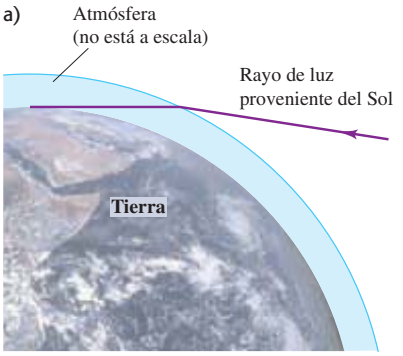
La ley de la refracción explica por qué una regla o una pajilla parcialmente sumergidas parecen estar dobladas; los rayos de luz que provienen de un lugar por debajo de la superficie cambian de dirección al pasar por la interfaz aire-agua, de manera que los rayos parecen provenir de una posición por arriba de su punto de origen real (figura 33.9). Un efecto similar explica la aparición de los atardeceres (figura 33.10).

Un caso especial muy importante es la refracción que ocurre en la interfaz entre un material y el vacío, para el cual el índice de refracción, por definición, es la unidad. Cuando un rayo pasa del vacío al material b, de forma que $n_a = 1$ y $n_b > 1$, el rayo siempre se desvía *hacia* la normal. Cuando un rayo pasa de un material al vacío, de forma que $n_a > 1$ y $n_b = 1$, el rayo siempre se desvía *alejándose* de la normal.

Las leyes de reflexión y refracción se aplican sin importar de qué lado de la interfaz proviene el rayo incidente. Si en la figura 33.8a o 33.8b un rayo de luz se acerca a

33.10 a) El índice de refracción del aire es ligeramente mayor que 1; por esta razón, los rayos luminosos del Sol cuando se oculta se desvían hacia abajo cuando entran a la atmósfera. (El efecto se exagera en esta figura.) b) La luz que proviene del extremo inferior del Sol (la parte que parece estar más cerca del horizonte) sufre una refracción más intensa, pues pasa a través del aire más denso en las capas bajas de la atmósfera. Como resultado, cuando el Sol se oculta, se ve achatado en la dirección vertical. (Véase el problema 33.55.)

a)



b)

la interfaz desde la derecha y no desde la izquierda, una vez más habrá rayos reflejados y refractados; estos dos rayos, el rayo incidente y la normal a la superficie de nuevo quedan en el mismo plano. Además, la trayectoria de un rayo refractado es *reversible*: sigue la misma trayectoria cuando va de b a a que cuando va de a a b. [Usted puede verificar esto mediante la ecuación (33.4).] Como los rayos reflejado e incidente forman el mismo ángulo con la normal, la trayectoria de un rayo reflejado también es reversible. Por esa razón, cuando usted ve los ojos de alguien en un espejo, la persona observada también lo puede mirar a usted.

La *intensidad* de los rayos reflejado y refractado dependen del ángulo de incidencia, de los dos índices de refracción y de la polarización (es decir, de la dirección del vector del campo eléctrico). La fracción reflejada es mínima cuando la incidencia es normal ($\theta_a = 0°$), donde es alrededor del 4% para una interfaz aire-vidrio. Esta fracción se incrementa al aumentar el ángulo de incidencia hasta llegar al 100%, que se da con una incidencia límite, cuando $\theta_a = 90°$.

Es posible usar las ecuaciones de Maxwell para pronosticar la amplitud, intensidad, fase y estados de polarización de las ondas reflejadas y refractadas. Sin embargo, ese análisis está más allá de nuestro alcance.

El índice de refracción no sólo depende de la sustancia, sino también de la longitud de onda de la luz. La dependencia de la longitud de onda se llama *dispersión*, la cual estudiaremos en la sección 33.4. En la tabla 33.1 se presentan los índices de refracción de varios sólidos y líquidos para una longitud de onda particular de luz amarilla.

El índice de refracción del aire a temperatura y presión estándar es alrededor de 1.0003 y, por lo general, lo tomaremos como si fuera exactamente igual a 1. El índice de refracción de un gas se incrementa conforme su densidad aumenta. La mayor parte de los vidrios que se utilizan en los instrumentos ópticos tienen índices de refracción entre 1.5 y 2.0. Unas cuantas sustancias tienen índices más grandes; un ejemplo de esto es el diamante, con 2.417.

Tabla 33.1 Índice de refracción con luz de amarilla sodio ($\lambda_0 = 589$ nm)

Sustancia	Índice de refracción, n
Sólidos	
Hielo (H_2O)	1.309
Fluorita (CaF_2)	1.434
Poliestireno	1.49
Sal de roca (NaCl)	1.544
Cuarzo (SiO_2)	1.544
Circonio ($ZrO_2 \cdot SiO_2$)	1.923
Diamante (C)	2.417
Fabulita ($SrTiO_3$)	2.409
Rutilo (TiO_2)	2.62
Vidrios (valores comunes)	
Blanco (Crown)	1.52
Cristal ligero	1.58
Cristal mediano	1.62
Cristal denso	1.66
Cristal de lantano	1.80
Líquidos a 20 °C	
Metanol (CH_3OH)	1.329
Agua (H_2O)	1.333
Etanol (C_2H_5OH)	1.36
Tetracloruro de carbono (CCl_4)	1.460
Aguarrás	1.472
Glicerina	1.473
Benceno	1.501
Disulfuro de carbono (CS_2)	1.628

Índice de refracción y aspectos ondulatorios de la luz

Hemos estudiado la forma en que la dirección de un rayo de luz cambia cuando pasa de un material a otro con distinto índice de refracción. También es importante ver lo que ocurre con las características *ondulatorias* de la luz cuando eso sucede.

En primer lugar, la frecuencia f de la onda no cambia cuando pasa de un material a otro. Es decir, el número de ciclos de la onda que llegan por unidad de tiempo debe ser igual al número de ciclos que salen por unidad de tiempo; esto significa que la superficie de frontera no puede crear ni destruir ondas.

En segundo lugar, la longitud de onda λ de la onda, en general, *es* diferente en distintos materiales. Esto se debe a que en cualquier material $v = \lambda f$; como f es la misma en cualquier material que en el vacío y v siempre es menor que la rapidez c de la onda en el vacío, λ también se reduce en forma correspondiente. Así, la longitud de onda λ de la luz en un material es *menor que* la longitud de onda λ_0 de la misma luz en el vacío. De acuerdo con el análisis anterior, $f = c/\lambda_0 = v/\lambda$. Al combinar esto con la ecuación (33.1), $n = c/v$, se encuentra que

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad \text{(longitud de onda de la luz en un material)} \qquad (33.5)$$

Cuando una onda pasa de un material a otro con mayor índice de refracción, de manera que $n_b > n_a$, la rapidez de la onda disminuye. La longitud de onda $\lambda_b = \lambda_0/n_b$ en el segundo material es, por consiguiente, más corta que la longitud de onda $\lambda_a = \lambda_0/n_a$ del primer material. Si en vez de ello, el segundo material tiene un índice de refracción menor que el primero, de manera que $n_b < n_a$, entonces la rapidez de la onda se incrementa. Así, la longitud de onda λ_b en el segundo material es más larga que la longitud de onda λ_a en el primero. Esto tiene sentido intuitivamente; las ondas se "comprimen" (la longitud de onda se acorta) si la rapidez de onda disminuye, y se "estiran" (la longitud de onda se alarga) si la rapidez de onda aumenta.

Estrategia para resolver problemas 33.1 Reflexión y refracción

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Será necesario aplicar las ideas de esta sección, agrupadas en el tema *óptica geométrica*, siempre que la luz encuentre una frontera entre dos materiales diferentes. En general, parte de la luz se refleja de regreso hacia el primer material y parte se refracta hacia el segundo. Estas ideas se aplican a la radiación electromagnética de todas las frecuencias y longitudes de onda, no sólo a la luz visible.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. En los problemas de óptica geométrica que implican rayos y ángulos *siempre* comience por hacer un diagrama grande y bien definido. Indique todos los ángulos conocidos e índices de refracción.
2. Determine las variables buscadas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Aplique las leyes de reflexión, ecuación (33.2), y refracción, ecuación (33.4). Siempre recuerde medir los ángulos de incidencia, reflexión y refracción a partir de la *normal* a la superficie donde ocurren la reflexión y refracción, *nunca* a partir de la superficie misma.
2. Será frecuente que tenga que usar algo de geometría o trigonometría elemental al trabajar con relaciones angulares. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, un ángulo y su complemento difieren en 180°, etcétera. Pregúntese, "¿de qué información dispongo?", "¿qué necesito saber para encontrar éste ángulo?" o "¿qué otros ángulos u otras cantidades puedo calcular con la información que se da en el problema?"
3. Recuerde que la frecuencia de la luz no cambia cuando pasa de un material a otro, pero la longitud de onda cambia de acuerdo con la ecuación (33.5).

EVALUAR *la respuesta:* En problemas que impliquen refracción, compruebe que la dirección de la refracción tenga sentido. Si el segundo material tiene un mayor índice de refracción que el primero, el rayo refractado se desvía hacia la normal, y el ángulo refractado es más pequeño que el ángulo de incidencia. Si el primer material tiene un índice de refracción más grande, el rayo refractado se desvía alejándose de la normal y el ángulo refractado es mayor que el ángulo de incidencia. ¿Sus resultados concuerdan con estas reglas?

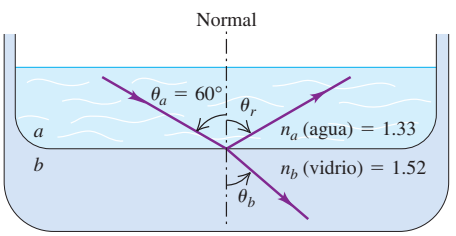
Ejemplo 33.1 Reflexión y refracción

En la figura 33.11 el material a es agua y el material b es un vidrio con índice de refracción de 1.52. Si el rayo incidente forma un ángulo de 60° con la normal, determine las direcciones de los rayos reflejado y refractado.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste es un problema de óptica geométrica. Se da el ángulo de incidencia y el índice de refracción de cada material, y se necesita calcular los ángulos de reflexión y refracción.

33.11 Reflexión y refracción de luz que pasa del agua al vidrio.



PLANTEAR: La figura 33.11 muestra los rayos y ángulos de esta situación. Las incógnitas son el ángulo de reflexión θ_r y el ángulo de refracción θ_b. Como n_b es mayor que n_a, el ángulo refractado debe ser más pequeño que el ángulo de incidencia θ_a; esto se ilustra en la figura.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (33.2), el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal es el mismo que el del rayo incidente, por lo tanto, $\theta_r = \theta_a = 60.0°$.

Para determinar la dirección del rayo refractado se usa la ley de Snell, ecuación (33.4), con $n_a = 1.33$, $n_b = 1.52$ y $\theta_a = 60.0°$. Se obtiene

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\operatorname{sen}\theta_a = \frac{1.33}{1.52}\operatorname{sen}60.0° = 0.758$$

$$\theta_b = 49.3°$$

EVALUAR: El segundo material tiene un mayor índice de refracción que el primero, igual que la situación que se ilustra en la figura 33.8a. Por lo tanto, el rayo refractado se desvía hacia la normal conforme la onda se hace más lenta al entrar en el segundo material y $\theta_b < \theta_a$.

Ejemplo 33.2 Índice de refracción en el ojo

La longitud de onda de la luz roja de un láser de helio-neón es de 633 nm en el aire, pero de 474 nm en el humor acuoso del globo ocular. Calcule el índice de refracción del humor acuoso y la rapidez y frecuencia de la luz en esta sustancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las ideas clave aquí son la relación entre el índice de refracción n y la rapidez de onda d, y la relación entre el índice de refracción y la longitud de onda λ.

PLANTEAR: Se usa la definición de índice de refracción que se dio en la ecuación (33.1), $n = c/v$, así como en la ecuación (33.5), $\lambda = \lambda_0/n$. También será de ayuda la relación $v = \lambda f$ entre la rapidez de onda, la longitud de onda y su frecuencia.

EJECUTAR: El índice de refracción del aire está muy cerca de la unidad, por lo que supondremos que las longitudes de onda en el aire y el vacío son las mismas. Así, la longitud de onda λ en el material está dada por la ecuación (33.5) con $\lambda_0 = 633$ nm.

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{633\ \text{nm}}{474\ \text{nm}} = 1.34$$

Esto es aproximadamente el mismo índice de refracción que el del agua. Por lo tanto, $n = c/v$ da

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.34} = 2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Por último, a partir de $v = \lambda f$,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2.25 \times 10^8 \text{ m/s}}{474 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

EVALUAR: Advierta que si bien la rapidez y la longitud de onda tienen diferentes valores en el aire y en el humor acuoso, la *frecuencia* en el aire, f_0, es igual que la frecuencia f en el humor acuoso:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{633 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Esto ilustra la regla general que establece que cuando una onda luminosa pasa de un material a otro, la frecuencia de la onda permanece sin cambio.

Ejemplo 33.3 Un rayo reflejado dos veces

Dos espejos están perpendiculares entre sí. Un rayo que viaja en un plano perpendicular con respecto a los dos espejos se refleja en uno de ellos y luego en el otro, como se ilustra en la figura 33.12. ¿Cuál es la dirección final del rayo en relación con su dirección original?

SOLUCIÓN

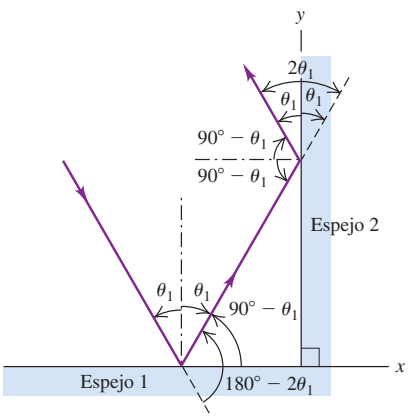
IDENTIFICAR: Este problema se relaciona sólo con la ley de reflexión.

PLANTEAR: Hay dos reflexiones en esta situación, por lo que se debe aplicar la ley de la reflexión dos veces.

EJECUTAR: Para el espejo 1, el ángulo de incidencia es θ_1, y esto es igual al ángulo de reflexión. La suma de los ángulos interiores en el triángulo que se ilustra en la figura es 180°, por lo que vemos que los ángulos de incidencia y reflexión para el espejo 2 son ambos de $90° - \theta_1$. El cambio total en la dirección del rayo después de las dos reflexiones es, por lo tanto, $2(90° - \theta_1) + 2\theta_1 = 180°$. Es decir, la dirección final del rayo es opuesta a su dirección original.

EVALUAR: Un punto de vista alternativo es que la reflexión especular invierte el signo de la componente de la velocidad de la luz perpendicular a la superficie, pero deja los otros componentes inalterados. Se invita al lector a que verifique esto con detalle. También deberá ser capaz de usar este resultado para demostrar que cuando un rayo de luz se refleja sucesivamente en tres espejos que forman la esquina de un cubo (un "reflector de vértice"), su dirección final, de nuevo, es opuesta a su dirección original. Este principio se usa mucho en las lentes de luces traseras y en los reflectores de las bicicletas para mejorar su visibilidad nocturna. Los astronautas del Apolo colocaron arreglos de reflectores de vértice en la Luna. Por medio de los rayos láser que se reflejaban en tales arreglos, se logró medir la distancia entre la Tierra y la Luna con una aproximación de 0.15 m.

33.12 Un rayo que se desplaza en el plano xy. La primera reflexión cambia el signo de la componente y de su velocidad, y la segunda reflexión cambia el signo de la componente x. En el caso de un rayo diferente que tuviera una componente z de velocidad, se podría usar un tercer espejo (perpendicular a los dos que se ilustran) para cambiar el signo de esa componente.



Evalúe su comprensión de la sección 33.2 Usted se encuentra en la orilla de un lago y observa un apetitoso pez que nada a cierta distancia por debajo de la superficie. *a*) Si quiere atrapar al pez, ¿debe lanzar el arpón i) más arriba, ii) más abajo o iii) directamente hacia la posición aparente del pez? *b*) Si en vez del arpón usara un rayo láser potente que le permitiera matar y cocinar al pez al mismo tiempo, ¿debería disparar el rayo láser i) más arriba, ii) más abajo o iii) directamente hacia la posición aparente del pez?

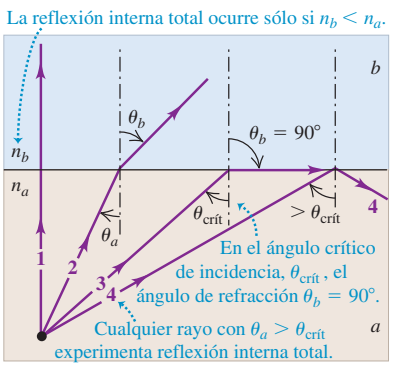
33.3 Reflexión interna total

Hemos descrito la forma en que la luz se refleja y se transmite parcialmente en una interfaz entre dos materiales con distintos índices de refracción. Sin embargo, en ciertas circunstancias, *toda* la luz se puede reflejar en la interfaz, sin que se transmita nada de ella, aun si el segundo material es transparente. La figura 33.13a muestra la forma en que esto ocurre. Se ilustran varios rayos que salen de una fuente puntual en el material a con índice de refracción n_a. Los rayos inciden en la superficie del segundo

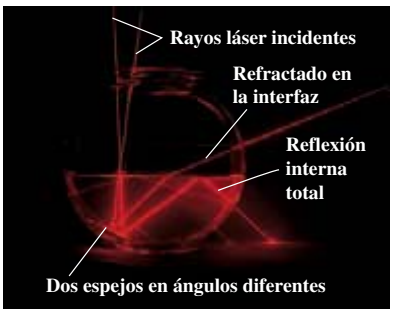
Activ Online Physics
15.2 Reflexión interna total

33.13 a) Reflexión interna total. El ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción es 90° se llama ángulo crítico; éste es el caso para el rayo 3. Las porciones reflejadas de los rayos 1, 2 y 3 se omiten por claridad. b) Los rayos de luz láser entran al agua en la pecera desde arriba; se reflejan en el fondo en los espejos inclinados con ángulos ligeramente distintos. Un rayo experimenta reflexión interna total en la interfaz aire-agua.

a) Reflexión interna total



b) Reflexión interna total demostrada con un láser, espejos y agua en una pecera



material b con índice n_b, donde $n_a > n_b$. (Por ejemplo, los materiales a y b podrían ser agua y aire, respectivamente.) Según la ley de Snell de la refracción,

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\operatorname{sen}\theta_a$$

Como n_a/n_b es mayor que la unidad, sen θ_b es mayor que sen θ_a; el rayo se desvía *apartándose* de la normal. Así, debe haber algún valor de θ_a *menor que* 90° para el cual la ley de Snell da sen $\theta_b = 1$ y $\theta_b = 90°$. Esto se ilustra con el rayo 3 en el diagrama, que emerge apenas rozando la superficie con un ángulo de refracción de 90°. Compare el diagrama en la figura 33.13a con la fotografía de los rayos de luz en la figura 33.13b.

El ángulo de incidencia para el cual el rayo refractado emerge en forma tangencial a la superficie se llama **ángulo crítico**, y se denota con $\theta_{crít}$. (Un análisis más detallado con las ecuaciones de Maxwell demuestra que conforme el ángulo de incidencia se aproxima al ángulo crítico, la intensidad transmitida tiende a cero.) Si el ángulo de incidencia es *mayor* que el ángulo crítico, el seno del ángulo de refracción, de acuerdo con la ley de Snell, tendría que ser mayor que la unidad, lo cual es imposible. Más allá del ángulo crítico, el rayo *no puede* pasar hacia el material superior: queda atrapado en el material inferior y se refleja por completo en la superficie de frontera. Esta situación, llamada **reflexión interna total**, sólo ocurre cuando un rayo incide sobre la interfaz con un segundo material cuyo índice de refracción es *menor* que el del material por el que viaja el rayo.

Es posible encontrar el ángulo crítico para dos materiales dados si se iguala $\theta_b = 90°$ (sen $\theta_b = 1$) en la ley de Snell. De esta forma, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta_{crít} = \frac{n_b}{n_a} \qquad \text{(ángulo crítico para la reflexión interna total)} \qquad (33.6)$$

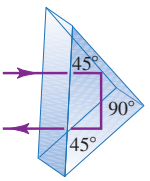
La reflexión interna total ocurrirá si el ángulo de incidencia θ_a es mayor o igual que $\theta_{crít}$.

Aplicaciones de la reflexión interna total

La reflexión interna tiene numerosos usos en la tecnología óptica. Por ejemplo, considere un vidrio cuyo índice de refracción es $n = 1.52$. Si la luz que se propaga dentro de este vidrio encuentra una interfaz vidrio-aire, el ángulo crítico es:

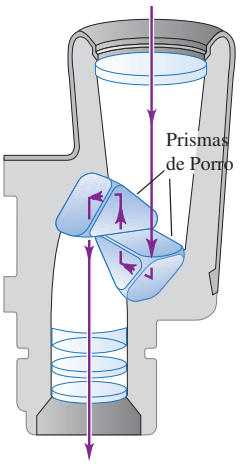
$$\operatorname{sen}\theta_{crít} = \frac{1}{1.52} = 0.658 \qquad \theta_{crít} = 41.1°$$

a) Reflexión interna total en un prisma de Porro



Si el rayo incidente está orientado como se ilustra, la reflexión interna total ocurre en las caras a 45° (porque para una interfaz vidrio-aire, $\theta_{crít} = 41.1°$).

b) Los binoculares utilizan prismas de Porro para reflejar la luz hacia el ocular



33.14 a) Reflexión interna total en un prisma de Porro. b) Combinación de dos prismas de Porro en los binoculares.

La luz *se reflejará totalmente* si incide en la superficie vidrio-aire con un ángulo de 41.1° o mayor. Puesto que el ángulo crítico es un poco menor de 45°, es posible usar un prisma con ángulos de 45°−45°−90° como superficie totalmente reflectante. Como reflectores, los prismas totalmente reflectantes tienen ciertas ventajas sobre las superficies metálicas, como los espejos comunes recubiertos de vidrio. Puesto que ninguna superficie metálica refleja el 100% de la luz que incide sobre ella, un prisma puede reflejar *totalmente* la luz. Las propiedades reflectantes de un prisma tienen las ventajas adicionales de ser permanentes y no deteriorarse por empañamiento.

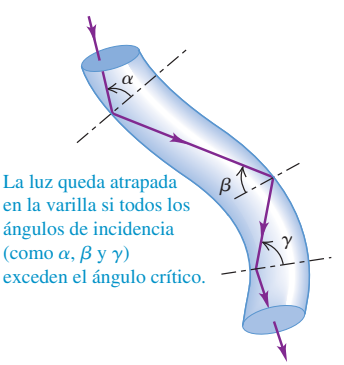
Un prisma de 45°−45°−90°, usado como en la figura 33.14a, se llama prisma de *Porro*. La luz entra y sale en ángulos rectos con respecto a la hipotenusa y se refleja totalmente en cada una de las caras más cortas. El cambio total de la dirección de los rayos es de 180°. Es frecuente que los binoculares usen combinaciones de dos prismas de Porro como en la figura 33.14b.

Cuando un rayo de luz entra por un extremo de una varilla transparente (figura 33.15), la luz se refleja por completo internamente si el índice de refracción de la varilla es mayor que el del material circundante. La luz queda "atrapada" dentro de la varilla aun si ésta se curva, siempre que la curvatura no sea muy marcada. Una varilla con estas características en ocasiones recibe el nombre de *tubo de luz*. Un haz de finas fibras de vidrio o de plástico se comporta del mismo modo y tiene la ventaja de ser flexible. Un haz consiste en miles de fibras individuales, cada una del orden de 0.002 a 0.01 mm de diámetro. Si las fibras se ensamblan en el haz de manera que las posiciones relativas de sus extremos sean las mismas (o imágenes especulares) en ambos extremos, el haz puede transmitir una imagen, como se aprecia en la figura 33.16.

Los equipos de fibra óptica tienen muchas aplicaciones médicas en los instrumentos llamados *endoscopios*, que se insertan directamente en los tubos bronquiales, la vejiga, el colon y otros órganos para efectuar un examen visual directo. Un haz de fibra se puede encerrar en una aguja hipodérmica para estudiar los tejidos y vasos sanguíneos que hay debajo de la piel.

La fibra óptica también tiene aplicaciones en los sistemas de comunicación, en los que se usa para transmitir un rayo láser modulado. La rapidez con la que una onda (ya sea de luz, de radio o de otro tipo) puede transmitir información es proporcional a la frecuencia. Para comprender por qué en términos cualitativos, considere la modulación (modificación) de la onda por medio del recorte de algunas de sus crestas. Suponga que cada cresta representa un dígito binario: una cresta recortada representa un 0 y una cresta sin modificar representa un 1. El número de dígitos binarios que podemos transmitir por unidad de tiempo es, por consiguiente, proporcional a la frecuencia de la onda. Las ondas de luz infrarroja y visible tienen una frecuencia mucho mayor que las ondas de radio, de manera que un rayo láser modulado puede transmitir una cantidad enorme de información a través de un solo cable de fibra óptica.

33.15 Varilla transparente con índice de refracción mayor que el del material circundante.



La luz queda atrapada en la varilla si todos los ángulos de incidencia (como α, β y γ) exceden el ángulo crítico.

33.16 Transmisión de imágenes por un haz de fibras ópticas.

33.17 Para maximizar su brillo, los diamantes se cortan de manera que haya una reflexión interna total sobre sus superficies posteriores.

Otra ventaja de las fibras ópticas es que se pueden hacer más delgadas que el alambre de cobre convencional, por lo que se pueden agrupar más fibras en un cable de un diámetro dado. Así, más señales distintas (por ejemplo, diferentes líneas telefónicas) se pueden enviar por el mismo cable. Como los cables de fibra óptica son aislantes eléctricos, son inmunes a la interferencia eléctrica proveniente de los relámpagos y otras fuentes, y no permiten corrientes indeseables entre el emisor y el receptor. Por éstas y otras razones, los cables de fibra óptica tienen un papel cada vez más importante en la telefonía de larga distancia, la televisión y la comunicación por Internet.

La reflexión interna total también desempeña un papel importante en el diseño de joyería. El brillo del diamante se debe en gran medida a su alto índice de refracción ($n = 2.417$) y a un pequeño ángulo crítico correspondiente. La luz que entra a través de un diamante cortado se refleja por completo internamente en las facetas de su superficie posterior, y luego sale por la superficie anterior (figura 33.17). Las gemas "imitación de diamante" como el circón cúbico, están elaboradas con materiales cristalinos menos caros y con índices de refracción comparables.

Ejemplo conceptual 33.4 Un periscopio con fugas

El periscopio de un submarino usa dos prismas totalmente reflectantes de 45°−45°−90° con reflexión interna total en los lados adyacentes a ángulos de 45°. Se presenta una fuga y el prisma inferior queda cubierto por el agua. Explique por qué el periscopio deja de funcionar.

SOLUCIÓN

El ángulo crítico correspondiente a agua ($n_a = 1.33$) sobre vidrio ($n_a = 1.52$) es

$$\theta_{\text{crít}} = \operatorname{arcsen}\frac{1.33}{1.52} = 61.0°$$

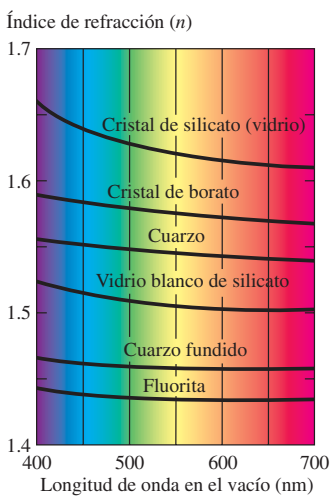
El ángulo de 45° de incidencia para un prisma totalmente reflectante es *más pequeño que* el ángulo crítico de 61°, así que no hay reflexión interna total en la frontera vidrio-agua. La mayor parte de la luz se transmite en el agua, y muy poca se refleja de regreso al prisma.

Evalúe su comprensión de la sección 33.3 ¿En cuál de las siguientes situaciones hay reflexión interna total? i) Luz que se propaga en agua ($n = 1.33$) incide en una interfaz agua-aire con un ángulo de incidencia de 70°; ii) luz que se propaga en vidrio ($n = 1.52$) incide en una interfaz vidrio-agua con un ángulo de incidencia de 70°; iii) luz que se propaga en agua incide en una interfaz agua-vidrio con un ángulo de incidencia de 70°.

*33.4 Dispersión

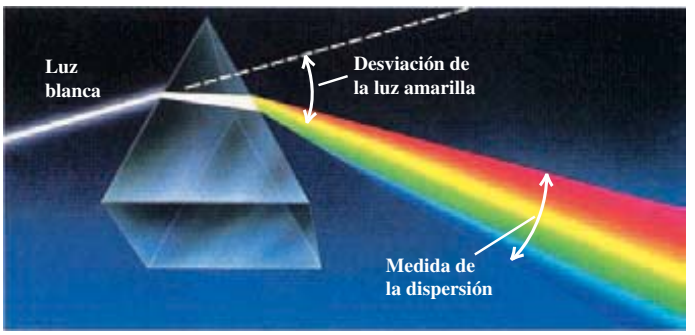
La luz blanca ordinaria es una superposición de ondas con longitudes que se extienden a través de todo el espectro visible. La rapidez de la luz *en el vacío* es la misma para todas las longitudes de onda, pero la rapidez en una sustancia material es diferente para distintas longitudes de onda. En consecuencia, el índice de refracción de un material depende de la longitud de onda. La dependencia de la rapidez de onda y del índice de refracción con respecto a la longitud de onda se llama **dispersión**.

33.18 Variación del índice de refracción n con la longitud de onda en distintos materiales transparentes. El eje horizontal muestra la longitud de onda λ_0 de la luz *en el vacío*; la longitud de onda en el material es igual a $\lambda = \lambda_0/n$.



La figura 33.18 muestra la variación del índice de refracción n con la longitud de onda en algunos materiales ópticos comunes. Observe que el eje horizontal de la figura es la longitud de onda de la luz *en el vacío*, λ_0; la longitud de onda en el material está dada por la ecuación (33.5), $\lambda = \lambda_0/n$. En la mayoría de los materiales el valor de n *disminuye* al aumentar la longitud de onda y disminuir la frecuencia; por lo tanto, n *aumenta* al disminuir la longitud de onda y aumentar la frecuencia. En un material de ese tipo, la luz de mayor longitud de onda tiene una rapidez mayor que la luz de longitud de onda más corta.

La figura 33.19 muestra un rayo de luz blanca que incide sobre un prisma. La desviación (cambio de dirección) producida por el prisma aumenta al incrementarse el índice de refracción y la frecuencia y al disminuir la longitud de onda. La luz violeta es la que se desvía en mayor grado, y la roja es la que se desvía menos; otros colores están en posiciones intermedias. Cuando sale del prisma, la luz se dispersa en un rayo



33.19 Dispersión de la luz a través de un prisma. La banda de colores se llama espectro.

con forma de abanico, como se ilustra. Se dice que la luz se *dispersa* en un espectro. La cantidad de dispersión depende de la *diferencia* entre los índices de refracción para la luz violeta y para la luz roja. En la figura 33.18 se observa que para una sustancia como la fluorita, la diferencia entre los índices para el rojo y el violeta es pequeña, y la dispersión también será pequeña. Una mejor elección del material para un prisma cuya finalidad es generar un espectro sería el cristal de silicato, para el que hay una mayor diferencia en el valor de n entre el rojo y el violeta.

Como se mencionó en la sección 33.3, el brillo del diamante se debe en parte a su inusual índice de refracción tan grande; otro factor importante es su gran dispersión, el cual ocasiona que la luz que entra al diamante salga como un espectro multicolor. Los cristales de rutilo y de titanato de estroncio, los cuales se producen en forma sintética, tienen alrededor de ocho veces la dispersión del diamante.

Arco iris

Cuando usted presencia la belleza de un arco iris, como el de la figura 33.20a, observa los efectos combinados de la dispersión, la refracción y la reflexión. La luz del Sol proveniente de atrás del observador entra en una gota de agua, se refleja (parcialmente) en la superficie posterior de la gota, y se refracta otra vez al salir de ella (figura 33.20b). Los rayos de luz que entran por el punto medio de la gota se reflejan directamente de regreso. Todos los demás rayos salen de la gota con un ángulo Δ con respecto al rayo medio, y muchos rayos se "apilan" en el ángulo Δ. Lo que se ve es un disco de luz de radio angular Δ con centro en el punto en el cielo que está opuesto al Sol; debido al "apilamiento" de los rayos luminosos, el disco tiene su brillo máximo alrededor de su borde, el cual vemos como el arco iris (figura 33.20c). Como ninguna luz llega al ojo en ángulos mayores que Δ, el cielo parece oscuro afuera del arco iris (véase la figura 33.20a). El valor del ángulo Δ depende del índice de refracción del agua que forma las gotas, el cual a la vez depende de la longitud de onda (figura 33.20d). El disco brillante de luz roja es un poco mayor que el de luz naranja, que a la vez es algo mayor que el de la luz amarilla y así sucesivamente. Como resultado, usted ve al arco iris como una banda de colores.

En muchos casos es posible ver un segundo arco iris más grande. Éste es el resultado de la dispersión, la refracción y *dos* reflexiones en la superficie posterior de la gota (figura 33.20e). Cada vez que un rayo de luz incide en la superficie posterior, parte de la luz se refracta hacia fuera de la gota (no se muestra en la figura 33.20); después de dos de tales incidencias, relativamente poca luz queda dentro de la gota y, por eso, el arco iris secundario es notablemente más tenue que el arco iris primario. Así como un espejo colocado frente a un libro invierte las letras impresas, la segunda reflexión invierte la secuencia de colores en el arco iris secundario. Se puede observar este efecto en la figura 33.20a.

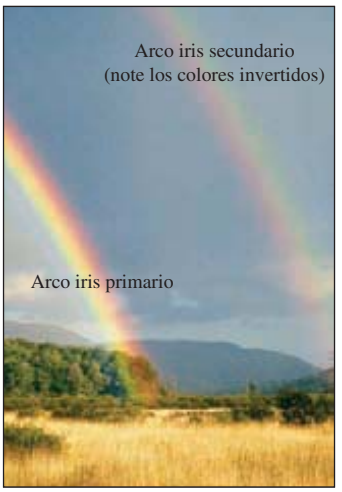
33.5 Polarización

La *polarización* es una característica de todas las ondas transversales. Este capítulo trata sobre la luz, pero para presentar algunos conceptos básicos acerca de la polarización, volvamos a las ondas transversales en una cuerda que estudiamos en el capítulo 15.

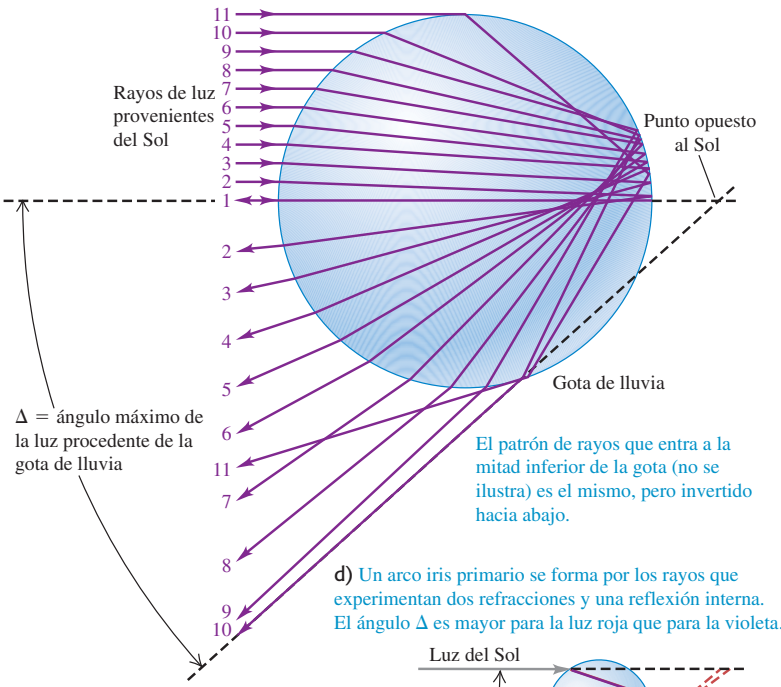
Activ ONLINE Physics
16.9 Óptica física: polarización

33.20 Cómo se forma el arco iris.

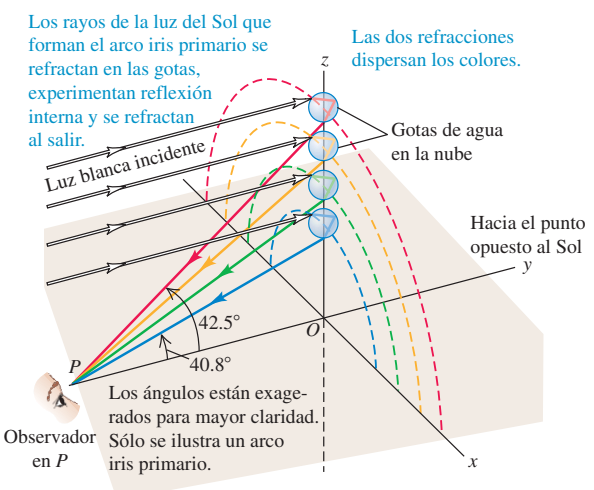
a) Arco iris doble



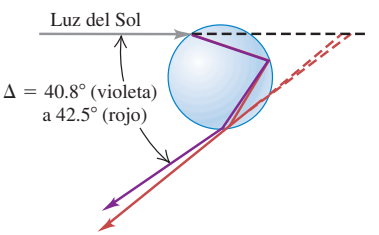
b) Trayectorias de rayos de luz que entran por la mitad superior de una gota de lluvia



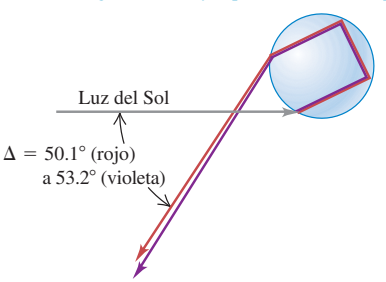
c) Formación de un arco iris. En esta ilustración, el Sol está directamente detrás del observador en *P*.



d) Un arco iris primario se forma por los rayos que experimentan dos refracciones y una reflexión interna. El ángulo Δ es mayor para la luz roja que para la violeta.



e) Un arco iris secundario se forma por los rayos que experimentan dos refracciones y *dos* reflexiones internas. El ángulo Δ es mayor para la luz violeta que para la roja.

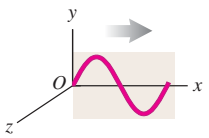


En el caso de una cuerda que esté en equilibrio a lo largo del eje *x*, los desplazamientos pueden ocurrir a lo largo de la dirección *y*, como en la figura 33.21a. En este caso, la cuerda siempre queda en el plano *xy*. Pero los desplazamientos pueden ser a lo largo del eje *z* como en la figura 33.21b; en tal caso, la cuerda siempre se encuentra en el plano *xz*.

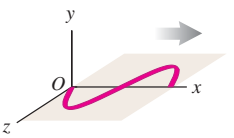
Cuando una onda sólo tiene desplazamientos en *y*, se dice que está **linealmente polarizada** en la dirección *y*; una onda con desplazamientos sólo en *z* está linealmente polarizada en esa dirección. Para las ondas mecánicas es posible construir un **filtro polarizador**, o **polarizador** simplemente, que permita que sólo pasen ondas con cierta dirección de polarización. En la figura 33.21c la cuerda puede deslizarse verticalmente

33.21 a), b) Ondas polarizadas en una cuerda. c) Formación de una onda polarizada en una cuerda a partir de otra no polarizada por medio de un filtro polarizador.

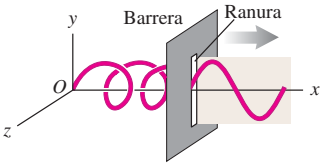
a) Onda transversal linealmente polarizada en la dirección *y*



b) Onda transversal linealmente polarizada en la dirección *z*



c) La ranura funciona como filtro polarizador dejando pasar solamente los componentes polarizados en la dirección *y*.



en la ranura sin fricción, pero no es posible ningún movimiento horizontal. Este filtro deja pasar ondas polarizadas en la dirección *y,* pero bloquea las ondas polarizadas en la dirección *z*.

Este mismo lenguaje se puede aplicar a las ondas electromagnéticas, las cuales también presentan polarización. Como se vio en el capítulo 32, una onda electromagnética es *transversal*; los campos eléctrico y magnético fluctuantes son perpendiculares entre sí y con respecto a la dirección de propagación. Siempre se define la dirección de polarización de una onda electromagnética como la dirección del vector de campo *eléctrico* $\vec{\boldsymbol{E}}$, no del campo magnético, porque muchos detectores comunes de ondas electromagnéticas responden a las fuerzas eléctricas de los electrones en los materiales y no a las fuerzas magnéticas. Así, se dice que la onda electromagnética descrita por la ecuación (32.17),

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x,t) = \hat{\boldsymbol{\jmath}} E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{\boldsymbol{B}}(x,t) = \hat{\boldsymbol{k}} B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$

está polarizada en la dirección *y* porque el campo eléctrico sólo tiene componente *y*.

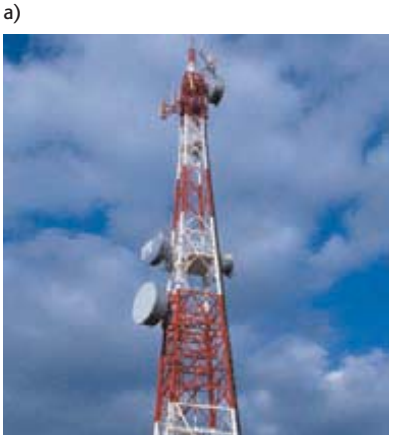
CUIDADO **El significado de "polarización"** Es poco afortunado el hecho de que la misma palabra, "polarización", que se usa para describir la dirección de $\vec{\boldsymbol{E}}$ en una onda electromagnética también se utilice para describir el desplazamiento de la carga eléctrica dentro de un cuerpo, como el que ocurre en respuesta a la proximidad de otro cuerpo con carga; en la sección 21.2 se describió esta última clase de polarización (véase la figura 21.7). El lector debe recordar que aun cuando estos dos conceptos tengan el mismo nombre, no describen el mismo fenómeno.

Filtros polarizadores

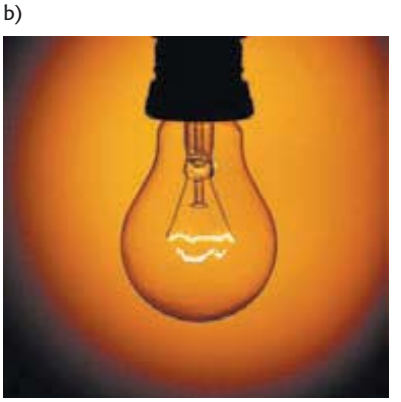
Las ondas emitidas por un transmisor de radio, por lo general, están linealmente polarizadas. Las antenas verticales que se usan para la trasmisión de radio emiten ondas que, en un plano horizontal alrededor de la antena, están polarizadas en dirección vertical (paralelas a la antena; figura 33.22a). Las antenas de televisión en los techos tienen elementos horizontales en Estados Unidos y verticales en Gran Bretaña, ya que las ondas trasmitidas tienen diferentes polarizaciones.

33.22 a) Los electrones en la antena de color rojo y blanco oscilan verticalmente y producen ondas electromagnéticas verticalmente polarizadas que se propagan desde la antena en dirección horizontal. (Las pequeñas antenas grises son para transmitir señales de telefonía inalámbrica.) b) No importa cómo esté orientada esta bombilla eléctrica, el movimiento aleatorio de los electrones en el filamento produce ondas luminosas no polarizadas.

a)



b)

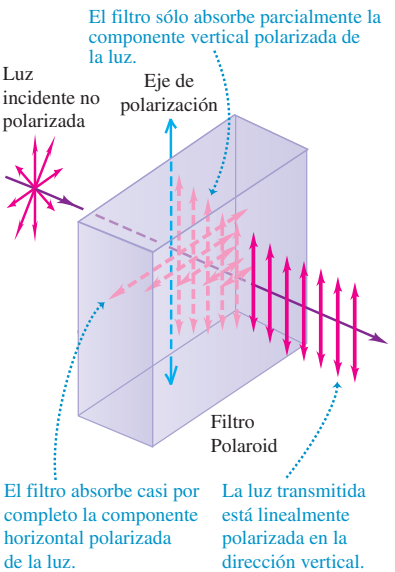


La situación es diferente para la luz visible. La luz de fuentes ordinarias, como las bombillas eléctricas incandescentes y las lámparas fluorescentes, *no* está polarizada (figura 33.22b). Las "antenas" que irradian ondas luminosas son las moléculas que constituyen las fuentes. Las ondas emitidas por cualquier molécula pueden estar linealmente polarizadas, como las de una antena de radio. Pero cualquier fuente luminosa real contiene un número enorme de moléculas con orientaciones al azar, por lo que la luz emitida es una mezcla aleatoria de ondas linealmente polarizadas en todas las direcciones transversales posibles. Esa luz se llama **luz no polarizada** o **luz natural**. Para crear luz polarizada a partir de luz natural no polarizada se requiere un filtro análogo a la ranura para ondas mecánicas en la figura 33.21c.

Los filtros polarizadores para las ondas electromagnéticas tienen diferentes detalles de construcción, dependiendo de la longitud de onda. Para las microondas con longitud de onda de unos cuantos centímetros, un buen polarizador es un arreglo de alambres conductores estrechamente espaciados y paralelos, que estén aislados uno de otro. (Piense en una parrilla para asar carne en la que el anillo metálico exterior se ha sustituido por un anillo aislante.) Los electrones tienen libertad de movimiento a lo largo de la longitud de los alambres conductores y lo harán en respuesta a una onda cuyo campo $\vec{E}$ sea paralelo a los alambres. Las corrientes resultantes en los alambres disipan energía por calentamiento de I^2R; la energía disipada proviene de la onda, por lo que la amplitud de cualquier onda que pase a través de la rejilla se reduce considerablemente. Las ondas con $\vec{E}$ orientado en forma perpendicular a los alambres pasan prácticamente intactas, ya que los electrones no se pueden desplazar a través del aire que separa los alambres. Por consiguiente, una onda que pase a través de un filtro de este tipo quedará polarizada sobre todo en la dirección perpendicular a los alambres.

El filtro polarizador más común para la luz visible es el material conocido con el nombre comercial de Polaroid, que se usa mucho en los anteojos de sol y en los filtros polarizadores para lentes de cámaras fotográficas. Este material, desarrollado por primera vez por el científico estadounidense Edwin H. Land, incorpora sustancias que presentan **dicroísmo**, la absorción selectiva en la que una de las componentes polarizadas se absorbe con mucha más intensidad que la otra (figura 33.23). Un filtro Polaroid transmite el 80% o más de la intensidad de una onda que esté polarizada en forma paralela a cierto eje en el material, llamado **eje de polarización**, pero sólo el 1% o menos de las ondas polarizadas perpendiculares a ese eje. En un tipo de filtro Polaroid hay moléculas de cadena larga dentro del filtro que están orientadas con su eje perpendicular al eje de polarización; estas moléculas absorben preferentemente luz polarizada a lo largo de ellas, en forma muy parecida a los alambres conductores de un filtro polarizador para microondas.

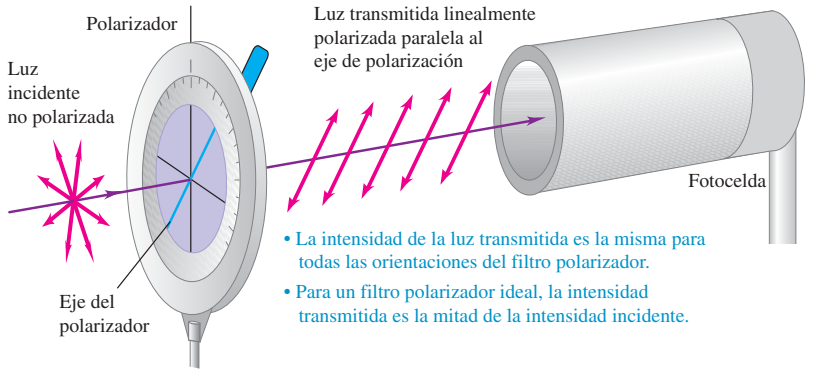
33.23 Un filtro Polaroid iluminado por luz natural no polarizada (ilustrado por los vectores $\vec{E}$ que apuntan en todas las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación). La luz transmitida está linealmente polarizada a lo largo del eje de polarización (ilustrado por los vectores $\vec{E}$ a lo largo de la dirección de polarización solamente).



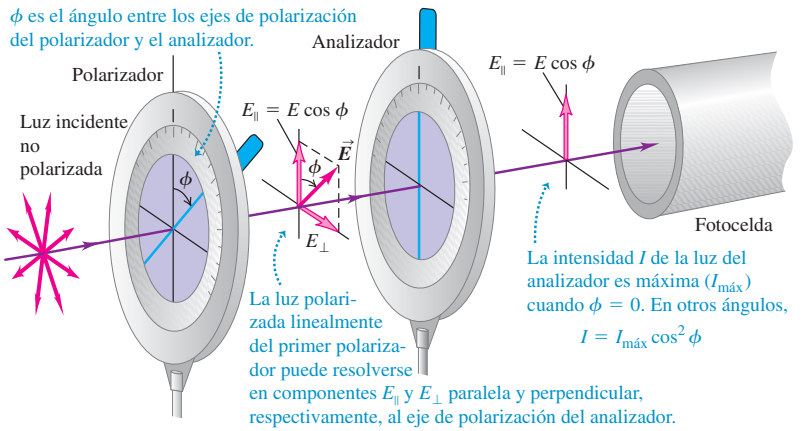
Uso de filtros polarizadores

Un filtro polarizador *ideal* deja pasar el 100% de la luz incidente que esté polarizada en la dirección del eje de polarización del filtro, pero bloquea completamente toda la luz polarizada en forma perpendicular a ese eje. Tal dispositivo es una idealización imposible, pero el concepto es útil para aclarar algunas ideas fundamentales. En la siguiente explicación supondremos que todos los filtros polarizadores son ideales. En la figura 33.24 la luz no polarizada es incidente sobre un filtro polarizador plano. El eje de polarización está representado por la línea azul. El vector $\vec{E}$ de la onda incidente se puede representar en términos de las componentes paralela y perpendicular al eje polarizador; sólo se transmite la componente de $\vec{E}$ paralela al eje de polarización. Así, la luz que sale del polarizador está linealmente polarizada en forma paralela al eje de polarización.

Cuando la luz polarizada incide en un polarizador ideal como el de la figura 33.24, la intensidad de la luz trasmitida es *exactamente la mitad* que la de la luz incidente no polarizada, sin importar cómo se oriente el eje de polarización. La razón es la siguiente: podemos resolver el campo $\vec{E}$ de la onda incidente en una componente paralela al eje de polarización y otra perpendicular a éste. Como la luz incidente es una mezcla aleatoria de todos los estados de polarización, estas dos componentes son iguales en promedio. El polarizador ideal transmite sólo la componente que sea paralela al eje de polarización, por lo que sólo se transmite la mitad de la intensidad incidente.

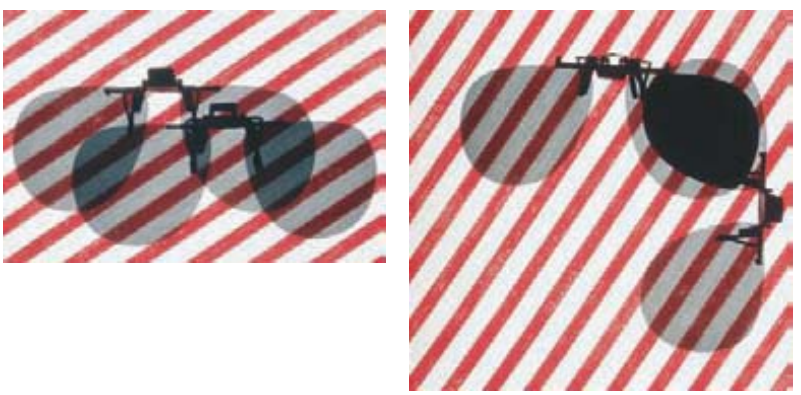


33.24 La luz natural no polarizada incide sobre el filtro no polarizador. La fotocelda (o celda fotovoltaica) mide la intensidad de la luz linealmente polarizada que se transmite.



33.25 Un analizador ideal transmite sólo la componente del campo eléctrico paralela a su dirección de transmisión (es decir, su eje de polarización).

¿Qué pasa cuando la luz linealmente polarizada que sale de un polarizador pasa a través de un segundo polarizador, como se ilustra en la figura 33.25? Considere el caso general en el cual el eje de polarización del segundo polarizador, o *analizador*, forma un ángulo ϕ con el eje de polarización del primer polarizador. Podemos resolver la luz linealmente polarizada que es transmitida por el primer polarizador en dos componentes, como se aprecia en la figura 33.25, una paralela y la otra perpendicular al eje del analizador. Sólo la componente paralela, con amplitud $E\cos\phi$, es transmitida por el analizador. La intensidad transmitida es máxima cuando $\phi = 0$, y es igual a cero cuando el polarizador y el analizador están *cruzados* de manera que $\phi = 90°$ (figura 33.26). Para determinar la dirección de polarización de la luz transmitida por el primer polarizador, se hace girar el analizador hasta que la fotocelda de la figura 33.25 mida una intensidad de cero; el eje de polarización del primer polarizador es, entonces, perpendicular al del analizador.



33.26 Estas fotos muestran la visión a través de anteojos Polaroid cuyos ejes de polarización están alineados ($\phi = 0$; izquierda) y perpendiculares ($\phi = 90°$; imagen derecha). La intensidad transmitida es máxima cuando los ejes están alineados, y es cero cuando los ejes están perpendiculares.

Para determinar la intensidad transmitida en valores intermedios del ángulo ϕ, recordemos nuestra explicación acerca de la energía en la sección 32.4, donde dijimos que la intensidad de una onda electromagnética es proporcional al *cuadrado* de la amplitud de la onda [véase la ecuación (32.29)]. La razón entre la *amplitud* trasmitida y la incidente es cos ϕ, por lo que la razón entre la *intensidad* transmitida y la incidente es $\cos^2 \phi$. Así, la intensidad de la luz transmitida a través del analizador es

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \phi \qquad \text{(ley de Malus, luz polarizada que pasa a través de un analizador)} \qquad (33.7)$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad máxima de la luz transmitida (en $\phi = 0$), e I es la cantidad transmitida con el ángulo ϕ. Esta relación, que descubrió experimentalmente Etienne Louis Malus en 1809, se llama **ley de Malus**. La ley de Malus *sólo* se aplica si la luz incidente que pasa a través del analizador ya está linealmente polarizada.

Estrategia para resolver problemas 33.2 Polarización lineal

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Recuerde que en todas las ondas electromagnéticas, incluidas las ondas luminosas, la dirección del campo $\vec{E}$ es la dirección de polarización y es perpendicular a la dirección de propagación. Cuando se trabaje con polarizadores, en realidad se está tratando con componentes de $\vec{E}$ paralelas y perpendiculares al eje de polarización. Todos los conocimientos sobre las componentes de los vectores resultan aplicables aquí.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Al igual que en los problemas de óptica geométrica, *siempre* comience por hacer un diagrama grande y nítido. Indique en el papel todos los ángulos conocidos, incluidos los ángulos de todos los ejes de polarización.
2. Determine las variables buscadas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Recuerde que un polarizador sólo deja pasar componentes del campo eléctrico paralelas a su eje de polarización.
2. Si la luz incidente está linealmente polarizada y tiene amplitud E e intensidad $I_{\text{máx}}$, la luz que pasa a través de un polarizador tiene amplitud $E\cos\phi$ intensidad $I_{\text{máx}} \cos^2\phi$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de polarización incidente y el eje de polarización del filtro.
3. La luz polarizada es una mezcla aleatoria de todos los estados posibles de polarización, por lo que, en promedio, tiene componentes iguales en dos direcciones perpendiculares cualesquiera. Cuando pasa a través de un polarizador ideal, la luz no polarizada se convierte en linealmente polarizada con la mitad de la intensidad de incidencia. La luz linealmente polarizada en forma parcial es una superposición de luz polarizada en forma lineal y luz no polarizada.
4. La intensidad (potencia media por unidad de área) de una onda es proporcional al *cuadrado* de su amplitud. Si usted encuentra que dos ondas difieren en amplitud en términos de un determinado factor, sus intensidades diferirán en el cuadrado de ese factor.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe su respuesta en busca de errores obvios. Si los resultados dicen que la luz que sale de un polarizador tiene mayor intensidad que la luz incidente, algo es incorrecto: un polarizador no puede agregar energía a una onda luminosa.

Ejemplo 33.5 Combinación de dos polarizadores

En la figura 33.25, la luz incidente no polarizada tiene intensidad I_0. Determine las intensidades transmitidas por los polarizadores primero y segundo si el ángulo entre los ejes de los dos filtros es de 30°.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema interviene un polarizador (un filtro polarizador en el que la luz no polarizada brilla, lo que produce luz polarizada) y un analizador (un segundo filtro polarizador en el cual la luz polarizada brilla).

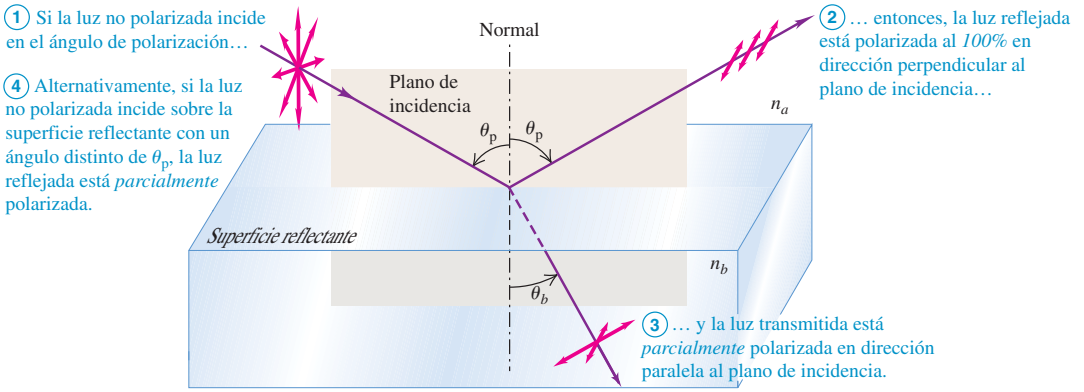
PLANTEAR: El diagrama de esta situación se presenta en la figura 33.25. Se da la intensidad I_0 de la luz incidente natural y el ángulo $\phi = 30°$ entre los ejes de polarización. Nuestras incógnitas son las intensidades de la luz que sale del primer polarizador y de la luz que sale del segundo.

EJECUTAR: Como ya se explicó, la intensidad de la luz linealmente polarizada transmitida por el primer filtro es $I_0/2$. De acuerdo con la ecuación (33.7) con $\phi = 30°$, el segundo filtro reduce la intensidad en un factor de $\cos^2 30° = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, la intensidad transmitida por el segundo polarizador es

$$\left(\frac{I_0}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} I_0$$

EVALUAR: Note que la intensidad disminuye después de cada paso a través de un polarizador. La única situación en la que la intensidad transmitida *no* disminuye es aquella en que el polarizador es ideal (de manera que no absorbe nada de la luz que pasa a través de él) y la luz incidente está linealmente polarizada a lo largo del eje de polarización, de manera que $\phi = 0$.

33.27 Cuando la luz incide en una superficie reflectante en el ángulo de polarización, la luz reflejada está linealmente polarizada.



Polarización por reflexión

La luz no polarizada se puede polarizar, ya sea en forma parcial o total, por *reflexión*. En la figura 33.27, la luz natural no polarizada incide sobre una superficie reflectante entre dos materiales ópticos transparentes; el plano que contiene los rayos incidente y reflejado y la normal a la superficie se llama **plano de incidencia**. Para la mayoría de los ángulos de incidencia, las ondas para las que el vector de campo eléctrico $\vec{\boldsymbol{E}}$ es perpendicular al plano de la incidencia (es decir, es paralelo a la superficie reflectante) se reflejan con más intensidad que aquellas cuyo $\vec{\boldsymbol{E}}$ yace en ese plano. En tal caso, la luz reflejada está *parcialmente polarizada* en la dirección perpendicular al plano de incidencia.

Pero en cierto ángulo particular de incidencia, llamado el **ángulo de polarización**, θ_p, la luz cuyo $\vec{\boldsymbol{E}}$ yace en el plano de incidencia *no se refleja en absoluto*, sino que se refracta por completo. A ese mismo ángulo de incidencia, la luz cuyo $\vec{\boldsymbol{E}}$ es perpendicular al plano de incidencia se refleja parcialmente y la otra parte se refracta. Por consiguiente, la luz *reflejada* está *completamente* polarizada en forma perpendicular al plano de incidencia, como se ilustra en la figura 33.27. La luz *refractada* (transmitida) está *parcialmente* polarizada en forma paralela a este plano; la luz refractada es una mezcla de la componente paralela al plano de incidencia, toda la cual se refracta, y el resto de la componente perpendicular.

En 1812 el científico británico Sir David Brewster descubrió que cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p, el rayo reflejado y el rayo refractado son perpendiculares entre sí (figura 33.28). En este caso, el ángulo de refracción θ_b se vuelve el complemento de θ_p, por lo que $\theta_b = 90° - \theta_p$. De acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_p = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

de donde resulta que

$$n_a \operatorname{sen}\theta_p = n_b \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_b \cos\theta_p$$

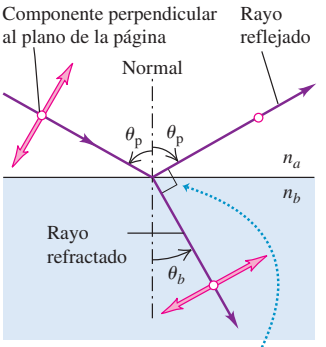
$$\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a} \qquad \text{(ley de Brewster para el ángulo de polarización)} \qquad (33.8)$$

Esta relación se conoce como **ley de Brewster**. Aunque se descubrió en forma experimental, también puede *deducirse* a partir de un modelo de onda empleando las ecuaciones de Maxwell.

La polarización por reflexión es la razón por la que los filtros polarizadores se usan tanto en los anteojos de sol (figura 33.26). Cuando la luz solar se refleja en una superficie horizontal, el plano de incidencia es vertical, y la luz reflejada contiene una

33.28 La importancia del ángulo de polarización. Los círculos abiertos representan una componente de $\vec{\boldsymbol{E}}$ que es perpendicular al plano de la figura (el plano de incidencia) y paralela a la superficie que separa los dos materiales.

Nota: ésta es una vista lateral de la situación que se ilustra en la figura 33.27.



Cuando la luz incide en el ángulo de polarización con una superficie, los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí y

$$\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a}$$

preponderancia de luz que está polarizada en la dirección horizontal. Cuando la reflexión ocurre en una carretera asfáltica lisa o en la superficie de un lago, produce una reverberación indeseable. La visión mejora si se elimina esa reverberación. El fabricante hace que el eje de polarización del material de los anteojos sea vertical, por lo que muy poca de la luz polarizada horizontalmente que se refleja en la carretera se transmite a los ojos. Los anteojos también reducen la intensidad general de la luz transmitida a un poco menos del 50% de la intensidad de la luz incidente no polarizada.

Ejemplo 33.6 Reflexión en la superficie de una alberca

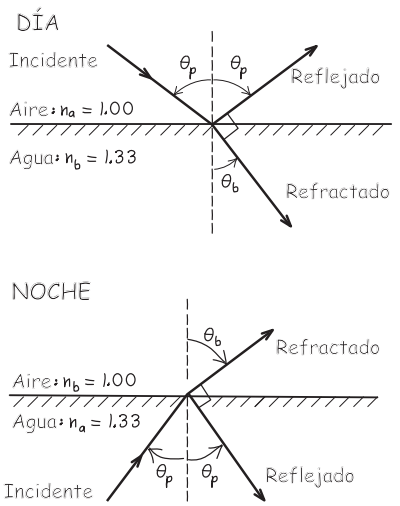
La luz del Sol se refleja en la superficie lisa de una alberca sin personas en su interior. *a*) ¿Con qué ángulo de reflexión se polariza completamente la luz? *b*) ¿Cuál es el ángulo correspondiente de refracción para la luz que se transmite (se refracta) en el agua? *c*) De noche se enciende un reflector subacuático en la alberca. Repita los incisos *a*) y *b*) para los rayos del reflector que llegan a la superficie desde abajo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se relaciona con la polarización por reflexión en una interfaz aire-agua en los incisos *a*) y *b*), y en una interfaz agua-aire en el inciso *c*).

PLANTEAR: La figura 33.29 presenta los esquemas de los rayos de luz para la situación en el día [incisos *a*) y *b*)] y en la noche [inciso *c*)]. En el inciso *a*) se busca el ángulo de polarización de la luz que primero está en el aire y después en el agua; esto se encuentra con la ley de Brewster, ecuación (33.8). En el inciso *b*) se desea determinar el ángulo de la luz refractada para esta situación. En el inciso *c*) de nuevo se desea calcular el ángulo de polarización, pero para la luz que primero viaja en el agua y después en el aire. De nuevo se utiliza la ecuación (33.8) para determinar ese ángulo.

33.29 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: *a*) La parte superior de la figura 33.29 ilustra la situación durante el día. Como la luz pasa del aire al agua, se tiene que $n_a = 1.00$ (aire) y $n_b = 1.33$ (agua). De acuerdo con la ecuación (33.8),

$$\theta_p = \arctan\frac{n_b}{n_a} = \arctan\frac{1.33}{1.00} = 53.1°$$

b) La luz incidente está en el ángulo de polarización, por lo que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares; por lo tanto,

$$\theta_p + \theta_b = 90°$$
$$\theta_b = 90° - 53.1° = 36.9°$$

c) La situación durante la noche se ilustra en la parte inferior de la figura 33.29. Ahora la luz *primero* viaja en el agua, y después en el aire, por lo que $n_a = 1.33$ y $n_b = 1.00$. De nuevo, utilizando la ecuación (33.8) se obtiene

$$\theta_p = \arctan\frac{1.00}{1.33} = 36.9°$$
$$\theta_b = 90° - 36.9° = 53.1°$$

EVALUAR: La respuesta para el inciso *b*) se puede comprobar con la ley de Snell, $n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$, o bien,

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a \operatorname{sen}\theta_p}{n_b} = \frac{1.00\operatorname{sen}53.1°}{1.33} = 0.600$$
$$\theta_b = 36.9°$$

Advierta que los dos ángulos de polarización que se obtuvieron en los incisos *a*) y *c*) suman 90°. Esto *no* es casualidad; ¿sabe usted por qué?

Polarización circular y elíptica

La luz y otro tipo de radiación electromagnética también tienen polarización *circular* o *elíptica*. Para presentar estos conceptos, volvamos una vez más a las ondas mecánicas en una cuerda estirada. En la figura 33.21, suponga que las dos ondas linealmente polarizadas de los incisos *a*) y *b*) están en fase y tienen la misma amplitud. Cuando se superponen, cada punto de la cuerda tiene desplazamientos y y z simultáneos de igual magnitud. Si reflexionamos un poco, vemos que la onda resultante se encuentra en un plano orientado a 45° con respecto a los ejes y y z (es decir, en un plano que forma un ángulo de 45° con los planos xy y xz). La amplitud de la onda resultante es más grande

en un factor de $\sqrt{2}$ que el de cualquiera de las ondas componentes, y la onda resultante está linealmente polarizada.

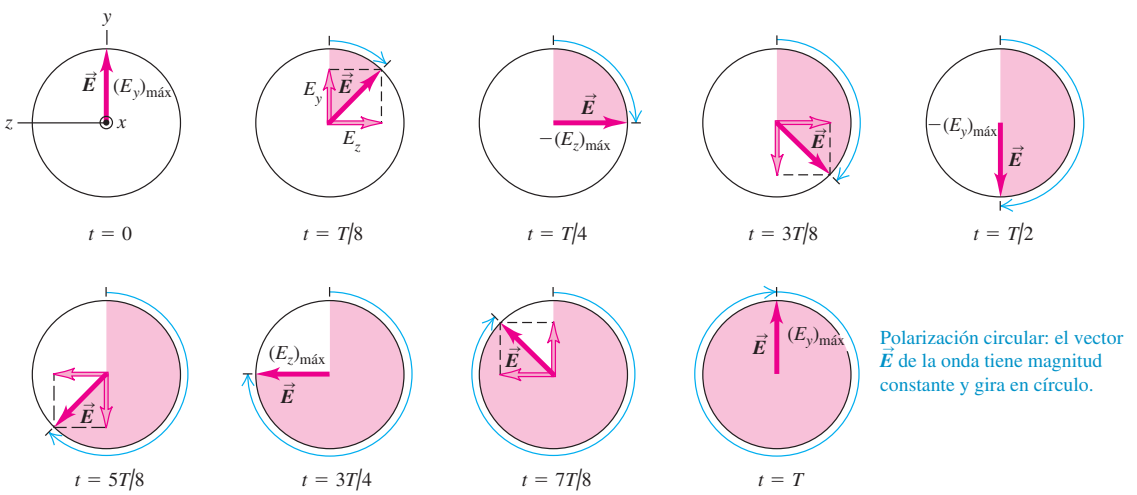
Pero ahora suponga que las dos ondas de igual amplitud difieren en su fase por un cuarto de ciclo. En ese caso, el movimiento resultante de cada punto corresponde a una superposición de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con una diferencia de fase de un cuarto de ciclo. El desplazamiento y en un punto es máximo en los momentos en que el desplazamiento z es igual a 0 y viceversa. El movimiento de la cuerda como un todo entonces ya no tiene lugar en un solo plano. Puede demostrarse que cada punto de la cuerda se mueve en un *círculo* en un plano paralelo al plano yz. Puntos sucesivos de la cuerda tienen diferencias de fases sucesivas, y el movimiento de la cuerda en conjunto tiene el aspecto de una hélice giratoria. Esto se ilustra a la izquierda del filtro polarizador que aparece en la figura 33.21c. Esta superposición particular de dos ondas linealmente polarizadas se llama **polarización circular**. Por convención, se dice que la onda está *circularmente polarizada por la derecha* cuando el sentido del movimiento de una partícula en la cuerda, para un observador que mira *hacia atrás* a lo largo de la dirección de propagación, es el *sentido horario;* se dice que la onda está *circularmente polarizada por la izquierda* si el sentido del movimiento es el inverso.

La figura 33.30 presenta la situación análoga para una onda electromagnética. Están superpuestas dos ondas sinusoidales de igual amplitud, polarizadas en las direcciones y y z y con una diferencia de fase de un cuarto de ciclo. El resultado es una onda en la que el vector $\vec{\boldsymbol{E}}$ en cada punto tiene magnitud constante, pero *gira* en torno a la dirección de propagación. La onda de la figura 33.30 se propaga hacia el lector y el vector $\vec{\boldsymbol{E}}$ parece girar en el sentido horario, por lo que se denomina onda electromagnética *circularmente polarizada por la derecha.* Si en vez de ello, el vector $\vec{\boldsymbol{E}}$ de una onda que va hacia usted parece girar en el sentido antihorario, se llama onda electromagnética *circularmente polarizada por la izquierda.*

Si la diferencia de fase entre las dos ondas componentes es distinta de un cuarto de ciclo, o si las dos ondas componentes tienen amplitudes diferentes, entonces cada punto de la cuerda traza no un círculo, sino una *elipse*. En este caso, se dice que la onda está **elípticamente polarizada**.

En el caso de ondas electromagnéticas con frecuencias de radio, se puede crear una polarización circular o elíptica mediante dos antenas situadas en ángulo recto alimentadas por el mismo transmisor, pero con una red desplazadora de fase que introduce la diferencia de fase apropiada. En el caso la luz, el desplazamiento de fase se introduce empleando un material que presente *birrefringencia*, es decir, que tenga diferentes índices de refracción ante distintas direcciones de polarización. Un ejemplo conocido es el de la calcita ($CaCO_3$). Cuando un cristal de calcita se orienta en forma

33.30 Polarización circular de una onda electromagnética que se desplaza paralelamente al eje x. La componente y de $\vec{\boldsymbol{E}}$ se retrasa un cuarto de ciclo con respecto a la componente z. Esta diferencia de fase da por resultado una polarización circular por la derecha.



Polarización circular: el vector $\vec{\boldsymbol{E}}$ de la onda tiene magnitud constante y gira en círculo.

apropiada en un haz de luz no polarizada, su índice de refracción (con una longitud de onda en el vacío de 589 nm) es 1.658 con una dirección de polarización, y 1.486 con la dirección perpendicular. Cuando dos ondas de igual amplitud y direcciones de polarización perpendiculares entran en un material de este tipo, viajan con diferente rapidez. Si están en fase cuando ingresan al material, en general, ya no estarán en fase cuando salgan. Si el cristal tiene el espesor justo para introducir una diferencia de fase de un cuarto de ciclo, entonces el cristal convierte la luz linealmente polarizada en luz circularmente polarizada. Un cristal de este tipo recibe el nombre de *placa de cuarto de onda*. Esa placa también convierte la luz circularmente polarizada en luz linealmente polarizada. ¿Podría usted probarlo? (Véase el problema 33.43.)

Fotoelasticidad

Algunos materiales ópticos que normalmente no tienen birrefringencia, adquieren esta propiedad cuando se someten a esfuerzo mecánico. Ésta es la base de la ciencia de la *fotoelasticidad.* Es posible analizar los esfuerzos en vigas, chapas de calderas, dientes de engranes y pilares de las catedrales elaborando un modelo transparente del objeto, por lo general con un material plástico, para luego someterlo a esfuerzos y examinarlo entre un polarizador y un analizador en posición cruzada. Con estos métodos ópticos se han estudiado distribuciones de esfuerzos muy complicadas.

33.31 Análisis de tensiones fotoelásticas de un modelo de la sección transversal de una catedral gótica. La construcción de mampostería que se usaba en esta clase de edificaciones tenía una gran resistencia a la compresión, pero muy poca a la tensión (véase la sección 11.4). Los vientos intensos y un refuerzo inadecuado con contrafuertes provocaban en ocasiones esfuerzos de tensión en elementos estructurales normalmente comprimidos, los cuales han sido causa de varios derrumbes estrepitosos.

La figura 33.31 presenta la fotografía de un modelo fotoelástico sometido a esfuerzos. La luz polarizada que entra al modelo se puede concebir como si tuviera una componente a lo largo de las dos direcciones del plástico birrefringente. Como estas dos componentes viajan a través del plástico con diferente rapidez, la luz que sale por el otro lado del modelo puede tener una dirección general distinta de polarización. Entonces, algo de esta luz transmitida será capaz de pasar a través del analizador aun cuando su eje de polarización forme un ángulo de 90° con el eje del polarizador, y las áreas sometidas a esfuerzo en el plástico aparecerán como puntos brillantes. La cantidad de birrefringencia es distinta para longitudes de onda diferentes; de ahí los distintos colores de luz. El color que aparece en cada ubicación de la figura 33.31 es aquél para el que la luz transmitida está más cerca de estar polarizada a lo largo del eje de polarización del analizador.

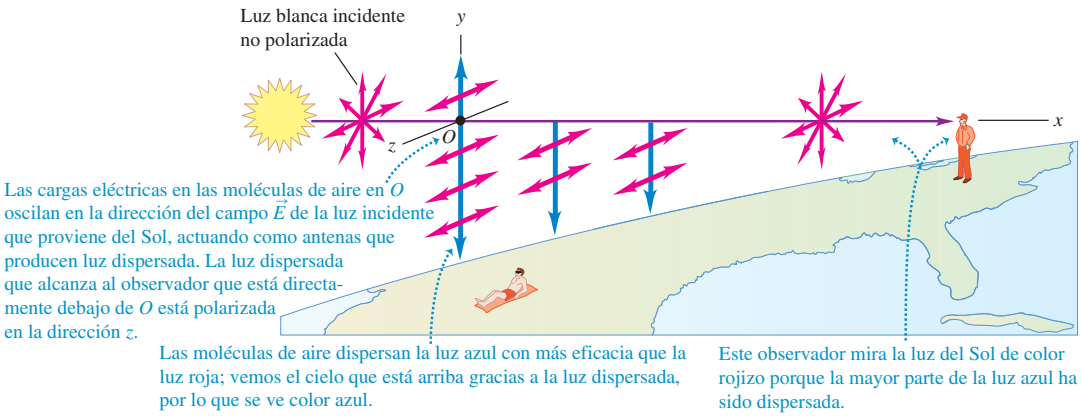
Evalúe su comprensión de la sección 33.5 Suponga que usted toma una fotografía de un edificio de oficinas muy alto, iluminado por la luz solar. Con la finalidad de reducir al mínimo las reflexiones de las ventanas del edificio, coloca un filtro polarizador en la lente de la cámara. ¿Cómo debería orientar el filtro? i) Con el eje del polarizador vertical; ii) con el eje del polarizador horizontal; iii) cualquier orientación reducirá al mínimo las reflexiones; iv) ninguna orientación tendrá un efecto apreciable.

*33.6 Dispersión de la luz

El cielo es azul. Los atardeceres son rojos. La luz del cielo está parcialmente polarizada; ésa es la razón por la que el cielo se ve más oscuro desde ciertos ángulos que desde otros cuando se ve a través de anteojos Polaroid de sol. Como se verá, un solo fenómeno es el responsable de todos estos efectos.

Cuando usted mira el cielo durante el día, la luz que observa es la del Sol que ha sido absorbida y vuelta a irradiar en diferentes direcciones. Este proceso se llama **dispersión**. (Si la Tierra no tuviera atmósfera, el cielo se vería tan negro durante el día como durante la noche, tal como lo ve un astronauta en el espacio o en la Luna; se vería la luz del Sol sólo mirándolo directamente, y las estrellas serían visibles durante el día.) La figura 33.32 muestra algunos de los detalles del proceso de dispersión. La luz del Sol, que no está polarizada, llega desde el lado izquierdo a lo largo del eje x y pasa sobre un observador que mira verticalmente hacia arriba a lo largo del eje y. (Nosotros observamos la situación lateralmente.) Considere que las moléculas de la atmósfera terrestre se localizan en el punto O. El campo eléctrico en el haz de luz solar hace vibrar las cargas eléctricas de estas moléculas. Como la luz es una onda trans-

33.32 Cuando la persona que toma el sol a la izquierda de la ilustración mira hacia arriba, ve la luz solar polarizada, de color azul, que ha sido dispersada por las moléculas de aire. El observador a la derecha ve luz rojiza, no polarizada, si mira hacia el Sol.



versal, la dirección del campo eléctrico en cualquier componente de la luz solar se encuentra en el plano yz y el movimiento de las cargas tiene lugar en ese plano. No hay campo, y por lo tanto no hay movimiento de cargas, en la dirección del eje x.

Una onda de luz incidente coloca las cargas eléctricas de las moléculas en el punto O en vibración a lo largo de la línea de $\vec{E}$. Esta vibración se resuelve en dos componentes, una a lo largo del eje y y la otra a lo largo del eje z. Cada componente de la luz incidente produce el equivalente de dos "antenas" moleculares que oscilan con la misma frecuencia que la luz incidente y están a lo largo de los ejes y y z.

En el capítulo 32 mencionamos que una carga oscilante, como las de una antena, no irradian en la dirección de su oscilación. (Véase la figura 32.3 en la sección 32.1.) Así, la "antena" a lo largo del eje y no envía ninguna luz al observador ubicado directamente debajo de ella, aunque emite luz en otras direcciones. De esta forma, la única luz que llega al observador proviene de las otras "antenas" moleculares correspondientes a la oscilación de carga a lo largo del eje z. Esta luz está linealmente polarizada, con su campo eléctrico a lo largo del eje z (paralelo a la "antena"). Los vectores rojos sobre el eje y abajo del punto O en la figura 33.32 indican la dirección de polarización de la luz que llega al observador.

Conforme el haz original de luz solar pasa a través de la atmósfera, su intensidad disminuye a medida que su energía pasa a la luz dispersa. El análisis detallado del proceso de dispersión revela que la intensidad de la luz dispersada por las moléculas del aire se incrementa en proporción a la cuarta potencia de la frecuencia (inversamente a la cuarta potencia de la longitud de onda). Así, la razón de la intensidad para los dos extremos del espectro visible es $(700\ \text{nm}/400\ \text{nm})^4 = 9.4$. En términos generales, la luz dispersada contiene nueve veces más luz azul que roja, y por eso el cielo es azul.

Las nubes contienen una gran concentración de gotas de agua o cristales de hielo, que también dispersan la luz. Como esta concentración es elevada, la luz que pasa a través de una nube tiene muchas más oportunidades de dispersarse que la luz que pasa a través de un cielo despejado. En consecuencia, luz de *todas* las longitudes de onda termina por ser dispersada fuera de la nube, y por eso la nube es de color blanco (figura 33.33). La leche se ve blanca por la misma razón; la dispersión se debe a los glóbulos de grasa de la leche. Si se diluye leche mezclándola con agua suficiente, la concentración de los glóbulos de grasa será tan baja que sólo se dispersará luz azul de manera significativa; por eso, tal disolución se verá azul, y no blanca. (La leche sin grasa, que también tiene una concentración muy baja de glóbulos, se ve azulosa por esa misma razón.)

Cerca del ocaso, cuando la luz del Sol tiene que recorrer una distancia más larga a través de la atmósfera de la Tierra, una fracción sustancial de luz azul es eliminada por la dispersión. La luz blanca menos la luz azul se ve de color amarillo o rojo. Esto explica el tono amarillo o rojo que es frecuente ver durante el ocaso (como puede constatar el observador en el extremo derecho de la figura 33.32).

33.33 Las nubes son blancas porque dispersan con mucha eficacia la luz solar de todas las longitudes de onda.

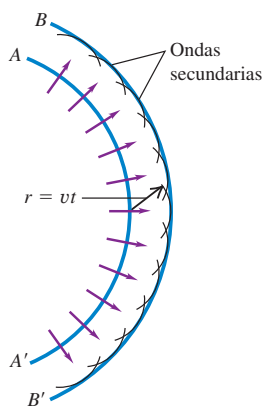
Puesto que la luz del cielo está parcialmente polarizada, los polarizadores son útiles en fotografía. El cielo que aparece en una fotografía se puede oscurecer si se orienta el eje del polarizador de manera que sea perpendicular a la dirección predominante de polarización de la luz dispersada. La luz con mayor grado de polarización proviene de aquellas partes del cielo que están a 90° con respecto al Sol; por ejemplo, del cenit cuando el Sol está en el horizonte durante el amanecer o el ocaso.

33.7 Principio de Huygens

Las leyes de reflexión y refracción de los rayos de luz que presentamos en la sección 33.2 fueron descubiertas de manera empírica mucho antes de que la naturaleza ondulatoria de la luz se hubiera establecido sobre bases firmes. Sin embargo, es posible *deducir* esas leyes a partir de consideraciones referentes a las ondas y demostrarse que son congruentes con la naturaleza ondulatoria de la luz. El mismo tipo de análisis que usamos aquí tendrá importancia central en los capítulos 35 y 36 cuando estudiemos óptica física.

Comenzaremos con el llamado **principio de Huygens**. Este principio, establecido por primera vez por el científico holandés Christiaan Huygens en 1678, es un método geométrico para encontrar, a partir de la forma conocida de un frente de onda en un instante determinado, la forma que tiene ese frente de onda cierto tiempo después. Huygens supuso que **todo punto de un frente de onda puede considerarse la fuente de ondas secundarias que se dispersan en todas direcciones con rapidez igual a la rapidez de la propagación de la onda original**. El nuevo frente de onda en un momento posterior se obtiene entonces construyendo una superficie *tangente* a las ondas secundarias, conocida como *envolvente* de esas ondas. Todos los resultados que se obtienen con el principio de Huygens también se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell, de manera que no se trata de un principio independiente, y a menudo resulta muy útil para efectuar cálculos con fenómenos ondulatorios.

33.34 Aplicación del principio de Huygens al frente de onda AA' para construir un nuevo frente de onda BB'.



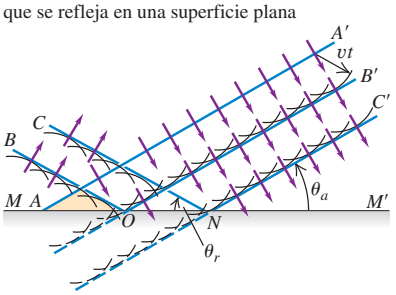
El principio de Huygens se ilustra en la figura 33.34. El frente de onda original AA' viaja hacia fuera de la fuente, como señalan las flechas. Queremos obtener la forma del frente de onda después de transcurrido un intervalo t de tiempo. Sea v la rapidez de propagación de la onda; por lo tanto, en un tiempo t la onda recorre una distancia vt. Construimos varios círculos (trazos de las ondas esféricas secundarias) con radio $r = vt$ con centro en los puntos a lo largo AA'. El trazo de la envolvente de estas ondas secundarias, que ahora es el nuevo frente de onda, es la curva BB'. Suponemos que la rapidez v es la misma en todos los puntos y en todas direcciones.

La reflexión y el principio de Huygens

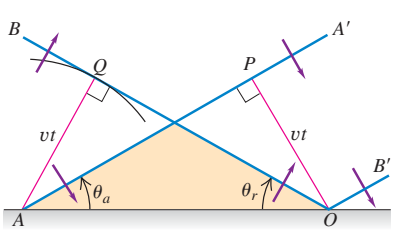
Para deducir la ley de reflexión a partir del principio de Huygens, consideremos una onda plana que se acerca a una superficie reflectante plana. En la figura 33.35a, las rectas AA', OB' y NC' representan posiciones sucesivas de un frente de onda que avanza hacia la superficie MM'. El punto A sobre el frente de onda AA' acaba de llegar a la superficie reflectante. Podemos aplicar el principio de Huygens para encontrar la posición del frente de onda después de transcurrido un intervalo de tiempo t. Con los puntos sobre AA' como centros, se dibujan varias ondas secundarias con radio vt. Las ondas secundarias que se originan cerca del extremo superior de AA' se dispersan sin encontrar obstáculos, y su envolvente da la parte OB' del nuevo frente de onda. Si la superficie reflectante no estuviera ahí, las ondas secundarias que se originan cerca del extremo inferior de AA' alcanzarían de manera similar las posiciones mostradas por los arcos circulares discontinuos. En vez de ello, estas ondas secundarias inciden en la superficie reflectante.

33.35 Aplicación del principio de Huygens para deducir la ley de la reflexión.

a) Posiciones sucesivas de una onda plana AA' que se refleja en una superficie plana



b) Detalle ampliado de a)



El efecto de la superficie reflectante consiste en *cambiar la dirección* de propagación de las ondas secundarias que inciden en ella, por lo que parte de una onda secundaria que hubiera penetrado en la superficie en realidad se encuentra a la izquierda de ella, como lo ilustran las líneas continuas. La primera de tales ondas secundarias tiene su centro en el punto A; la envolvente de todas las ondas secundarias reflejadas es la parte OB del frente de onda. El trazo del frente de onda completo en este instante es la línea quebrada BOB'. Una construcción similar genera la línea CNC' para el frente de onda después de transcurrido otro intervalo t.

Gracias a la geometría plana sabemos que el ángulo θ_a entre el *frente de onda* incidente y la *superficie* es el mismo que aquél entre el *rayo* incidente y la *normal* a la superficie, de manera que corresponde al ángulo de incidencia. De forma similar, θ_r es el ángulo de reflexión. Para encontrar la relación entre estos ángulos, consideremos la figura 33.35b. A partir de O se dibuja $OP = vt$, perpendicular a AA'. Ahora OB, por construcción, es tangente a un círculo de radio vt con centro en A. Si se dibuja AQ desde A hacia el punto de tangencia, los triángulos APO y OQA son congruentes porque son triángulos rectángulos con el lado AO en común y con $AQ = OP = vt$. Por lo tanto, el ángulo θ_a es igual al ángulo θ_r, y tenemos así la ley de la reflexión.

La refracción y el principio de Huygens

La ley de la *refracción* se deduce mediante un procedimiento similar. En la figura 33.36a consideremos un frente de onda representado por la recta AA', para el cual el punto A acaba de llegar a la superficie de frontera SS' entre dos materiales transparentes a y b, con índices de refracción n_a y n_b, y rapidez de onda v_a y v_b. (Las ondas *reflejadas* no se ilustran en la figura; éstas se comportan exactamente como en la figura 33.35.) Podemos aplicar el principio de Huygens para determinar la posición de los frentes de onda refractados después de cierto intervalo t.

Con los puntos sobre AA' como centros, dibujamos varias ondas secundarias. Las que se originan cerca del extremo superior de AA' viajan con rapidez v_a y, después de cierto intervalo de tiempo t, son superficies esféricas de radio v_at. Sin embargo, la onda secundaria que se origina en el punto A viaja en el segundo material b con rapidez v_b y en el tiempo t es una superficie esférica de radio v_bt. La envolvente de las ondas secundarias desde el frente de onda original es el plano cuyo trazo es la línea quebrada BOB'. Una construcción similar da como resultado el trazo CPC' después de un segundo intervalo t.

Los ángulos θ_a y θ_b entre la superficie y los frentes de onda incidente y refractado son el ángulo de incidencia y el de refracción, respectivamente. Para encontrar la relación entre esos ángulos, consulte la figura 33.36b. Dibujamos $OQ = v_at$ perpendicular a AQ, y $AB = v_bt$ perpendicular a BO. Del triángulo rectángulo AOQ resulta,

$$\operatorname{sen}\theta_a = \frac{v_at}{AO}$$

y del triángulo rectángulo AOB,

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{v_bt}{AO}$$

Éstos se combinan y se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{v_a}{v_b} \tag{33.9}$$

Hemos definido el índice de refracción n de un material como la razón entre la rapidez de la luz c en el vacío y su rapidez v en el material: $n_a = c/v_a$ y $n_b = c/v_b$. Por lo tanto,

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{c/v_b}{c/v_a} = \frac{v_a}{v_b}$$

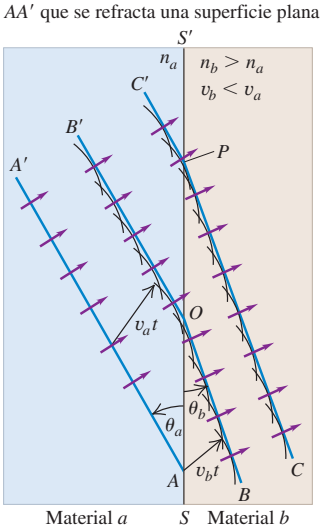
y la ecuación (33.9) se rescribe como

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{o}$$
$$n_a\operatorname{sen}\theta_a = n_b\operatorname{sen}\theta_b$$

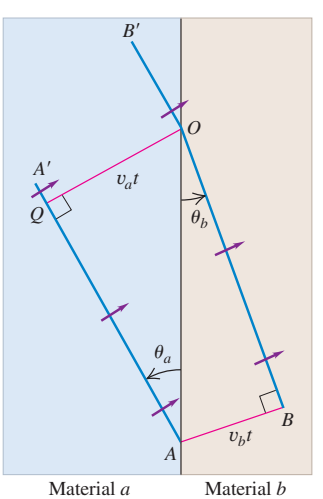
que reconocemos como la ley de Snell, ecuación (33.4). Así, hemos obtenido la ley de Snell a partir de una teoría ondulatoria. De forma alternativa elegimos considerar la ley de Snell como un resultado experimental que define el índice de refracción de un

33.36 Aplicación del principio de Huygens para deducir la ley de la refracción. Se presenta el caso $v_b < v_a$ ($n_b > n_a$).

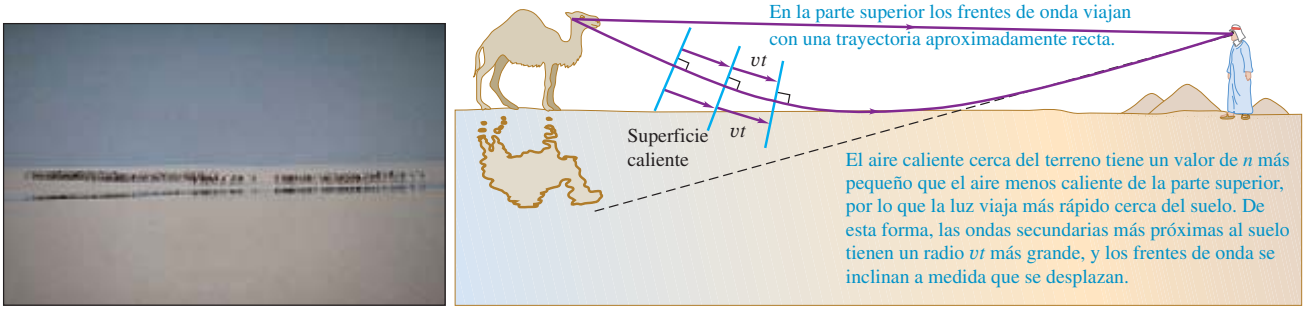
a) Posiciones sucesivas de una onda plana AA' que se refracta una superficie plana



b) Detalle ampliado de a)



33.37 Formación de un espejismo.



material; en tal caso, este análisis ayuda a confirmar la relación $v = c/n$ de la rapidez de la luz en un material.

Los espejismos ofrecen un ejemplo interesante del principio de Huygens en acción. Cuando la superficie del pavimento o la arena del desierto se calientan mucho por la acción de los rayos solares, cerca de la superficie se forma una capa de aire caliente, menos densa y de menor n. La rapidez de la luz es un poco mayor en el aire caliente cerca del suelo, las ondas secundarias de Huygens tienen radios ligeramente más grandes, los frentes de onda se inclinan levemente, y los rayos que se dirigían hacia la superficie con un ángulo de incidencia grande (casi de 90°) se flexionan como se ilustra en la figura 33.37. La luz lejos del terreno se desvía menos y viaja casi en línea recta. El observador mira el objeto en su posición natural, con una imagen invertida debajo, como si estuviera en una superficie reflectante horizontal. Aun cuando la turbulencia del aire caliente impide que se forme una imagen invertida clara, la mente del viajero sediento interpreta la superficie aparentemente reflectante como un cuerpo de agua.

Es importante recordar que las ecuaciones de Maxwell son las relaciones fundamentales de la propagación de las ondas electromagnéticas, pero es notable que el principio de Huygens se anticipara dos siglos al análisis de Maxwell, quien estableció la base teórica del principio de Huygens. Cada punto de una onda electromagnética, con sus campos eléctrico y magnético variables en el tiempo, actúa como fuente de una onda continua, según predicen las leyes de Ampère y de Faraday.

Evalúe su comprensión de la sección 33.7 El sonido viaja más rápido en el aire caliente que en el aire frío. Imagine un frente meteorológico que corre de norte a sur, con el aire cálido al oeste del frente y el aire frío en el este. Una onda sonora que viajara en dirección noreste en el aire caliente encuentra a este frente. ¿Cómo cambiará la dirección de la onda de sonido al pasar al aire frío? i) La dirección de la onda se desviará hacia el norte; ii) la dirección se desviará hacia el este; iii) la dirección de la onda no cambiará.

CAPÍTULO 33 RESUMEN

La luz y sus propiedades: La luz es una onda electromagnética. Cuando es emitida o absorbida también presenta propiedades de partícula. Es emitida por cargas eléctricas en aceleración. La rapidez de la luz en el vacío es una constante física fundamental.

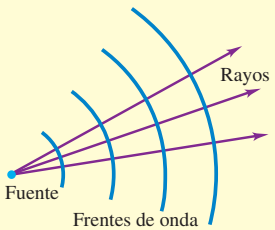
Un frente de onda es una superficie de fase constante; los frentes de onda se desplazan con rapidez igual a la de propagación de la onda. Un rayo es una línea recta a lo largo de la dirección de propagación, perpendicular a los frentes de onda. La representación de la luz por medio de rayos es la base de la óptica geométrica.

Cuando se transmite luz de un material a otro, la frecuencia de la luz no cambia, pero la longitud de onda y la rapidez de onda pueden cambiar. El índice de refracción n de un material es la razón entre la rapidez de la luz en el vacío c y su rapidez v en el material. Si λ_0 es la longitud de onda en el vacío, la misma onda tiene una longitud más corta λ en un medio con un índice de refracción n. (Véase el ejemplo 33.2.)

La variación del índice de refracción n con la longitud de onda λ se llama dispersión. Por lo general, n disminuye cuando λ aumenta.

$$n = \frac{c}{v} \tag{33.1}$$

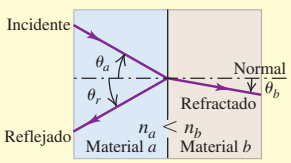
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \tag{33.5}$$



Reflexión y refracción: En una interfaz lisa entre dos materiales ópticos, los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la interfaz, yacen todos en un solo plano llamado plano de incidencia. La ley de reflexión establece que los ángulos de incidencia y refracción son iguales. La ley de refracción relaciona los ángulos de incidencia y refracción con los índices de refracción de los materiales. Los ángulos de incidencia, reflexión y refracción siempre se miden con respecto a la normal a la superficie. (Véanse los ejemplos 33.1 y 33.3.)

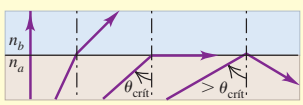
$\theta_r = \theta_a$
(ley de reflexión) (33.2)

$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$
(ley de refracción) (33.4)



Reflexión interna total: Cuando un rayo viaja en un material de índice de refracción mayor n_a hacia un material con menor índice n_b, ocurre la reflexión interna total en la interfaz cuando el ángulo de incidencia excede el ángulo crítico $\theta_{\text{crít}}$. (Véase el ejemplo 33.4.)

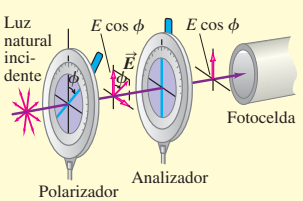
$$\operatorname{sen}\theta_{\text{crít}} = \frac{n_b}{n_a} \tag{33.6}$$



Polarización de la luz: La dirección de polarización de una onda electromagnética linealmente polarizada es la dirección del campo $\vec{E}$. Un filtro polarizador deja pasar ondas linealmente polarizadas a lo largo de su eje de polarización y bloquea aquéllas perpendicularmente polarizadas con respecto a ese eje. Cuando luz polarizada con intensidad $I_{\text{máx}}$ incide en un filtro polarizador que se usa como analizador, la intensidad I de la luz transmitida a través del analizador depende del ángulo ϕ entre la dirección de polarización de la luz incidente y el eje de polarización del analizador. (Véase el ejemplo 33.5.) Cuando se superponen dos ondas linealmente polarizadas con una diferencia de fase, el resultado es luz circular o elípticamente polarizada. En este caso, el vector $\vec{E}$ no está confinado a un plano que contenga la dirección de propagación, sino que describe círculos o elipses en planos perpendiculares a la dirección de propagación.

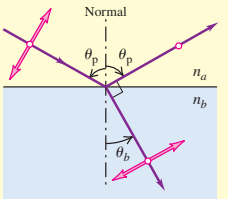
La luz es dispersada por las moléculas del aire. La luz dispersada está parcialmente polarizada.

$I = I_{\text{máx}} \cos^2\phi$
(ley de Malus) (33.7)

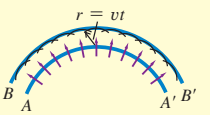


Polarización por reflexión: Cuando luz no polarizada incide en una interfaz entre dos materiales, la ley de Brewster establece que la luz reflejada está completamente polarizada en forma perpendicular al plano de incidencia (paralela a la interfaz) si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p. (Véase el ejemplo 33.6.)

$$\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{(ley de Brewster)} \tag{33.8}$$



Principio de Huygens: El principio de Huygens establece que si se conoce la posición de un frente de onda en cierto instante, entonces la posición del frente en un momento posterior se puede construir imaginando el frente como una fuente de ondas secundarias. El principio de Huygens se puede usar para deducir las leyes de la reflexión y la refracción.



Términos clave

óptica, *1121*
frente de onda, *1122*
rayo, *1123*
óptica geométrica, *1123*
óptica física, *1123*
reflexión, *1123*
refracción, *1123*
reflexión especular, *1124*
reflexión difusa, *1124*
índice de refracción, *1124*
ley de la reflexión, *1125*
ley de la refracción (ley de Snell), *1125*
ángulo crítico, *1130*
reflexión interna total, *1130*
dispersión, *1132*
linealmente polarizada, *1134*
filtro polarizador (polarizador), *1134*
luz no polarizada (luz natural), *1136*
dicroísmo, *1136*
eje de polarización, *1136*
ley de Malus, *1138*
plano de incidencia, *1139*
ángulo de polarización, *1139*
ley de Brewster, *1139*
polarización circular, *1141*
polarización elíptica, *1141*
dispersión, *1142*
principio de Huygens, *1144*

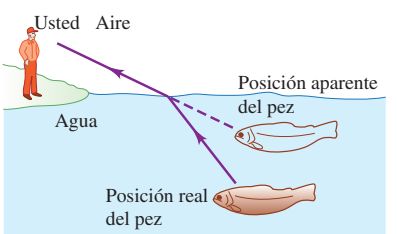
Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Éste es el mismo efecto que se ilustra en la figura 33.31. Las herramientas de dibujo están colocadas entre dos filtros polarizadores cuyos ejes de polarización son perpendiculares. En los sitios en que el plástico transparente está sometido a esfuerzo, se vuelve birrefringente; es decir, la luz viaja a través de él con una rapidez que depende de su polarización. El resultado es que la luz que sale del plástico tiene una polarización distinta que la de la luz que entra. Un punto en el plástico se ve brillante si la luz que sale tiene la misma polarización que el segundo filtro polarizador. La cantidad de birrefringencia depende de la longitud de onda de la luz, así como de la cantidad de esfuerzo que se ejerce sobre el plástico, por lo que en diferentes lugares del plástico se observan distintos colores.

Respuestas a las preguntas de evalúe su comprensión

33.1 Respuesta: iii) Las ondas viajan más lejos en la dirección y que en las otras direcciones en una cantidad de tiempo dada, de manera que los frentes de onda están alargados en la dirección y.

33.2 Respuestas: *a)* ii), *b)* iii) Como se aprecia en la figura, los rayos de luz que provienen del pez se desvían alejándose de la normal cuando pasan del agua ($n = 1.33$) al aire ($n = 1.00$). Como resultado, el pez parece estar más cerca de la superficie del agua de lo que realmente está. Por lo tanto, se debe apuntar el arpón *más abajo* de la posición aparente del pez. Si se utiliza un rayo láser, se debe apuntar *hacia* la posición aparente del pez: el haz de luz láser seguiría la misma trayectoria que va de usted al pez que la luz ordinaria que va del pez a usted (aunque en sentido opuesto).



33.3 Respuestas: i), ii) La reflexión interna total ocurre sólo si se cumplen dos condiciones: n_b debe ser menor que n_a, y el ángulo crítico $\theta_{crít}$ (donde $\text{sen}\,\theta_{crít} = n_b/n_a$) debe ser más pequeño que el ángulo de incidencia θ_a. En los primeros dos casos se satisfacen ambas condiciones: los ángulos críticos son i) $\theta_{crít} = \text{sen}^{-1}(1/1.33) = 48.8°$ y ii) $\theta_{crít} = \text{sen}^{-1}(1.33/1.52) = 61.0°$, los dos son más pequeños que $\theta_a = 70°$. En el tercer caso, $n_b = 1.52$ es mayor que $n_a = 1.33$, por lo que la reflexión interna total no puede ocurrir a ningún ángulo de incidencia.

33.5 Respuesta: ii) La luz solar reflejada en las ventanas del edificio alto está parcialmente polarizada en la dirección vertical, ya que cada ventana yace en un plano vertical. El filtro Polaroid enfrente de la lente está orientado con su eje de polarización perpendicular a la dirección de polarización dominante de la luz reflejada.

33.7 Respuesta: ii) El principio de Huygens se aplica a las ondas de todas clases, incluidas las sonoras. Por consiguiente, esta situación es exactamente la que se ilustra en la figura 33.36, donde el material *a* representa el aire caliente, el material *b* representa el aire frío en el que las ondas viajan con más lentitud, y la interfaz entre los materiales representa el frente del aire. El norte se encuentra hacia la parte superior de la figura y el este hacia la derecha, así que la figura 33.36 indica que los rayos (que señalan la dirección de propagación) se desvían hacia el este.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P33.1. La luz tarda cerca de ocho minutos en viajar del Sol a la Tierra. ¿La atmósfera terrestre la retrasa en forma apreciable? Explique su respuesta.

P33.2. La luz del Sol o de las estrellas que pasan a través de la atmósfera de la Tierra siempre se desvía hacia la vertical. ¿Por qué? ¿Significa esto que una estrella no se encuentra en realidad donde parece estar? Explique su respuesta.

P33.3. Un haz de luz pasa de un material a otro. En términos *físicos*, explique *por qué* cambia la longitud de onda, pero no la frecuencia ni el periodo.

P33.4. Un estudiante afirma que debido a la refracción atmosférica (véase la pregunta para análisis P33.2), el Sol puede verse después de que se ha puesto y que entonces el día es más largo de lo que sería si la Tierra no tuviera atmósfera. En primer lugar, ¿qué quiere decir el estudiante con que el Sol se puede ver después de que se puso? Luego, comente la validez de esa conclusión.

P33.5. Cuando sale aire caliente de un radiador o un conducto caliente, los objetos tras él parecen vibrar u ondular. ¿Cuál es la causa de esto?

P33.6. Idee experimentos directos para medir la rapidez de la luz en un vidrio dado empleando *a*) la ley de Snell, *b*) la reflexión interna total, *c*) la ley de Brewster.

P33.7. A veces, al mirar a través de una ventana, se observan dos imágenes reflejadas desplazadas ligeramente una con respecto a la otra. ¿A qué se debe esto?

P33.8. Si se mira desde abajo hacia la superficie del agua en un acuario, se verá un reflejo invertido de los peces en la superficie de ésta. Explique cómo sucede esto.

P33.9. Un rayo de luz en el aire incide en una superficie de vidrio. ¿Hay algún intervalo de ángulos para los cuales ocurre la reflexión total? Explique su respuesta.

P33.10. Cuando la luz incide en una interfaz entre dos materiales, el ángulo del rayo refractado depende de la longitud de onda, pero el ángulo del rayo reflejado no. ¿Por qué es así?

P33.11. Un vendedor afirma que cierto par de anteojos tiene filtros Polaroid; usted sospecha que los vidrios tan sólo son plástico teñido. ¿Cómo podría saberlo con certeza?

P33.12. ¿Tiene sentido hablar acerca de la polarización de una onda *longitudinal* como las del sonido? ¿Por qué?

P33.13. ¿Cómo se puede determinar la dirección del eje de polarización de un polarizador único?

P33.14. Se ha propuesto que los parabrisas de los automóviles y los faros deberían tener filtros polarizadores con la finalidad de disminuir el resplandor de las luces cuando los vehículos se acercan de frente mientras se maneja de noche. ¿Funcionaría esto? ¿Cómo habría que disponer los ejes de polarización? ¿Qué ventajas tendría esta medida? ¿Qué desventajas?

P33.15. Cuando se coloca una hoja de envoltura de plástico para comida entre dos polarizadores cruzados, no se transmite luz. Cuando la hoja se estira en una dirección, algo de luz pasa a través de los polarizadores cruzados. ¿Qué es lo que pasa?

P33.16. Si usted se sienta en la playa y mira al océano a través de unos anteojos Polaroid, éstos le ayudan a reducir el resplandor de la luz solar que se refleja en el agua. Pero si se recuesta de costado en la playa, es poco lo que se reduce la reverberación. Explique a qué se debe la diferencia.

P33.17. Cuando la luz no polarizada incide en dos polarizadores cruzados, no se transmite luz. Un estudiante afirmó que si se insertaba un tercer polarizador entre los otros dos, habría algo de transmisión. ¿Tiene sentido esto? ¿Cómo podría un tercer filtro *incrementar* la transmisión?

P33.18. Para las antenas antiguas de "tipo conejo", es posible alterar la calidad de la recepción considerablemente con sólo cambiar la orientación de la antena. ¿Por qué?

P33.19. En la figura 33.32, si la luz que se dispersa hacia fuera del rayo incidente está polarizada, ¿por qué el haz transmitido no está también polarizado parcialmente?

P33.20. Usted toma un baño de sol ya avanzada la tarde, cuando el Sol está relativamente bajo en el cielo del hemisferio occidental. Está acostado sobre su espalda, y ve directamente hacia arriba a través de sus anteojos Polaroid. Para reducir al mínimo la cantidad de luz del cielo que llega a sus ojos, ¿cómo debería recostarse: con sus pies hacia el norte, el este, el sur, el oeste o en alguna otra dirección? Explique su razonamiento.

P33.21. La luz dispersada del cielo azul está muy polarizada debido a la naturaleza del proceso de dispersión que se describió en la sección 33.6. Pero la luz dispersada de las nubes blancas *no* está polarizada por lo general. ¿Por qué?

P33.22. La bruma atmosférica se debe a las gotas de agua o partículas de humo ("smog"). Esa niebla reduce la visibilidad porque dispersa la luz, por lo que la luz procedente de objetos distantes se hace aleatoria y las imágenes son indistinguibles. Explique por qué la visibilidad a través de la niebla mejora si se usan anteojos teñidos de rojo, los cuales eliminan la luz azul por filtración.

P33.23. La explicación que se dio en la sección 33.6 para el color del Sol cuando se oculta debería aplicarse igualmente al Sol *cuando sale*, ya que la luz solar viaja la misma distancia a través de la atmósfera para llegar a los ojos de un observador durante el amanecer o durante el ocaso; sin embargo, lo común es que los atardeceres sean más rojos que los amaneceres. ¿Por qué? (*Sugerencia:* considere que partículas de todas clases en la atmósfera contribuyen a la dispersión.)

P33.24. El principio de Huygens también se aplica a las ondas sonoras. Durante el día, la temperatura de la atmósfera disminuye conforme aumenta la altitud con respecto al suelo. Pero en la noche, cuando el suelo se enfría, hay una capa de aire justo arriba de la superficie en la cual la temperatura *aumenta* con la altitud. Use esto para explicar por qué las ondas sonoras procedentes de fuentes distantes se oyen con más claridad en la noche que en el día. (*Sugerencia:* considere que la rapidez del sonido aumenta al incrementarse la temperatura. Use las ideas descritas en la figura 33.37 para la luz.)

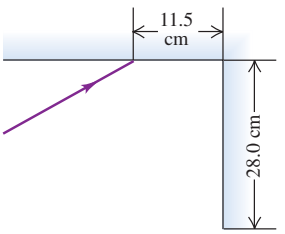
P33.25. Las ondas en el agua, ¿pueden reflejarse y refractarse? Dé algunos ejemplos. ¿El principio de Huygens se aplica a las ondas en el agua? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 33.2 Reflexión y refracción

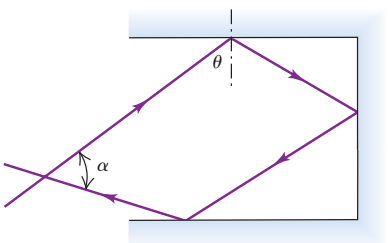
33.1. Dos espejos planos se intersecan en ángulos rectos. Un rayo láser incide en el primero de ellos en un punto situado a 11.5 cm de la intersección, como se ilustra en la figura 33.38. ¿Para qué ángulo de incidencia en el primer espejo el rayo incidirá en el punto medio del segundo (que mide 28.0 cm de largo) después de reflejarse en el primer espejo?

Figura **33.38** Ejercicio 33.1.



33.2. Tres espejos planos se intersecan en ángulos rectos. Un haz de luz láser incide en el primero de ellos con un ángulo θ con respecto a la normal (figura 33.39). *a*) Demuestre que cuando este rayo se refleja en los otros dos espejos y cruza el rayo original, el ángulo α entre los dos rayos será $\alpha = 180° - 2\theta$. *b*) ¿Para qué ángulo θ los rayos serán perpendiculares cuando se crucen?

Figura **33.39** Ejercicio 33.2.



33.3. Un haz de luz tiene una longitud de onda de 650 nm en el vacío. *a*) ¿Cuál es la rapidez de esta luz en un líquido cuyo índice de refracción a esta longitud de onda es de 1.47? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas en el líquido?

33.4. Luz con frecuencia de 5.80×10^{14} Hz viaja en un bloque de vidrio cuyo índice de refracción es de 1.52. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz *a*) en el vacío *b*) en el vidrio?

33.5. Un haz de luz viaja a 1.94×10^8 m/s en el cuarzo. La longitud de onda de la luz en el cuarzo es de 355 nm. *a*) ¿Cuál es el índice de refracción del cuarzo a esta longitud de onda? *b*) Si esta misma luz viaja a través del aire, ¿cuál es su longitud de onda?

33.6. Luz de cierta frecuencia tiene una longitud de onda de 438 nm en el agua. ¿Cuál es su longitud de onda en el benceno?

33.7. Un haz paralelo de luz en el aire forma un ángulo de 47.5° con la superficie de una placa de vidrio que tiene un índice de refracción de 1.66. *a*) ¿Cuál es el ángulo entre la parte reflejada del haz y la superficie del vidrio? *b*) ¿Cuál es el ángulo entre el haz reflejado y la superficie del vidrio?

33.8. Utilizando un láser de pulsos rápidos y circuitos electrónicos cronométricos, usted observa que la luz viaja 2.50 m dentro de una varilla de plástico en 11.5 ns. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?

33.9. Luz que viaja en el aire incide sobre la superficie de un bloque de plástico con un ángulo de 62.7° con respecto a la normal y se desvía de manera que forma un ángulo de 48.1° con la normal en el plástico. Determine la rapidez de la luz en el plástico.

33.10. *a*) Un tanque que contiene metanol tiene paredes con espesor de 2.50 cm hechas de vidrio con índice de refracción de 1.550. Luz procedente del aire exterior incide en el vidrio a un ángulo de 41.3° con la normal al vidrio. Calcule el ángulo que forma la luz con la normal en el metanol. *b*) El tanque se vacía y se vuelve a llenar con un líquido desconocido. Si la luz que incide al mismo ángulo que en el inciso *a*) entra en el líquido del tanque a un ángulo de 20.2° con respecto a la normal, ¿cuál es el índice de refracción del líquido desconocido?

33.11. *a*) A través de tres bloques paralelos con diferentes espesores e índices de refracción, pasa luz que incide en el primer bloque y finalmente se refracta en el tercero. Demuestre que el bloque de en medio no tiene efecto en la dirección final de la luz. Es decir, demuestre que la dirección de la luz en el tercer bloque es la misma que si la luz pasara directamente del primero al tercero. *b*) Generalice este resultado a una pila de N bloques. ¿Qué es lo que determina la dirección final de la luz en el último bloque?

33.12. Una placa de vidrio horizontal de lados paralelos tiene índice de refracción de 1.52 y está en contacto con la superficie de agua en un tanque. Un rayo que llega desde arriba a través del aire forma un ángulo de incidencia de 35.0° con la normal a la superficie superior del vidrio. *a*) ¿Qué ángulo forma el rayo refractado en el agua con la normal a la superficie? *b*) ¿Cómo depende este ángulo del índice de refracción del vidrio?

33.13. En cierto material con índice de refracción n, un rayo de luz tiene frecuencia f, longitud de onda λ y rapidez v. ¿Cuáles son la frecuencia, longitud de onda y rapidez de esta luz *a*) en el vacío y *b*) en un material con índice de refracción n'? En cada caso exprese sus respuestas en términos *sólo* de f, λ, v, n y n'.

33.14. Demuestre que un rayo de luz reflejado desde un espejo plano gira un ángulo de 2θ cuando el espejo gira un ángulo θ en torno a un eje perpendicular al plano de incidencia.

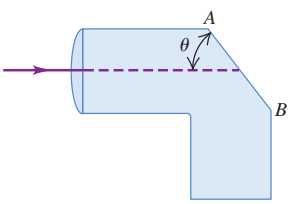
33.15. Un rayo de luz incide sobre una superficie plana que separa dos hojas de vidrio con índices de refracción de 1.70 y 1.58. El ángulo de incidencia es de 62.0° y el rayo se origina en el vidrio con $n = 1.70$. Calcule en ángulo de refracción.

33.16. En el ejemplo 33.1 la interfaz agua-vidrio es horizontal. Si en vez de ello, la interfaz estuviera inclinada 15.0° sobre la horizontal, con el lado derecho más alto que el izquierdo, ¿cuál sería el ángulo con respecto a la vertical que formaría el rayo en el vidrio? (El rayo en el agua todavía tiene un ángulo de 60.0° con respecto a la vertical.)

Sección 33.3 Reflexión interna total

33.17. Tubo de luz. Entra luz a un tubo sólido hecho de plástico con un índice de refracción de 1.60. La luz viaja en forma paralela a la parte superior del tubo (figura 33.40). Se desea cortar la cara AB de manera que toda la luz se refleje de regreso hacia el tubo después de que incide por primera vez en esa cara. *a*) ¿Cuál es el valor máximo de θ si el tubo está en el aire? *b*) Si el tubo se sumerge en agua, cuyo índice de refracción es de 1.33, ¿cuál es el máximo valor que puede tener θ?

Figura **33.40** Ejercicio 33.17.



33.18. Un haz de luz que viaja dentro de un cubo de vidrio sólido con índice de refracción de 1.53 incide en la superficie del cubo desde su

interior. *a*) Si el cubo está en el aire, ¿cuál es el ángulo mínimo con la normal dentro del vidrio con la que esta luz *no* entraría en el aire en esta superficie? *b*) ¿Cuál sería el ángulo mínimo en el inciso *a*) si el cubo se sumergiera en agua?

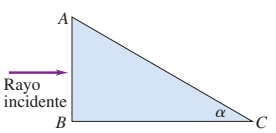
33.19. El ángulo crítico para la reflexión interna total en una interfaz líquido-aire es de 42.5°. *a*) Si un rayo de luz que viaja por el líquido tiene un ángulo de incidencia en la interfaz de 35.0°, ¿qué ángulo forma el rayo refractado en el aire con respecto a la normal? *b*) Si un rayo de luz que viaja en el aire tiene un ángulo de incidencia con la interfaz de 35.0°, ¿qué ángulo forma el rayo refractado en el líquido con respecto a la normal?

33.20. Al finalizar la serie de óperas de Wagner que lleva por título *El Anillo de los Nibelungos*, Brunilda quita el anillo de oro del cadáver de Sigfrido y lo arroja al río Rin, donde se va al fondo. Si se supone que el anillo es suficientemente pequeño en comparación con la profundidad del río como para considerarlo un punto, y que el río Rin tiene 10.0 m de profundidad en la parte en que cae la joya, ¿cuál es el área del círculo más grande en la superficie del agua adonde podría llegar luz emitida por el anillo y salir del agua?

33.21. Un rayo de luz viaja por un cubo de vidrio que está totalmente sumergido en agua. Usted descubre que si el rayo incide sobre la interfaz vidrio-agua a un ángulo mayor de 48.7° con respecto a la normal, ninguna luz se refracta en el agua. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?

33.22. A lo largo la cara *AB* de un prisma de vidrio con índice de refracción de 1.52, incide luz, como se ilustra en la figura 33.41. Calcule el valor más grande que puede tener el ángulo α sin que se refracte ninguna luz hacia fuera del prisma por la cara *AC* si el prisma está inmerso *a*) en aire y *b*) en agua.

Figura **33.41** Ejercicio 33.22.



33.23. Un rayo de luz en un diamante (índice de refracción de 2.42) incide sobre una interfaz con aire. ¿Cuál es el ángulo *máximo* que puede formar el rayo con la normal sin reflejarse totalmente de regreso hacia el diamante?

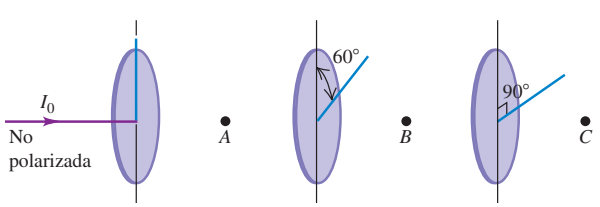
Sección 33.4 Dispersión

33.24. Un haz de luz incide en una hoja de vidrio a un ángulo de 57.0° con respecto a la normal en el aire. Usted observa que la luz roja forma un ángulo de 38.1° con la normal en el vidrio, mientras que la luz violeta forma un ángulo de 36.7°. *a*) ¿Cuáles son los índices de refracción de este vidrio para los colores de luz mencionados? *b*) ¿Cuál es la rapidez de la luz roja y violeta en el vidrio?

Sección 33.5 Polarización

33.25. Un haz de luz no polarizada con intensidad I_0 pasa a través de una serie de filtros polarizadores ideales con sus direcciones de polarización giradas en diferentes ángulos, como se aprecia en la figura 33.42. *a*) ¿Cuál es la intensidad de la luz (en términos de I_0) en los puntos *A*, *B* y *C*? *b*) Si se elimina el filtro de en medio, ¿cuál será la intensidad de la luz en el punto *C*?

Figura **33.42** Ejercicio 33.25.

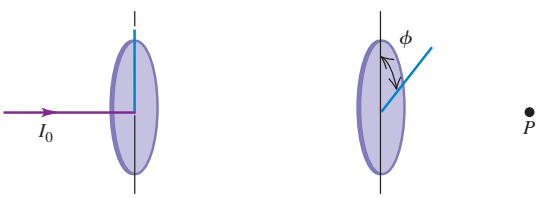


33.26. Luz que viaja a través de agua incide en una placa de vidrio a un ángulo de incidencia de 53.0°; una parte del haz se refleja y otra se refracta. Si las partes reflejada y refractada forman un ángulo de 90.0° entre sí, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?

33.27. Un haz paralelo de luz no polarizada en el aire incide con ángulo de 54.5° (con respecto a la normal) sobre una superficie plana de vidrio. El haz reflejado está linealmente polarizado por completo. *a*) ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? *b*) ¿Cuál es el ángulo de refracción del haz transmitido?

33.28. Luz con intensidad original I_0 pasa a través de dos filtros polarizadores ideales que tienen sus ejes de polarización orientados como se ilustra en la figura 33.43. Se desea ajustar el ángulo ϕ de manera que la intensidad en el punto *P* sea igual a $I_0/10$. *a*) Si la luz original no está polarizada, ¿cuál debe ser el valor de ϕ? *b*) Si la luz original está linealmente polarizada en la misma dirección que el eje de polarización del primer polarizador que alcanza la luz, ¿cuánto debe valer ϕ?

Figura **33.43** Ejercicio 33.28.



33.29. Un haz de luz polarizada pasa a través de un filtro polarizador. Cuando el ángulo entre el eje de polarización del filtro y la dirección de polarización de la luz es θ, la intensidad del haz que sale es *I*. Si se desea que ahora la intensidad sea de $I/2$, ¿cuál debe ser el ángulo (en términos de θ) entre el ángulo de polarización del filtro y la dirección original de polarización de la luz?

33.30. El índice de refracción de cierto vidrio es de 1.66. ¿A qué ángulo de incidencia estará totalmente polarizada la luz que se refleja en la superficie de este vidrio si está inmerso en *a*) aire y *b*) agua?

33.31. Sobre dos filtros polarizadores incide luz no polarizada con intensidad de 20.0 W/cm^2. El eje del primer filtro está a un ángulo de 25.0° en sentido antihorario con respecto a la vertical (visto en la dirección en que viaja la luz), y el eje del segundo filtro está a 62.0° en sentido antihorario con respecto a la vertical. ¿Cuál es la intensidad de la luz una vez que ha pasado a través del segundo polarizador?

33.32. Un polarizador y un analizador están orientados de manera que se transmita la cantidad máxima de luz. ¿A qué fracción de su valor máximo se reduce la intensidad de la luz transmitida cuando el analizador se gira *a*) 22.5°, *b*) 45.0°, *c*) 67.5°?

33.33. Tres filtros polarizadores. Tres filtros polarizadores están apilados con los ejes de polarización del segundo y el tercero a 45.0° y 90.0°, respectivamente, con respecto al eje del primero. *a*) Si sobre la pila de polarizadores incide luz no polarizada de intensidad I_0, determine la intensidad y el estado de polarización de la luz que sale de cada filtro. *b*) Si se retira el segundo filtro, ¿cuál es la intensidad de la luz que emerge de cada uno de los filtros que permanecen?

33.34. Tres filtros polarizadores están apilados con los ejes de polarización del segundo y el tercero a 23.0° y 62.0°, respectivamente, en relación con el eje del primero. Si luz no polarizada incide sobre la pila, la luz tiene una intensidad de 75.0 W/cm^2 una vez que atraviesa la pila. Si la intensidad de la luz incidente se mantiene constante, ¿cuál es la intensidad de la luz una vez que ha pasado por la pila si se retira el segundo polarizador?

*Sección 33.6 Dispersión de la Luz

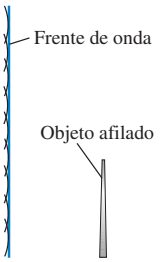
33.35. Un haz de luz blanca pasa a través de una capa aire con espesor uniforme. Si la intensidad de la luz dispersada en el medio de la parte

verde del espectro visible es I, calcule la intensidad (en términos de I) de la luz polarizada en el medio de *a*) la parte roja del espectro y *b*) la parte violeta del espectro. Consulte la tabla 32.1.

Sección 33.7 Principio de Huygens

33.36. Doblamiento en las esquinas. Las partículas en movimiento no "doblan" las esquinas, pero las ondas sí. Para ver por qué, suponga que un frente de onda plana incide en la arista de un objeto afilado mientras se mueve de manera perpendicular a la superficie (figura 33.44). Con base en el principio de Huygens, demuestre que esta onda se desviará alrededor de la arista superior del objeto. (*Nota:* este efecto, llamado *difracción*, se observa en las ondas en el agua, pero también ocurre con la luz, como se verá en los capítulos 35 y 36. Sin embargo, en la vida cotidiana no resulta muy evidente debido a la longitud de onda muy corta de la luz visible.)

Figura **33.44** Ejercicio 33.36.



Problemas

33.37. Reflector de vértice. El vértice interior de un cubo está cubierto con espejos que forman un reflector de vértice (véase el ejemplo 33.3 de la sección 33.2). Un rayo de luz se refleja sucesivamente en cada uno de tres espejos perpendiculares entre sí; demuestre que su dirección final siempre es exactamente la opuesta de su dirección inicial.

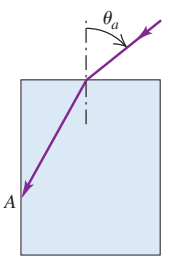
33.38. Un haz de luz se dirige paralelo al eje de un tubo cilíndrico hueco. Cuando el tubo sólo contiene aire, la luz tarda 8.72 ns recorrerlo en toda su longitud, pero cuando el tubo se llena de gelatina transparente el recorrido dura 2.04 ns más. ¿Cuál es el índice de refracción de la gelatina?

33.39. Luz que se propaga en un material con índice de refracción n_1 incide a un ángulo θ_1 con respecto a la normal en la interfaz con un bloque de material que tiene caras paralelas e índice de refracción n_2. Después de que la luz pasa a través de ese material, se refracta en otro con índice de refracción n_3 con el que forma un ángulo θ_3 con respecto a la normal. *a*) Calcule θ_3 en términos de θ_1, así como los índices de refracción de los materiales. *b*) Ahora se invierte el rayo en el tercer material, de manera que incida sobre la interfaz n_3 a n_2 con el ángulo θ_3 que se obtuvo en el inciso *a*). Demuestre que cuando la luz se refracta en el material con índice de refracción n_1, el ángulo que forma con la normal es θ_1. Esto demuestra que el rayo refractado es reversible. *c*) ¿Los rayos reflejados son reversibles? Explique su respuesta.

33.40. En un laboratorio de física, un haz de luz con longitud de onda de 490 nm se propaga en aire de un láser a una fotocelda en 17.0 ns. Cuando se coloca un bloque de vidrio de 0.840 m de espesor ante el haz de luz, de manera que éste incida a lo largo de la normal a las caras paralelas del bloque, la luz tarda 21.2 ns en viajar del láser a la fotocelda. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el vidrio?

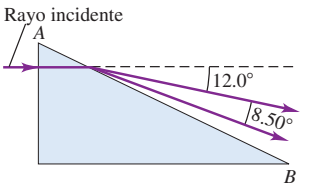
33.41. Un rayo de luz incide desde el aire sobre un bloque sólido transparente cuyo índice de refracción es n. Si $n = 1.38$, ¿cuál es el ángulo de incidencia *más grande* θ_a para el que ocurrirá la reflexión interna total en la cara vertical (punto A en la figura 33.45)?

Figura **33.45** Problema 33.41.



33.42. Un rayo de luz en el aire incide en el prisma rectangular que se ilustra en la figura 33.46. Este rayo consiste en dos longitudes de onda diferentes. Cuando emerge por la cara AB, se ha dividido en dos rayos diferentes que divergen entre sí 8.50°. Determine el índice de refracción del prisma para cada una de las dos longitudes de onda.

Figura **33.46** Problema 33.42.



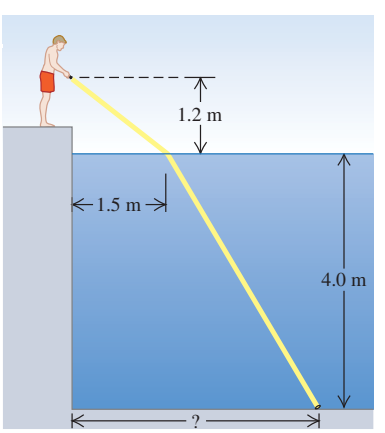
33.43. Una placa de un cuarto de onda convierte luz linealmente polarizada en luz circularmente polarizada. Demuestre que una placa de un cuarto de onda también convierte luz circularmente polarizada en luz linealmente polarizada.

33.44. Una placa de vidrio de 2.50 mm de espesor, con índice de refracción de 1.40, se coloca entre una fuente puntual de luz con longitud de onda de 540 nm (en el vacío) y una pantalla. La distancia de la fuente a la pantalla es de 1.80 cm. ¿Cuántas longitudes de onda hay entre la fuente y la pantalla?

33.45. Las antiguas placas fotográficas estaban hechas de vidrio con una emulsión fotosensible en la superficie anterior. Esta emulsión era algo transparente. Cuando una fuente puntual brillante se enfocaba sobre la parte anterior de la placa, la fotografía revelada mostraba un halo alrededor de la imagen del punto. Si la placa de vidrio mide 3.10 nm de espesor y los halos tienen radio interior de 5.34 nm, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio? (*Sugerencia:* considere que la luz del punto que incide en la superficie anterior se dispersa en todas direcciones gracias a la emulsión. Algo de ella se refleja totalmente en la superficie posterior de la placa y regresa a la superficie anterior.)

33.46. Después de un largo día de viaje, tarde por la noche, usted nada en la piscina del hotel donde se hospeda. Cuando se retira a su habitación, se da cuenta de que perdió la llave en la alberca. Consigue una linterna potente y camina alrededor de la alberca dirigiendo la luz hacia ella. La luz ilumina la llave, que yace en el fondo de la alberca, cuando sostiene la linterna a 1.2 m de la superficie del agua y dirigida hacia la superficie a una distancia horizontal de 1.5 m desde el borde (figura 33.47). Si el agua en ese punto tiene 4.0 m de profundidad, ¿a qué distancia del borde de la alberca se encuentra la llave?

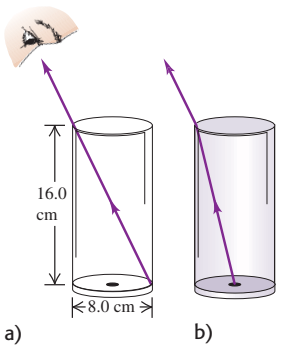
Figura **33.47** Problema 33.46.



33.47. Usted observa sobre el borde de un vaso con lados verticales, de manera que el borde superior está alineado con el borde opuesto del fondo (figura 33.48a). El vaso es un cilindro hueco de paredes delgadas, de 16.0 cm de alto y 8.0 cm de diámetro en sus partes superior e inferior. Mientras usted mantiene la vista en la misma posición, un

amigo suyo llena el vaso con un líquido transparente, y entonces usted ve una moneda pequeña en el centro del fondo del vaso (figura 33.48b). ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

Figura 33.48 Problema 33.47.



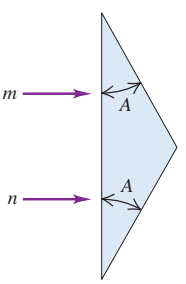
33.48. Un vaso de precipitados con fondo de espejo se llena con un líquido cuyo índice de refracción es 1.63. Un haz luminoso incide en la superficie del líquido a un ángulo de 42.5° con respecto a la normal. ¿A qué ángulo en relación con la normal saldrá el haz luminoso del líquido después de bajar a través del líquido, reflejarse en el fondo de espejo y regresar a la superficie?

33.49. Una capa delgada de hielo ($n = 1.309$) flota en la superficie del agua ($n = 1.333$) que hay en una cubeta. Un rayo de luz que sale del fondo de ésta viaja hacia arriba a través del agua. *a*) ¿Cuál es el ángulo máximo con respecto a la normal que el rayo puede formar en la interfaz hielo-agua sin dejar de salir al aire arriba del hielo? *b*) ¿Cuál es este ángulo una vez que el hielo se ha fundido?

33.50. Un prisma de 45°−45°−90° está sumergido en agua. Un rayo de luz incide en dirección normal sobre una de sus caras más cortas. ¿Cuál es el índice de refracción mínimo que debe tener el prisma si este rayo debe reflejarse totalmente dentro del vidrio en la cara larga del prisma?

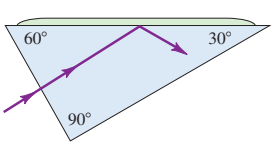
33.51. El prisma que se ilustra en la figura 33.49 tiene un índice de refracción de 1.66, y los ángulos A son de 25.0°. Dos rayos de luz m y n entran paralelos al prisma. ¿Cuál es el ángulo entre ellos una vez que salen?

Figura 33.49 Problema 33.51.



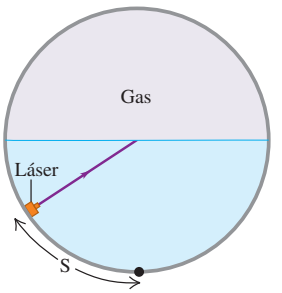
33.52. Sobre la cara corta de un prisma de 30°−60°−90° incide luz con una dirección normal (figura 33.50). Se coloca una gota de líquido en la hipotenusa del prisma. Si el índice del prisma es de 1.62, calcule el índice máximo que puede tener el líquido sin que la luz deje de reflejarse en su totalidad.

Figura 33.50 Problema 33.52.



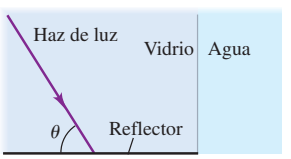
33.53. Un tanque cilíndrico horizontal de 2.20 m de diámetro está lleno de agua hasta la mitad. El espacio sobre el agua se encuentra lleno de un gas presurizado con índice de refracción desconocido. Un equipo emisor de luz láser pequeño se mueve a lo largo del fondo curvado del agua y lanza un rayo hacia el centro de la superficie del agua (figura 33.51). Usted observa que cuando el láser ha recorrido una distancia $S = 1.09$ m o más (medida a lo largo de la superficie curva) desde el punto más bajo del agua, la luz no pasa al gas. *a*) ¿Cuál es el índice de refracción del gas? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el haz de luz en viajar del equipo emisor al borde del tanque cuando i) $S > 1.09$ m y ii) $S < 1.09$ m?

Figura 33.51 Problema 33.53.



33.54. Un cubo grande de vidrio tiene un reflector metálico en una de sus caras y agua en una cara adyacente (figura 33.52). Un haz de luz incide sobre el reflector, como se ilustra en la figura. Usted observa que conforme se incrementa en forma gradual el ángulo del haz de luz, si $\theta \geq 59.2°$ no entra luz al agua. ¿Cuál es la rapidez de la luz en este vidrio?

Figura 33.52 Problema 33.54.

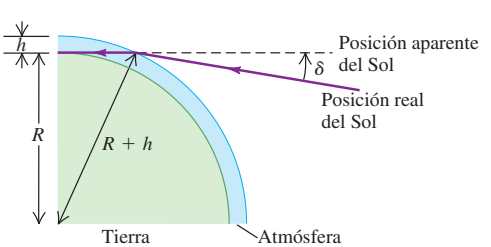


33.55. Cuando el Sol sale o se oculta y parece estar justo sobre el horizonte, en realidad está *debajo de* éste. La explicación de esta aparente paradoja es que la luz solar se desvía un poco cuando entra a la atmósfera terrestre, como se ilustra en la figura 33.53. Como nuestra percepción se basa en la idea de que la luz viaja en líneas rectas, la percibimos como si viniera desde una posición aparente que forma un ángulo δ sobre la posición verdadera del Sol. *a*) Para simplificar, suponga que la atmósfera tiene densidad uniforme y, por lo tanto, índice de refracción uniforme n, y se extiende a una altura h por encima de la superficie de la Tierra, punto en el cual se desvanece de manera abrupta. Demuestre que el ángulo δ está dado por

$$\delta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{nR}{R+h}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

donde $R = 6378$ km es el radio de la Tierra. *b*) Calcule δ con $n = 1.0003$ y $h = 20$ km. ¿Cómo se compara esto con el radio angular del

Figura 33.53 Problema 33.55.



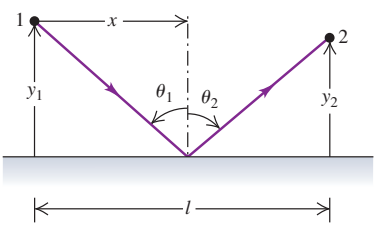
Sol, que es de aproximadamente un cuarto de grado? (En realidad, los rayos de luz proveniente del Sol se desvían de manera gradual, no abrupta, ya que la densidad y el índice de refracción de la atmósfera cambian poco a poco con la altitud.)

33.56. Principio de Fermat del tiempo mínimo. Un rayo de luz que viaja con rapidez c sale del punto 1, como se ilustra en la figura 33.54, y se refleja al punto 2. El rayo incide en la superficie reflectante a una distancia horizontal x del punto 1. *a*) Demuestre que el tiempo t que se requiere para que la luz viaje de 1 a 2 es

$$t = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2} + \sqrt{y_2^2 + (l - x)^2}}{c}$$

b) Obtenga la derivada de t con respecto a x e iguálela a cero para demostrar que el tiempo alcanza su valor *mínimo* cuando $\theta_1 = \theta_2$, que es la ley de reflexión y corresponde a la trayectoria real que sigue la luz. Éste es un ejemplo del *principio de Fermat del tiempo mínimo*, que dice que entre todas las trayectorias posibles entre dos puntos, la que sigue un rayo de luz es aquélla para el que el tiempo de recorrido es *mínimo*. (En realidad, hay ciertos casos en los que el tiempo es máximo, y no mínimo.)

Figura 33.54 Problema 33.56.

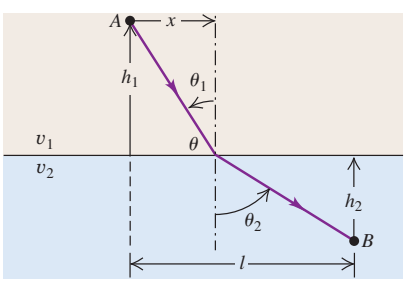


33.57. Un rayo de luz va del punto A, en un medio en el que la rapidez de la luz es v_1, al punto B en el que la rapidez es v_2 (figura 33.55). El rayo incide en la interfaz a una distancia horizontal x a la derecha del punto A. *a*) Demuestre que el tiempo requerido para que la luz vaya de A a B es

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

b) Obtenga la derivada de t con respecto a x e iguálela a cero para demostrar que este tiempo alcanza su valor *mínimo* cuando $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$. Ésta es la ley de Snell y corresponde a la trayectoria real que toma la luz. Éste es otro ejemplo del principio de Fermat del tiempo mínimo (véase el problema 33.56).

Figura 33.55 Problema 33.57.

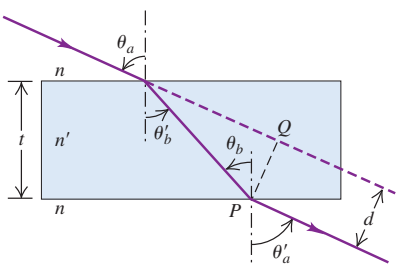


33.58. Sobre la superficie superior de una placa transparente incide luz que viaja por el aire con un ángulo θ_a (figura 33.56); las superficies de la placa son planas y paralelas entre sí. *a*) Demuestre que $\theta_a = \theta'_a$. *b*) Demuestre que esto se cumple para cualquier número de diferentes placas paralelas. *c*) Pruebe que el desplazamiento lateral d del haz que sale está dado por la relación

$$d = t\frac{\operatorname{sen}(\theta_a - \theta'_b)}{\cos\theta'_b}$$

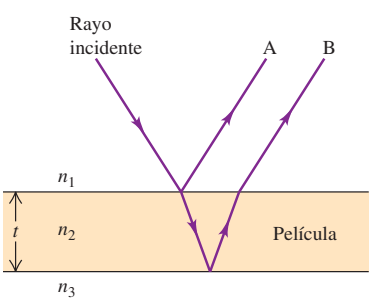
donde t es el espesor de la placa. *d*) Un rayo de luz incide con ángulo de 66.0° sobre la superficie de una placa de vidrio de 2.40 cm de espesor e índice de refracción de 1.80. El medio a cualquiera de sus lados es aire. Calcule el desplazamiento entre los rayos incidente y emergente.

Figura 33.56 Problema 33.58.



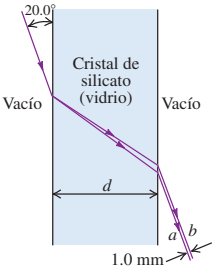
33.59. La luz que viaja hacia abajo incide sobre una película horizontal de espesor t, como se ilustra en la figura 33.57. El rayo incidente se divide en dos rayos, A y B. El rayo A se refleja en la parte superior de la película, y el rayo B se refleja en el fondo de la película para luego refractarse de regreso en el material que está encima de la película. Si la película tiene caras paralelas, demuestre que los rayos A y B terminan paralelos uno con respecto al otro.

Figura 33.57 Problema 33.59.



33.60. Se dirige un haz delgado de luz blanca hacia una placa plana de vidrio a un ángulo de 20.0° con respecto a la superficie de la lámina. Debido a la dispersión del vidrio, el haz se extiende como se ilustra en el espectro de la figura 33.58. En la figura 33.18 aparece la gráfica del índice de refracción del vidrio en función de la longitud de onda. *a*) Los rayos *a* y *b* que aparecen en la figura 33.58 corresponden a los extremos del espectro visible. ¿Cuál corresponde al rojo y cuál al violeta? Explique su razonamiento. *b*) ¿Para qué espesor d de la lámina de vidrio el espectro tendrá 1.0 mm de ancho, como se ilustra (véase el problema 33.58)?

Figura **33.58** Problema 33.60.

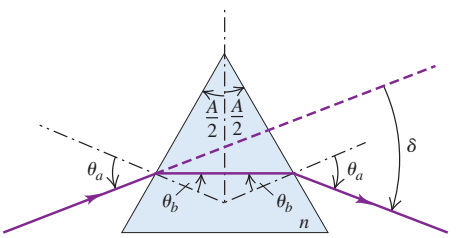


33.61. Ángulo de desviación. El ángulo de incidencia θ_a que se ilustra en la figura 33.59 se eligió de manera que la luz pase de manera simétrica a través del prisma, el cual tiene índice de refracción n y ángulo A en el vértice. *a*) Demuestre que el ángulo de desviación δ (aquel que hay entre las direcciones inicial y final del rayo) está dado por

$$\text{sen}\frac{A+\delta}{2} = n\,\text{sen}\frac{A}{2}$$

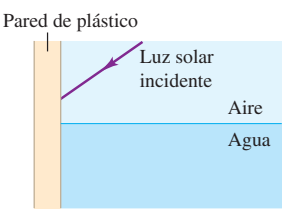
(Cuando la luz atraviesa en forma simétrica, como se ilustra, el ángulo de desviación es mínimo.) *b*) Utilice el resultado del inciso *a*) para encontrar el ángulo de desviación de un rayo de luz que pasa simétricamente por un prisma que tiene tres ángulos iguales ($A = 60.0°$) y $n = 1.52$. *c*) Cierto tipo de vidrio tiene un índice de refracción de 1.61 para la luz roja (700 nm) y 1.66 para la luz violeta (400 nm). Si los dos colores pasan de manera simétrica, como se describió en el inciso *a*), y si $A = 60.0°$, encuentre la diferencia entre los ángulos de desviación para ambos colores.

Figura **33.59** Problema 33.61.



33.62. Un haz de luz solar no polarizada incide con un ángulo desconocido sobre la pared vertical de plástico de un tanque de agua. Algo de la luz se refleja en la pared y entra en el agua (figura 33.60). El índice de refracción de la pared de plástico es 1.61. Si se observa que la luz que se refleja desde la pared hacia el agua está completamente polarizada, ¿qué ángulo forma el haz con la normal dentro del agua?

Figura **33.60** Problema 33.62.



33.63. Un haz de luz que viaja horizontalmente tiene una componente no polarizada con intensidad I_0 y otra componente polarizada con intensidad I_p. El plano de polarización de la componente polarizada está orientado con un ángulo θ con respecto a la vertical. Los datos de la siguiente tabla dan la intensidad medida a través de un polarizador con orientación ϕ con respecto a la vertical. *a*) ¿Cuál es la orientación de la componente polarizada? (Es decir, ¿cuál es el ángulo θ?) *b*) ¿Cuáles son los valores de I_0 e I_p?

ϕ (°)	I_{total} (W/m²)	ϕ (°)	I_{total} (W/m²)
0	18.4	100	8.6
10	21.4	110	6.3
20	23.7	120	5.2
30	24.8	130	5.2
40	24.8	140	6.3
50	23.7	150	8.6
60	21.4	160	11.6
70	18.4	170	15.0
80	15.0	180	18.4
90	11.6		

33.64. Cierto material birrefringente tiene índices de refracción n_1 y n_2 para las dos componentes perpendiculares de luz linealmente polarizada que lo atraviesan. Las longitudes de onda correspondientes son $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ y λ_0/n_2, donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío. *a*) Para que el cristal funcione como placa de un cuarto de onda, el número de longitudes de onda de cada componente en el interior del material debe diferir en $\frac{1}{4}$. Demuestre que el espesor mínimo de una placa de un cuarto de onda debe ser

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}$$

b) Calcule el espesor mínimo de una placa de un cuarto de onda hecha de siderita $(FeO \cdot CO_2)$ si los índices de la refracción son $n_1 = 1.875$ y $n_2 = 1.635$, y la longitud de onda en el vacío es $\lambda_0 = 589$ nm.

Problemas de desafío

33.65. Considere dos vibraciones con la misma amplitud y frecuencia, pero distinta fase, una a lo largo del eje x,

$$x = a\,\text{sen}(\omega t - \alpha)$$

y la otra a lo largo del eje y,

$$y = a\,\text{sen}(\omega t - \beta)$$

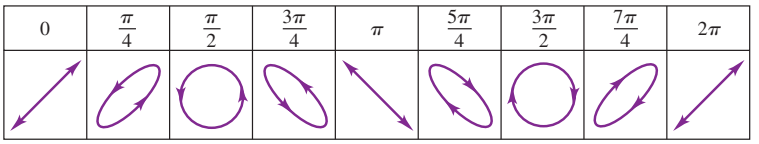
Éstas se pueden escribir como sigue:

$$\frac{x}{a} = \text{sen}\,\omega t\cos\alpha - \cos\omega t\,\text{sen}\,\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{y}{a} = \text{sen}\,\omega t\cos\beta - \cos\omega t\,\text{sen}\,\beta \qquad (2)$$

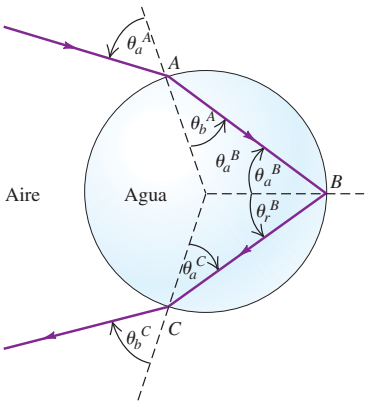
a) Multiplique la ecuación (1) por sen β, y la ecuación (2) por sen α, y luego reste las ecuaciones resultantes. *b*) Multiplique la ecuación (1) por cos β y la ecuación (2) por cos α, y después reste las ecuaciones que resultan. *c*) Eleve al cuadrado y sume los resultados de los incisos *a*) y *b*). *d*) Obtenga la ecuación $x^2 + y^2 - 2xy\cos\delta = a^2\,\text{sen}^2\,\delta$, donde $\delta = \alpha - \beta$. *e*) Use el resultado anterior para justificar cada uno de los diagramas de la figura 33.61 (en la siguiente página). En la figura el ángulo dado es la diferencia de fase entre dos movimientos armónicos simples con las mismas frecuencia y amplitud, uno horizontal (sobre el eje x) y el otro vertical (sobre el eje y). Así, la figura muestra el movimiento resultante de la superposición de los dos movimientos armónicos perpendiculares.

Figura 33.61 Problema de desafío 33.65.



33.66. Un arco iris se produce por la reflexión de la luz solar en gotas esféricas de agua en el aire. La figura 33.62 presenta un rayo que se refracta en una gota en el punto A, se refleja en la superficie posterior de la gota en el punto B y se refracta de regreso al aire en el punto C. Los ángulos de incidencia y refracción, θ_a y θ_b se muestran en los puntos A y C, y los ángulos de incidencia y reflexión θ_a y θ_r se presentan en el punto B. *a*) Demuestre que $\theta_a^B = \theta_b^A$, $\theta_a^C = \theta_b^A$ y $\theta_b^C = \theta_a^A$. *b*) Demuestre que el ángulo en radianes entre el rayo antes de entrar a la gota en A y después de salir en C (la desviación angular total del rayo) es $\Delta = 2\theta_a^A - 4\theta_b^A + \pi$. (*Sugerencia:* encuentre la desviación angular que ocurre en A, B y C, y súmelas para obtener Δ.) *c*) Con base en la ley de Snell escriba Δ en términos de θ_a^A y n, el índice de refracción del agua en la gota. *d*) Un arco iris se formará cuando la desviación angular Δ sea *estacionaria* en el ángulo de incidencia θ_a^A, es decir, cuando $d\Delta/d\theta_a^A = 0$. Si esta condición se satisface, todos los rayos con ángulos de incidencia cercanos a θ_a^A serán enviados de regreso en la misma dirección y producirán una zona brillante en el cielo. Sea θ_1 el valor de θ_a^A para el que esto ocurre. Demuestre que $\cos^2\theta_1 = \frac{1}{3}(n^2 - 1)$. [*Sugerencia:* le será de ayuda la fórmula de derivación $d(\text{arcsen } u(x))/dx = (1 - u^2)^{-1/2}(du/dx)$.] *e*) El índice de refracción en el agua es 1.342 para la luz violeta y 1.330 para la luz roja. Utilice los resultados de los incisos *c*) y *d*) para obtener θ_1 y Δ para la luz violeta y para la roja. ¿Concuerdan sus resultados con los ángulos que se muestran en la figura 33.20d? Cuando usted observa un arco iris, ¿qué color aparece más alto sobre el horizonte, el rojo o el violeta?

Figura 33.62 Problema de desafío 33.66.



33.67. Un *arco iris secundario* se forma cuando la luz incidente experimenta dos reflexiones internas en una gota esférica de agua, como se aprecia en la figura 33.20e. (Véase el problema de desafío 33.66). *a*) En términos del ángulo de incidencia θ_a^A y el índice de refracción n de la gota, ¿cuál es la desviación angular Δ del rayo? Es decir, ¿cuál es el ángulo entre el rayo antes de que entre a la gota y después de que sale de ésta? *b*) ¿Cuál es el ángulo de incidencia θ_2 para el que la derivada de Δ con respecto al ángulo de incidencia θ_a^A es igual a cero? *c*) Los índices de refracción para la luz roja y la violeta en el agua están dados en el inciso *e*) del problema de desafío 33.66. Utilice los resultados de los incisos *a*) y *b*) para encontrar θ_2 y Δ para la luz violeta y para la roja. ¿Concuerdan sus resultados con los ángulos que se ilustran en la figura 33.20e? Cuando usted observa un arco iris secundario, ¿cuál color está más alto sobre el horizonte, el rojo o el violeta? Explique su respuesta.

ÓPTICA GEOMÉTRICA

34

¿Cómo funcionan las lentes de aumento? ¿a qué distancia del objeto que se examina ofrecen la visión más nítida?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo un espejo plano forma una imagen.
- Por qué los espejos cóncavo y convexo forman diferentes clases de imágenes.
- Cómo se forman imágenes mediante una interfaz curva entre dos materiales transparentes.
- Qué aspectos de una lente determinan el tipo de imagen que produce.
- Qué determina el campo de visión de una lente de cámara.
- Qué causa diversos trastornos en la visión humana, y cómo pueden corregirse.
- El principio de la lente de aumento simple.
- Cómo funcionan los microscopios y los telescopios.

Nuestro reflejo en el espejo del baño, la vista de la Luna a través de un telescopio, los dibujos geométricos que se ven en un caleidoscopio: todos son ejemplos de *imágenes*. En cada caso, el objeto que miramos parece estar en un lugar diferente de su posición real: nuestro reflejo está del otro lado del espejo, la Luna parece estar más cercana cuando la vemos a través de un telescopio, y los objetos que se ven en un caleidoscopio parecen hallarse en muchos lugares al mismo tiempo. En todos los casos, los rayos de luz provenientes de un punto de un objeto se desvían por reflexión o refracción (o una combinación de ambas), de tal forma que convergen hacia un punto denominado *punto de imagen*, o parecen divergir con respecto a éste. Nuestro objetivo en este capítulo es ver cómo ocurre esto y explorar los diferentes tipos de imágenes que se forman mediante dispositivos ópticos simples.

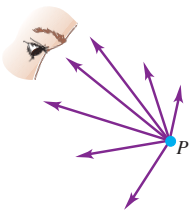
Para comprender las imágenes y su formación, sólo necesitamos el modelo de rayos de la luz, las leyes de reflexión y refracción, y un poco de geometría y trigonometría simples. El papel fundamental que desempeña la geometría en nuestro análisis es la razón por la que se da el nombre de *óptica geométrica* al estudio de la formación de imágenes mediante rayos luminosos. Comenzaremos nuestro análisis con uno de los dispositivos ópticos de formación de imágenes más sencillos: un espejo plano. Proseguiremos con el estudio de cómo se forman las imágenes con los espejos curvos, las superficies refractivas y las lentes delgadas. Nuestros resultados constituirán los cimientos para entender muchos de los instrumentos ópticos que conocemos, entre ellos las lentes de cámara fotográfica, las lentes de aumento, el ojo humano, los microscopios y los telescopios.

34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana

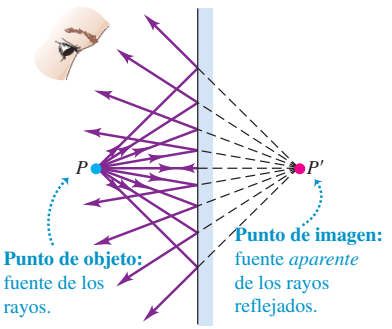
Antes de analizar el significado del término imagen, necesitamos primero el concepto de **objeto** como se utiliza en óptica. Por *objeto* entendemos cualquier cosa desde donde se irradian rayos de luz. Esta luz podría ser emitida por el objeto mismo si éste es *autoluminoso*, como el filamento incandescente de una bombilla eléctrica. Por otro lado,

Activ Online Physics
15.4 Óptica geométrica: espejos planos

34.1 Los rayos luminosos se irradian desde un objeto puntual P en todas direcciones.



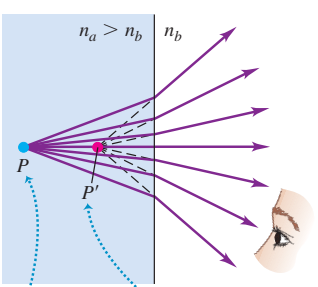
34.2 Los rayos luminosos provenientes del objeto situado en el punto P se reflejan en un espejo plano. Los rayos reflejados que penetran en el ojo se ven como si proviniesen del punto de imagen P'.



Espejo plano

34.3 Los rayos luminosos provenientes del objeto situado en el punto P se refractan en la interfaz plana. Los rayos refractados que penetran en el ojo se ven como si provinieran del punto de imagen P'.

Cuando $n_a > n_b$, P' está más próximo a la superficie que P; para $n_a < n_b$, se cumple lo opuesto.



la luz podría ser emitida por una fuente distinta (como una lámpara o el Sol) y luego reflejarse en el objeto; un ejemplo de ello es la luz que llega a nuestros ojos desde las páginas de este libro. La figura 34.1 muestra rayos luminosos que se irradian en todas direcciones desde un objeto situado en un punto P. Para que un observador vea este objeto directamente, no debe haber obstrucción alguna entre el objeto y los ojos del observador. Advierta que los rayos luminosos provenientes del objeto alcanzan los ojos izquierdo y derecho del observador a diferentes ángulos; el cerebro del observador procesa tales diferencias para inferir la *distancia* del observador al objeto.

El objeto de la figura 34.1 es un **objeto puntual** carente de extensión física. Los objetos reales con longitud, anchura y altura se llaman **objetos extensos**. Para comenzar, consideraremos sólo un objeto puntual idealizado, ya que siempre podemos pensar en un objeto extenso como aquél constituido por un gran número de objetos puntuales.

Suponga que algunos de los rayos provenientes del objeto inciden en una superficie reflectante plana y lisa (figura 34.2). Ésta podría ser la superficie de un material con un índice de refracción diferente, la cual refleja parte de la luz incidente, o una superficie metálica pulida que refleja casi el 100% de la luz que incide en ella. En todos los casos, dibujaremos la superficie reflectante como una línea negra con un área sombreada tras ella, como en la figura 34.2. Los espejos de baño tienen una lámina de vidrio delgada, que se halla frente a la superficie reflectante y la protege; pasaremos por alto los efectos de esta lámina delgada.

De acuerdo con la ley de la reflexión, todos los rayos que inciden en la superficie se reflejan a un ángulo con respecto a la normal igual al ángulo de incidencia. Dado que la superficie es plana, la normal tiene la misma dirección en todos los puntos de la superficie, y se tiene una reflexión *especular.* Una vez que los rayos se han reflejado, su dirección es la misma que si hubieran provenido del punto P'. Al punto P se le llama *punto de objeto*. En tanto que el punto P' es el *punto de imagen* correspondiente; se dice que la superficie reflectante forma una **imagen** del punto P. Un observador que ve únicamente los rayos reflejados en la superficie, y que no sabe que está viendo un reflejo, *piensa* que el origen de los rayos se encuentra en el punto de imagen P'. El punto de imagen es, por consiguiente, un medio conveniente para describir la dirección de los diversos rayos reflejados, del mismo modo que el punto de objeto P describe la dirección de los rayos que llegan a la superficie *antes* de la reflexión.

Si la superficie de la figura 34.2 *no* fuera lisa, la reflexión sería *difusa*, y los rayos provenientes de distintas partes de la superficie seguirían direcciones no correlacionadas (véase la figura 33.6b). En este caso, no habría una imagen definida del punto P', de donde todos los rayos reflejados parecen emanar. No podemos ver nuestro reflejo sobre una superficie metálica opaca, porque su superficie es áspera; al pulir el metal su superficie se alisa, hay reflexión especular y se hace visible una imagen reflejada.

Una superficie plana *refractiva* también forma una imagen, como se muestra en la figura 34.3. Los rayos provenientes del punto P se refractan en la interfaz entre dos materiales ópticos. Cuando los ángulos de incidencia son pequeños, la dirección final de los rayos después de la refracción es la misma que si hubiesen provenido del punto P', como se muestra, y también en este caso llamamos a P' *punto de imagen*. En la sección 33.2 describimos cómo este efecto hace que los objetos que están bajo el agua parezcan más próximos a la superficie de lo que están en realidad (véase la figura 33.9).

En las figuras 34.2 y 34.3 los rayos no pasan realmente por el punto de imagen P'. De hecho, si el espejo de la figura 34.2 es opaco, no hay luz alguna en su lado derecho. Si los rayos salientes no pasan en realidad por el punto de imagen, se dice que la imagen es una **imagen virtual**. Más adelante veremos casos donde los rayos salientes *pasan* efectivamente por un punto de imagen, en cuyo caso la imagen resultante recibe el nombre de **imagen real**. Las imágenes que se forman en una pantalla de proyección, en la película fotográfica de una cámara y en la retina del ojo son imágenes reales.

Formación de imágenes por espejo plano

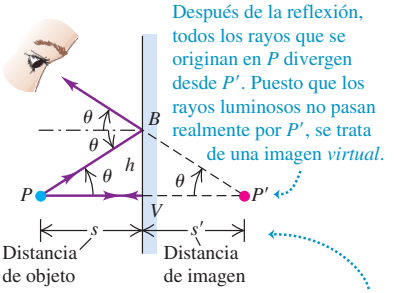
Concentrémonos por ahora en las imágenes que se producen por *reflexión*; más adelante en este mismo capítulo regresaremos a la refracción. Para determinar la ubicación precisa de la imagen virtual P' que un espejo plano forma de un objeto situado en P, utilizaremos la construcción que se presenta en la figura 34.4. La figura muestra dos rayos que divergen a partir de un punto de objeto P situado a una distancia s a la

izquierda de un espejo plano. Llamamos a s la **distancia de objeto**. El rayo PV incide normalmente en el espejo (es decir, es perpendicular a la superficie del espejo), y regresa siguiendo su trayectoria original.

El rayo PB forma un ángulo θ con PV; incide en el espejo a un ángulo de incidencia θ y se refleja formando un ángulo igual con la normal. Si prolongamos hacia atrás los dos rayos reflejados, éstos se intersecan en el punto P', a una distancia s' detrás del espejo. Llamamos a s' la **distancia de imagen**. La línea entre P y P' es perpendicular al espejo. Los dos triángulos PVB y $P'VB$ son congruentes; por lo tanto, P y P' están a la misma distancia del espejo, y s y s' tienen igual magnitud. El punto de imagen P' está situado exactamente en posición opuesta al punto del objeto P, tan *distante* de la cara posterior del espejo como el punto del objeto se encuentra de su cara anterior.

Podemos repetir la construcción de la figura 34.4 con respecto a cada rayo que diverge desde P. La dirección de *todos* los rayos reflejados salientes es la que sería, si cada uno hubiera tenido su origen en el punto P', lo cual confirma que P' es la *imagen* de P. No importa dónde se halle el observador, siempre verá la imagen en el punto P'.

34.4 Construcción para encontrar la ubicación de la imagen formada por un espejo plano. El punto de imagen P' está tan atrás del espejo como el punto de objeto P está delante de él.



Reglas de signos

Antes de seguir adelante, conviene presentar algunas reglas generales de signos. Éstas quizá parezcan innecesariamente complicadas con respecto al caso simple de una imagen formada por un espejo plano; no obstante, nos proponemos expresar las reglas de una forma que sea aplicable a *todas* las situaciones que encontraremos más adelante. Éstas incluyen la formación de imágenes por una superficie reflectante o refractiva, plana o esférica, o por un par de superficies refractivas que forman una lente. Las reglas son las siguientes:

1. **Regla de signos para la distancia de objeto:** cuando el objeto está del mismo lado de la superficie reflectante o refractiva que la luz entrante, la distancia de objeto s es positiva; en caso contrario, es negativa.
2. **Regla de signos para la distancia de imagen:** cuando la imagen está del mismo lado de la superficie reflectante o refractiva que la luz saliente, la distancia de imagen s' es positiva; en caso contrario, es negativa.
3. **Regla de signos para el radio de curvatura de una superficie esférica:** cuando el centro de curvatura C está del mismo lado que la luz saliente, el radio de curvatura es positivo; en caso contrario, es negativo.

La figura 34.5 ilustra las reglas 1 y 2 para dos situaciones diferentes. En el caso de un espejo los lados entrante y saliente son siempre el mismo; por ejemplo, en las figuras 34.2, 34.4 y 34.5a ambos están del lado izquierdo. En el caso de la superficie refractiva de las figuras 34.3 y 34.5b, los lados entrante y saliente están a los lados izquierdo y derecho, respectivamente, de la interfaz entre los dos materiales. (Note que en otros textos quizá se empleen reglas diferentes.)

En las figuras 34.4 y 34.5a la distancia de objeto s es *positiva* porque el punto de objeto P está en el lado entrante (el lado izquierdo) de la superficie reflectante. La distancia de imagen s' es *negativa* porque el punto de imagen P' *no* está en el lado saliente (el lado izquierdo) de la superficie. La relación entre las distancias de objeto y de imagen s y s' es simplemente

$$s = -s' \qquad \text{(espejo plano)} \tag{34.1}$$

En el caso de una superficie reflectante o refractiva plana, el radio de curvatura es infinito y no es una magnitud particularmente interesante ni útil; en realidad, en estos casos no necesitamos la tercera regla de los signos. Sin embargo, esta regla será de gran importancia cuando estudiemos la formación de imágenes por superficies reflectantes y refractivas *curvas* más adelante, en este mismo capítulo.

34.5 En ambas situaciones, la distancia de objeto s es positiva (regla 1) y la distancia de imagen s' es negativa (regla 2).

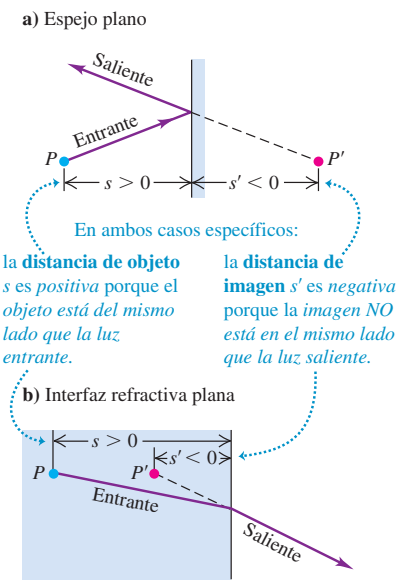


Imagen de un objeto extenso: Espejo plano

Ahora consideraremos un objeto *extenso* de tamaño finito. Para simplificar, se suele considerar un objeto de una sola dimensión, como una flecha delgada, orientado paralelamente a la superficie reflectante; un ejemplo es la flecha PQ de la figura 34.6. La distancia de la cabeza a la cola de una flecha orientada de este modo es su *altura*; en la figura 34.6 la altura es y. La imagen que forma un objeto extenso como éste es una

34.6 Construcción para calcular la altura de una imagen formada por reflexión en una superficie reflectante plana.

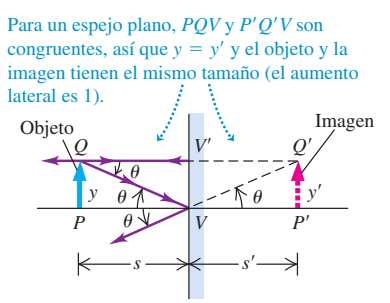


imagen extensa; a cada punto del objeto corresponde un punto de la imagen. Se muestran dos de los rayos provenientes de Q; *todos* los rayos que proceden de Q parecen divergir desde su punto de imagen Q' después de la reflexión. La imagen de la flecha es la línea $P'Q'$, cuya altura es y'. Otros puntos del objeto PQ tienen puntos de imagen situados entre P' y Q'. Los triángulos PQV y $P'Q'V$ son congruentes; por ello, el objeto PQ y la imagen $P'Q'$ tienen los mismos tamaño y orientación, y $y = y'$.

La razón de la altura de la imagen con respecto a la altura del objeto, y'/y, en *cualquier* situación de formación de imágenes es el **aumento lateral** m; es decir,

$$m = \frac{y'}{y} \qquad \text{(aumento lateral)} \tag{34.2}$$

De esta manera, en el caso de un espejo plano el aumento lateral m es la unidad. Cuando nos miramos en un espejo plano, nuestra imagen es del mismo tamaño que nuestro cuerpo.

En la figura 34.6 la flecha imagen apunta en la *misma* dirección que la flecha objeto; decimos que la imagen es **derecha**. En este caso, y y y' tienen el mismo signo, y el aumento lateral m es positivo. La imagen que forma un espejo plano siempre es derecha, por lo que y y y' tienen la misma magnitud y el mismo signo; de acuerdo con la ecuación (34.2), el aumento lateral de un espejo plano siempre es $m = +1$. Más adelante encontraremos situaciones donde la imagen está **invertida**, es decir, la flecha imagen apunta en dirección *opuesta* a la de la flecha objeto. En el caso de una imagen invertida, y y y' tienen signos *opuestos*, y el aumento lateral m es *negativo*.

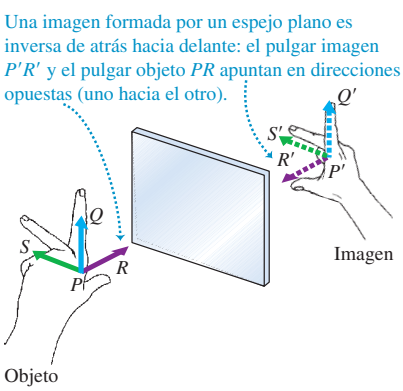
El objeto de la figura 34.6 tiene una sola dimensión. La figura 34.7 muestra un objeto *tri*dimensional y su imagen virtual tridimensional formada por un espejo plano. El objeto y la imagen guardan la misma relación que una mano izquierda y una mano derecha.

CUIDADO **Reflexiones en un espejo plano** En este punto, quizás usted se pregunte por qué un espejo plano invierte las imágenes izquierda y derecha, pero no de arriba y de abajo. ¡Esta pregunta es muy engañosa! Como se ve en la figura 34.7, la imagen de arriba a abajo $P'Q'$ y la imagen de izquierda a derecha $P'S'$ son paralelas a sus objetos y no están invertidas de modo alguno. Sólo la imagen de adelante hacia atrás $P'R'$ está invertida con respecto a PR. Por lo tanto, lo más correcto es afirmar que un espejo invierte *de atrás hacia adelante*. Para verificar esta relación entre objeto e imagen, apunte sus pulgares a lo largo de PR y $P'R'$; sus índices a lo largo de PQ y $P'Q'$ y sus dedos medios a lo largo de PS y $P'S'$. Cuando un objeto y su imagen están relacionados de esta manera, se dice que la imagen es **inversa**; esto significa que sólo se ha invertido la dimensión de adelante hacia atrás.

La imagen inversa de un objeto tridimensional formada por un espejo plano es del mismo *tamaño* que el objeto en todas sus dimensiones. Cuando las dimensiones transversales del objeto e imagen están en la misma dirección, la imagen es derecha. Así, un espejo plano siempre forma una imagen derecha, aunque inversa. La figura 34.8 ilustra este punto.

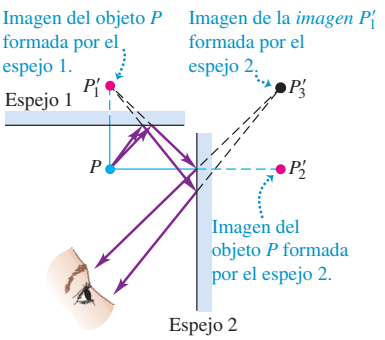
Una propiedad importante de todas las imágenes formadas por superficies reflectantes o refractivas es que una *imagen* formada por una superficie o un dispositivo óptico puede servir como el *objeto* de una segunda superficie o dispositivo. La figura 34.9 muestra un ejemplo sencillo. El espejo 1 forma una imagen P_1' del punto de objeto P, y el espejo 2 forma otra imagen P_2', cada una del modo como hemos explicado. Además, sin embargo, la imagen P_1' formada por el espejo 1 sirve como objeto para el espejo 2, el cual forma entonces una imagen de este objeto en el punto P_3' como se muestra. Asimismo, el espejo 1 toma la imagen P_2' formada por el espejo 2 como objeto y forma una imagen de ella. Le dejamos a usted la demostración de que este punto de imagen también está en P_3'. La idea de que una imagen formada por un dispositivo puede actuar como el objeto de un segundo dispositivo es de gran importancia en la óptica geométrica. La aplicaremos más adelante en este capítulo para localizar la imagen formada por dos refracciones sucesivas en superficies curvas de una lente. Esta idea nos ayudará a comprender la formación de imágenes por combinaciones de lentes, como en un microscopio o en un telescopio de refracción.

34.7 La imagen formada por un espejo plano es virtual, derecha e inversa. Es del mismo tamaño que el objeto.



34.8 La imagen formada por un espejo plano es inversa; la imagen de una mano derecha es una mano izquierda, y así sucesivamente. (La mano descansa sobre un espejo horizontal.) ¿Son inversas las imágenes de las letras H y A?

34.9 Las imágenes P_1' y P_2' se forman por reflexión simple de cada rayo proveniente de un objeto situado en P. La imagen P_3', localizada tratando cualquiera de las otras imágenes como objeto, se forma por doble reflexión de cada rayo.



Evalúe su comprensión de la sección 34.1 Si usted camina directamente hacia un espejo plano con rapidez v, ¿con qué rapidez se aproxima su imagen hacia usted? i) más lento que v; ii) v; iii) más rápido que v pero más lento que $2v$; iv) $2v$; v) más rápido que $2v$.

34.2 Reflexión en una superficie esférica

Un espejo plano forma una imagen del mismo tamaño que el objeto. No obstante, los espejos tienen numerosas aplicaciones donde se requiere que la imagen y el objeto sean de diferente tamaño. Un espejo de aumento para maquillarse proporciona una imagen *más grande* que el objeto, y los espejos de vigilancia (que se utilizan en los comercios para identificar a los ladrones) forman una imagen *más pequeña* que el objeto. También hay aplicaciones de espejos en las cuales es deseable una imagen *real*, de modo que los rayos luminosos pasan en efecto por el punto de imagen P'. Por sí solo, un espejo plano no es capaz de llevar a cabo ninguna de dichas tareas. En su lugar, se utilizan espejos *curvos*.

Imagen de un objeto puntual: Espejo esférico

Consideremos el caso especial (y fácil de analizar) de formación de imágenes con un espejo *esférico*. La figura 34.10a muestra un espejo esférico con radio de curvatura R, con su lado cóncavo hacia la luz incidente. El **centro de curvatura** de la superficie (el centro de la esfera de la cual forma parte la superficie) está en C, y el **vértice** del espejo (el centro de la superficie del espejo) está en V. La recta CV recibe el nombre de **eje óptico**. El punto P es un punto de objeto que se encuentra sobre el eje óptico; por el momento, supondremos que la distancia de P a V es mayor que R.

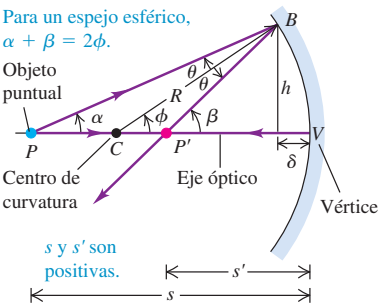
El rayo PV, que pasa por C, incide de forma normal en el espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo PB, a un ángulo α con respecto al eje, incide en el espejo en B, donde los ángulos de incidencia y reflexión son θ. El rayo reflejado interseca el eje en el punto P'. Demostraremos en breve que *todos* los rayos provenientes de P intersecan el eje en el *mismo* punto P', como en la figura 34.10b, siempre y cuando el ángulo α sea pequeño. El punto P' es, entonces, la *imagen* del punto de objeto P. A diferencia de los rayos reflejados de la figura 34.1, los rayos reflejados de la figura 34.10b se intersecan realmente en el punto P', y luego divergen a partir de P' *como si* hubieran nacido de este punto. Por consiguiente, P' es una imagen *real*.

Con la finalidad de apreciar la utilidad de una imagen real, suponga que el espejo está en una habitación a oscuras, donde la única fuente de luz es un objeto autoluminoso situado en P. Si se coloca un pedazo pequeño de película fotográfica en P', todos los rayos luminosos provenientes del punto P que se reflejen en el espejo incidirán en el mismo punto P' de la película; una vez revelada, la película mostrará una sola mancha brillante que representa una imagen nítidamente enfocada del objeto en el punto P. En este principio se basan casi todos los telescopios astronómicos, los cuales utilizan grandes espejos cóncavos para obtener fotografías de objetos celestes. Con un espejo *plano* como el de la figura 34.2, colocar un pedazo de película en el punto de imagen P sería una pérdida de tiempo; los rayos luminosos nunca pasan realmente por el punto de imagen, y no se registra la imagen en la película. Las imágenes reales son *indispensables* en fotografía.

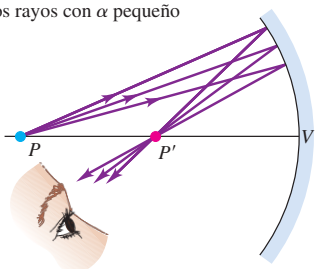
Hallemos ahora la ubicación del punto de imagen real P' de la figura 34.10a y probemos la aseveración de que todos los rayos provenientes de P se intersecan en P' (siempre y cuando el ángulo que forman con el eje óptico sea pequeño). La distancia de objeto, medida desde el vértice V, es s; la distancia de imagen, también medida desde V, es s'. Los signos de s, s' y el radio de curvatura R están determinados por las reglas de signos dadas en la sección 34.1. El punto de objeto P está del mismo lado que la luz incidente, por lo que, de acuerdo con la primera regla de signos, s es positiva. El punto de imagen P' está del mismo lado que la luz reflejada, de modo que, de acuerdo con la segunda regla de signos, la distancia de imagen s' también es positiva. El centro de curvatura C está del mismo lado que la luz reflejada, así que, según la tercera regla de signos, R siempre es positivo cuando la reflexión ocurre en el lado *cóncavo* de una superficie (figura 34.11).

34.10 a) Un espejo esférico cóncavo forma una imagen real de un objeto puntual P que está sobre el eje óptico del espejo. b) El ojo observa algunos de los rayos salientes y los percibe como si provinieran de P'.

a) Construcción para hallar la posición P' de la imagen formada por un espejo esférico cóncavo

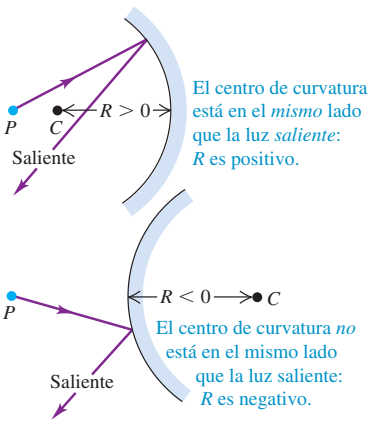


b) La aproximación paraxial es válida para los rayos con α pequeño



Todos los rayos provenientes de P tienen un ángulo α pequeño y se intersecan en P', formando una imagen real.

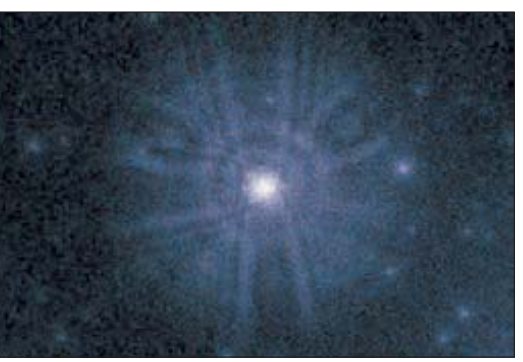
34.11 La regla de signos para el radio de un espejo esférico.



34.12 a), b) Poco después de que el Telescopio Espacial Hubble se colocó en órbita en 1990 se descubrió que al espejo cóncavo primario (también llamado *espejo objetivo*) le faltaba profundidad en la medida de 1/50 del ancho de un cabello humano, y esto dio lugar a una aberración esférica de la imagen de la estrella. c) Luego de la instalación de una óptica correctiva en 1993, fue posible eliminar casi por completo los efectos de la aberración esférica.

a) El espejo primario con diámetro de 2.4 m del Telescopio Espacial Hubble

b) Estrella vista con el espejo original



c) La misma estrella con óptica correctiva

Ahora utilicemos el siguiente teorema de geometría plana: un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. Aplicando este teorema a los triángulos PBC y $P'BC$ de la figura 34.10a tenemos que

$$\phi = \alpha + \theta \qquad \beta = \phi + \theta$$

Eliminando θ entre estas dos ecuaciones se obtiene

$$\alpha + \beta = 2\phi \tag{34.3}$$

Ahora podemos calcular la distancia de imagen s'. Sea h la altura del punto B con respecto al eje óptico, y sea δ la distancia corta de V al pie de esta línea vertical. Escribimos entonces expresiones de las tangentes de α, β y ϕ recordando que s, s' y R son todas cantidades positivas:

$$\tan\alpha = \frac{h}{s - \delta} \qquad \tan\beta = \frac{h}{s' - \delta} \qquad \tan\phi = \frac{h}{R - \delta}$$

Estas ecuaciones trigonométricas no se resuelven de forma tan sencilla como las ecuaciones algebraicas correspondientes a un espejo plano. Sin embargo, *si el ángulo α es pequeño*, los ángulos β y ϕ también lo son. La tangente de un ángulo mucho menor que un radián es casi igual al ángulo mismo (medido en radianes), de modo que podemos sustituir tan α por α, y así sucesivamente, en las ecuaciones anteriores. Asimismo, si α es pequeño, podemos ignorar la distancia δ en comparación con s', s y R. Así, en el caso de ángulos pequeños tenemos las siguientes relaciones aproximadas:

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$

Sustituyendo éstas en la ecuación (34.3) y dividiendo entre h, se obtiene una relación general entre s, s' y R:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad \text{(relación objeto-imagen, espejo esférico)} \tag{34.4}$$

Esta ecuación no contiene el ángulo α. Por lo tanto, *todos* los rayos provenientes de P que forman ángulos suficientemente pequeños con el eje se intersecan en P' después de reflejarse; esto comprueba lo que antes afirmamos. Estos rayos, casi paralelos al eje y próximos a él, se llaman **rayos paraxiales**. (El término **aproximación paraxial** se suele aplicar a las aproximaciones que hemos descrito.) Debido a que todos estos rayos reflejados convergen en el punto de imagen, a los espejos cóncavos también se les llama *espejos convergentes*.

Es preciso entender con claridad que la ecuación (34.4), así como muchas relaciones similares que deduciremos más adelante en este capítulo y en el siguiente, son sólo *aproximadamente* correctas. Es resultado de un cálculo que contiene aproximaciones, y sólo es válida con respecto a rayos paraxiales. Si se aumenta el ángulo α que un rayo forma con el eje óptico, el punto P' donde el rayo interseca el eje óptico se acerca un poco más al vértice, que en el caso de un rayo paraxial. En consecuencia, un espejo esférico, a diferencia de un espejo plano, no forma una imagen puntual precisa de un objeto puntual; la imagen se "embarra". Esta propiedad de los espejos esféricos se llama **aberración esférica**. Cuando se fabricó el espejo primario del Telescopio Espacial Hubble (figura 34.12a), tuvo diminutas incorrecciones en su forma que llevaron a una decepcionante aberración esférica (figura 34.12b). Los resultados del telescopio mejoraron espectacularmente después de la instalación de óptica correctiva (figura 34.12c).

Si el radio de curvatura se hace infinito ($R = \infty$), el espejo se vuelve *plano*, y la ecuación (34.4) se reduce a la ecuación (34.1) de una superficie reflectante plana.

Punto focal y distancia focal

Cuando el punto del objeto P está muy lejos del espejo esférico ($s = \infty$), los rayos entrantes son paralelos. (La estrella de la figura 34.12c es un ejemplo de un objeto distante de este tipo.) De acuerdo con la ecuación (34.4), la distancia s' viene dada en este caso por

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad s' = \frac{R}{2}$$

Esta situación se muestra en la figura 34.13a. El haz de rayos paralelos incidentes converge, después de reflejarse en el espejo, en un punto F situado a una distancia $R/2$ del vértice del espejo. El punto F donde los rayos paralelos incidentes convergen se llama **punto focal** o **foco**; de este modo decimos que estos rayos se enfocan. La distancia del vértice al punto focal, que se denota con f, recibe el nombre de **distancia focal**. Vemos que f está relacionada con el radio de curvatura R como sigue:

$$f = \frac{R}{2} \qquad \text{(distancia focal de un espejo esférico)} \qquad (34.5)$$

En la figura 34.13b se muestra la situación opuesta. Ahora el *objeto* se encuentra en el punto focal F, por lo que la distancia de objeto es $s = f = R/2$. La distancia de imagen s' está dada una vez más por la ecuación (34.4):

$$\frac{2}{R} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad \frac{1}{s'} = 0 \qquad s' = \infty$$

Con el objeto en el punto focal, los rayos reflejados de la figura 34.13b son paralelos al eje óptico; se encuentran sólo en un punto infinitamente alejado del espejo, por lo que la imagen está en el infinito.

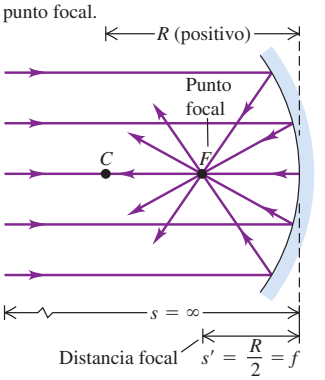
De esta manera, el punto focal F de un espejo esférico tiene las siguientes propiedades: 1) todo rayo entrante paralelo al eje óptico se refleja a través del punto focal y 2) todo rayo entrante que pasa por el punto focal se refleja paralelamente al eje óptico. En el caso de espejos esféricos, estos enunciados se cumplen sólo cuando los rayos son paraxiales. En el caso de espejos parabólicos, estos enunciados son *exactamente* válidos; por ello, se prefieren espejos parabólicos en la construcción de telescopios astronómicos. Se utilizan espejos esféricos o parabólicos en linternas y faros para dar a la luz de la bombilla la forma de un haz paralelo. Ciertas centrales de energía solar utilizan una serie de espejos planos para simular un espejo cóncavo aproximadamente esférico; los espejos recogen la luz del Sol y la dirigen hacia el punto focal, donde se encuentra una caldera de vapor. (Los conceptos de punto focal y distancia focal también son aplicables a las lentes, como veremos en la sección 34.4.)

Por lo regular, expresaremos la relación entre las distancias de objeto y de imagen de un espejo [ecuación (34.4)] en términos de la distancia focal f:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \text{(relación objeto-imagen, espejo esférico)} \qquad (34.6)$$

34.13 El punto focal y la distancia focal de un espejo cóncavo.

a) Todos los rayos paralelos incidentes en un espejo esférico se reflejan a través el punto focal.



b) Los rayos divergentes del punto focal se reflejan para formar rayos paralelos salientes

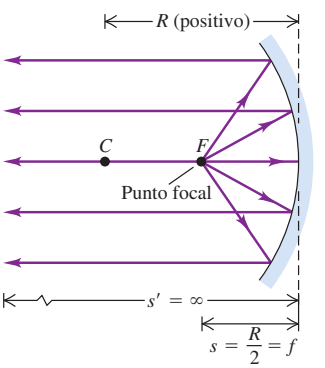
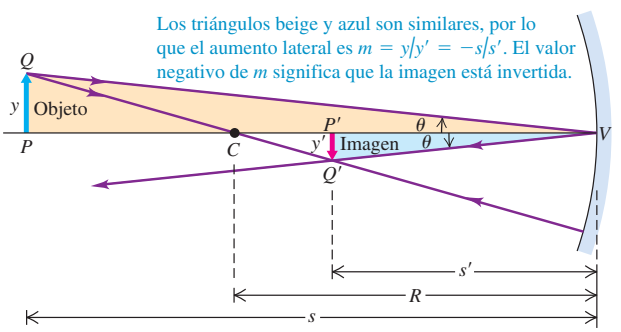


Imagen de un objeto extenso: Espejo esférico

Suponga ahora que se tiene un objeto de tamaño *finito*, representado por la flecha PQ en la figura 34.14, perpendicular al eje óptico CV. La imagen de P formada por rayos paraxiales está en P'. La distancia de objeto correspondiente al punto Q es casi idéntica a la correspondiente al punto P, por lo que la imagen $P'Q'$ es casi recta y perpendicular al eje. Advierta que las flechas objeto e imagen son de distinto tamaño (y y y', respectivamente) y de orientación opuesta. En la ecuación (34.2) definimos el *aumento lateral* m como la razón del tamaño de imagen y' con respecto al tamaño de objeto y:

$$m = \frac{y'}{y}$$



34.14 Construcción para determinar posición, orientación y altura de una imagen formada por un espejo esférico cóncavo.

Activ ONLINE Physics
15.5 Espejos esféricos: diagramas de rayos
15.6 Espejos esféricos: ecuación del espejo
15.7 Espejos esféricos: aumento lineal *m*
15.8 Espejos esféricos: problemas

Como los triángulos *PVQ* y *P′VQ′* de la figura 34.14 son *semejantes*, también tenemos la relación $y/s = -y'/s'$. El signo negativo es necesario porque el objeto y la imagen están en lados opuestos del eje óptico; si y es positiva, y' es negativa. Por lo tanto,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \qquad \text{(aumento lateral, espejo esférico)} \tag{34.7}$$

Si m es positiva, la imagen es derecha en comparación con el objeto; si m es negativa, la imagen es *invertida* con respecto al objeto, como en la figura 34.14. En el caso de un espejo *plano*, $s = -s'$, por lo que $y' = y$ y $m = +1$; puesto que m es positiva, la imagen es derecha, y como $|m| = 1$, la imagen es del mismo tamaño que el objeto.

CUIDADO **El aumento lateral puede ser menor que 1** Aunque la razón del tamaño de la imagen con respecto al tamaño del objeto se llama *aumento lateral*, la imagen formada por un espejo o lente puede ser mayor, menor o del mismo tamaño que el objeto. Si es más pequeña, entonces el valor absoluto del aumento lateral es menor que la unidad: $|m| < 1$. La imagen que forma el espejo de un telescopio astronómico o una lente de cámara es, por lo regular, *mucho* más pequeña que el objeto. Por ejemplo, la imagen de la estrella brillante de la figura 34.12c mide apenas unos pocos milímetros de ancho, en tanto que la estrella misma tiene un diámetro de cientos de miles de kilómetros.

En nuestro análisis de los espejos cóncavos hemos considerado hasta ahora sólo objetos que se encuentran *afuera* del punto focal o en éste, de modo que la distancia de objeto s es mayor que o igual a la distancia focal (positiva) f. En este caso el punto de imagen está del mismo lado del espejo que los rayos salientes, y la imagen es real e invertida. Si se coloca un objeto *más adentro* del punto focal de un espejo cóncavo, de modo que $s < f$, la imagen resultante es *virtual* (esto es, el punto de imagen está en el lado opuesto del espejo con respecto al objeto), *derecha* y *más grande* que el objeto. Los espejos que se utilizan para aplicar maquillaje (a los que hicimos referencia al principio de esta sección) son espejos cóncavos; al utilizarlos, la distancia del rostro al espejo es menor que la distancia focal, y se observa una imagen derecha ampliada. Se pueden probar estos enunciados acerca de los espejos cóncavos aplicando las ecuaciones (34.6) y (34.7) (véase el ejercicio 34.11). También podremos verificar estos resultados más adelante en esta sección, una vez que hayamos aprendido ciertos métodos gráficos para relacionar las posiciones y los tamaños del objeto y de la imagen.

Ejemplo 34.1 Formación de imagen por un espejo cóncavo I

Un espejo cóncavo forma una imagen, sobre una pared situada a 3.00 m del espejo, del filamento de una lámpara de reflector que está a 10.0 cm delante del espejo. *a*) ¿Cuáles son el radio de curvatura y la distancia focal del espejo? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen, si la altura del objeto es de 5.00 mm?

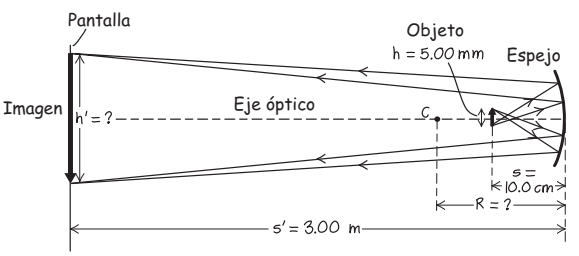
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las ideas desarrolladas en esta sección. Nuestras incógnitas son el radio de curvatura R, la distancia focal f y la altura de la imagen y'.

PLANTEAR: La figura 34.15 presenta la situación. Se conocen las distancias del espejo al objeto (s) y del espejo a la imagen (s'). Se aplica la relación entre objeto e imagen dada por la ecuación (34.6) para hallar la distancia focal f, y luego se calcula el radio de curvatura R mediante la ecuación (34.5). La ecuación (34.7) permite calcular la altura y' de la imagen a partir de las distancias s y s', y la altura y del objeto.

EJECUTAR: *a*) Tanto el objeto como la imagen están del lado cóncavo del espejo (el lado reflectante), por lo que tanto la distancia de objeto como la distancia de imagen son positivas; tenemos $s = 10.0$ cm y $s' = 300$ cm. De acuerdo con la ecuación (34.4),

34.15 Nuestro esquema de este problema.



$$\frac{1}{10.0\text{ cm}} + \frac{1}{300\text{ cm}} = \frac{2}{R}$$

$$R = \frac{2}{0.100\text{ cm}^{-1} + 3.33 \times 10^{-3}\text{ cm}^{-1}} = 19.4\text{ cm}$$

La distancia focal del espejo es $f = R/2 = 9.7$ cm.

b) Según la ecuación (34.7) el aumento lateral es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{300\text{ cm}}{10.0\text{ cm}} = -30.0$$

Puesto que m es negativa, la imagen es invertida. La altura de la imagen es 30.0 veces la altura del objeto, esto es, (30.0) (5.00 mm) = 150 mm.

EVALUAR: Observe que el objeto se encuentra inmediatamente afuera con respecto al punto focal (s = 10.0 cm en comparación con f = 9.7 cm). Esto es muy parecido a lo que se hace en los faros de un automóvil. Si se coloca el filamento cerca del punto focal, el espejo cóncavo produce un haz de rayos casi paralelos.

Ejemplo conceptual 34.2 Formación de imagen por un espejo cóncavo II

En el ejemplo 34.1, suponga que la mitad izquierda de la superficie reflectante del espejo está cubierta de hollín no reflectante. ¿Qué efecto tendrá esto en la imagen del filamento?

SOLUCIÓN

Sería común suponer que en este caso la imagen mostraría sólo la mitad del filamento. De hecho, sin embargo, la imagen sigue mostrando el filamento *completo*. La explicación es evidente si se examina la figura 34.10b. Los rayos luminosos que provienen de cualquier punto de objeto P se reflejan en *todas* las partes del espejo y convergen en el punto de imagen P' correspondiente. Si parte de la superficie del espejo se torna no reflectante o se elimina por completo, los rayos luminosos provenientes de la superficie reflectante restante continúan formando una imagen de todas las partes del objeto.

El único efecto de la reducción del área reflectante es que la imagen se atenúa porque llega menos energía al punto de imagen. En nuestro ejemplo, el área reflectante del espejo se reduce a la mitad, y la imagen tendrá la mitad del brillo original. Al *aumentar* el área reflectante la imagen se vuelve más brillante. Para formar imágenes razonablemente brillantes de estrellas distantes, los telescopios astronómicos utilizan espejos de hasta varios metros de diámetro. La figura 34.12a es un ejemplo.

Espejos convexos

En la figura 34.16a el lado *convexo* de un espejo esférico mira hacia la luz incidente. El centro de curvatura está en el lado opuesto a los rayos salientes; de acuerdo con la tercera regla de signos de la sección 34.1, R es negativo (véase la figura 34.11). El rayo PB se refleja, con ángulos de incidencia y reflexión iguales ambos a θ. El rayo reflejado, proyectado hacia atrás, interseca el eje en P'. Como en el caso del espejo cóncavo, *todos* los rayos provenientes de P que se reflejan en el espejo divergen a partir del mismo punto P', siempre y cuando el ángulo α sea pequeño. Por consiguiente, P' es la imagen de P. La distancia de objeto s es positiva, la distancia de imagen s' es negativa, y el radio de curvatura R es *negativo* en el caso de un espejo *convexo*.

La figura 34.16b muestra dos rayos que divergen a partir de la cabeza de la flecha PQ y de la imagen virtual $P'Q'$ de esta flecha. El mismo procedimiento que seguimos en el caso de un espejo cóncavo permite demostrar que, con respecto a un espejo convexo,

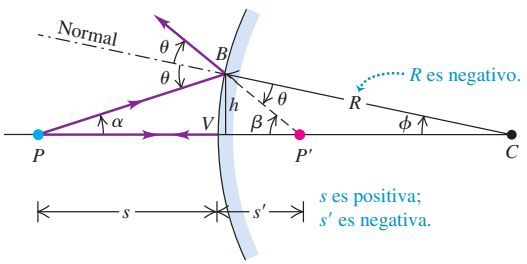
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

y el aumento lateral es

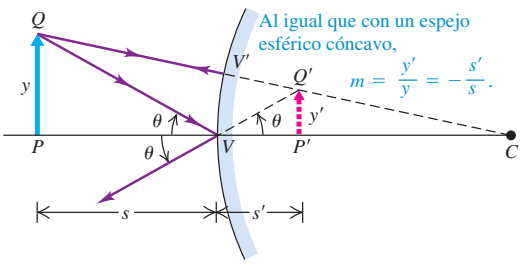
$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

34.16 Formación de imagen por un espejo convexo.

a) Construcción para determinar la posición de una imagen formada por un espejo convexo

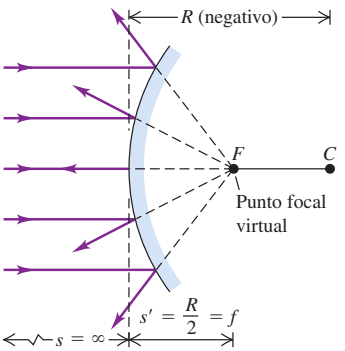


b) Construcción para determinar el aumento de una imagen formada por un espejo convexo

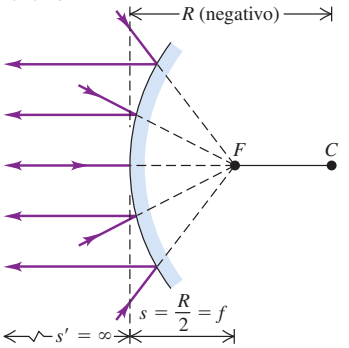


34.17 El punto focal y la distancia focal de un espejo convexo.

a) Rayos paraxiales que inciden en un espejo esférico convexo divergen a partir de un punto focal virtual



b) Los rayos dirigidos hacia el punto focal virtual son paralelos al eje después de la reflexión



Estas expresiones son exactamente equivalentes a las ecuaciones (34.4) y (34.7) correspondientes a un espejo cóncavo. Así, si aplicamos nuestras reglas de signos de modo congruente, las ecuaciones (34.4) y (34.7) son válidas tanto con espejos cóncavos como convexos.

Cuando R es negativo (espejo convexo), los rayos entrantes que son paralelos al eje óptico no se reflejan a través del punto focal F. En cambio, divergen como si provinieran del punto F situado a una distancia f *detrás* del espejo, como se muestra en la figura 34.17a. En este caso, f es la distancia focal, y F recibe el nombre de *punto focal virtual*. La distancia de imagen s' correspondiente es negativa, así que tanto f como R son negativos, y la ecuación (34.5), $f = R/2$, se cumple con respecto a espejos tanto convexos como cóncavos. En la figura 34.17b los rayos entrantes convergen como si fueran a encontrarse en el punto focal virtual F, y se reflejan paralelamente al eje óptico.

En síntesis, ecuaciones (34.4) a (34.7), las relaciones básicas de formación de imágenes por espejos esféricos, son válidas con respecto a espejos tanto cóncavos como convexos, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente.

Ejemplo 34.3 Problema de imagen de Santa Claus

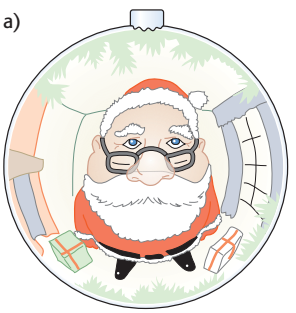
Para saber si se ha ensuciado de hollín, Santa Claus examina su reflejo en un adorno plateado brillante de un árbol de Navidad que está a 0.750 m de distancia (figura 34.18a). El diámetro del adorno es de 7.20 cm. Las obras de referencia más conocidas indican que Santa Claus es un "viejo elfo muy jovial", por lo que estimamos su estatura en 1.6 m. ¿En dónde aparece, y cuál es la altura de la imagen de Santa Claus que forma el adorno? ¿Es derecha o invertida?

SOLUCIÓN

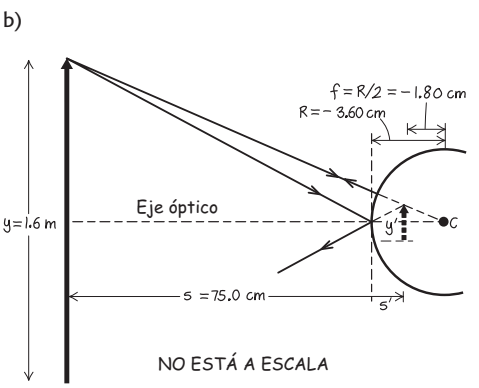
IDENTIFICAR: Santa Claus es el objeto y la superficie del adorno más próxima a él actúa como espejo convexo. Las relaciones entre distancia de objeto, distancia de imagen, distancia focal y aumento son las correspondientes a los espejos cóncavos, siempre y cuando las reglas de signos se apliquen de forma congruente.

34.18 a) El adorno forma una imagen virtual, reducida y derecha de Santa. b) Nuestro esquema para dos de los rayos que forman la imagen.

a)



b)



PLANTEAR: La figura 34.18b muestra la situación. Como el espejo es convexo, su radio de curvatura y su distancia focal son negativos. La distancia de objeto es $s = 0.750\ \text{m} = 75.0\ \text{cm}$, y la estatura de Santa Claus es $y = 1.6\ \text{m}$. Se aplica la ecuación (34.6) para calcular la distancia de imagen s', y en seguida la ecuación (34.7) para determinar el aumento lateral m y, por ende, la altura y' de la imagen. El signo de m indica si la imagen es derecha o invertida.

EJECUTAR: El radio del espejo convexo (la mitad del diámetro) es $R = -(7.20\ \text{cm})/2 = -3.60\ \text{cm}$, y la distancia focal es $f = R/2 = -1.80\ \text{cm}$. De acuerdo con la ecuación (34.6),

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-1.80\ \text{cm}} - \frac{1}{75.0\ \text{cm}}$$

$$s' = -1.76\ \text{cm}$$

Puesto que s' es negativa, la imagen está detrás del espejo, es decir, del lado opuesto a la luz saliente (figura 34.18b), y es virtual. La imagen está aproximadamente a medio camino entre la superficie anterior del adorno y su centro.

La ecuación (34.7) proporciona el aumento lateral m:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{-1.76\ \text{cm}}{75.0\ \text{cm}} = 0.0234$$

Dado que m es positiva, la imagen es derecha. Es tan sólo alrededor de 0.0234 veces tan alta como Santa Claus mismo:

$$y' = my = (0.0234)(1.6\ \text{m}) = 3.8 \times 10^{-2}\ \text{m} = 3.8\ \text{cm}$$

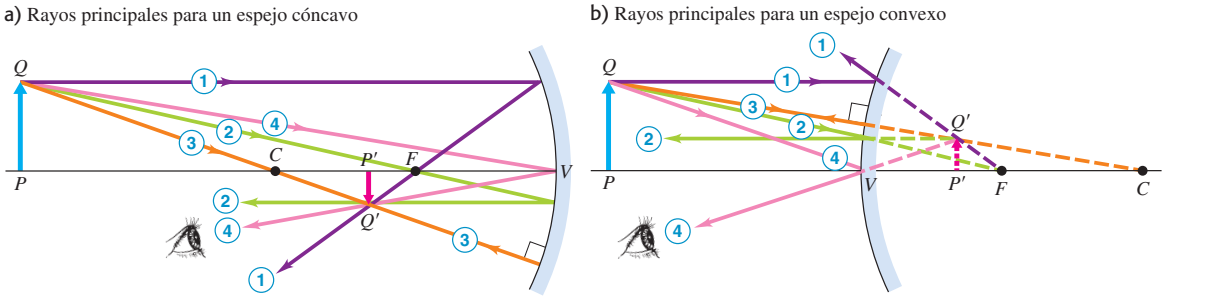
EVALUAR: Cuando la distancia de objeto s es positiva, un espejo convexo *siempre* forma una imagen derecha, virtual, disminuida e inversa. Por esta razón, se utilizan espejos convexos para vigilar a los ladrones en las tiendas, en las intersecciones con poca visibilidad, y como espejos retrovisores de "gran ángulo" para automóviles y camiones (incluso los que llevan la leyenda "los objetos que se ven en este espejo están más cerca de lo que parecen").

Métodos gráficos para espejos

En los ejemplos 34.1 y 34.3 aplicamos las ecuaciones (34.6) y (34.7) para determinar la posición y el tamaño de las imágenes formadas por un espejo. También podemos establecer las propiedades de la imagen mediante un sencillo método *gráfico*. Este método consiste en hallar el punto de intersección de unos pocos rayos específicos que divergen a partir de un punto de objeto (como el punto Q de la figura 34.19) y se reflejan en el espejo. En estas condiciones (sin tener en cuenta las aberraciones), *todos* los rayos provenientes de este punto de objeto que inciden en el espejo se intersecarán en el mismo punto. Para esta construcción siempre se elige un punto de objeto que *no* esté sobre el eje óptico. En la figura 34.19 se muestran cuatro rayos que, por lo general, se dibujan con facilidad, los cuales se conocen como **rayos principales**.

1. *Un rayo paralelo al eje*, después de reflejarse, pasa por el punto focal F de un espejo cóncavo o parece provenir del punto focal (virtual) de un espejo convexo.
2. *Un rayo que pasa por el punto focal F (o avanza hacia éste)* se refleja paralelamente al eje.
3. *Un rayo a lo largo del radio* que pasa por el centro de curvatura C, o se aleja de él, interseca la superficie en dirección normal y se refleja de regreso por su trayectoria original.
4. *Un rayo que incide en el vértice V* se refleja, formando ángulos iguales con el eje óptico.

34.19 Método gráfico para localizar la imagen formada por un espejo esférico. Los colores de los rayos sirven sólo como identificación; no se refieren a colores específicos de la luz.



a)
1. El rayo paralelo al eje se refleja a través del punto focal.
2. El rayo que pasa por el punto focal se refleja paralelo al eje.
3. El rayo que pasa por el centro de curvatura interseca la superficie normalmente y se refleja por su trayectoria original.
4. El rayo hacia el vértice se refleja simétricamente a través del eje óptico.

b)
1. El rayo paralelo reflejado parece provenir del punto focal.
2. El rayo hacia el punto focal se refleja paralelo al eje.
3. Al igual que con el espejo cóncavo: el rayo radial al centro de curvatura interseca la superficie normalmente y se refleja por su trayectoria original.
4. Como con el espejo cóncavo, el rayo hacia el vértice se refleja simétricamente con el eje óptico.

Una vez que hemos hallado la posición del punto de imagen por medio de la intersección de dos cualesquiera de estos rayos principales (1, 2, 3, 4), podemos dibujar el trayecto de cualquier otro rayo del punto de objeto al mismo punto de imagen.

CUIDADO **Los rayos principales no son los únicos rayos** Aunque hemos destacado los rayos principales, de hecho, cualquier rayo proveniente del objeto que incida en el espejo pasará por el punto de imagen (en el caso de una imagen real) o parecerá que nace en el punto de imagen (en el caso de una imagen virtual). Por lo regular, basta con trazar los rayos principales, pues son todo lo que se necesita para localizar la imagen.

Estrategia para resolver problemas 34.1 Formación de imágenes con espejos

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Existen dos formas distintas y complementarias de resolver problemas relacionados con la formación de imágenes con espejos. Una de ellas emplea ecuaciones, en tanto que la otra implica dibujar un diagrama de rayos principales. La resolución satisfactoria de un problema se basa en *ambos* métodos.

PLANTEAR *el problema:* Establezca cuáles son las incógnitas. Las tres magnitudes clave son la distancia focal, la distancia de objeto y la distancia de imagen; típicamente, se le darán dos de éstas y deberá hallar la tercera.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. El diagrama de rayos principales es a la óptica geométrica lo que el diagrama de cuerpo libre es a la mecánica clásica. En cualquier problema relacionado con la formación de imágenes con un espejo, *siempre* dibuje primero un diagrama de rayos principales, si cuenta con la información suficiente. (Se debe seguir esta misma recomendación al tratar con lentes en las secciones siguientes.)
2. Por lo regular, lo mejor es orientar siempre los diagramas del mismo modo, con los rayos entrantes dirigidos de izquierda a derecha. No dibuje muchos otros rayos al azar; aténgase a los rayos principales, acerca de los cuales tiene cierta información. ¡Utilice una regla y mida las distancias minuciosamente! Un dibujo a mano alzada *no* le dará buenos resultados.
3. Si sus rayos principales no convergen en un punto de imagen real, quizá sea necesario prolongarlos directamente hacia atrás, para localizar un punto de imagen virtual, como en la figura 34.19b. Es recomendable dibujar las extensiones con líneas discontinuas. Otro recurso útil es codificar por colores los diferentes rayos principales, como en la figura 34.19.
4. Compruebe sus resultados mediante la ecuación (34.6), $1/s + 1/s' = 1/f$, y la ecuación de aumento lateral [ecuación (34.7)]. Los resultados hallados con esta ecuación deben ser congruentes con su diagrama de rayos principales; en caso contrario, revise de nuevo sus cálculos y su diagrama.
5. Ponga mucha atención en los signos de las distancias de objeto y de imagen, de radios de curvatura, y de alturas de objeto e imagen. Un signo negativo en cualquiera de estas magnitudes *siempre* tiene un significado. Aplique de forma minuciosa y congruente las ecuaciones y las reglas de signos, ¡y éstas siempre le dirán la verdad! Advierta que las *mismas* reglas de signos (dadas en la sección 34.1) funcionan en los cuatro casos de este capítulo: reflexión y refracción en superficies planas y esféricas.

EVALUAR *la respuesta:* Ya ha comprobado sus resultados empleando tanto diagramas como ecuaciones. No obstante, siempre resulta útil echar una mirada retrospectiva y preguntarse: ¿estos resultados son razonables?

Ejemplo 34.4 Espejo cóncavo, diferentes distancias de objeto

Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura con un valor absoluto de 20 cm. Halle por medios gráficos la imagen de un objeto en forma de una flecha perpendicular al eje del espejo a cada una de las distancias de objeto siguientes: *a*) 30 cm, *b*) 20 cm, *c*) 10 cm y *d*) 5 cm. Compruebe la construcción *calculando* el tamaño y el aumento lateral de cada imagen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema debemos usar *tanto* métodos gráficos *como* cálculos para obtener la imagen formada por un espejo. Se trata de un buen enfoque a seguir en todos los problemas relacionados con la formación de imágenes.

PLANTEAR: Conocemos el radio de curvatura $R = 20$ cm (positivo ya que el espejo es cóncavo) y, por lo tanto, la distancia focal $f = R/2 = 10$ cm. En cada caso, se nos indica la distancia de objeto s y se nos pide calcular la distancia de imagen s' y el aumento lateral $m = -s'/s$.

EJECUTAR: En las cuatro partes de la figura 34.20 se muestran los diagramas de rayos principales correspondientes a los cuatro casos. Estudie detenidamente cada uno de estos diagramas, comparando cada rayo numerado con la descripción que se ha dado. Vale la pena destacar varios puntos. Primero, en *b*) las distancias de objeto y de imagen son iguales. En este caso, no se puede dibujar el rayo 3 porque un rayo proveniente de Q que pasa por el centro de curvatura C no incide en el espejo. No se puede dibujar el rayo 2 en *c*) porque un rayo que va de Q hacia F tampoco incide en el espejo. En este caso, los rayos salientes son paralelos, lo que corresponde a una distancia de imagen infinita. En *d*) los rayos salientes no tienen un punto de intersección real; es necesario prolongarlos hacia atrás para hallar el punto desde el cual parecen divergir, es decir, el *punto de imagen virtual* Q'. El caso que se muestra en *d*) ilustra la observación general de que un objeto situado por dentro del punto focal de un espejo cóncavo produce una imagen virtual.

Las mediciones de las figuras, empleando las escalas adecuadas, dan las siguientes distancias de imagen aproximadas: *a*) 15 cm; *b*) 20 cm; *c*) ∞ o $-\infty$ (porque los rayos salientes son paralelos y no convergen a ninguna distancia finita); *d*) -10 cm. Para *calcular* estas distancias, se aplica la ecuación (34.6) con $f = 10$ cm:

$$a)\ \frac{1}{30\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = 15\text{ cm}$$

$$b)\ \frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = 20\text{ cm}$$

c) $\frac{1}{10\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}}$ $\quad s' = \infty\ (\text{o } -\infty)$

d) $\frac{1}{5\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}}$ $\quad s' = -10\text{ cm}$

En *a*) y *b*) la imagen es real; en *d*), es virtual. En *c*) la imagen se forma en el infinito.

Los aumentos laterales medidos en las figuras son aproximadamente *a*) $-\frac{1}{2}$; *b*) -1; *c*) ∞ o $-\infty$ (porque la distancia de imagen es infinita); *d*) $+2$. *Calculando* los aumentos con base en la ecuación (34.7) se obtiene lo siguiente:

a) $m = -\frac{15\text{ cm}}{30\text{ cm}} = -\frac{1}{2}$

b) $m = -\frac{20\text{ cm}}{20\text{ cm}} = -1$

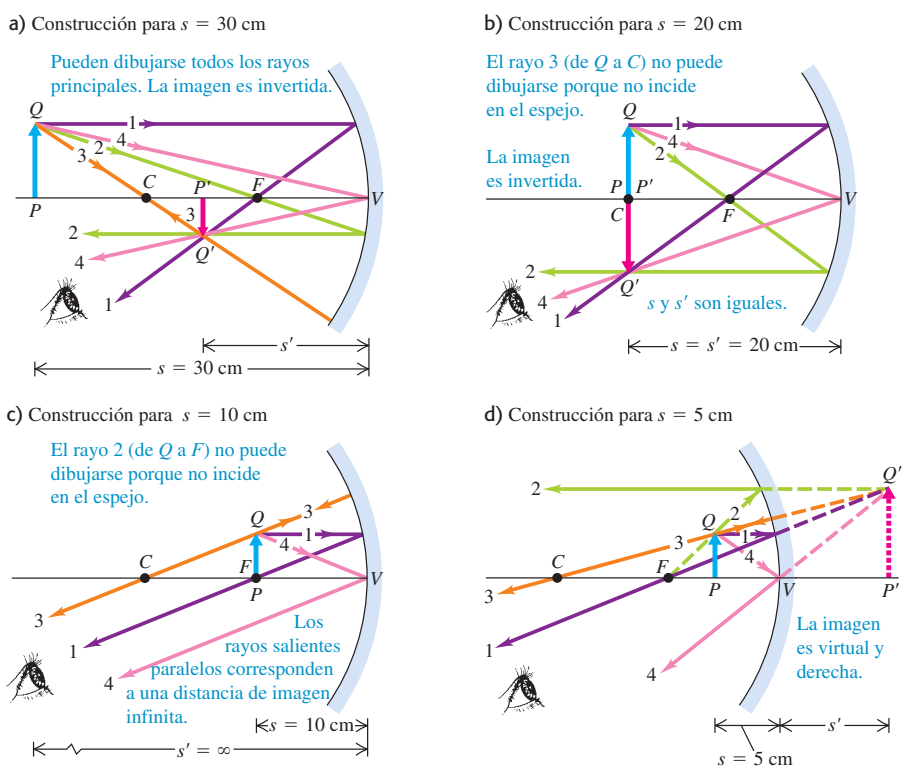
c) $m = -\frac{\infty\text{ cm}}{10\text{ cm}} = -\infty\ (\text{o } +\infty)$

d) $m = -\frac{-10\text{ cm}}{5\text{ cm}} = +2$

En *a*) y *b*) la imagen es invertida; en *d*), es derecha.

EVALUAR: Advierta la tendencia conforme el objeto se acerca al espejo. Cuando el objeto está lejos del espejo, como en la figura 34.20a, la imagen es más pequeña que el objeto, invertida y real. A medida que la distancia del objeto disminuye, la imagen se aleja del espejo y aumenta de tamaño (figura 34.20b). Cuando el objeto está en el punto focal, la imagen se halla en el infinito (figura 34.20c). Si el objeto se desplaza por dentro del punto focal, la imagen se torna más grande que el objeto, derecha y virtual (figura 34.20d). Puede poner a prueba estas conclusiones mirando objetos reflejados en la parte cóncava de una cuchara metálica.

34.20 Uso de diagramas de rayos principales para localizar la imagen $P'Q'$ formada por un espejo cóncavo.



Evalúe su comprensión de la sección 34.2 Los espejos de tocador se diseñan de modo que nuestra imagen aparezca al derecho y aumentada. ¿El espejo es cóncavo o convexo? Para ver una imagen aumentada, ¿dónde deberíamos colocar el espejo en relación con nuestro rostro (la distancia focal f)? i) $|f|$; ii) menor que $|f|$; iii) mayor que $|f|$.

34.3 Refracción en una superficie esférica

Como vimos en la sección 34.1, se forman imágenes por refracción lo mismo que por reflexión. Para comenzar, consideremos la refracción en una superficie esférica, es decir, en una interfaz esférica entre dos materiales ópticos de diferente índice de refracción. Este análisis es aplicable directamente a ciertos sistemas ópticos reales, como el ojo humano. Asimismo, constituye un peldaño hacia el análisis de las lentes, que normalmente tienen *dos* superficies esféricas (o casi esféricas).

Imagen de un objeto puntual: Superficie refractiva esférica

En la figura 34.21 una superficie esférica de radio R forma una interfaz entre dos materiales con índices de refracción diferentes n_a y n_b. La superficie forma una imagen P' de un punto de objeto P; nos proponemos averiguar cuál es la relación entre las distancias de objeto y de imagen (s y s'). Aplicaremos las reglas de signos que utilizamos en el caso de los espejos esféricos. El centro de curvatura C está del lado saliente de la superficie; por lo tanto, R es positivo. El rayo PV incide en el vértice V y es perpendicular a la superficie (esto es, al plano tangente a la superficie en el punto de incidencia V), y penetra en el segundo material sin desviarse. El rayo PB, que forma un ángulo α con el eje, incide a un ángulo θ_a con respecto a la normal, y se refracta a un ángulo θ_b. Estos rayos se intersecan en P', a una distancia s' a la derecha del vértice. El dibujo de la figura corresponde al caso $n_a < n_b$. Las distancias de objeto y de imagen son ambas positivas.

Probaremos que si el ángulo α es pequeño, *todos* los rayos provenientes de P se intersecan en el mismo punto P', por lo que P' es la *imagen real* de P. Emplearemos en gran medida el mismo método que aplicamos a los espejos esféricos en la sección 34.2. Una vez más, aplicaremos el teorema según el cual el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos; la aplicación de esto a los triángulos PBC y $P'BC$ da lo siguiente:

$$\theta_a = \alpha + \phi \qquad \phi = \beta + \theta_b \tag{34.8}$$

Según la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

Asimismo, las tangentes de α, β y ϕ son

$$\tan\alpha = \frac{h}{s+\delta} \qquad \tan\beta = \frac{h}{s'-\delta} \qquad \tan\phi = \frac{h}{R-\delta} \tag{34.9}$$

En el caso de rayos paraxiales, θ_a y θ_b son ambos pequeños en comparación con un radián, y podemos tomar el ángulo mismo (medido en radianes), como aproximación del seno y de la tangente de cualquiera de estos ángulos. La ley de refracción da entonces

$$n_a\theta_a = n_b\theta_b$$

Combinando esto con la primera de las ecuaciones (34.8) se obtiene

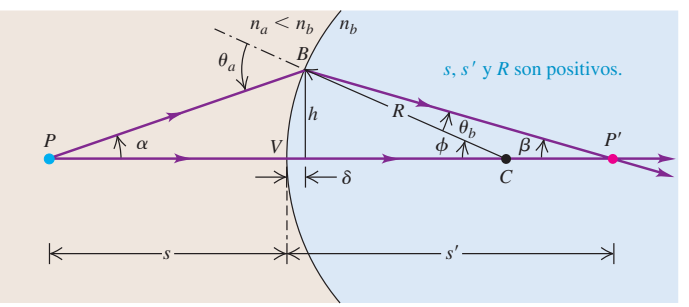
$$\theta_b = \frac{n_a}{n_b}(\alpha + \phi)$$

La sustitución de esto en la segunda de las ecuaciones (34.8) da

$$n_a\alpha + n_b\beta = (n_b - n_a)\phi \tag{34.10}$$

Ahora aplicamos las aproximaciones $\tan\alpha = \alpha$, etcétera, en las ecuaciones (34.9) y también despreciamos la pequeña distancia δ; esas ecuaciones se transforman entonces en

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$



34.21 Construcción para hallar la posición del punto de imagen P' de un objeto puntual P, formado por refracción en una superficie esférica. Los materiales a la izquierda y a la derecha de la interfaz tienen índices de refracción n_a y n_b, respectivamente. En el caso que aquí se muestra, $n_a < n_b$.

Por último, sustituimos éstas en la ecuación (34.10) y extraemos por división el factor común h:

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \qquad \begin{matrix}\text{(relación objeto-imagen,}\\ \text{superficie refractiva esférica)}\end{matrix} \tag{34.11}$$

Esta ecuación no contiene el ángulo α, de manera que la distancia de imagen es la misma con respecto a *todos* los rayos paraxiales que emanan de P; esto prueba nuestra aseveración de que P' es la imagen de P.

Para obtener el aumento lateral m correspondiente a esta situación, utilizaremos la construcción de la figura 34.22. Dibujamos dos rayos a partir del punto Q, uno que pasa por el centro de curvatura C y otro que incide en el vértice V. De los triángulos PQV y $P'Q'V$,

$$\tan\theta_a = \frac{y}{s} \qquad \tan\theta_b = \frac{-y'}{s'}$$

y de acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

Si los ángulos son pequeños,

$$\tan\theta_a = \operatorname{sen}\theta_a \qquad \tan\theta_b = \operatorname{sen}\theta_b$$

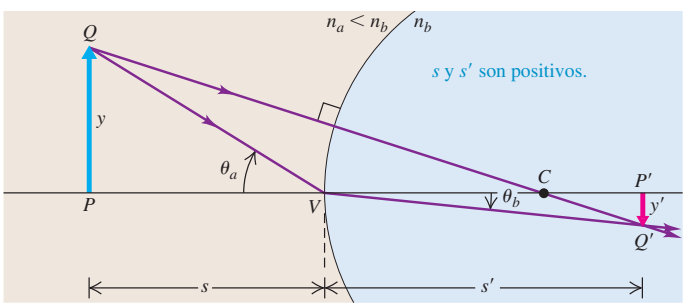
y, por último,

$$\frac{n_a y}{s} = -\frac{n_b y'}{s'} \quad \text{o bien}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s} \qquad \begin{matrix}\text{(aumento lateral, superficie}\\ \text{refractiva esférica)}\end{matrix} \tag{34.12}$$

Las ecuaciones (34.11) y (34.12) son aplicables a superficies refractivas tanto convexas como cóncavas, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente. No importa si n_b es mayor o menor que n_a. Para verificar estos enunciados, construya diagramas como las figuras 34.21 y 34.22 que correspondan a los tres casos siguientes: i) $R > 0$ y $n_a > n_b$, ii) $R < 0$ y $n_a < n_b$, y iii) $R < 0$ y $n_a > n_b$. Después, en cada caso, deduzca de nuevo las ecuaciones (34.11) y (34.12) a partir de su diagrama.

Veamos una nota final sobre la regla de signos aplicable al radio de curvatura R de una superficie. Con respecto a la superficie reflectante convexa de la figura 34.16, consideramos R como negativo, pero la superficie *refractiva* convexa de la figura 34.21 tiene un valor *positivo* de R. Esto quizá parezca incongruente, pero no lo es. La regla es que R es positivo si el centro de curvatura C está del lado saliente de la superficie, y negativo si C está del otro lado. En el caso de la superficie refractiva convexa de la figura 34.16, R es negativo porque el punto C está a la derecha de la superficie pero los rayos salientes están a la izquierda. En el caso de la superficie refractiva convexa de la figura 34.21, R es positivo porque tanto C como los rayos salientes están a la derecha de la superficie.



34.22 Construcción para hallar la altura de una imagen formada por refracción en una superficie esférica. En el caso que aquí se muestra, $n_a < n_b$.

34.23 Los rayos luminosos se refractan al atravesar las superficies curvas de estas gotitas de agua.

La refracción en superficies curvas es una de las razones por las que los jardineros evitan regar las plantas a mediodía. Cuando la luz solar entra en una gota de agua que reposa sobre una hoja (figura 34.23), los rayos luminosos se refractan unos hacia otros, como en las figuras 34.21 y 34.22. En consecuencia, la luz solar que incide en la hoja está más concentrada y puede causar daño.

Un caso especial importante de superficie refractiva esférica es una superficie *plana* entre dos materiales ópticos. Esto corresponde a fijar $R = \infty$ en la ecuación (34.11). En este caso,

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = 0 \qquad \text{(superficie refractiva plana)} \tag{34.13}$$

Para calcular el aumento lateral m correspondiente a este caso, combinamos esta ecuación con la relación general [ecuación (34.12)] para obtener este resultado simple:

$$m = 1$$

Es decir, la imagen que forma una superficie refractiva *plana* siempre tiene el mismo tamaño lateral que el objeto, y siempre es derecha.

Un ejemplo de formación de imagen por una superficie refractiva plana es la apariencia de una pajilla o un remo de canoa parcialmente sumergidos. Visto desde ciertos ángulos, el objeto parece tener un doblez muy evidente en la superficie del agua porque la parte sumergida aparenta hallarse a sólo alrededor de tres cuartas partes de su distancia real debajo de la superficie. (Comentamos acerca de la apariencia de un objeto sumergido en la sección 33.2; véase la figura 33.9.)

Ejemplo 34.5 Formación de imágenes por refracción I

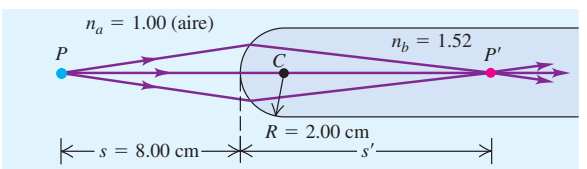
Una varilla de vidrio cilíndrica en aire (figura 34.24) tiene un índice de refracción de 1.52. Se pulió un extremo para formar una superficie semiesférica con radio $R = 2.00$ cm. *a*) Calcule la distancia de imagen de un objeto pequeño situado sobre el eje de la varilla, a 8.00 cm a la izquierda del vértice. *b*) Obtenga el aumento lateral.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las ideas de refracción en una superficie curva. Nuestras incógnitas son la distancia de imagen s' y el aumento lateral m.

PLANTEAR: En este caso el material a es aire ($n_a = 1.00$) y el material b es el vidrio del que se compone la varilla ($n_b = 1.52$). Sabemos que

34.24 La varilla de vidrio en aire forma una imagen real.



$s = 8.00$ cm; el radio de la superficie esférica es positivo ($R = +2.00$ cm) porque el centro de curvatura está del lado saliente de la superficie. Usaremos la ecuación (34.11) para determinar la distancia de imagen y la ecuación (34.12) para el aumento lateral.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (34.11),

$$\frac{1.00}{8.00\text{ cm}} + \frac{1.52}{s'} = \frac{1.52 - 1.00}{+2.00\text{ cm}}$$

$$s' = +11.3\text{ cm}$$

b) De la ecuación (34.12),

$$m = -\frac{n_a s'}{n_b s} = -\frac{(1.00)(11.3\text{ cm})}{(1.52)(8.00\text{ cm})} = -0.929$$

EVALUAR: Como la distancia de imagen s' es positiva, la imagen se forma 11.3 cm a la *derecha* del vértice (en el lado saliente), como se muestra en la figura 34.24. El valor de m indica que la imagen es un poco más pequeña que el objeto e invertida. Si el objeto fuera una flecha de 1.000 mm de altura que apunta hacia arriba, la imagen sería una flecha de 0.929 mm de altura que apunta hacia abajo.

Ejemplo 34.6 Formación de imágenes por refracción II

Se sumerge en agua (índice de refracción $n = 1.33$) la varilla de vidrio del ejemplo 34.5, como se muestra en la figura 34.25. Las demás magnitudes tienen los mismos valores que en el caso anterior. Obtenga la distancia de imagen y el aumento lateral.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La situación es la misma que en el ejemplo 34.5, salvo que ahora $n_a = 1.33$.

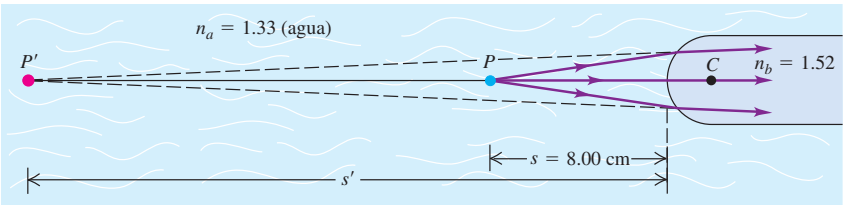
PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 34.5, utilizamos las ecuaciones (34.11) y (34.12) para determinar s' y m, respectivamente.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.11),

$$\frac{1.33}{8.00\text{ cm}} + \frac{1.52}{s'} = \frac{1.52 - 1.33}{+2.00\text{ cm}}$$

$$s' = -21.3\text{ cm}$$

34.25 Cuando está inmersa en agua, la varilla de vidrio forma una imagen virtual.



En este caso, el aumento lateral es

$$m = -\frac{(1.33)(-21.3\text{ cm})}{(1.52)(8.00\text{ cm})} = +2.33$$

EVALUAR: El valor negativo de s' significa que, una vez que la superficie refracta los rayos, éstos no convergen sino que *parecen* divergir a partir de un punto situado 21.3 cm *a la izquierda* del vértice. Vimos un caso similar en la reflexión de luz en un espejo convexo; describimos el punto como una *imagen virtual*. En este ejemplo la superficie forma una imagen virtual a 21.3 cm a la izquierda del vértice. La imagen vertical es derecha (porque m es positivo) y 2.33 veces más grande que el objeto.

Ejemplo 34.7 Profundidad aparente de una alberca

Los propietarios de albercas saben que éstas siempre parecen menos profundas de lo que realmente son, y que es importante identificar claramente las partes profundas, para que quienes no saben nadar no se introduzcan donde el agua les cubriría la cabeza. Si alguien que no sabe nadar mira directamente hacia abajo el agua de una alberca que tiene 2.00 m de profundidad (aproximadamente, 6 ft, 7 in), ¿cuál es la profundidad aparente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La superficie del agua actúa como una superficie refractiva plana.

PLANTEAR: En la figura 34.26 se muestra la situación. Para obtener la profundidad aparente de la alberca, imaginamos que hay una flecha PQ pintada en el fondo de la alberca. La superficie refractiva del agua forma una imagen virtual $P'Q'$ de esta flecha. Para calcular la profundidad de esta flecha, la cual nos indica la profundidad aparente de la alberca, aplicamos la ecuación (34.13).

EJECUTAR: La distancia de objeto es la profundidad real de la alberca: $s = 2.00$ m. El material a es el agua ($n_a = 1.33$) y el material b es el aire ($n_b = 1.00$). La ecuación (34.13) da la posición de la imagen:

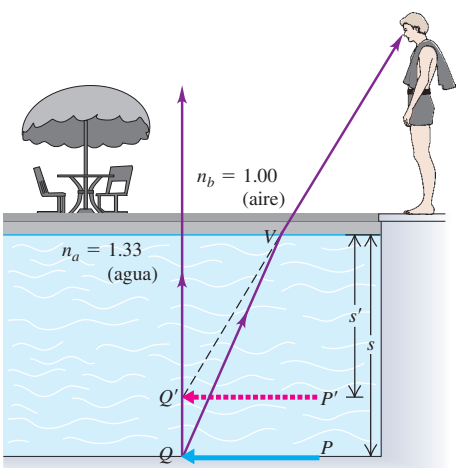
$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{1.33}{2.00\text{ m}} + \frac{1.00}{s'} = 0$$

$$s' = -1.50\text{ m}$$

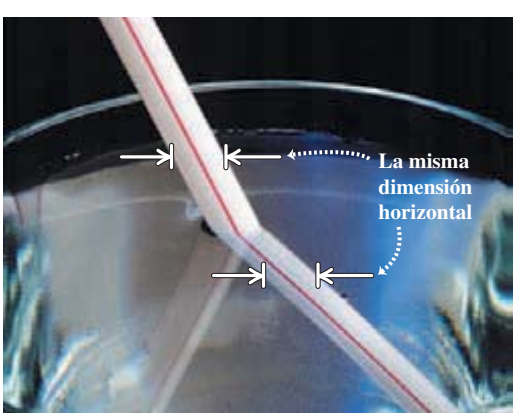
La distancia de imagen es negativa. De acuerdo con las reglas de signos de la sección 34.1, esto significa que la imagen es virtual y está del lado entrante de la superficie refractiva, es decir, del mismo lado que el objeto. La profundidad aparente es de 1.50 m (aprox. 4 ft, 11 in), esto es, de sólo tres cuartas partes de la profundidad real. Un nadador de 1.80 m (6 ft) de estatura que no tomara en cuenta este efecto tendría problemas.

EVALUAR: Recuerde que el aumento lateral correspondiente a una superficie refractiva plana es $m = 1$. Por lo tanto, la imagen $P'Q'$ de la flecha tiene la misma *longitud horizontal* que la flecha real PQ. Sólo la profundidad es diferente. Usted puede observar este efecto en la figura 34.27.

34.26 La flecha $P'Q'$ es la imagen virtual de la flecha PQ que está bajo el agua. Para mayor claridad, se exageraron los ángulos que el rayo forma con la vertical.



34.27 La parte sumergida de esta pajilla parece estar a una profundidad menor (más cerca de la superficie) de lo que realmente está.



Evalúe su comprensión de la sección 34.3 Las gotitas de agua de la figura 34.23 tienen un radio de curvatura R y un índice de refracción $n = 1.33$. ¿Forman una imagen del Sol sobre la hoja?

34.4 Lentes delgadas

Activ Online Physics
15.9 Diagramas de rayos de lentes delgadas
15.10 Lentes delgadas convergentes
15.11 Lentes delgadas divergentes

El dispositivo óptico más conocido y de uso más extendido (después del espejo plano) es la *lente*, que es un sistema óptico con dos superficies refractivas. La lente más simple tiene dos superficies *esféricas* lo suficientemente próximas entre sí como para que podamos despreciar la distancia entre ellas (el espesor de la lente); a este dispositivo se le llama **lente delgada**. Si usted utiliza anteojos o lentes de contacto para leer, entonces está viendo estas palabras a través de un par de lentes delgadas. Podemos analizar detalladamente las lentes delgadas con base en los resultados obtenidos en la sección 34.3, con respecto a la refracción en una sola superficie esférica. Sin embargo, pospondremos este análisis para más adelante en esta sección, con la finalidad de analizar primero las propiedades de las lentes delgadas.

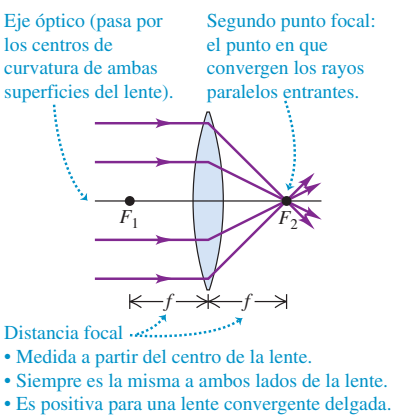
Propiedades de las lentes

Una lente de la forma que se muestra en la figura 34.28 tiene la propiedad de que, cuando un haz de rayos paralelos al eje atraviesa la lente, los rayos convergen en un punto F_2 (figura 34.28a) y forman una imagen real en ese punto. Las lentes de este tipo se llaman **lentes convergentes**. Asimismo, los rayos que pasan por el punto F_1 emergen de la lente en forma de un haz de rayos paralelos (figura 34.28b). Los puntos F_1 y F_2 son lo que se conoce como *puntos focales* primero y segundo, y la distancia f (medida desde el centro de la lente) es la *distancia focal*. Advierta las semejanzas entre los dos puntos focales de una lente convergente y el único punto focal de un espejo cóncavo (figura 34.13). Como en el caso de los espejos cóncavos, la distancia focal de una lente convergente se define como una cantidad *positiva*, y las lentes de esta clase se conocen también como *lentes positivas*.

La recta horizontal central de la figura 34.28 se denomina *eje óptico*, como en el caso de los espejos esféricos. Los centros de curvatura de las dos superficies esféricas se encuentran sobre el eje óptico y lo definen. Las dos distancias focales de la figura 34.28, ambas identificadas como f, *siempre son iguales* en el caso de una lente delgada, aun cuando los dos lados tienen diferente curvatura. Más adelante en esta sección deduciremos este resultado, un poco sorprendente, cuando deduzcamos la relación entre f, el índice de refracción de la lente, y los radios de curvatura de sus superficies.

34.28 F_1 y F_2 son los puntos focales primero y segundo de una lente convergente delgada. El valor numérico de f es positivo.

a)



b)

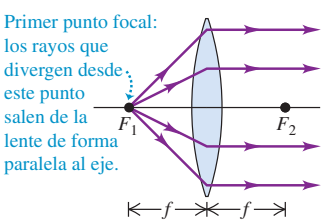
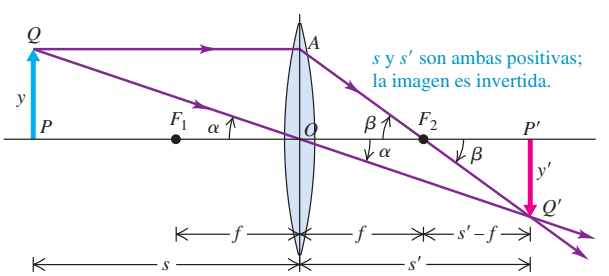


Imagen de un objeto extenso: Lentes convergentes

Al igual que un espejo cóncavo, una lente convergente forma imágenes de los objetos extensos. La figura 34.29 muestra cómo determinar la posición y el aumento lateral de una imagen formada por una lente convergente delgada. Con base en la misma notación y reglas de signos que hemos utilizado, sean s y s' las distancias de objeto y de imagen, respectivamente, y sean y y y' las alturas del objeto y de la imagen. El rayo QA, paralelo al eje óptico antes de la refracción, pasa por el segundo punto focal F_2 después de refractarse. El rayo QOQ' pasa directamente por el centro de la lente sin desviarse, ya que en el centro las dos superficies son paralelas y (suponemos) están



34.29 Construcción para obtener la posición de la imagen que forma una lente delgada. Para destacar la suposición de que la lente es muy delgada, se muestra el rayo QAQ' como si se doblase en el plano medio de la lente, no en las dos superficies, y el rayo QOQ' se muestra como línea recta.

muy próximas entre sí. Hay refracción donde el rayo entra y sale del material, pero no existe un cambio neto de dirección.

Los dos ángulos identificados como α en la figura 34.29 son iguales. Por consiguiente, los dos triángulos rectángulos PQO y $P'Q'O$ son *semejantes*, y las razones de los lados correspondientes son iguales. Por lo tanto,

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \tag{34.14}$$

(La razón del signo negativo es que la imagen está abajo del eje óptico y y' es negativa.) Asimismo, los ángulos identificados como β son iguales, y los dos triángulos rectángulos OAF_2 y $P'Q'F_2$ son semejantes:

$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s' - f} \qquad \text{o bien}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s' - f}{f} \tag{34.15}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (34.14) y (34.15), dividimos entre s' y reorganizamos para obtener

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \text{(relación objeto-imagen, lente delgada)} \tag{34.16}$$

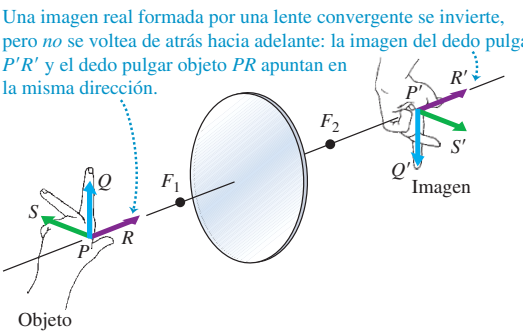
Este análisis también proporciona el aumento lateral (relación objeto-imagen, lente delgada) $m = y'/y$ correspondiente a la lente; según la ecuación (34.14),

$$m = -\frac{s'}{s} \qquad \text{(aumento lateral, lente delgada)} \tag{34.17}$$

El signo negativo indica que, cuando s y s' son ambas positivas, como en la figura 34.29, la imagen es *invertida*, y los signos de y y y' son opuestos.

Las ecuaciones (34.16) y (34.17) son las ecuaciones fundamentales de las lentes delgadas. Son *exactamente* iguales a las ecuaciones correspondientes de los espejos esféricos [ecuaciones (34.6) y (34.7)]. Como veremos, las reglas de signos que seguimos en el caso de los espejos esféricos también son aplicables a las lentes. En particular, considere una lente con una distancia focal positiva (una lente convergente). Cuando un objeto está por fuera del primer punto focal F_1 de esta lente (es decir, cuando $s > f$), la distancia de imagen s' es positiva (esto es, la imagen está del mismo lado que los rayos salientes); esta imagen es real e invertida, como en la figura 34.29. Un objeto colocado más adentro del primer punto focal de una lente convergente, de modo que $s < f$, forma una imagen con un valor negativo de s'; esta imagen se encuentra del mismo lado de la lente que el objeto, y es virtual, derecha y más grande que éste. Estos enunciados se pueden verificar algebraicamente por medio de las ecuaciones (34.16) y (34.17); también los verificaremos en la próxima sección, usando métodos gráficos análogos a los que se presentaron en la sección 34.2 aplicados a espejos.

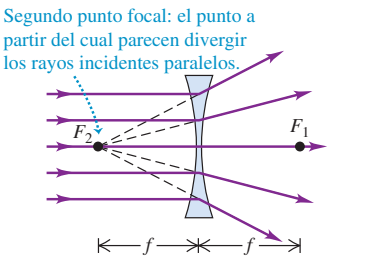
La figura 34.30 muestra cómo una lente forma una imagen tridimensional de un objeto tridimensional. El punto R está más cerca de la lente que el punto P. De acuerdo



34.30 La imagen $S'P'Q'R'$ de un objeto tridimensional $SPQR$ no se voltea con una lente.

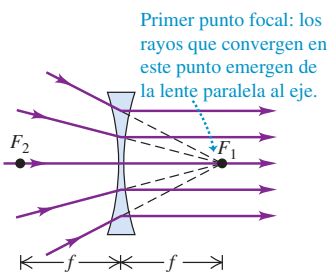
34.31 F_2 y F_1 son los puntos focales segundo y primero de una lente delgada divergente, respectivamente. El valor numérico de f es negativo.

a)

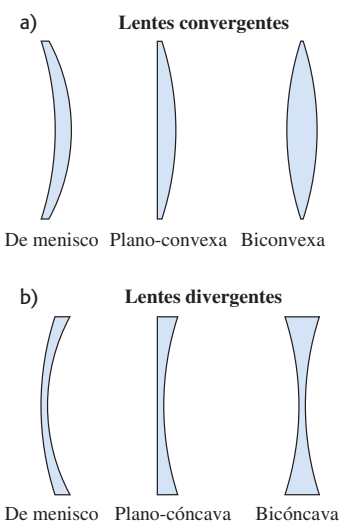


Para lentes delgadas divergentes, f es negativa.

b)



34.32 Varios tipos de lentes.



con la ecuación (34.16), el punto de imagen R' está más alejado de la lente que el punto de imagen P', y la imagen $P'R'$ apunta en la misma dirección que el objeto PR. Las flechas $P'S'$ y $P'Q'$ están al revés con respecto a PS y PQ.

Comparemos la figura 34.30 con la figura 34.7, la cual muestra la imagen formada por un *espejo* plano. Advertimos que la imagen formada por la lente es invertida, pero *no* está volteada de adelante hacia atrás a lo largo del eje óptico. Es decir, si el objeto es una mano izquierda, su imagen también es una mano izquierda. Podemos verificar esto apuntando el pulgar izquierdo a lo largo de PR, el índice a lo largo de PQ y el dedo medio izquierdo a lo largo de PS. Luego giramos la mano 180° con el pulgar como eje; esto hace coincidir los dedos con $P'Q'$ y $P'S'$. En otras palabras, una imagen *invertida* es equivalente a una imagen que se ha girado 180° en torno al eje de la lente.

Lentes divergentes

Hasta ahora hemos analizado lentes *convergentes*. La figura 34.31 muestra una **lente divergente**; el haz de rayos paralelos que incide en esta lente *diverge* después de refractarse. La distancia focal de una lente divergente es una cantidad negativa, y las lentes de este tipo se conocen también como *lentes negativas*. Los puntos focales de una lente negativa están invertidos en relación con los de una lente positiva. El segundo punto focal, F_2, de una lente negativa es el punto a partir del cual los rayos que originalmente son paralelos al eje *parecen divergir* después de refractarse, como en la figura 34.31a. Los rayos incidentes que convergen hacia el primer punto focal F_1, como en la figura 34.31b, emergen de la lente paralelos a su eje. Compare esto con la sección 34.2 y podrá usted ver que una lente divergente tiene la misma relación con una lente convergente, que la que un espejo convexo tiene con un espejo cóncavo.

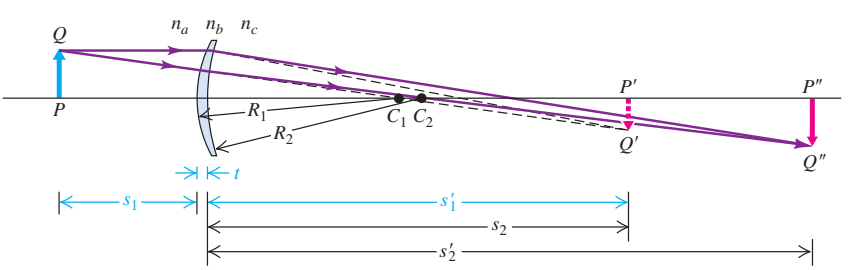
Las ecuaciones (34.16) y (34.17) son aplicables a lentes *tanto* positivas *como* negativas. En la figura 34.32 se muestran los diversos tipos de lentes, tanto convergentes como divergentes. Veamos una observación importante: *toda lente que sea más gruesa en su centro que en sus bordes es una lente convergente con f positiva, y toda lente que sea más gruesa en sus bordes que en su centro es una lente divergente con f negativa* (siempre y cuando la lente tenga un índice de refracción mayor que el material circundante). Podemos probar esto mediante la *ecuación del fabricante de lentes*, cuya deducción constituye nuestra siguiente tarea.

Ecuación del fabricante de lentes

Ahora deduciremos la ecuación (34.16) con más detenimiento y, al mismo tiempo, deduciremos la *ecuación del fabricante de lentes,* que es la relación entre la distancia focal f, el índice de refracción n de la lente y los radios de curvatura R_1 y R_2 de las superficies de la lente. Aplicaremos el principio según el cual una imagen formada por una superficie reflectante o refractiva puede servir como el objeto de una segunda superficie reflectante o refractiva.

Comenzaremos con el problema de carácter algo más general de dos interfaces esféricas que separan tres materiales con índices de refracción n_a, n_b y n_c, como se muestra en la figura 34.33. Las distancias de objeto y de imagen correspondientes a la primera superficie son s_1 y s_1', y las que corresponden a la segunda superficie son s_2 y s_2'. Supondremos que la lente es delgada, de modo que la distancia t entre las dos su-

34.33 La imagen formada por la primera superficie de una lente sirve como el objeto de la segunda superficie. Las distancias s_1' y s_2 se toman como iguales; ésta es una buena aproximación si el espesor t de la lente es pequeño.



perficies es pequeña en comparación con las distancias de objeto y de imagen y, por lo tanto, se pueden despreciar. Éste es normalmente el caso de las lentes de anteojos (figura 34.34). En estas condiciones s_2 y s_1' tienen la misma magnitud pero signo opuesto. Por ejemplo, si la primera imagen está del lado saliente de la primera superficie, s_1' es positiva. Pero cuando la vemos como un objeto de la segunda superficie, la primera imagen *no* está del lado entrante de esa superficie. Por lo tanto, podemos afirmar que $s_2 = -s_1'$.

Necesitamos aplicar la ecuación de una sola superficie [ecuación (34.11)] dos veces: una por cada superficie. Las ecuaciones resultantes son

$$\frac{n_a}{s_1} + \frac{n_b}{s_1'} = \frac{n_b - n_a}{R_1}$$
$$\frac{n_b}{s_2} + \frac{n_c}{s_2'} = \frac{n_c - n_b}{R_2}$$

Ordinariamente, los materiales primero y tercero son aire o vacío, así que fijamos $n_a = n_c = 1$. El segundo índice n_b es el de la lente, al cual llamaremos simplemente n. Sustituyendo estos valores y la relación $s_2 = -s_1'$, obtenemos:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n - 1}{R_1}$$
$$-\frac{n}{s_1'} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1 - n}{R_2}$$

Para obtener una relación entre la posición inicial del objeto s_1 y la posición final de la imagen s_2', sumamos estas dos ecuaciones. Con ello se elimina el término n/s_1', y se obtiene

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Por último, considerando la lente como una sola unidad, llamamos a la distancia de objeto simplemente s en vez de s_1, y llamamos a la distancia final de imagen s' en vez de s_2'. Luego de efectuar estas sustituciones, tenemos que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (34.18)$$

Ahora comparamos esto con la otra ecuación de lentes delgadas [ecuación (34.16)]. Vemos que las distancias de objeto y de imagen s y s' aparecen exactamente en los mismos lugares en ambas ecuaciones y que la distancia focal f viene dada por

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{(ecuación del fabricante de lentes para una lente delgada)} \qquad (34.19)$$

Ésta es la **ecuación del fabricante de lentes**. Al deducir de nuevo la relación entre distancia de objeto, distancia de imagen y distancia focal para una lente delgada, al mismo tiempo hemos deducido también una expresión de la distancia focal f de una lente en términos de su índice de refracción n, y de los radios de curvatura R_1 y R_2 de sus superficies. Con esto se puede demostrar que todas las lentes de la figura 34.32a son lentes convergentes con distancias focales positivas, y que todas las lentes de la figura 34.32b son lentes divergentes con distancias focales negativas (véase el ejercicio 34.30).

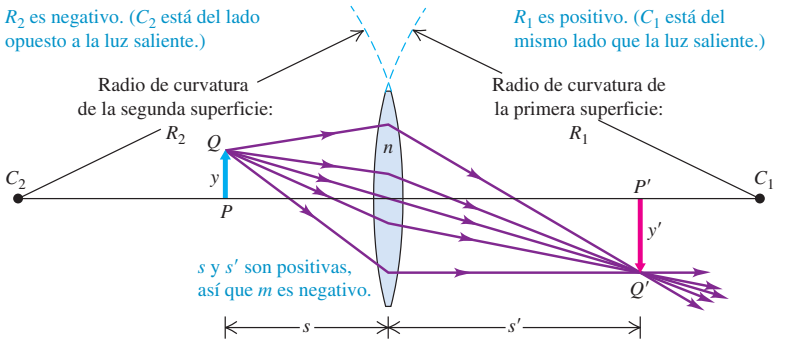
Se aplican todas las reglas de signos de la sección 34.1 a las ecuaciones (34.18) y (34.19). Por ejemplo, en la figura 34.35, s, s' y R_1 son positivos, pero R_2 es negativo.

No es difícil generalizar la ecuación (34.19) a la situación donde la lente está inmersa en un material con un índice de refracción mayor que la unidad. Lo invitamos a obtener la ecuación del fabricante de lentes para esta situación más general.

¡Hacemos hincapié en que la aproximación paraxial es en efecto una aproximación! Los rayos que forman ángulos suficientemente grandes con el eje óptico de una lente esférica no se enfocan en el mismo lugar que los rayos paraxiales; este problema

34.34 Estos lentes de anteojos satisfacen la aproximación de la lente delgada; su espesor es pequeño en comparación con las distancias de objeto y de imagen.

34.35 Una lente delgada convergente con una distancia focal positiva *f*.



es el mismo de aberración esférica que asedia a los *espejos* esféricos (sección 34.2). Para evitar ésta y otras limitaciones de las lentes esféricas delgadas, en los instrumentos ópticos de precisión se utilizan lentes de forma más complicada.

Ejemplo 34.8 Obtener la distancia focal de una lente

a) Suponga que el valor absoluto de los radios de curvatura de las superficies de lente de la figura 34.35 es igual en ambos casos a 10.0 cm y que el índice de refracción es $n = 1.52$. ¿Cuál es la distancia focal f de la lente? *b*) Suponga que la lente de la figura 34.31 también tiene $n = 1.52$ y que los valores absolutos de los radios de curvatura de sus superficies de lente también son iguales a 10 cm. ¿Cuál es la distancia focal de esta lente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos pide calcular la distancia focal de *a*) una lente que es convexa por ambos lados (figura 34.35) y de *b*) una lente que es cóncava por ambas caras (figura 34.31).

PLANTEAR: Se aplica la ecuación del fabricante de lentes [ecuación (34.19)] para determinar la distancia focal en ambas situaciones. Tenemos en cuenta si las superficies son cóncavas o convexas, poniendo una atención minuciosa a los signos de los radios de curvatura R_1 y R_2.

EJECUTAR: *a*) La figura 34.35 muestra que el centro de curvatura de la primera superficie (C_1) está del lado saliente de la lente; en tanto que el centro de curvatura de la segunda superficie (C_2) está del lado *entrante*. Por consiguiente, R_1 es positivo pero R_2 es negativo: $R_1 = +10$ cm, $R_2 = -10$ cm. De acuerdo con la ecuación (34.19),

$$\frac{1}{f} = (1.52 - 1)\left(\frac{1}{+10\text{ cm}} - \frac{1}{-10\text{ cm}}\right)$$
$$f = 9.6\text{ cm}$$

b) En el caso de una lente bicóncava el centro de curvatura de la primera superficie está del lado *entrante*, en tanto que el centro de curvatura de la segunda superficie está del lado saliente. Por lo tanto, R_1 es negativo y R_2 es positivo: $R_1 = -10$ cm, $R_2 = +10$ cm. De nuevo, con base en la ecuación (34.19),

$$\frac{1}{f} = (1.52 - 1)\left(\frac{1}{-10\text{ cm}} - \frac{1}{+10\text{ cm}}\right)$$
$$f = -9.6\text{ cm}$$

EVALUAR: En el inciso *a*) la distancia focal es positiva, así que se trata de una lente convergente; esto es razonable, pues la lente es más gruesa en el centro que en los bordes. En el inciso *b*) la distancia focal es *negativa*, de modo que se trata de una lente *divergente*; esto también es razonable, pues la lente es más gruesa en los bordes que en el centro.

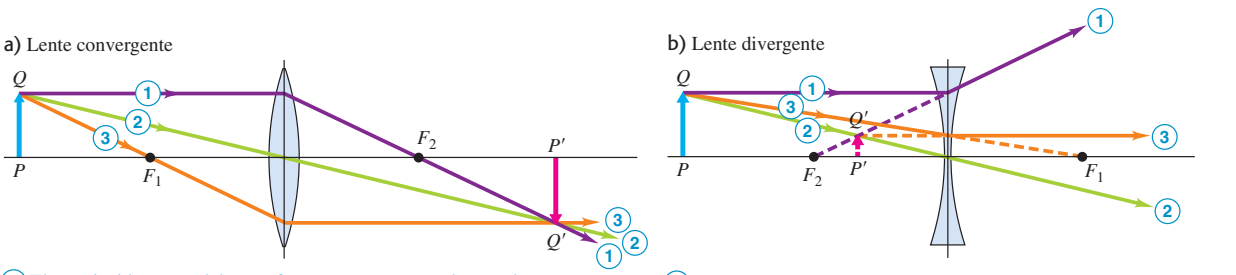
Métodos gráficos para lentes

Se pueden hallar la posición y el tamaño de una imagen formada por una lente delgada usando un método gráfico muy parecido al que se aplicó en la sección 34.2 a los espejos esféricos. También en este caso se dibujan unos pocos rayos especiales, llamados *rayos principales*, que divergen a partir de un punto del objeto que *no* está sobre el eje óptico. La intersección de estos rayos, después que han atravesado la lente, determina la posición y el tamaño de la imagen. Al utilizar este método gráfico, consideraremos que la desviación de cada rayo ocurre en su totalidad en el plano medio de la lente, como se muestra en la figura 34.36. Esto concuerda con la suposición de que la distancia entre las superficies de la lente es insignificante.

Los tres rayos principales cuyo trayecto es normalmente fácil de trazar en el caso de las lentes se muestran en la figura 34.36:

1. *Un rayo paralelo al eje* emerge de la lente en una dirección que pasa por el segundo punto focal F_2 de una lente convergente, o que parece provenir del segundo punto focal de una lente divergente.
2. *Un rayo que pasa por el centro de la lente* no se desvía en grado apreciable; en el centro de la lente las dos superficies son paralelas; por lo tanto, este rayo emerge prácticamente con el mismo ángulo que tenía al entrar y a lo largo de la misma recta.

34.36 Método gráfico para localizar una imagen formada por una lente delgada. Los colores de los rayos sirven sólo como identificación; no se refieren a colores específicos de la luz. (Compárelo con la figura 34.19 para espejos esféricos.)



a) Lente convergente

1. El rayo incidente paralelo se refracta para pasar por el segundo punto focal F_2.
2. El rayo que pasa por el centro de la lente no se desvía considerablemente.
3. El rayo que pasa por el primer punto focal F_1 emerge paralelo al eje.

b) Lente divergente

1. Después de refractarse parece que el rayo incidente paralelo proviene del segundo punto focal F_2.
2. El rayo que pasa por el centro de la lente no se desvía considerablemente.
3. El rayo que pasa por el primer punto focal F_1 emerge paralelo al eje.

3. *Un rayo que pasa por el primer punto focal F_1 (o avanza hacia éste)* emerge paralelo al eje.

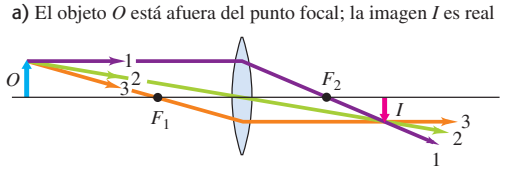
Cuando la imagen es real, la posición del punto de imagen está determinada por la intersección de dos cualesquiera de los rayos 1, 2 y 3 (figura 34.36a). Cuando la imagen es virtual, se prolongan hacia atrás los rayos salientes divergentes, hasta su punto de intersección para hallar el punto de imagen (figura 34.36b).

CUIDADO **Los rayos principales no son los únicos rayos** Tenga en mente que *cualquier* rayo proveniente del objeto que incida en la lente pasará por el punto de imagen (si la imagen es real) o parecerá que nace en el punto de imagen (si la imagen es virtual). (Hicimos un comentario análogo acerca de la formación de imágenes por espejos en la sección 34.2.) Hemos destacado los rayos principales porque son los únicos que necesitamos dibujar para localizar la imagen.

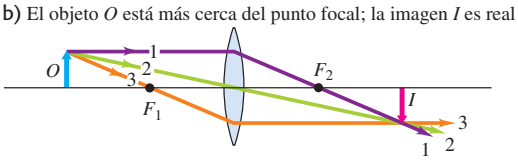
La figura 34.37 muestra diagramas de rayos principales correspondientes a una lente convergente con diversas distancias de objeto. Le sugerimos estudiar cada uno de estos diagramas con mucho detenimiento, comparando cada rayo numerado con la descripción precedente.

34.37 Formación de imágenes por una lente delgada convergente a diversas distancias de objeto. Se numeraron los rayos principales. (Compárela con la figura 34.20 para un espejo esférico cóncavo.)

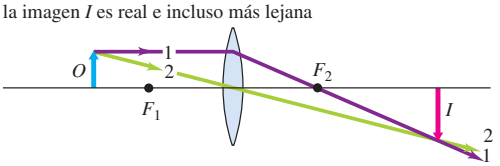
a) El objeto O está afuera del punto focal; la imagen I es real



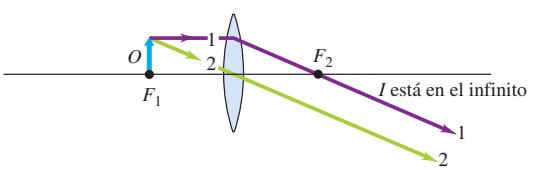
b) El objeto O está más cerca del punto focal; la imagen I es real y más lejana



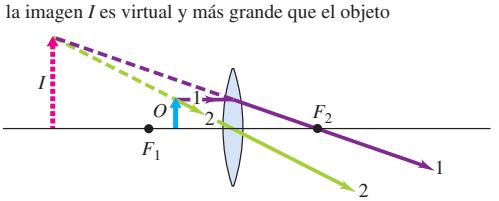
c) El objeto O está aun más cerca del punto focal; la imagen I es real e incluso más lejana



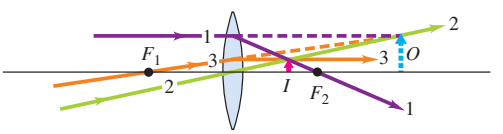
d) El objeto O está en el punto focal; la imagen I está en el infinito



e) El objeto O está adentro del punto focal; la imagen I es virtual y más grande que el objeto



f) Un objeto virtual O (los rayos luminosos *convergen* en la lente)



Los incisos *a*), *b*) y *c*) de la figura 34.37 ayudan a explicar lo que ocurre al enfocar una cámara fotográfica. Para que una fotografía esté bien enfocada, la película debe estar en la posición de la imagen real que forma la lente de la cámara. La distancia de imagen aumenta conforme el objeto se aproxima, por lo que se retira más la película detrás de la lente (es decir, se aleja la lente frente a la película). En la figura 34.37d el objeto está en el punto focal; no se puede dibujar el rayo 3 porque no atraviesa la lente. En la figura 34.37e la distancia de objeto es menor que la distancia focal. Los rayos salientes son divergentes y la imagen es *virtual*; se localiza su posición prolongando los rayos salientes hacia atrás, así que la distancia de imagen s' es negativa. Advierta asimismo que la imagen es derecha y más grande que el objeto. (Veremos la utilidad de esto en la sección 34.6.) La figura 34.37*f* corresponde a un *objeto virtual*. Los rayos entrantes no divergen a partir de un objeto real, sino que *convergen* como si fueran a encontrarse en la punta del objeto virtual *O* del lado derecho; en este caso, la distancia de objeto s es negativa. La imagen es real y se halla entre la lente y el segundo punto local. Se presenta esta situación si los rayos que inciden en la lente de la figura 34.37*f* emergen de otra lente convergente situada a la izquierda de la figura (no se muestra).

Estrategia para resolver problemas 34.2 Formación de imágenes por lentes delgadas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La Estrategia para resolver problemas 34.1 (sección 34.2) delineada con respecto a espejos es igualmente aplicable a las lentes delgadas, y conviene repasarla ahora. Como en el caso de los espejos, los problemas de formación de imágenes por lentes se deben resolver por medio de ecuaciones y *también* de un diagrama de rayos principales.

PLANTEAR *el problema:* Como siempre, establezca las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Siempre parta de un diagrama de rayos principales si cuenta con información suficiente. Oriente sus diagramas siempre de igual forma, de modo que la luz se propague de izquierda a derecha. No bosqueje simplemente estos diagramas; trace los rayos con una regla y mida las distancias minuciosamente.
2. Dibuje los rayos principales de modo que se doblen en el plano medio de la lente, como se muestra en la figura 34.36. En el caso de una lente hay sólo tres rayos principales, comparados con los cuatro que corresponden a un espejo. Cerciórese de dibujar *los tres* siempre que sea posible. La intersección de dos cualesquiera de ellos determina la imagen, pero si el tercero no pasa por el mismo punto de intersección, ello significa que se ha cometido un error. La superfluidad puede ser útil para identificar errores.
3. Si los rayos principales salientes no convergen en un punto de imagen real, la imagen es virtual. En tales casos, es necesario prolongar hacia atrás los rayos salientes para hallar el punto de imagen virtual, el cual se encuentra del lado *entrante* de la lente.
4. Las reglas de signos que utilizamos al tratar con espejos y superficies refractivas únicas (véase la sección 34.1) también son aplicables a las lentes delgadas. Ponga muchísimo cuidado en establecer los signos de forma adecuada y en interpretar los signos de los resultados correctamente.
5. Utilice las ecuaciones (34.16) y (34.17) para confirmar por medio de cálculos sus resultados gráficos de posición y tamaño de las imágenes. Esto ofrece una comprobación de congruencia extremadamente útil.
6. La *imagen* formada por una lente o un espejo puede servir como el *objeto* de otra. En tales casos, tenga cuidado al hallar las *distancias* de objeto y de imagen correspondientes a esta imagen intermedia; no olvide incluir correctamente la distancia entre los dos elementos (lentes o espejos).

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus diagramas y cálculos con ojo crítico para asegurar la congruencia de sus resultados.

Ejemplo 34.9 Ubicación de la imagen y aumento con una lente convergente

Cierta lente convergente tiene una distancia focal de 20 cm. Determine gráficamente la ubicación de la imagen de un objeto situado a cada una de las siguientes distancias de la lente: *a*) 50 cm; *b*) 20 cm; *c*) 15 cm; *d*) −40 cm. Obtenga el aumento en cada caso. Compruebe sus resultados calculando la posición y el aumento lateral de la imagen usando las ecuaciones (34.16) y (34.17).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema ilustra la utilidad de los métodos tanto gráficos como computacionales para problemas con lentes, así como para problemas con espejos curvos.

PLANTEAR: En cada caso, se tiene la distancia focal $f = 20$ cm y el valor de la distancia de objeto s. Las incógnitas son la distancia de imagen s' y el aumento lateral $m = -s'/s$.

EJECUTAR: Los diagramas de rayos principales adecuados se muestran en *a*) figura 34.37a, *b*) figura 34.37d, *c*) figura 34.37e y *d*) figura 34.37f. Las distancias de imagen aproximadas, obtenidas por medición de estos diagramas, son 35 cm, $-\infty$, −40 cm y 15 cm, y los aumentos aproximados son $-\frac{2}{3}$, $+\infty$, +3 y $+\frac{1}{3}$, respectivamente.

Calculando las posiciones de imagen a partir de la ecuación (34.16):

$$a)\ \frac{1}{50\text{ cm}}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = 33.3\text{ cm}$$

$$b)\ \frac{1}{20\text{ cm}}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = \pm\infty$$

$$c)\ \frac{1}{15\text{ cm}}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = -60\text{ cm}$$

$$d)\ \frac{1}{-40\text{ cm}}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = 13.3\text{ cm}$$

Los resultados gráficos son razonablemente cercanos a éstos, excepto en el inciso *c*); la exactitud del diagrama de la figura 34.37e es limitada porque los rayos prolongados hacia atrás tienen casi la misma dirección.

De acuerdo con la ecuación (34.17), los aumentos laterales son

$$a)\ m = -\frac{33.3\text{ cm}}{50\text{ cm}} = -\frac{2}{3}$$

$$b)\ m = -\frac{\pm\infty\text{ cm}}{20\text{ cm}} = \pm\infty$$

$$c)\ m = -\frac{-60\text{ cm}}{15\text{ cm}} = +4$$

$$d)\ m = -\frac{13.3\text{ cm}}{-40\text{ cm}} = +\frac{1}{3}$$

EVALUAR: Advierta que s' es positiva en los incisos *a*) y *d*) pero negativa en *c*). Esto tiene sentido: la imagen es real en los incisos *a*) y *d*), pero es virtual en *c*). Los rayos luminosos que emergen de la lente en el inciso *b*) son paralelos y nunca convergen; por lo tanto, se puede considerar que la imagen está en $+\infty$ o en $-\infty$.

Los valores de aumento nos indican que la imagen es invertida en el inciso *a*) y derecha en los incisos *c*) y *d*), de acuerdo con los diagramas de rayos principales. El valor infinito del aumento en el inciso *b*) es otra forma de decir que la imagen se forma a una distancia infinita.

Ejemplo 34.10 Formación de imágenes por una lente divergente

Se le entrega a usted una lente divergente delgada. Usted encuentra que un haz de rayos paralelos se ensancha después de pasar a través de la lente, como si todos los rayos provinieran de un punto situado a 20.0 cm del centro de la lente. Usted se propone utilizar esta lente para formar una imagen virtual derecha que tenga $\frac{1}{3}$ de la altura del objeto. *a*) ¿Dónde se debería colocar el objeto? *b*) Dibuje un diagrama de rayos principales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La observación con rayos paralelos muestra que la distancia focal es $f = -20$ cm. Se busca un aumento lateral $m = +\frac{1}{3}$ (positivo porque la imagen debe ser derecha).

PLANTEAR: Con base en esto se determina la razón s'/s a partir de la ecuación (34.17), y luego se obtiene la distancia de objeto s mediante la ecuación (34.16).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (34.17), $m = +\frac{1}{3} = -s'/s$, por lo tanto, $s' = -s/3$. Si se inserta este resultado en la ecuación (34.16), se halla lo siguiente:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{-s/3} = \frac{1}{-20.0\text{ cm}}$$

$$s = 40.0\text{ cm}$$

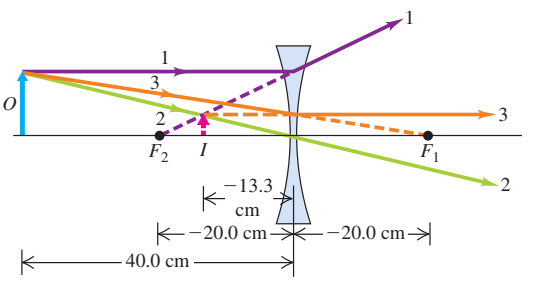
$$s' = -\frac{s}{3} = -\frac{40.0\text{ cm}}{3} = -13.3\text{ cm}$$

La distancia de imagen es negativa; por lo tanto, el objeto y la imagen están del mismo lado de la lente.

b) La figura 34.38 es el diagrama de rayos principales correspondiente a este problema, con los rayos numerados del mismo modo que en la figura 34.36b.

EVALUAR: Se suele montar una lente divergente en la puerta principal de los hogares. La lente proporciona al ocupante de la vivienda una imagen derecha y reducida de cualquier persona que se encuentre afuera de la puerta. El ocupante puede ver a la persona completa y decidir si le permite entrar o no.

34.38 Diagrama de rayos principales de una imagen formada por una lente delgada divergente.



Ejemplo 34.11 Imagen de una imagen

Un objeto de 8.0 cm de alto está 12.0 cm a la izquierda de una lente convergente, cuya distancia focal es de 8.0 cm. Una segunda lente convergente con una distancia focal de 6.0 cm se coloca 36.0 cm a la derecha de la primera lente. Ambas lentes tienen el mismo eje óptico. Determine la posición, el tamaño y la orientación de la imagen creada por las dos lentes combinadas. (Se utilizan combinaciones de lentes convergentes en los telescopios y microscopios, los cuales se estudiarán en la sección 34.7.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La situación se muestra en la figura 34.39. El objeto O se encuentra por fuera del primer punto focal F_1 de la primera lente; por lo tanto, esta lente produce una imagen real I. Los rayos luminosos que inciden en la segunda lente divergen a partir de esta imagen real, como si I fuera un objeto material. De este modo, la *imagen* formada por la *primera* lente actúa como *objeto* de la *segunda* lente. Nuestro objetivo es establecer las propiedades de la imagen final formada por la segunda lente.

PLANTEAR: Utilizaremos métodos tanto gráficos como computacionales para determinar las propiedades de la imagen final.

EJECUTAR: En la figura 34.39 hemos trazado los rayos principales 1, 2 y 3 a partir de la cabeza de la flecha objeto O para hallar la posición de la primera imagen I, y los rayos principales 1′, 2′ y 3′ a partir de la cabeza de la primera imagen, con la finalidad de calcular la posición de la segunda imagen I' formada por la segunda lente (no obstante que los rayos 2′ y 3′ no existen realmente en este caso). Advierta que la imagen se invierte *dos veces*, una por cada lente, de modo que la segunda imagen I' tiene la misma orientación que el objeto original.

continúa

Para *calcular* la posición y el tamaño de la segunda imagen I', primero es necesario hallar la posición y tamaño de la primera imagen I. Aplicando la ecuación (34.16), $1/s + 1/s' = 1/f$, a la primera lente:

$$\frac{1}{12.0\text{ cm}} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{8.0\text{ cm}} \qquad s_1' = +24.0\text{ cm}$$

La primera imagen I está 24.0 cm a la derecha de la primera lente. El aumento lateral es $m_1 = -(24.0\text{ cm})/(12.0\text{ cm}) = -2.00$; por lo tanto, la altura de la primera imagen es $(-2.0)\,(8.0\text{ cm}) -16.0$ cm.

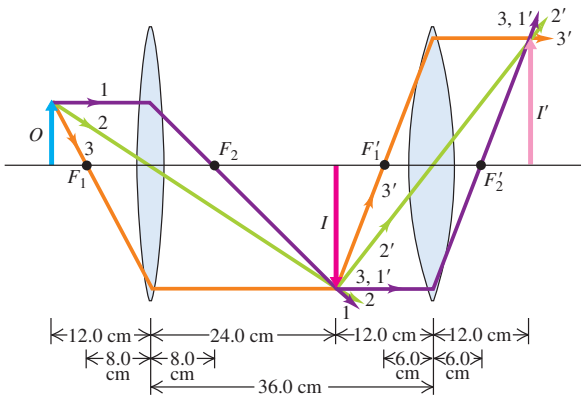
La primera imagen está 36.0 cm − 24.0 cm = 12.0 cm a la izquierda de la segunda lente; así que la distancia del objeto correspondiente a la segunda lente es de +12.0 cm. Utilizar la ecuación (34.16) con la segunda lente da la posición de la segunda imagen, que es la final:

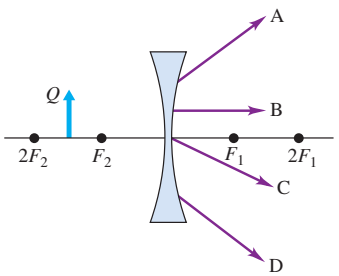
$$\frac{1}{12.0\text{ cm}} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{6.0\text{ cm}} \qquad s_2' = +12.0\text{ cm}$$

La imagen final está 12.0 cm a la derecha de la segunda lente y 48.0 cm a la derecha de la primera. El aumento que produce la segunda lente convergente es $m_2 = -(12.0\text{ cm})/(12.0\text{ cm}) = -1.0$.

EVALUAR: El valor de m_2 significa que la imagen final es del mismo tamaño que la primera, pero su orientación es opuesta. El diagrama de rayos principales también muestra esto mismo.

34.39 Diagrama de rayos principales correspondiente a una combinación de dos lentes convergentes. La primera lente forma una imagen real del objeto. Esta imagen real actúa como objeto de la segunda lente.





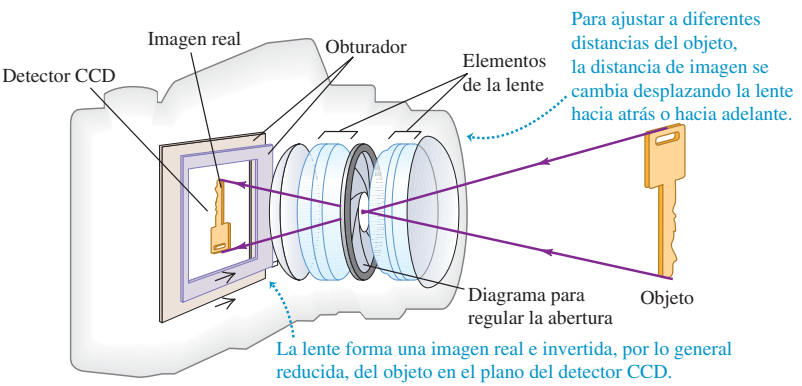
Evalúe su comprensión de la sección 34.4 Una lente divergente y un objeto están posicionados como se indica en la figura de la izquierda. ¿Cuál de los rayos *A*, *B*, *C* y *D* podría salir del punto *Q* en la parte superior del objeto?

34.5 Cámaras fotográficas

El concepto de *imagen*, que es tan fundamental para comprender los sistemas simples de espejos y lentes, desempeña un papel igualmente importante en el análisis de los instrumentos ópticos (también conocidos como *dispositivos ópticos*). Entre los dispositivos ópticos más comunes se cuentan las cámaras fotográficas, las cuales forman una imagen de un objeto y lo registran ya sea por medios electrónicos o sobre una película.

Los elementos básicos de una **cámara fotográfica** son una caja hermética a la luz (*cámara* significa habitación o recinto), una lente convergente, un obturador para abrir la lente durante un intervalo de tiempo definido y un medio de registro sensible a la luz (figura 34.40). En una cámara digital, se usa un detector electrónico llamado dispositivo de carga acoplado CCD (por las siglas de *charge coupled device*); en una cámara más antigua se utiliza película fotográfica. La lente forma una imagen real invertida del objeto que se fotografía sobre el medio de registro. Las lentes de cámara fotográfica de alta calidad tienen varios elementos, lo cual permite corregir parcialmente diver-

34.40 Elementos fundamentales de una cámara digital.



34.41 a), b), c) Tres fotografías tomadas con la misma cámara y desde el mismo punto de un jardín público de Boston utilizando lentes con distancias focales $f = 28$ mm, 105 mm y 300 mm. Al aumentar la distancia focal, se incrementa de forma proporcional el tamaño de imagen. d) Cuanto más grande sea el valor de f, menor será el ángulo de visión. Los ángulos que aquí se muestran corresponden a una cámara con área de imagen de 24 mm × 36 mm (correspondiente a una película de 35 mm) y se refieren al ángulo de visión a lo largo de la dimensión diagonal de la película.

a) $f = 28$ mm

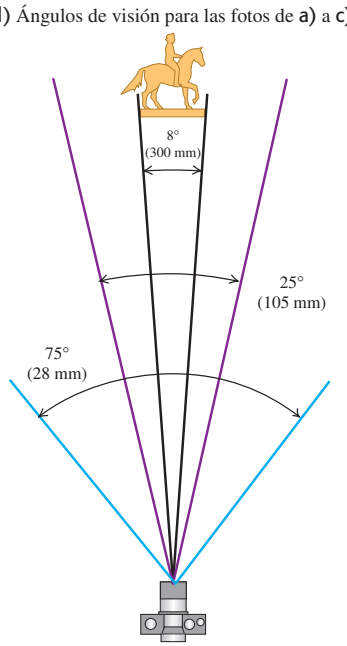
b) $f = 105$ mm

c) $f = 300$ mm

sas *aberraciones*, entre ellas la dependencia del índice de refracción con respecto a la longitud de onda y las limitaciones que impone la aproximación paraxial.

Cuando la cámara está *enfocada* correctamente, la posición del medio de registro coincide con la posición de la imagen real formada por la lente. La fotografía resultante será entonces lo más nítida posible. Con una lente convergente, la distancia de imagen aumenta conforme disminuye la distancia de objeto (véanse las figuras 34.41a, 34.41b y 34.41c y el análisis de la sección 34.4). Por consiguiente, cuando la cámara "enfoca", la lente se acerca a la película en el caso de un objeto distante, y se aleja de ella si el objeto está cerca.

d) Ángulos de visión para las fotos de a) a c)



Lentes de cámara: Distancia focal

La elección de la distancia focal f de una lente de cámara depende del tamaño de la película y del ángulo de visión deseado. La figura 34.41 muestra tres fotografías tomadas en película de 35 mm con la misma cámara y en la misma posición, aunque con lentes de distancia focal distinta. Una lente de distancia focal larga, llamada lente *telefoto*, ofrece un ángulo de visión pequeño y una imagen grande de un objeto distante (como la estatua de la figura 34.41c); una lente de distancia focal corta brinda una imagen pequeña y un ángulo de visión amplio (como en la figura 34.41a), y recibe el nombre de lente *gran angular.* Para entender este comportamiento, recuerde que la distancia focal es la distancia de la lente a la imagen cuando el objeto está infinitamente lejos. En general, con *cualquier* distancia de objeto, una lente de distancia focal más larga proporciona una mayor distancia de imagen. Esto también aumenta la altura de la imagen; como se comentó en la sección 34.4, el valor absoluto de la razón de la altura de la imagen y' con respecto a la altura del objeto y (*el aumento lateral*) es igual a la razón de la distancia de imagen s' con respecto a la distancia de objeto s [ecuación 34.17)]:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Con una lente de distancia focal corta, la razón s'/s es pequeña, y un objeto distante forma sólo una imagen pequeña. Cuando se utiliza una lente de distancia focal larga, la imagen de este mismo objeto puede cubrir en su totalidad el área de la película. Así pues, cuanto mayor sea la distancia focal, más estrecho será el ángulo de visión (figura 34.41d).

Lentes de cámara: Número f

Para que la película registre la imagen de manera adecuada, la energía luminosa total por unidad de área que llega a la película (la "exposición") debe estar dentro de ciertos límites. Esto se regula mediante el *obturador* y la *abertura de la lente*. El obturador regula el intervalo de tiempo durante el cual entra luz a través de la lente. Por lo regular, esto se puede ajustar por etapas que corresponden a factores de aproximadamente 2, en muchos casos desde 1 s hasta $\frac{1}{1000}$ s.

La intensidad de la luz que alcanza la película es proporcional al área vista por la lente de la cámara y al área efectiva de la lente. El tamaño del área que la lente "observa" es proporcional al cuadrado del ángulo de visión de la lente y, por lo tanto, es aproximadamente proporcional a $1/f^2$. El área efectiva de la lente se regula mediante una abertura de lente ajustable, *o diafragma*, que es un orificio casi circular de diámetro variable D; por ello, el área efectiva es proporcional a D^2. Combinando estos factores, vemos que la intensidad de luz que la película recibe con una lente en particular es proporcional a D^2/f^2. Por lo común, los fotógrafos expresan la capacidad colectora de luz de una lente en términos de la razón f/D, conocida como el **número *f*** de la lente:

$$\text{Número } f = \frac{\text{Distancia del focal}}{\text{Diámetro de abertura}} = \frac{f}{D} \tag{34.20}$$

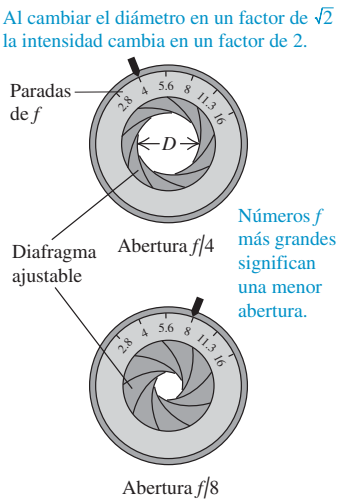
Por ejemplo, de una lente con una distancia focal $f = 50$ mm y un diámetro de abertura $D = 25$ mm se dice que tiene un número f de 2, o "una abertura de $f/2$". La intensidad de luz que llega a la película es *inversamente* proporcional al cuadrado del número f.

En el caso de una lente con abertura de diámetro variable, si se incrementa el diámetro por un factor de $\sqrt{2}$, el número f cambia por un factor de $1/\sqrt{2}$ y se duplica la intensidad en la película. Por lo general, las aberturas ajustables tienen escalas marcadas con números sucesivos (también llamados *paradas de f*) relacionados por factores de $\sqrt{2}$, como

$$f/2 \quad f/2.8 \quad f/4 \quad f/5.6 \quad f/8 \quad f/11 \quad f/16$$

y así sucesivamente. Los números más grandes representan aberturas y exposiciones más pequeñas, y cada etapa corresponde a un factor de 2 en términos de intensidad (figura 34.42). La *exposición* real (la cantidad total de luz que llega a la película) es proporcional tanto al área de la abertura como al tiempo de exposición. Por ejemplo, las combinaciones $f/4$ y $\frac{1}{500}$ s, $f/5.6$ y $\frac{1}{250}$ s, y $f/8$ y $\frac{1}{125}$ s corresponden todas a una misma exposición.

34.42 Lente de cámara con diafragma ajustable.



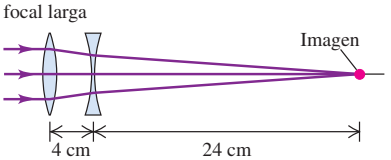
Lentes zoom y proyectores

A menudo muchos fotógrafos utilizan una *lente zoom*, que no es una sola lente sino un conjunto complejo de varios elementos de lente que proporcionan una distancia focal continuamente variable, a lo largo de un intervalo de hasta 10 a 1. Las figuras 34.43a y 34.43b muestra un sistema simple con distancia focal variable, y la figura 34.43c ilustra una lente zoom típica para cámara réflex de objetivo único (lente simple). Las lentes *zoom* ofrecen una variedad de tamaños de imagen de un objeto en particular. Mientras la distancia focal cambia, mantener la imagen enfocada y un número f constante es un problema demasiado complejo de diseño óptico. Cuando se modifica la distancia focal de una lente zoom típica, dentro de la lente se mueven dos grupos de elementos, y se abre y cierra un diafragma.

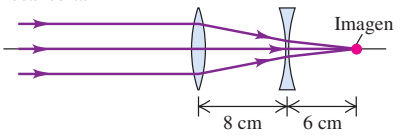
Un *proyector* para mirar diapositivas, imágenes digitales o películas cinematográficas funciona en gran medida como una cámara fotográfica a la inversa. En un pro-

34.43 Una lente zoom simple emplea una lente convergente y una lente divergente en sucesión. a) Cuando las dos lentes están cerca entre sí, la combinación se comporta como una sola lente con distancia focal larga. b) Si se desplazan las dos lentes separándose, la combinación se comporta como una lente con distancia focal corta. c) Lente zoom representativa para cámara réflex de objetivo único (lente simple); contiene doce elementos dispuestos en cuatro grupos.

a) Disposición de lente zoom para una distancia focal larga



b) Disposición de lente zoom para una distancia focal corta



c) Una lente zoom práctica

yector de cine, una lámpara ilumina la película, la cual actúa como objeto de la lente de proyección. La lente forma una imagen real, ampliada e invertida de la película sobre la pantalla de proyección. Debido a que la imagen es invertida, la película pasa por el proyector de cabeza para que la imagen aparezca en la pantalla derecha.

Ejemplo 34.12 Exposiciones fotográficas

Una lente telefoto común para cámara de 35 mm tiene una distancia focal de 200 mm y una escala de paradas f de $f/5.6$ a $f/45$. *a*) ¿Cuál es la escala correspondiente de diámetros de abertura? *b*) ¿Cuál es la escala correspondiente de intensidad de imagen en la película?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El inciso *a*) de este problema utiliza la relación entre distancia focal, diámetro de abertura y número f para una lente. El inciso *b*) usa la relación entre intensidad y diámetro de abertura.

PLANTEAR: Se aplica la ecuación (34.20) para relacionar el diámetro D (la incógnita) con el número f y la distancia focal $f = 200$ mm. La intensidad de la luz que llega a la película es proporcional a D^2/f^2; como f es la misma en todos los casos, se concluye que en este caso la intensidad es proporcional a D^2, el cuadrado del diámetro de abertura.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (34.20), la escala de diámetros abarca de

$$D = \frac{f}{\text{Número } f} = \frac{200\text{ mm}}{5.6} = 36\text{ mm}$$

a

$$D = \frac{200\text{ mm}}{45} = 4.4\text{ mm}$$

b) Dado que la intensidad es proporcional al cuadrado del diámetro, la razón de la intensidad en $f/5.6$ con respecto a la intensidad en $f/45$ es

$$\left(\frac{36\text{ mm}}{4.4\text{ mm}}\right)^2 = \left(\frac{45}{5.6}\right)^2 = 65 \qquad (\text{aproximadamente } 2^6)$$

EVALUAR: Si el tiempo de exposición correcto en $f/5.6$ es de $\frac{1}{1000}$ s, entonces en $f/45$ es de $(65)(\frac{1}{1000}\text{ s}) = \frac{1}{15}$ s para compensar la menor intensidad. Esto ilustra una regla general: cuanto más pequeña sea la abertura y más grande sea el número f, más largo será el tiempo de exposición necesario. No obstante, muchos fotógrafos prefieren utilizar aberturas pequeñas, con la finalidad de que sólo se utilice la parte central de la lente para formar la imagen. Esto reduce al máximo las aberraciones que se producen cerca de los bordes de la lente y permite obtener las imágenes más nítidas posibles.

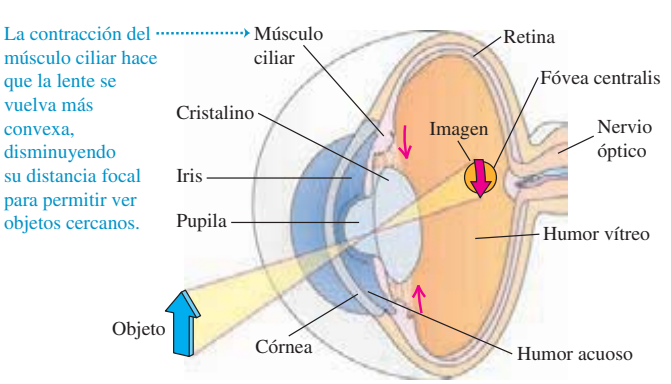
Evalúe su comprensión de la sección 34.5 Cuando se utiliza con película de 35 mm (área de imagen: 24 mm × 36 mm), una lente con $f = 50$ mm proporciona un ángulo de visión de 45° y se describe como una "lente normal". En cambio, cuando se emplea con un detector CCD que mide 5 mm × 5 mm, esta misma lente es i) una lente de ángulo ancho; ii) una lente normal; iii) una lente telefoto.

34.6 El ojo

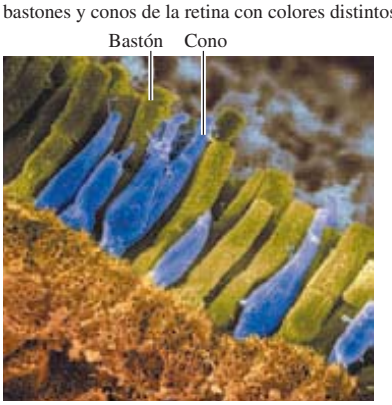
El comportamiento óptico del ojo es similar al de una cámara. En la figura 34.44a se muestran las partes fundamentales del ojo humano considerado como sistema óptico. El ojo es de forma casi esférica y tiene aproximadamente 2.5 cm de diámetro. La parte frontal tiene una curvatura un poco más marcada y está cubierta por una membrana

34.44 a) El ojo. b) En la retina hay dos tipos de celdas sensibles a la luz. Los bastones son más sensibles a la luz que los conos, pero sólo los conos son sensibles a diferencias de color. Un ojo humano típico contiene alrededor de 1.3×10^8 bastones y aproximadamente 7×10^6 conos.

a) Diagrama del ojo



b) Micrografía de barrido electrónico que muestra bastones y conos de la retina con colores distintos



dura y transparente llamada *córnea.* La región que está detrás de la córnea contiene un líquido llamado *humor acuoso*. En seguida viene el *cristalino*, una cápsula que contiene una gelatina fibrosa, dura en el centro y cada vez más suave hacia la periferia. El cristalino se mantiene en su lugar gracias a ligamentos que lo sujetan al músculo ciliar, el cual lo circunda. Detrás del cristalino, el ojo está lleno de una gelatina acuosa poco viscosa conocida como *humor vítreo*. Los índices de refracción tanto del humor acuoso como del humor vítreo son de alrededor de 1.336, casi iguales al del agua. Aunque no es homogéneo, el cristalino tiene un índice promedio de 1.437, no muy diferente de los índices de los humores acuoso y vítreo. En consecuencia, la mayoría de la refracción de la luz que penetra en el ojo ocurre en la superficie externa de la córnea.

La refracción en la córnea y en las superficies del cristalino produce una *imagen real* del objeto que se mira. Esta imagen se forma en la *retina* (sensible a la luz) que recubre la superficie interna posterior del ojo. La retina desempeña el mismo papel que la película en una cámara. Los *bastones* y los *conos* de la retina actúan como una serie de fotoceldas en miniatura (figura 34.44b); perciben la imagen y la transmiten a través del *nervio óptico* hasta el cerebro. La mayor agudeza visual se da en una región central pequeña llamada *fóvea centralis*, de alrededor de 0.25 mm de diámetro.

En frente del cristalino está el *iris*. Éste contiene una abertura de diámetro variable llamada *pupila*, la cual se abre y cierra para adaptarse a la intensidad cambiante de la luz. También los receptores de la retina tienen mecanismos de adaptación a la intensidad.

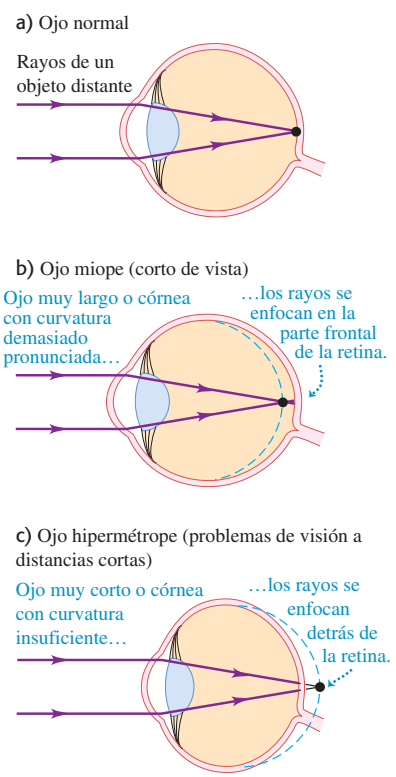
Para que un objeto se vea con nitidez, la imagen se debe formar exactamente donde se encuentra la retina. El ojo se ajusta a las diferentes distancias de objeto s modificando la distancia focal f de su lente (el cristalino); la distancia entre el cristalino y la retina, que corresponde a s', no cambia. (Compare esto con la manera de enfocar una cámara, donde la distancia focal es fija y se modifica la distancia entre la lente y la película.) En el ojo normal, un objeto situado en el infinito está enfocado nítidamente cuando el músculo ciliar se encuentra relajado. Para permitir la formación de imágenes nítidas de objetos más cercanos en la retina, aumenta la tensión del músculo ciliar que rodea el cristalino, se contrae el músculo ciliar, se arquea el cristalino, y disminuyen los radios de curvatura de sus superficies; esto reduce la distancia focal. Este proceso se llama *acomodación*.

Los extremos del ámbito donde es posible la visión definida se conocen como el *punto lejano* y el *punto cercano* del ojo. El punto lejano del ojo normal se halla en el infinito. La posición del punto cercano depende del grado en que el músculo ciliar puede aumentar la curvatura del cristalino. El ámbito de acomodación disminuye gradualmente con el aumento en la edad, porque el cristalino crece a lo largo de la vida de los seres humanos (es alrededor de un 50% más grande a los 60 años que a los 20) y los músculos ciliares son menos capaces de deformar un cristalino más grande. Por tal razón, el punto cercano se aleja poco a poco a medida que uno envejece. Este alejamiento del punto cercano recibe el nombre de *presbicia*. La tabla 34.1 muestra la posición aproximada del punto cercano en una persona promedio de diversas edades. Por ejemplo, un ser humano promedio de 50 años de edad no puede enfocar un objeto situado a menos de 40 cm del ojo.

Tabla 34.1 Retroceso del punto cercano con el paso de la edad

Edad (años)	Punto cercano (cm)
10	7
20	10
30	14
40	22
50	40
60	200

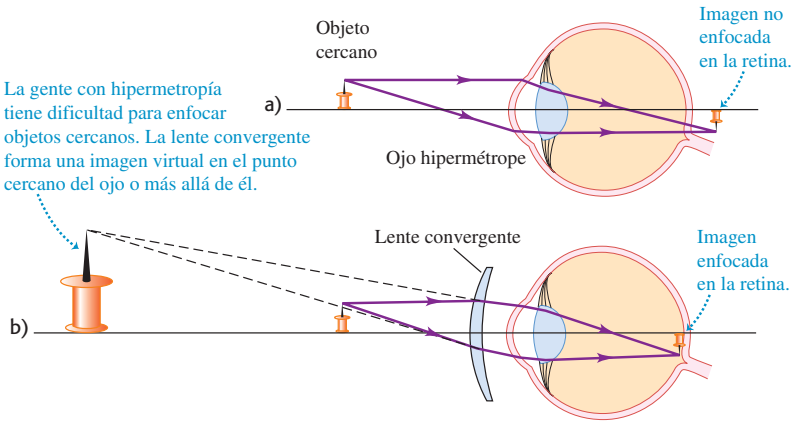
34.45 Errores de refracción en a) un ojo normal, b) un ojo miope (corto de vista) y c) un ojo hipermétrope (problemas de visión a distancias cortas) observando un objeto muy distante. La curva azul punteada indica la posición de la retina que se requiere.



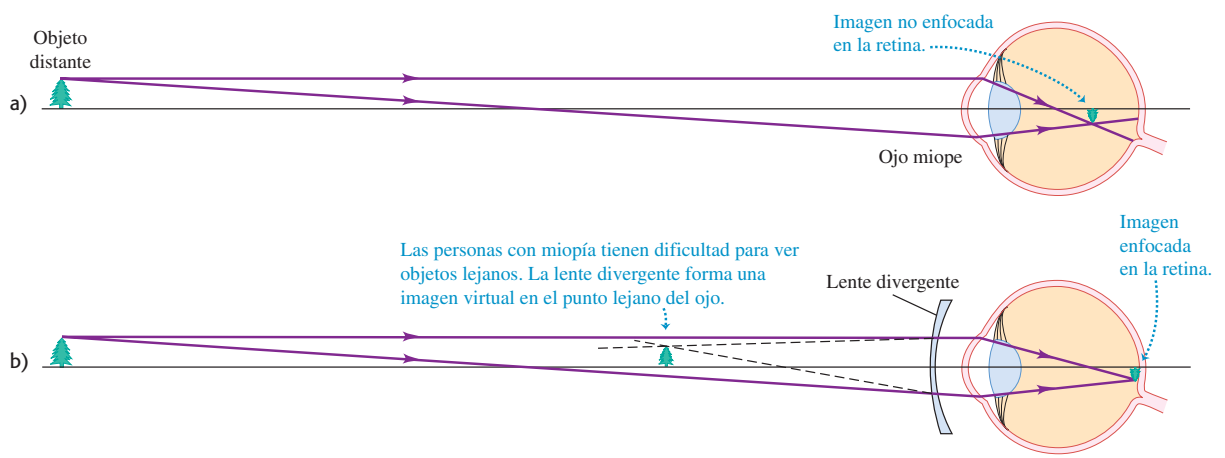
Trastornos de la visión

Varios defectos comunes de la visión son resultado de relaciones de distancia incorrectas en el ojo. Un ojo normal forma en la retina una imagen de un objeto situado en el infinito cuando el ojo se halla relajado (figura 34.45a). En el ojo *miope* (corto de vista), el globo del ojo es excesivamente largo de adelante hacia atrás, en comparación con el radio de curvatura de la córnea (o la córnea presenta una curvatura demasiado pronunciada), y los rayos provenientes de un objeto situado en el infinito se enfocan delante de la retina (figura 34.45b). El objeto más distante del cual se puede formar una imagen en la retina está entonces más próximo que el infinito. En el ojo *hipermétrope* (problemas de visión a distancias cortas), el globo ocular es demasiado corto o la córnea no tiene la curvatura suficiente, por lo que la imagen de un objeto infinitamente distante se forma detrás de la retina (figura 34.45c). El ojo miope produce *demasiada* convergencia en un haz de rayos paralelos como para formar una imagen en la retina; en el ojo hipermétrope, la convergencia es *insuficiente*.

Todos estos defectos se corrigen con el uso de lentes correctivas (anteojos o lentes de contacto). El punto cercano de un ojo tanto présbita como hipermétrope está *más*



34.46 a) Ojo hipermétrope sin corrección. b) Una lente positiva (convergente) proporciona la convergencia adicional necesaria para que un ojo hipermétrope enfoque la imagen en la retina.



34.47 a) Ojo miope sin corrección. b) Una lente negativa (divergente) separa aún más los rayos para compensar la convergencia excesiva del ojo miope.

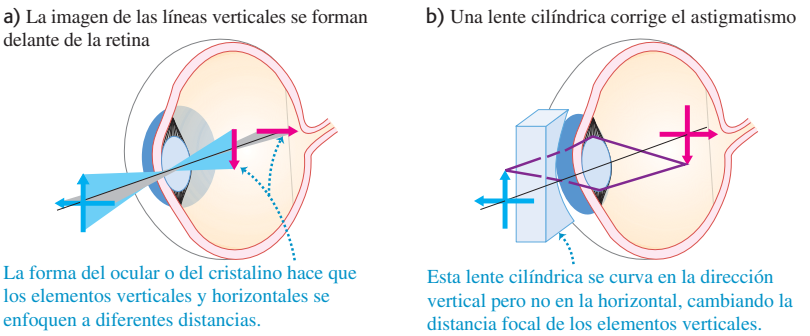
alejado del ojo que lo normal. Para ver claramente un objeto a la distancia normal de lectura (que ordinariamente se supone de 25 cm), se necesita una lente que forme una imagen virtual del objeto en el punto cercano o más allá de él. Esto se consigue por medio de una lente convergente (positiva), como se muestra en la figura 34.46. La lente aleja efectivamente el objeto del ojo, hasta un punto donde se puede formar una imagen nítida en la retina. Asimismo, para corregir el ojo miope se utiliza una lente divergente (negativa) para llevar la imagen más cerca del ojo que el objeto real, como se muestra en la figura 34.47.

El *astigmatismo* es un tipo de defecto diferente, en el cual la superficie de la córnea no es esférica, sino que tiene una curvatura más pronunciada en un plano que en otro. En consecuencia, la imagen de las líneas horizontales se puede formar en un plano diferente que la imagen de las líneas verticales (figura 34.48a). El astigmatismo puede hacer imposible, por ejemplo, enfocar con claridad las barras horizontales y verticales de una ventana al mismo tiempo.

El astigmatismo se corrige mediante una lente de superficie *cilíndrica*. Por ejemplo, suponga que la curvatura de la córnea en un plano horizontal es la correcta para enfocar los rayos provenientes del infinito en la retina, pero la curvatura en el plano vertical es demasiado grande para formar una imagen nítida en la retina. Cuando una lente cilíndrica con su eje horizontal se coloca delante del ojo, la lente no altera los rayos en un plano horizontal, pero la divergencia adicional de los rayos en un plano vertical hace que éstos se enfoquen nítidamente sobre la retina (figura 34.48b).

Las lentes para corregir la visión se describen habitualmente en términos de su **potencia**, la cual se define como el recíproco de la distancia focal expresada en metros. La unidad de potencia es la **dioptría**. De esta manera, una lente con $f = 0.50$ m tiene

34.48 Un tipo de ojo astigmático y cómo se corrige.



una potencia de 2.0 dioptrías, $f = -0.25$ corresponde a -4.0 dioptrías, y así sucesivamente. Los números de una receta de anteojos son normalmente potencias expresadas en dioptrías. Cuando se busca corregir tanto astigmatismo como miopía o hipermetropía, se indican tres números: uno correspondiente a la potencia esférica, otro a la potencia cilíndrica, y un ángulo que describe la orientación del eje del cilindro.

Otro método para corregir muchos defectos de la visión consiste en cambiar la forma de la córnea. Esto se suele hacer mediante un procedimiento denominado *queratomileusis in situ asistida con láser*, o LASIK, por las siglas de *laser-asisted in situ keratomileusis*. Se practica una incisión en la córnea y se dobla hacia atrás una faja de tejido externo de la córnea. Después se utiliza un láser ultravioleta intermitente con un haz de sólo 50 μm de ancho (aproximadamente $\frac{1}{200}$ del ancho de un cabello humano), para vaporizar áreas microscópicas del tejido subyacente. En seguida se vuelve la faja de tejido a su posición original, donde se amolda a la nueva forma "tallada" por el láser.

Ejemplo 34.13 Corrección de hipermetropía

El punto cercano de cierto ojo hipermétrope está a 100 cm delante del ojo. Para ver con claridad un objeto situado a 25 cm delante del ojo, ¿qué lente de contacto se necesita?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se busca que la lente forme una imagen virtual del objeto en el punto cercano del ojo, a 100 cm delante de él. Es decir, cuando $s = 25$ cm, se busca que s' sea de 100 cm.

PLANTEAR: La figura 34.49 presenta la situación. Determinamos la distancia focal necesaria de la lente de contacto, a partir de la relación entre objeto e imagen correspondiente a una lente delgada [ecuación (34.16)].

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.16),

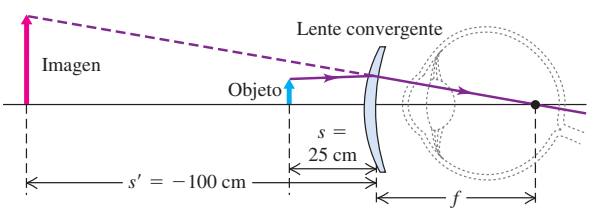
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{+25\text{ cm}} + \frac{1}{-100\text{ cm}}$$

$$f = +33\text{ cm}$$

Se necesita una lente convergente con distancia focal $f = 33$ cm. La potencia correspondiente es de $1/(0.33\text{ m})$, esto es, $+3.0$ dioptrías.

EVALUAR: En este ejemplo se utiliza una lente de contacto para corregir la hipermetropía. Si se hubieran empleado anteojos, habría sido necesario tener en cuenta la separación entre el ojo y la lente de los anteojos, y se necesitaría una potencia algo diferente (véase el ejemplo 34.14).

34.49 Empleo de una lente de contacto para corregir hipermetropía.



Ejemplo 34.14 Corrección de miopía

El punto lejano de cierto ojo con miopía está a 50 cm delante del ojo. Para ver con claridad un objeto situado en el infinito, ¿qué lente de anteojos se requiere? Suponga que la lente se usa a 2 cm delante del ojo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El punto lejano de un ojo con miopía está más cerca que el infinito. Para ver nítidamente objetos situados más allá del punto lejano, se necesita una lente que forme una imagen virtual de tales objetos no más lejos que el punto lejano.

PLANTEAR: La figura 34.50 presenta la situación. Suponga que la imagen virtual del objeto situado en el infinito se forma en el punto lejano, a 50 cm delante del ojo y a 48 cm delante de la lente de anteojos. Entonces, cuando $s = \infty$, se busca que s' sea de -48 cm. Como en el

ejemplo 34.13, la distancia focal necesaria se calcula con base en los valores de s y s'.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.16),

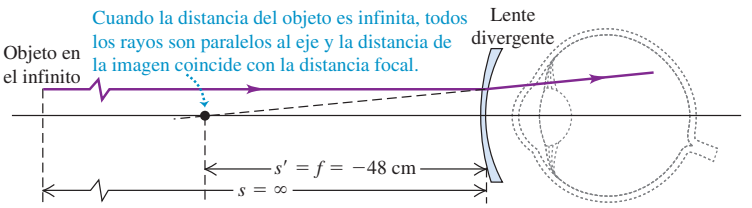
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-48\text{ cm}}$$

$$f = -48\text{ cm}$$

Se necesita una lente *divergente* con una distancia focal de $-48\text{ cm} = -0.48\text{ m}$. La potencia es de -2.1 dioptrías.

EVALUAR: En cambio, si se utilizara una lente de *contacto*, se necesitaría una $f = -50$ cm y una potencia de -2.0 dioptrías. ¿Sabe usted por qué?

34.50 Uso de un lente de contacto para corregir la miopía.



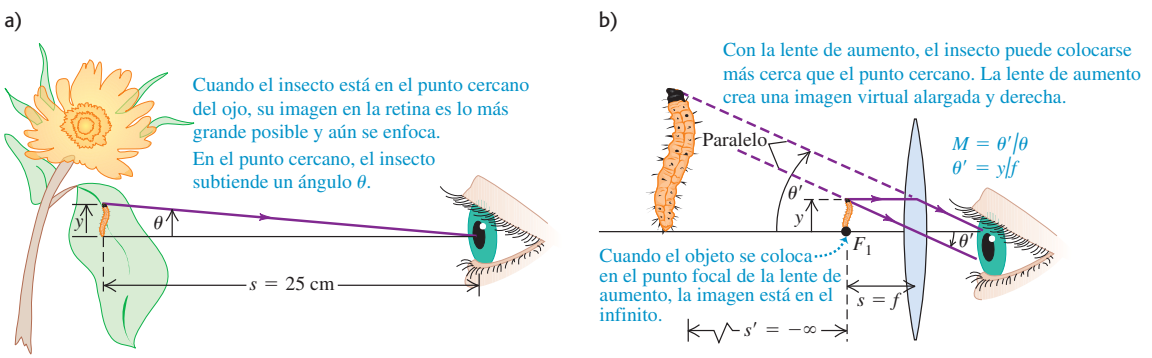
Evalúe su comprensión de la sección 34.6 Cierta lente de anteojos es delgada en el centro, aún más delgada en sus bordes superior e inferior, y relativamente gruesa en sus bordes izquierdo y derecho. ¿Qué defectos de visión se intentan corregir con esta lente? i) hipermetropía para objetos orientados tanto vertical como horizontalmente; ii) miopía para objetos orientados tanto vertical como horizontalmente; iii) hipermetropía para objetos orientados verticalmente y miopía para objetos orientados horizontalmente; iv) hipermetropía para objetos orientados horizontalmente y miopía para objetos orientados verticalmente.

34.7 La lente de aumento

El tamaño aparente de un objeto está determinado por el tamaño de su imagen en la retina. En el ojo no asistido, este tamaño depende del *ángulo* θ que subtiende el objeto en el ojo, conocido como su **tamaño angular** (figura 34.51a).

Para observar de cerca un objeto pequeño, como un insecto o un cristal, lo acercamos al ojo para que el ángulo subtendido y la imagen retiniana sean lo más grandes posible. Sin embargo, el ojo no puede enfocar nítidamente objetos más próximos que el punto cercano; por lo tanto, el tamaño angular de un objeto es máximo (es decir, subtiende el ángulo de visión más grande posible) cuando se encuentra en el punto cercano. En el análisis subsiguiente supondremos un observador promedio, para quien el punto cercano está a 25 cm del ojo.

34.51 a) El tamaño angular θ es máximo cuando el objeto está en el punto cercano. b) La lente de aumento forma una imagen virtual en el infinito. Esta imagen virtual aparece ante el ojo como un objeto real que subtiende un ángulo más grande θ' en el ojo.



Una lente convergente permite formar una imagen virtual más grande y más alejada del ojo que el objeto mismo, como se muestra en la figura 34.51b. En estas condiciones, el objeto se puede acercar más al ojo, y el tamaño angular de la imagen puede ser considerablemente más grande que el tamaño angular del objeto a 25 cm sin la lente. Una lente que se utiliza de este modo recibe el nombre de **lente de aumento**, también conocida como *vidrio de aumento* o *lupa simple*. La imagen virtual se ve con máxima comodidad cuando se halla en el infinito, de modo que el músculo ciliar del ojo esté relajado, lo cual significa que el objeto se coloca en el punto focal F_1 de la lente de aumento. En el análisis que sigue supondremos que éste es el caso.

En la figura 34.51a el objeto está en el punto cercano, donde subtiende un ángulo θ en el ojo. En la figura 34.51b una lente de aumento delante del ojo forma una imagen en el infinito, y el ángulo subtendido por la lente de aumento es θ'. La utilidad de la lente de aumento queda expresada por la razón del ángulo θ' (con la lente de aumento) con respecto al ángulo θ (sin la lente de aumento). Esta razón se conoce como el **aumento angular** M:

$$M = \frac{\theta'}{\theta} \qquad \text{(aumento angular)} \tag{34.21}$$

CUIDADO **Aumento angular contra aumento lateral** No confunda el aumento *angular* M con el aumento *lateral* m. El aumento angular es la razón del tamaño *angular* de una imagen con respecto al tamaño angular del objeto correspondiente; el aumento lateral se refiere a la razón de la *altura* de la imagen con respecto a la altura del objeto correspondiente. En la situación de la figura 34.51b, el aumento angular es de aproximadamente 3×, porque el insecto subtiende un ángulo aproximadamente tres veces más grande que el de la figura 34.51a; por lo tanto, el insecto parece al ojo aproximadamente tres veces más grande. El aumento *lateral* $m = -s'/s$ de la figura 34.51b es *infinito* porque la imagen virtual está en el infinito, ¡pero eso no significa que el insecto se vea infinitamente grande a través de la lente de aumento! (Por ello, no intentamos dibujar un insecto infinitamente grande en la figura 34.51b.) Cuando se utiliza una lente de aumento, M es útil, pero m no lo es.

Para hallar el valor de M, primero suponemos que los ángulos son lo suficientemente pequeños como para que cada ángulo (en radianes) sea igual a su seno y a su tangente. Con base en la figura 34.51a, y trazando el rayo de la figura 34.51b que atraviesa sin desviarse el centro de la lente, hallamos que θ y θ' (en radianes) son

$$\theta = \frac{y}{25\text{ cm}} \qquad \theta' = \frac{y}{f}$$

Combinando estas expresiones con la ecuación (34.21):

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{y/f}{y/25\text{ cm}} = \frac{25\text{ cm}}{f} \qquad \text{(aumento angular de una lente de aumento simple)} \tag{34.22}$$

Parecería que es posible agrandar el aumento angular tanto como se desee reduciendo la distancia focal f. De hecho, las aberraciones de una lente simple biconvexa establecen un límite de M entre aproximadamente 3× y 4×. Si se corrigen estas aberraciones, se puede alcanzar un aumento angular de hasta 20×. Cuando se necesita un aumento aún mayor, por lo general se utiliza un microscopio compuesto, el cual estudiaremos en la siguiente sección.

Evalúe su comprensión de la sección 34.7 Usted examina una gema utilizando una lente de aumento. Si cambia ésta por otra lente de aumento con el doble de distancia focal, i) tendrá que mantener el objeto a una distancia del doble y el aumento angular también será del doble; ii) tendrá que mantener el objeto a una distancia del doble y el aumento angular será $\frac{1}{2}$ más grande; iii) tendrá que mantener el objeto a la mitad de la distancia y el aumento angular será del doble; iv) tendrá que mantener el objeto a la mitad de la distancia y el aumento angular también será de la mitad.

34.8 Microscopios y telescopios

Las cámaras, los anteojos y las lentes de aumento utilizan una sola lente para formar la imagen. Dos dispositivos ópticos importantes que utilizan *dos* lentes son el microscopio y el telescopio. En estos dispositivos una lente primaria, u *objetivo*, forma una imagen real, y una lente secundaria, u *ocular*, sirve como lente de aumento para formar una imagen virtual ampliada.

Activ Online Physics
15.12 Sistemas de dos lentes
15.3 El telescopio y el aumento angular

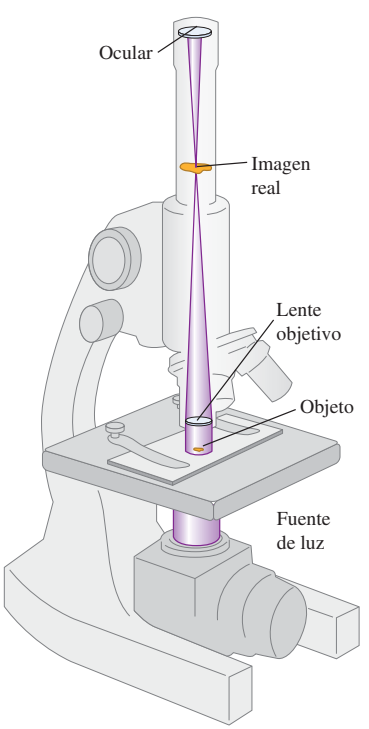
Microscopios

Cuando se necesita un aumento mayor que el obtenido con una lente de aumento simple, el instrumento que se utiliza normalmente es el **microscopio**, también conocido como *microscopio compuesto*. En la figura 34.52a se muestran los elementos básicos de un microscopio. Para analizar este sistema aplicamos el principio de que una imagen formada por un elemento óptico como una lente o espejo puede servir como objeto de un segundo elemento. Empleamos este principio en la sección 34.4, cuando dedujimos la ecuación de lentes delgadas por aplicación repetida de la ecuación de refracción en una sola superficie; lo utilizamos de nuevo en el ejemplo 34.11 (sección 34.4), donde se usó la imagen formada por una lente como objeto de una segunda lente.

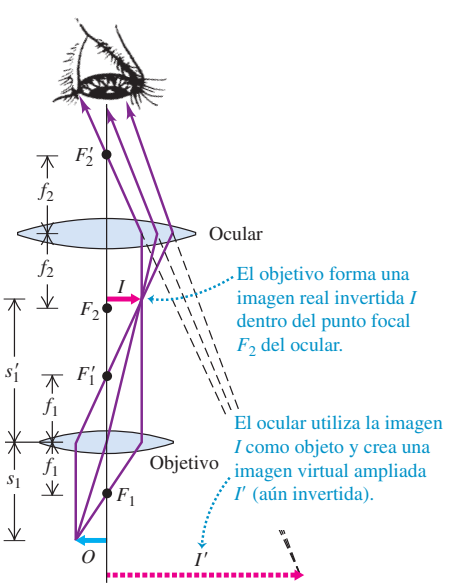
El objeto O que examinaremos se coloca inmediatamente después del primer punto focal F_1 del **objetivo**, que es una lente convergente que forma una imagen real y ampliada I (figura 34.52b). En un instrumento correctamente diseñado, esta imagen se halla inmediatamente hacia adentro con respecto al primer punto focal F_1' de una segunda lente convergente llamada **ocular**. (Dejamos en sus manos descubrir por qué la imagen debe estar inmediatamente *por adentro* de F_1'; véase el problema 34.108.)

34.52 a) Elementos de un microscopio. b) El objeto O se coloca inmediatamente por fuera del primer punto focal del objetivo (para mayor claridad, se exageró la distancia s_1). c) Esta imagen de microscopio muestra organismos unicelulares de aproximadamente 2×10^{-4} (0.2 mm) de diámetro. Microscopios ópticos comunes pueden mostrar características tan pequeñas como 2×10^{-7} m, que son comparables con la longitud de onda de la luz.

a) Elementos de un microscopio



b) Óptica del microscopio



c) Alga de agua dulce unicelular (*Micrasterias denticualta*)

El ocular funciona como lente de aumento simple, como se explicó en la sección 34.7, y forma una imagen virtual final I' de I. La posición de I' puede hallarse en cualquier punto entre los puntos cercano y lejano del ojo. Tanto el objetivo como el ocular de un microscopio real son lentes compuestas corregidas en alto grado y con varios elementos ópticos; para simplificar, no obstante, aquí los mostramos como lentes delgadas simples.

En una lente de aumento simple, lo que importa al mirar a través de un microscopio es el aumento *angular* M. El aumento angular total del microscopio compuesto es el producto de dos factores. El primero de ellos es el aumento *lateral* m_1 del objetivo, el cual determina el tamaño lineal de la imagen real I; el segundo factor es el aumento *angular* M_2 del ocular, el cual relaciona el tamaño angular de la imagen virtual vista a través del ocular con el tamaño angular que la imagen real I tendría si se la viera *sin* el ocular. El primero de estos factores viene dado por

$$m_1 = -\frac{s_1'}{s_1} \tag{34.23}$$

donde s_1 y s_1' son las distancias de objeto y de imagen, respectivamente, correspondientes a la lente objetivo. En condiciones ordinarias el objeto está muy cerca del punto focal, y la distancia de imagen resultante s_1' es muy grande en comparación con la distancia focal f_1 de la lente objetivo. Por consiguiente, s_1 es aproximadamente igual a f_1, y podemos escribir $m_1 = -s_1'/f_1$.

La imagen real I está cerca del punto focal F_1' del ocular; por lo tanto, para obtener el aumento angular del ocular aplicamos la ecuación (34.22): $M_2 = (25\text{ cm})/f_2$, donde f_2 es la distancia focal del ocular (considerado como lente simple). El aumento angular total M del microscopio compuesto (aparte de un signo negativo, que habitualmente se pasa por alto) es el producto de dos aumentos:

$$M = m_1 M_2 = \frac{(25\text{ cm})s_1'}{f_1 f_2} \qquad \begin{matrix}\text{(aumento angular}\\ \text{de un microscopio)}\end{matrix} \tag{34.24}$$

donde s_1', f_1 y f_2 se miden en centímetros. La imagen final es invertida con respecto al objeto. Por lo regular, los fabricantes de microscopios especifican los valores de m_1 y M_2 de los componentes del microscopio, en vez de las distancias focales del objetivo y del ocular.

La ecuación (34.24) muestra que es posible incrementar el aumento angular de un microscopio utilizando un objetivo de distancia focal más corta f_1, con lo cual se incrementa m_1 y el tamaño de la imagen real I. Casi todos los microscopios ópticos tienen un "revólver" giratorio con tres o más objetivos de diferente distancia focal, con lo cual es posible ver el mismo objeto a diferentes aumentos. También el ocular debe tener una distancia focal f_2 corta para aumentar al máximo el valor de M.

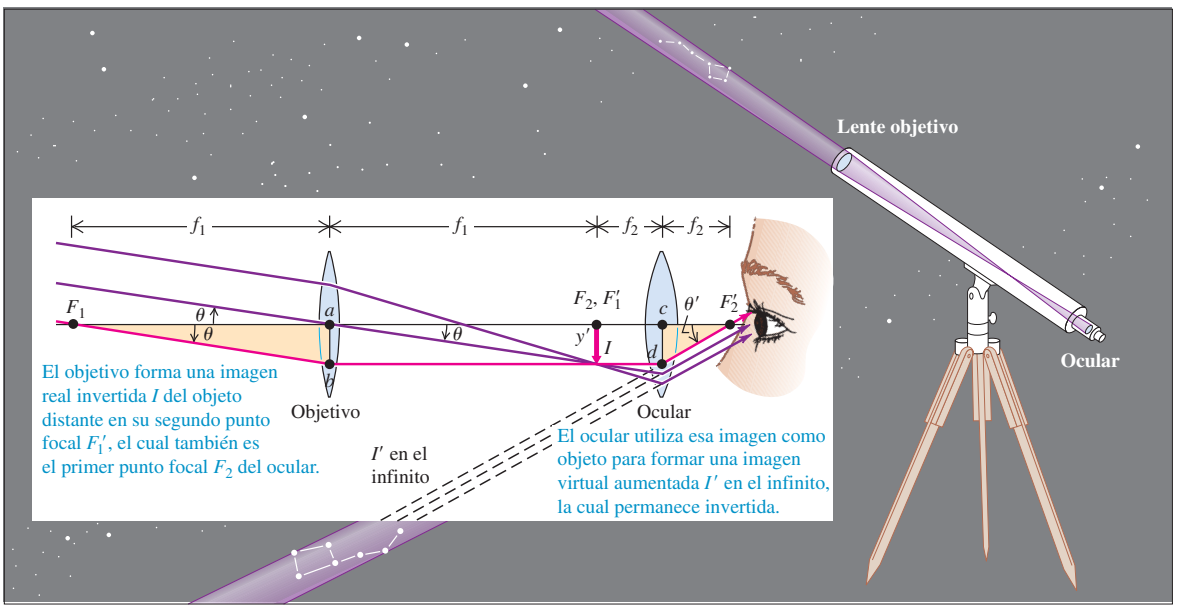
Para tomar una fotografía con un microscopio (llamada *fotomicrografía* o *micrografía*), se quita el ocular y se coloca una cámara fotográfica, de manera que la imagen real I llegue al detector CCD o a la película. La figura 34.52c muestra tal fotografía. En este caso, lo que importa es el aumento *lateral* del microscopio, el cual se obtiene con la ecuación (34.23).

Telescopios

El sistema óptico de un **telescopio** es semejante al de un microscopio compuesto. En ambos instrumentos, la imagen formada por un objetivo se observa a través de un ocular. La diferencia fundamental es que el telescopio se utiliza para ver objetos grandes situados a enormes distancias, y el microscopio sirve para ver objetos pequeños muy cercanos. Otra diferencia es que muchos telescopios utilizan un espejo curvo, no una lente, como objetivo.

En la figura 34.53 se muestra un *telescopio astronómico*. Debido a que este telescopio emplea una lente como objetivo, se le conoce como *telescopio de refracción* o *refractor*. La lente objetivo forma una imagen real reducida I del objeto. Esta imagen es el objeto para la lente ocular, la cual forma una imagen virtual ampliada de I. Los objetos que se observan con un telescopio, por lo regular, están tan lejos del instrumento, que la primera imagen I se forma casi exactamente en el segundo punto focal de la

34.53 Sistema óptico de un telescopio astronómico de refracción.



lente objetivo. Si la imagen final I' formada por el ocular se halla en el infinito (para ser vista con la máxima comodidad por un ojo normal), la primera imagen también debe estar en el primer punto focal del ocular. La distancia entre objetivo y ocular, que es la longitud del telescopio, es por ende la *suma* de las distancias focales del objetivo y del ocular: $f_1 + f_2$.

El aumento angular M de un telescopio se define como la razón del ángulo que subtiende en el ojo la imagen final I' con respecto al ángulo que subtiende el objeto en el ojo (no asistido). Podemos expresar esta razón en términos de las distancias focales del objetivo y del ocular. En la figura 34.53 el rayo que pasa por F_1, el primer punto focal del objetivo, y por F_2', el segundo punto focal del ocular, se muestra en color rojo. El objeto (que no se muestra) subtiende un ángulo θ en el objetivo, y subtendería prácticamente el mismo ángulo en el ojo no asistido. Asimismo, dado que el ojo del observador se encuentra inmediatamente a la derecha del punto focal F_2', el ángulo que subtiende la imagen final en el ojo es casi igual al ángulo θ'. Como bd es paralela al eje óptico, las distancias ab y cd son iguales entre sí y también a la altura y' de la imagen real I. Debido a que los ángulos θ y θ' son pequeños, sus tangentes son una buena aproximación de su valor. Con base en los triángulos rectángulos F_1ab y $F_2'cd$,

$$\theta = \frac{-y'}{f_1} \qquad \theta' = \frac{y'}{f_2}$$

y el aumento angular M es

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{y'/f_2}{y'/f_1} = -\frac{f_1}{f_2} \qquad \text{(aumento angular de un telescopio)} \tag{34.25}$$

El aumento angular M de un telescopio es igual a la razón de la distancia focal del objetivo con respecto a la del ocular. El signo negativo indica que la imagen final es invertida. La ecuación (34.25) muestra que, para lograr un buen aumento angular, un *telescopio* debería tener una distancia focal de objetivo f_1 *larga*. En cambio, la ecuación (34.24) muestra que un *microscopio* debe tener una distancia focal de objetivo *corta*. Sin embargo, un objetivo de telescopio con distancia focal larga también debe tener un diámetro D grande, para que el número f, es decir, f_1/D, no sea demasiado grande; como se describió en la sección 34.5, un número f grande significa una imagen

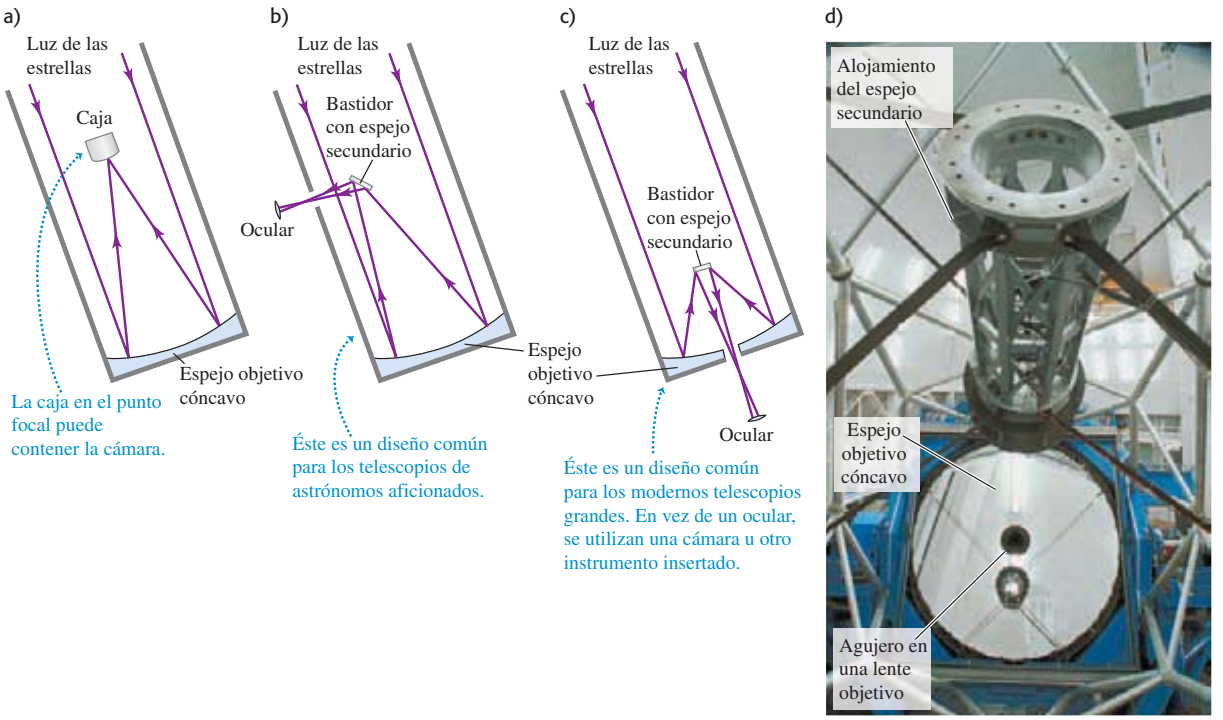
tenue de poca intensidad. Típicamente, los telescopios no tienen objetivos intercambiables; en cambio, el aumento se modifica utilizando distintos oculares de diferente distancia focal f_2. Como en el caso del microscopio, los valores pequeños de f_2 proporcionan aumentos angulares más grandes.

Una imagen invertida no representa una desventaja en la observación astronómica. Sin embargo, cuando usamos un telescopio o unos binoculares, que son en esencia un par de telescopios montados uno al lado de otro, para ver objetos en la Tierra, queremos que la imagen esté al derecho. En los binoculares de prisma, esto se consigue reflejando la luz varias veces a lo largo del trayecto del objetivo al ocular. El efecto combinado de estas reflexiones es voltear la imagen tanto en sentido horizontal como vertical. Normalmente, los binoculares se describen mediante dos números separados por un signo de multiplicación; por ejemplo: 7×50. El primer número es el aumento angular M; y el segundo, el diámetro de las lentes objetivo (en milímetros). El diámetro ayuda a establecer la capacidad colectora de luz de las lentes objetivo y, con ello, el brillo de la imagen.

En el *telescopio de reflexión* (figura 34.54a) se ha sustituido la lente objetivo por un espejo cóncavo. En los telescopios grandes este sistema ofrece muchas ventajas, tanto teóricas como prácticas. Los espejos están inherentemente libres de aberraciones cromáticas (dependencia de la distancia focal con respecto a la longitud de onda), y las aberraciones esféricas (asociadas con la aproximación paraxial) son más fáciles de corregir que en el caso de las lentes. En algunos casos la superficie reflectante es parabólica en vez de esférica. No es necesario que el material del espejo sea transparente, y puede ser más rígido que una lente, la cual debe sostenerse sólo por sus bordes.

Los telescopios de reflexión más grandes del mundo, los telescopios Keck en la cima del Mauna Kea en Hawai, tienen cada uno un espejo de 10 m de diámetro total compuesto de 36 elementos reflectores hexagonales individuales.

34.54 a), b) c) Tres diseños para telescopios de reflexión. d) esta fotografía muestra el interior del telescopio Gemini North, que utiliza el diseño mostrado en *c*). El espejo objetivo tiene 8 metros de diámetro.



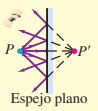
Un desafío en el diseño de telescopios de reflexión es que la imagen se forma delante del espejo objetivo, en una región que los rayos entrantes recorren. Isaac Newton ideó una solución a este problema. Un espejo secundario plano orientado a 45° del eje óptico hace que la imagen se forme en un orificio del lado del telescopio, donde se puede ampliar con un ocular (figura 34.54b). Otra solución consiste en usar un espejo secundario que hace que la luz enfocada pase por un orificio en el espejo objetivo (figura 34.54c). Los grandes telescopios de investigación, al igual que los telescopios de aficionados, emplean tal diseño (figura 34.54d).

Al igual que con el microscopio, cuando se utiliza un telescopio para obtener fotografías, se quita el ocular y se coloca la película fotográfica o un detector CCD en la posición de la imagen real que forma el objetivo. (Ciertas "lentes" de distancia focal larga para fotografia son en realidad telescopios de reflexión utilizados de este modo.) La mayoría de los telescopios que se emplean en la investigación astronómica nunca se usan con ocular.

Evalúe su comprensión de la sección 34.8 ¿Qué proporciona un aumento lateral del máximo valor absoluto: i) los lentes objetivo de un microscopio (figura 34.52); ii) los lentes objetivos de un telescopio de refracción (figura 34.53); o iii) no se da la iformación suficiente para decidir?

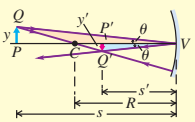
CAPÍTULO 34 RESUMEN

Reflexión o refracción sobre una superficie plana: Cuando divergen rayos a partir de un punto de objeto P y son reflejados o refractados, la dirección de los rayos salientes es la misma que si hubiesen divergido desde un punto P' conocido como punto de imagen. Si convergen en realidad en P' y divergen nuevamente más allá de ese punto, P' es una imagen real de P; si sólo parecen divergir a partir de P', se trata de una imagen virtual. Las imágenes pueden ser derechas o invertidas.

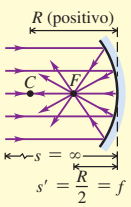


Aumento lateral: En cualquier situación de reflexión o refracción, el aumento lateral m se define como la razón de la altura de la imagen y' con respecto a la altura del objeto y. Cuando m es positivo, la imagen es derecha; y cuando m es negativo, la imagen es invertida.

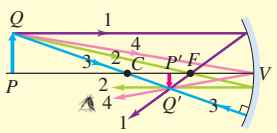
$$m = \frac{y'}{y} \qquad (34.2)$$



Punto focal y distancia focal: El punto focal de un espejo es el punto donde los rayos paralelos convergen después de reflejarse en un espejo cóncavo, o bien, el punto desde el que parecen divergir después de reflejarse en un espejo convexo. Los rayos que divergen a partir del punto focal de un espejo cóncavo son paralelos después de reflejarse; los rayos que convergen hacia el punto focal de un espejo convexo también son paralelos después de reflejarse. La distancia del punto focal al vértice se llama distancia focal y se denota con f. Los puntos focales de una lente se definen de modo análogo.



Relación entre las distancias de objeto y de imagen: En la tabla que sigue se resumen las fórmula de distancia de objeto s y distancia de imagen s' correspondientes a espejos planos y esféricos, y superficies refractivas individuales. La ecuación referente a una superficie plana se obtiene de la ecuación correspondiente aplicable a una superficie esférica, fijando $R = \infty$. (Véanse los ejemplos 34.1 a 34.7.)



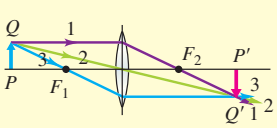
	Espejo plano	Espejo esférico	Superficie refractiva plana	Superficie refractiva esférica
Distancias de objeto y de imagen	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 0$	$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$	$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = 0$	$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R}$
Aumento lateral	$m = -\frac{s'}{s} = 1$	$m = -\frac{s'}{s}$	$m = -\frac{n_a s'}{n_b s} = 1$	$m = -\frac{n_a s'}{n_b s}$

Las relaciones entre objeto e imagen deducidas en este capítulo son válidas sólo con respecto a rayos cercanos y casi paralelos al eje óptico, llamados rayos paraxiales. Los rayos no paraxiales no convergen de forma precisa en un punto de imagen. El efecto recibe el nombre de aberración esférica.

Lentes delgadas: La relación entre objeto e imagen, dada por la ecuación (34.16), es la misma en el caso de una lente delgada que en el de un espejo esférico. La ecuación (34.19), la ecuación del fabricante de lentes, relaciona la distancia focal de una lente con su índice de refracción, y los radios de curvatura de sus superficies. (Véanse los ejemplos 34.8 a 34.11.)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad (34.16)$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (34.19)$$

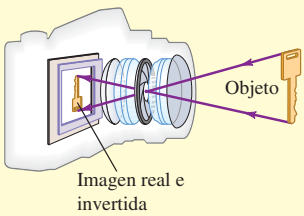


Reglas de signos: Las reglas de signos siguientes se aplican a todas las superficies reflectantes y refractivas tanto planas como esféricas.

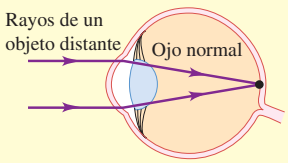
- $s > 0$ cuando el objeto está del lado entrante de la superficie (objeto real); $s < 0$ en caso contrario.
- $s' > 0$ cuando la imagen está del lado saliente de la superficie (imagen real); $s' < 0$ en caso contrario.
- $R > 0$ cuando el centro de curvatura está del lado saliente de la superficie; $R < 0$ en caso contrario.
- $m > 0$ cuando la imagen es derecha; $m < 0$ cuando es invertida.

Cámaras fotográficas: Una cámara fotográfica forma una imagen real, invertida y reducida del objeto que se fotografía sobre una superficie sensible a la luz. La cantidad de luz que incide en la superficie se regula mediante la rapidez del obturador y la abertura. La intensidad de esta luz es inversamente proporcional al cuadrado del número f de la lente. (Véase el ejemplo 34.12.)

$$\text{Número } f = \frac{\text{Longitud focal}}{\text{Diámetro de abertura}} = \frac{f}{D} \tag{34.20}$$

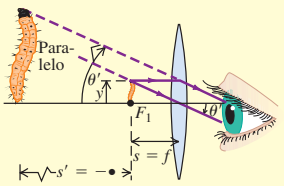


El ojo: En el ojo, la refracción en la superficie de la córnea forma una imagen real en la retina. El ajuste por las diversas distancias de objeto se lleva a cabo oprimiendo el cristalino (la lente) para que se arquee y, de este modo, disminuya su distancia focal. Un ojo con miopía es demasiado largo en relación con su cristalino; un ojo hipermétrope es demasiado corto. La potencia de una lente correctiva, en dioptrías, es el recíproco de la distancia focal en metros. (Véanse los ejemplos 34.13 y 34.14.)

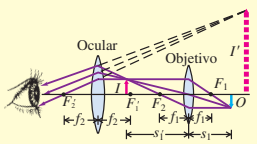


La lente de aumento simple: La lente de aumento simple crea una imagen virtual, cuyo tamaño angular θ' es mayor que el tamaño angular θ del objeto mismo a una distancia de 25 cm, la mínima distancia nominal para una visión cómoda. El aumento angular M de una lente de aumento simple es la razón del tamaño angular de la imagen virtual con respecto al tamaño angular del objeto a esta distancia.

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{25\text{ cm}}{f} \tag{34.22}$$



Microscopios y telescopios: En un microscopio compuesto, la lente objetivo forma una primera imagen en el cañón del instrumento, y el ocular forma una imagen virtual final, que suele hallarse en el infinito, de la primera imagen. El telescopio funciona con base en el mismo principio, pero el objeto está muy alejado. En un telescopio de reflexión, la lente objetivo se sustituye por un espejo cóncavo, el cual elimina las aberraciones cromáticas.



Términos clave

objeto, *1157*
objeto puntual, *1158*
objeto extenso, *1158*
imagen, *1158*
imagen virtual, *1158*
imagen real, *1158*
distancia de objeto, *1159*
distancia de imagen, *1159*
aumento lateral, *1160*
imagen derecha, *1160*
imagen invertida, *1160*
imagen inversa, *1160*
centro de curvatura, *1161*
vértice, *1161*
eje óptico, *1161*
rayos paraxiales, *1162*
aproximación paraxia1, *1162*
aberración esférica, *1162*
punto focal (foco), *1163*
distancia focal, *1163*
rayos principales, *1167*
lente delgada, *1174*
lente convergente, *1174*
lente divergente, *1176*
ecuación del fabricante de lentes, *1177*
cámara fotográfica, *1182*
número f, *1184*
potencia, *1187*
dioptría, *1187*
tamaño angular, *1189*
lente de aumento, *1190*
aumento angular, *1190*
microscopio, *1191*
objetivo, *1191*
ocular, *1191*
telescopio, *1192*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Una lente de aumento (simple) produce una imagen virtual con un tamaño angular grande que está infinitamente alejada, de manera que usted puede verla nítidamente enfocada con sus ojos relajados. (Un cirujano que practique una microcirugía no apreciaría tener una tensión en sus ojos mientras trabaja.) El objeto debería estar en el punto focal de la lente, así que el objeto y la lente están separados una distancia focal.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

34.1 Respuesta: iv) Cuando usted se halla a una distancia s del espejo, su imagen está a una distancia s del otro lado del espejo, y la distancia entre usted y su imagen es de $2s$. Al acercarse al espejo, la distancia $2s$ cambia dos veces más rápidamente que la distancia s; por lo tanto, su imagen se acerca a usted con una rapidez de $2v$.

34.2 Respuestas: *a*) cóncavo, *b*) ii) Un espejo convexo siempre produce una imagen derecha, pero esa imagen es más pequeña que el

objeto (véase la figura 34.16b). Por lo tanto, se debe usar un espejo cóncavo. La imagen será derecha y aumentada sólo si la distancia del objeto (el rostro) al espejo es menor que la distancia focal del espejo, como en la figura 34.20d.

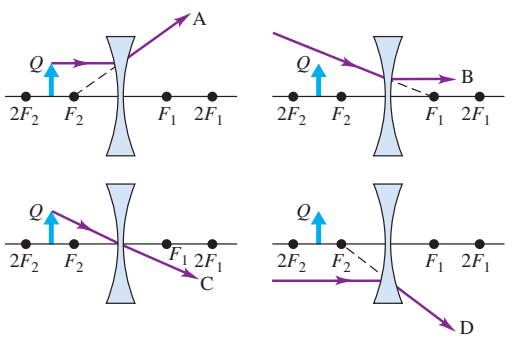
34.3 Respuesta: no El Sol está muy lejos; por lo tanto, la distancia de objeto es prácticamente infinita: $s = \infty$ y $1/s = 0$. El material a es aire ($n_a = 1.00$) y el material b es agua ($n_b = 1.33$); por ello, la posición de la imagen s' está dada por

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \qquad \text{o bien} \qquad 0 + \frac{1.33}{s'} = \frac{1.33 - 1.00}{R}$$

$$s' = \frac{1.33}{0.33}R = 4.0R$$

La imagen se formaría a 4.0 radios de gota de la superficie anterior de la gota. Sin embargo, como cada gota es sólo una parte de una esfera completa, la distancia de la cara anterior a la posterior de la gota es menor que $2R$. Los rayos de luz solar nunca alcanzan el punto de imagen, y las gotas no forman una imagen del Sol sobre la hoja. Aunque los rayos no están enfocados en un punto, de cualquier manera están concentrados y pueden dañar la hoja.

34.4 Respuestas: A y C Cuando los rayos A y D se extienden hacia atrás, pasan por el punto focal F_2; así, antes de que pasaran por la lente, eran paralelos al eje óptico. Las figuras muestran que el rayo A emana del punto Q, pero el rayo D no. El rayo B es paralelo al eje óptico, por lo que antes de que pase por la lente, se dirigía hacia el punto focal F_1. De esta manera, no puede llegar desde el punto Q. El rayo C pasa por el centro de la lente y, por ende, no se desvía por su pasaje; al trazar el rayo de vuelta, se muestra que emana del punto Q.



34.5 Respuesta: iii) El área de la imagen más pequeña del detector CCD significa que el ángulo de visión se ve disminuido por una distancia focal dada. Los objetos individuales hacen imágenes del mismo tamaño en cualquier caso; cuando se utiliza una menor área sensible a la luz, menos imágenes se ajustan al área y se estrecha el campo de visión.

34.6 Respuesta: iii) Esta lente tiene el propósito de corregir un tipo de astigmatismo. A lo largo del eje vertical, la lente está configurada como una lente convergente, y a lo largo del eje horizontal, como lente divergente. Por lo tanto, el ojo es hipermétrope (véase la figura 34.46) con respecto a objetos orientados verticalmente, pero miope con respecto a objetos orientados en sentido horizontal (véase la figura 34.47). Sin corrección, el ojo enfoca los objetos verticales detrás de la retina, y los objetos horizontales, delante de ella.

34.7 Respuesta: ii) El objeto debe sostenerse en el punto focal, que se aleja al doble si se duplica la distancia focal f. La ecuación (24.22) muestra que el aumento angular M es inversamente proporcional a f, así que al duplicar la distancia focal hace que M sea $\frac{1}{2}$ más grande. Para mejorar el aumento, usted debería usar una lente de aumento con una distancia focal *más corta*.

34.8 Respuesta: i) La lente objetivo de un microscopio se diseña para aumentar imágenes de objetos pequeños, así que el valor absoluto de su aumento lateral m es mayor que 1. En cambio, la lente objetivo de un telescopio de refracción se diseña para hacer imágenes *reducidas*. Por ejemplo, la luna tiene miles de kilómetros de diámetro, pero su imagen se puede ajustar a un detector CCD de unos cuantos centímetros de diámetro. Así, $|m|$ es mucho menor que 1 para el telescopio de refracción. (En ambos casos, m es negativo porque el objetivo forma una imagen invertida, lo cual es la causa de que la pregunta pida el valor absoluto de m.)

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P34.1. Un espejo esférico se corta horizontalmente por la mitad. ¿Se formará una imagen con la mitad inferior del espejo? Si acaso, ¿dónde se formará la imagen?

P34.2. Con respecto a la situación de la figura 34.3, ¿la distancia de imagen s' es positiva o negativa? ¿La imagen es real o virtual? Explique sus respuestas.

P34.3. Las leyes de la óptica también se aplican a las ondas electromagnéticas invisibles para el ojo. Una antena de televisión por satélite se utiliza para detectar ondas de radio provenientes de satélites en órbita. ¿Por qué se utiliza una superficie reflectante curva (un "plato")? El plato siempre es cóncavo, nunca convexo; ¿por qué? El receptor de radio propiamente dicho se coloca sobre un brazo y se suspende delante del disco. ¿A qué distancia frente al disco se debe colocar?

P34.4. Explique porqué es infinita la distancia focal de un espejo *plano*, y cuál es el significado de que el punto focal esté en el infinito.

P34.5. Si se sumerge en agua un espejo esférico, ¿cambia su distancia focal? Explique su respuesta.

P34.6. ¿Entre qué límites de posiciones del objeto, un espejo esférico cóncavo forma una imagen real? ¿Y un espejo esférico convexo?

P34.7. Cuando una habitación tiene espejos en dos muros opuestos, se puede ver una serie de reflejos infinitos. Analice este fenómeno en términos de imágenes. ¿Por qué se ven más tenues las imágenes distantes?

P34.8. En el caso de un espejo esférico, si $s = f$, entonces $s' = \infty$, y el aumento lateral m es infinito. ¿Esto tiene sentido? Si lo tiene, ¿qué significa?

P34.9. Tal vez usted haya notado un pequeño espejo convexo junto al cajero automático del banco. ¿Por qué es un espejo convexo, y no uno plano o cóncavo? ¿Qué consideraciones determinan su radio de curvatura?

P34.10. Una estudiante afirma que, en un día soleado, puede hacer fuego utilizando sólo los rayos solares y un espejo cóncavo. ¿Cómo se hace esto? ¿Es pertinente el concepto de imagen? ¿Se puede hacer lo mismo con un espejo convexo? Explique su respuesta.

P34.11. Una persona mira su reflejo en el lado cóncavo de una cuchara reluciente. ¿El reflejo es derecho o invertido? ¿Influye la distancia entre el rostro y la cuchara? ¿Y si la persona se mira en el lado convexo? (¡Haga la prueba!)
P34.12. En el ejemplo 34.4 (sección 34.2) parece haber una ambigüedad con respecto al caso $s = 10$ cm, en cuanto a si s' es $+\infty$ o bien $-\infty$ y si la imagen es derecha o invertida. ¿Cómo se resuelve esto? ¿O no es posible?
P34.13. Suponga que en la situación del ejemplo 34.7 de la sección 34.3 (véase la figura 34.26), una flecha vertical de 2.00 m de alto se pinta en el costado de la alberca bajo la superficie del agua. De acuerdo con el cálculo del ejemplo, a la persona que se muestra en la figura 34.26 le parecería que esta flecha tiene 1.50 m de largo. No obstante, el análisis que sigue a la ecuación (34.13) señala que el aumento correspondiente a una superficie plana refractiva es $m = 1$, lo cual sugiere que a la persona le parecería que la flecha mide 2.00 m de largo. ¿Cómo resolvería usted esta contradicción aparente?
P34.14. En la parte inferior del espejo lateral del lado del pasajero de un automóvil se lee: "los objetos en el espejo están más cerca de lo que parecen". ¿Esto es verdadero? ¿Por qué?
P34.15. ¿Cómo se puede hacer rápidamente una medición aproximada de la distancia focal de una lente convergente? ¿Se podría aplicar el mismo método a una lente divergente? Explique su respuesta.
P34.16. La distancia focal de una lente simple depende del color (longitud de onda) de la luz que la atraviesa. ¿Por qué? ¿Es posible que una lente tenga una distancia focal positiva con ciertos colores y negativa con otros? Explique su respuesta.
P34.17. Cuando una lente convergente se sumerge en agua, ¿aumenta o disminuye su distancia focal en comparación con el valor en el aire? Explique su respuesta.
P34.18. Una burbuja esférica de aire puede funcionar como lente. ¿Se trata de una lente convergente o divergente? ¿Cuál es la relación entre su distancia focal y su radio?
P34.19. ¿Una imagen formada por una superficie reflectante o refractiva puede servir como objeto para una segunda reflexión o refracción? ¿Importa el hecho de que la primera imagen sea real o virtual? Explique su respuesta.
P34.20. Si se coloca un pedazo de película fotográfica donde se halla una imagen real, la película registra la imagen. ¿Se puede hacer esto con una imagen virtual? ¿Cómo se podría registrar una imagen virtual?
P34.21. De acuerdo con lo expuesto en la sección 34.2, los rayos luminosos son reversibles. ¿Siguen siendo válidas las fórmulas de la tabla del resumen de este capítulo, si se intercambian el objeto y la imagen? ¿Qué implica la reversibilidad con respecto a la *forma* de las diversas fórmulas?
P34.22. Usted entró a un concurso de supervivencia que incluye construir un telescopio de emergencia burdo y le proporcionan dos cajas grandes con lentes. ¿Qué par de lentes elegiría? ¿Cómo los identificaría con rapidez?
P34.23. No podemos ver con claridad bajo el agua a simple vista, pero *sí* podemos hacerlo si nos ponemos una careta o gafas protectoras (con aire entre los ojos y la careta o las gafas). ¿A qué se debe la diferencia? ¿Sería posible ver bajo el agua con ayuda de unos anteojos (con agua entre los ojos y los anteojos)? Si es así, ¿los lentes deben ser convergentes o divergentes? Explique su respuesta.
P34.24. Usted toma una lente y la cubre de manera que sólo pueda pasar luz por la mitad inferior de la lente. ¿Cómo se compara la imagen formada por la lente cubierta con la imagen que formaba antes de cubrirse?

Ejercicios

Sección 34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana

34.1. Una vela de 4.85 cm de alto está 39.2 cm a la izquierda de un espejo plano. ¿Dónde el espejo forma la imagen, y cuál es la altura de ésta?
34.2. La imagen de un árbol cubre exactamente la longitud de un espejo plano de 4.00 cm de alto, cuando el espejo se sostiene a 35.0 cm del ojo. El árbol está a 28.0 m del espejo. ¿Cuál es su altura?
34.3. Como se muestra en la figura 34.9, el espejo 1 utiliza la imagen P_2' formada por el espejo 2 como objeto, y forma una imagen de ella. Demuestre que esta imagen está en el punto P_3' de la figura.

Sección 34.2 Reflexión en una superficie esférica

34.4. Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 34.0 cm. *a*) ¿Cuál es su distancia focal? *b*) Si se sumerge el espejo en agua (índice de refracción: 1.33), ¿cuál será su distancia focal?
34.5. Se coloca un objeto de 0.600 cm de altura a 16.5 cm a la izquierda del vértice de un espejo esférico cóncavo, cuyo radio de curvatura es de 22.0 cm. *a*) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen. *b*) Determine la posición, el tamaño, la orientación y la naturaleza (real o virtual) de la imagen.
34.6. Repita el ejercicio 34.5 aplicado ahora a un espejo convexo.
34.7. El diámetro de Marte es de 6794 km y su distancia mínima con respecto a la Tierra es de 5.58×10^7 km. Con Marte a esta distancia, determine el diámetro de la imagen del planeta que forma un espejo esférico y cóncavo de telescopio con una distancia focal de 1.75 m.
34.8. Un objeto está a 24.0 cm del centro de un adorno esférico de vidrio plateado de árbol de Navidad con un diámetro de 6.00 cm. ¿Cuáles son la posición y el aumento de su imagen?
34.9. Se coloca una moneda junto al lado convexo de una delgada coraza esférica de vidrio, cuyo radio de curvatura es de 18.0 cm. Se forma una imagen de 1.5 cm de alto de la moneda, 6.00 cm detrás de la coraza de vidrio. ¿Dónde está ubicada la moneda? Determine el tamaño, la orientación y la naturaleza (real o virtual) de la imagen.
34.10. Usted sostiene un tazón de ensalada esférico de 90 cm frente a su cara, con el fondo del tazón hacia usted. El tazón es de metal pulido con un radio de curvatura de 35 cm. *a*) ¿Dónde se localiza la imagen de su nariz de 2.0 cm de largo? *b*) ¿Cuáles son el tamaño, la orientación y la naturaleza (real o virtual) de la imagen?
34.11. *a*) Demuestre que la ecuación (34.6) se puede escribir como $s' = sf/(s - f)$ y que, por lo tanto, el aumento lateral, dado por la ecuación (34.7), se puede expresar como $m = f/(f - s)$. *b*) Use estas fórmulas para s' y m para graficar s' en función de s para el caso en que $f > 0$ (un espejo cóncavo). *c*) ¿Para que valores de s es s' positiva, de manera que la imagen sea real? *d*) ¿Con qué valores de s es s' negativa, de modo que la imagen sea virtual? *e*) ¿Dónde está la imagen cuando el objeto está inmediatamente por dentro del punto focal (s ligeramente menor que f)? *f*) ¿Dónde está la imagen si el objeto se halla en el infinito? *g*) ¿Dónde está la imagen si el objeto se halla junto al espejo ($s = 0$)? *h*) Grafique m en función de s con respecto al caso de un espejo cóncavo. *i*) ¿Con qué valores de s la imagen es *derecha* y más grande que el objeto? *j*) ¿Con qué valores de s la imagen es invertida? *k*) ¿Con qué valores de s la imagen es más pequeña que el objeto? *l*) ¿Qué le ocurre al tamaño de la imagen cuando el objeto se coloca en el punto focal?
34.12. Con base en las fórmulas de s' y m obtenidas en el inciso *a*) del ejercicio 34.11, grafique s' en función de s, y m en función de s, cuando $f < 0$ (espejo convexo), de modo que $f = -|f|$. *a*) ¿Con qué valores de s es s' positiva? *b*) ¿Con qué valores de s es s' negativa? *c*) ¿Dónde está la imagen si el objeto está en el infinito? *d*) ¿Dónde está la imagen si el objeto se halla junto al espejo ($s = 0$)? ¿Para qué valores de s la imagen es *e*) derecha, *f*) invertida, *g*) más grande que el objeto y *h*) más pequeña que el objeto.
34.13. Espejo de dentista. Un dentista utiliza un espejo curvo para inspeccionar la dentadura en el maxilar superior de la boca de sus pacientes. Suponga que el dentista quiere que se forme una imagen derecha con un aumento de 2.00, cuando el espejo está a 1.25 cm de una pieza dental. (Resuelva este problema como si el objeto y la imagen estuvieran a lo largo de una recta.) *a*) ¿Qué tipo de espejo (cóncavo o convexo) se necesita? Utilice un diagrama de rayos para responder sin

efectuar ningún cálculo. *b*) ¿Cuáles deben ser la distancia focal y el radio de curvatura de este espejo? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales para comprobar su respuesta al inciso *b*).

34.14. Un espejo esférico cóncavo para afeitarse tiene un radio de curvatura de 32.0 cm. *a*) ¿Cuál es el aumento del rostro de una persona cuando está 12.0 cm a la izquierda del vértice del espejo? *b*) ¿Dónde está la imagen? ¿La imagen es real o virtual? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen.

Sección 34.3 Refracción en una superficie esférica

34.15. Una partícula de tierra está incrustada a 3.50 cm bajo la superficie de una plancha de hielo ($n = 1.309$). ¿Cuál es su profundidad aparente vista a una incidencia normal?

34.16. Un tanque cuyo fondo es un espejo se llena con agua a una profundidad de 20.0 cm. Un pez pequeño flota inmóvil a 7.0 cm bajo la superficie del agua. *a*) ¿Cuál es la profundidad aparente del pez visto a una incidencia normal? *b*) ¿Cuál es la profundidad aparente de la imagen del pez vista a una incidencia normal?

34.17. Pecera esférica. Un pequeño pez tropical se halla en el centro de una pecera esférica, cuyo diámetro es de 28.0 cm y está llena de agua. *a*) Determine la posición aparente y el aumento del pez para un observador situado afuera de la pecera. Desprecie el efecto de las paredes delgadas de la pecera. *b*) Una amiga aconsejó a la dueña de la pecera mantener ésta lejos de la luz solar directa para no cegar al pez, el cual podría llegar nadando al punto focal de los rayos paralelos provenientes del Sol. ¿El punto focal está efectivamente adentro de la pecera?

34.18. El extremo izquierdo de una larga varilla de vidrio de 6.00 cm de diámetro tiene una superficie hemisférica convexa de 3.00 cm de radio. El índice de refracción del vidrio es de 1.60. Halle la posición de la imagen de un objeto colocado en aire sobre el eje de la varilla a las distancias siguientes a la izquierda del vértice del extremo curvo: *a*) infinitamente lejos, *b*) 12.0 cm, y *c*) 2.00 cm.

34.19. Se sumerge en aceite la varilla del ejercicio 34.18 ($n = 1.45$). Un objeto situado a la izquierda de la varilla en el eje de ésta formará una imagen en un punto que se halla a 1.20 m en el interior de la varilla. ¿Qué tan lejos del extremo izquierdo de la varilla debe estar colocado el objeto para formar la imagen?

34.20. El extremo izquierdo de una larga varilla de vidrio de 8.00 cm de diámetro, con un índice de refracción de 1.60, se esmerila y pule para formar una superficie hemisférica convexa con un radio de 4.00 cm. Un objeto con forma de flecha, de 1.50 mm de altura y en ángulo recto al eje de la varilla, está situado sobre el eje 24.0 cm a la izquierda del vértice de la superficie convexa. Calcule la posición y la altura de la imagen de la flecha formada por los rayos paraxiales que inciden en la superficie convexa. ¿La imagen es derecha o invertida?

34.21. Repita el ejercicio 34.20, en este caso con el extremo de la varilla pulido para formar una superficie hemisférica *cóncava* con un radio de 4.00 cm.

34.22. Se sumerge en un líquido la varilla del ejercicio 34.21. Un objeto situado a 14.0 cm del vértice del extremo izquierdo de la varilla y sobre su eje forma una imagen en un punto que se halla a 9.00 cm del vértice en el interior del líquido. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

Sección 34.4 Lentes delgadas

34.23. Se coloca un insecto, que mide 3.75 mm de largo, 22.5 cm a la izquierda de una lente delgada planoconvexa. La superficie izquierda de esta lente es plana, la superficie derecha tiene un radio de curvatura de 13.0 cm, y el índice de refracción del material del que está hecha la lente es de 1.70. *a*) Calcule la ubicación y el tamaño de la imagen del insecto que forma esta lente. ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que la lente está al revés.

34.24. Una lente forma una imagen de un objeto, el cual está a 16.0 cm de la lente. La imagen está a 12.0 cm de la lente del mismo lado que el objeto. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Ésta es convergente o divergente? *b*) Si el objeto tiene 8.50 mm de altura, ¿cuál será la altura de la imagen? ¿Es derecha o invertida? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales.

34.25. Una lente divergente de menisco (véase la figura 34.32a) con un índice de refracción de 1.52 tiene superficies esféricas, cuyos radios son de 7.00 cm y 4.00 cm. ¿Cuál es la posición de la imagen de un objeto colocado a 24.0 cm a la izquierda de la lente? ¿Cuál es su aumento?

34.26. Una lente convergente con una distancia focal de 90.0 cm forma una imagen de un objeto real de 3.20 cm de altura, que se halla a la izquierda de la lente. La imagen tiene 4.50 cm de altura y es invertida. ¿Dónde se encuentra el objeto, y dónde la imagen, con respecto a la lente? ¿La imagen es real o virtual?

34.27. Una lente convergente forma una imagen de un objeto real de 8.00 mm de alto. La imagen está a 12.0 cm a la izquierda de la lente, mide 3.40 cm de alto y es derecha. ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Dónde se localiza el objeto?

34.28. Una diapositiva fotográfica está a la izquierda de una lente, la cual proyecta una imagen de la diapositiva sobre un muro situado a 6.00 m a la derecha de la diapositiva. La imagen es 80.0 veces más grande que la diapositiva. *a*) ¿A qué distancia de la lente se halla la diapositiva? *b*) ¿La imagen es derecha o invertida? *c*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Ésta es convergente o divergente?

34.29. Una delgada lente biconvexa tiene superficies con radios de curvatura iguales que miden 2.50 cm. Al observar a través de esta lente, puede verse que forma una imagen de un árbol muy lejano a una distancia de 1.87 cm de la lente. ¿Cuál es el índice de refracción de la lente?

34.30. En la figura 34.32 se muestran seis lentes en aire. Todas las lentes son de un material cuyo índice de refracción en $n > 1$. Considerando cada lente por separado, imagine que entra luz a la lente desde la izquierda. Demuestre que las tres lentes de la figura 34.32a tienen distancia focal *positiva* y son, por lo tanto, lentes *convergentes*. Asimismo, demuestre que las tres lentes de la figura 34.32b tienen distancia focal *negativa* y son, por lo tanto, lentes *divergentes*.

34.31. Los ejercicios 34.11 a 34.12 se refieren a espejos esféricos. *a*) Demuestre que las ecuaciones de s' y m deducidas en el inciso *a*) del ejercicio 34.11 también son aplicables a las lentes delgadas. *b*) En el ejercicio 34.11 se utiliza un espejo cóncavo. Repita estos ejercicios con respecto a una lente convergente. ¿Hay diferencias en los resultados cuando se sustituye el espejo por una lente? Explique su respuesta. *c*) En el ejercicio 34.12 se utiliza un espejo convexo. Repita estos ejercicios con respecto a una lente divergente. ¿Hay diferencias en los resultados cuando se sustituye el espejo por una lente? Explique su respuesta.

34.32. Una lente convergente con una distancia focal de 12.0 cm forma una imagen virtual de 8.00 mm de altura, 17.0 cm a la derecha de la lente. Calcule la posición y el tamaño del objeto. ¿La imagen es derecha o invertida? ¿El objeto y la imagen están del mismo lado o en lados opuestos de la lente? Dibuje un diagrama de rayos principales de esta situación.

34.33. Repita el ejercicio 34.32 aplicado al caso de una lente divergente con una distancia focal de -48.0 cm.

34.34. Un objeto está 16.0 cm a la izquierda de una lente, la cual forma una imagen de 36.0 cm a su derecha. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Ésta es convergente o divergente? *b*) Si el objeto tiene 8.00 mm de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? ¿Es derecha o invertida? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales.

Sección 34.5 Cámaras fotográficas

34.35. Una lente de cámara tiene una distancia focal de 200 mm. ¿A qué distancia de la lente debe estar el sujeto de la fotografía, si la lente está a 20.4 mm de la película?

34.36. Cuando se enfoca una cámara, la lente se aleja o se acerca con respecto a la película. Si usted toma una fotografía de su amiga, quien se halla de pie a 3.90 m de la lente, con una cámara que tiene una lente cuya distancia focal es de 85 mm, ¿a qué distancia de la lente está la

película? ¿Cabe la imagen completa de su amiga, que tiene una estatura de 175 cm, en película de 24 mm × 36 mm?

34.37. La figura 34.41 muestra fotografías de una misma escena tomadas con una misma cámara con lentes de diferente distancia focal. Si el objeto está a 200 m de la lente, ¿cuál es la magnitud del aumento lateral con una lente cuya distancia focal es de *a*) 28 mm, *b*) 105 mm, y *c*) 300 mm?

34.38. Un fotógrafo toma una fotografía de una aeronave Boeing 747 (longitud: 70.7 m) cuando ésta vuela directamente sobre su cabeza a una altitud de 9.50 km. La lente tiene una distancia focal de 5.00 m. ¿Cuál es la longitud de la imagen de la aeronave en la película?

34.39. Elección de una lente de cámara. El tamaño de imagen de una película fotográfica ordinaria de 35 mm es de 24 mm × 36 mm. Las distancias focales de las lentes disponibles para cámaras de 35 mm son típicamente de 28, 35, 50 (la lente "normal"), 85, 100, 135, 200 y 300 mm, entre otras. ¿Cuál de estas lentes se debería utilizar para fotografiar los objetos siguientes, suponiendo que el objeto debe ocupar la mayor parte del área de la fotografía? *a*) Un edificio de 240 m de altura y 160 m de ancho a una distancia de 600 m. *b*) Una casa rodante de 9.6 m de largo a una distancia de 40.0 m.

34.40. Lente zoom. Considere el modelo simple de la lente zoom que se muestra en la figura 34.43a. La lente convergente tiene una distancia focal $f_1 = 12$ cm; y la lente divergente, una distancia focal $f_2 = -12$ cm. La separación entre las lentes es de 4 cm, como se muestra en la figura 34.43a. *a*) En el caso de un objeto distante, ¿dónde está la imagen de la lente convergente? *b*) La imagen de la lente convergente sirve como objeto de la lente divergente. ¿Cuál es la distancia de objeto que corresponde a la lente divergente? *c*) ¿Dónde se halla la imagen final? Compare su respuesta con la figura 34.43a. *d*) Repita los incisos *a*), *b*) y *c*) con respecto a la situación que se muestra en la figura 34.43b, donde la separación entre las lentes es de 8 cm.

34.41. La distancia focal de una lente de cámara es de 180.0 mm y su diámetro de abertura es de 16.36 mm. *a*) ¿Cuál es el número *f* de la lente? *b*) Si la exposición correcta de cierta escena es de $\frac{1}{30}$ s a *f*/11, ¿cuál es la exposición correcta a *f*/2.8?

34.42. Recuerde que la intensidad de la luz que llega a la película de una cámara fotográfica es proporcional al área efectiva de la lente. La cámara *A* tiene una lente con diámetro de abertura de 8.00 mm y fotografía un objeto usando el tiempo de exposición correcto de $\frac{1}{30}$ s. ¿Qué tiempo de exposición debería utilizarse con la cámara *B* al fotografiar el mismo objeto con la misma película, si la cámara tuviera una lente con diámetro de abertura de 23.1 mm?

34.43. Fotografía. Una cámara de 35 mm tiene una lente normal con una distancia focal de 50 mm y puede enfocar objetos entre 45 cm y el infinito. *a*) ¿La lente de esta cámara es cóncava o convexa? *b*) La cámara se enfoca haciendo girar la lente, con lo cual ésta se desplaza en el cuerpo de la cámara y cambia su distancia con respecto a la película. ¿En qué intervalo de distancias entre la lente y el plano de la película se debe desplazar la lente para enfocarla correctamente entre los límites de 45 cm y el infinito?

34.44. Usted desea proyectar la imagen de una diapositiva sobre una pantalla situada a 9.00 m de la lente del proyector de diapositivas. *a*) Si la diapositiva se coloca a 15.0 cm de la lente, ¿qué distancia focal de la lente se requiere? *b*) Si las dimensiones de la fotografía en una diapositiva a color de 35 mm son 24 mm × 36 mm, ¿cuál es el tamaño mínimo de la pantalla de proyección que se requiere para que quepa la imagen?

Sección 34.6 El ojo

34.45. *a*) ¿Dónde se halla el punto cercano de un ojo al que se ha prescrito una lente de contacto con una potencia de +2.75 dioptrías? *b*) ¿Dónde se halla el punto lejano de un ojo al que se ha prescrito una lente de contacto con una potencia de −1.30 dioptrías para hipermetropía?

34.46. Curvatura de la córnea. En un modelo simplificado del ojo humano, los humores acuoso y vítreo y el cristalino tienen todos un índice de refracción de 1.40, y toda la refracción tiene lugar en la córnea, cuyo vértice está a 2.60 cm de la retina. ¿Cuál debería ser el radio de curvatura de la córnea, para que la imagen de un objeto situado a 40.0 cm del vértice de la córnea esté enfocado en la retina?

34.47. Lentes correctivas. Determine la potencia de las lentes de contacto correctivas que requiere *a*) un ojo hipermétrope cuyo punto cercano está a 60.0 cm; *b*) un ojo miope cuyo punto lejano está a 60.0 cm.

Sección 34.7 La lente de aumento

34.48. Una lente delgada con una distancia focal de 6.00 cm se utiliza como lupa simple. *a*) ¿Qué aumento angular se puede obtener con la lente, si el objeto está en el punto focal? *b*) Cuando se examina un objeto a través de la lente, ¿cuánto se puede aproximar a la lente? Suponga que la imagen que el ojo ve está en el punto cercano, a 25.0 cm del ojo, y que la lente está muy cerca del ojo.

34.49. La distancia focal de una lupa simple es de 8.00 cm. Suponga que la lente de aumento es una lente delgada muy próxima al ojo. *a*) ¿A qué distancia delante de la lente de aumento se debe colocar el objeto para que la imagen se forme en el punto cercano del observador, a 25.0 cm frente a su ojo? *b*) Si el objeto tiene 1.00 mm de altura, ¿cuál será la altura de su imagen formada por la lente de aumento?

34.50. Se desea observar a un insecto de 2.00 mm de longitud a través de una lente de aumento. Si el insecto va a estar en el punto focal de la lente de aumento, ¿qué distancia focal proporcionará a la imagen del insecto un tamaño angular de 0.025 radianes?

34.51. Se está examinando una hormiga con una lente de aumento, cuya distancia focal es de 5.00 cm. Si la imagen de la hormiga aparece a 25.0 cm de la lente, ¿a qué distancia de la lente se encuentra la hormiga? ¿De qué lado de la lente está la imagen?

Sección 34.8 Microscopios y telescopios

34.52. Definición de un microscopio. La imagen formada por un objetivo de microscopio con una distancia focal de 5.00 mm está a 160 mm de su segundo punto focal. El ocular tiene una distancia focal de 26.0 mm. *a*) ¿Cuál es el aumento angular del microscopio? *b*) En su punto cercano, el ojo no asistido puede distinguir dos puntos individualmente, si están separados por una distancia de 0.10 mm. ¿Cuál es la separación mínima entre dos puntos que este microscopio puede definir?

34.53. La distancia focal del ocular de cierto microscopio es de 18.0 mm. La distancia focal del objetivo es de 8.00 mm. La distancia entre el objetivo y el ocular es de 19.7 cm. La imagen final formada por el ocular está en el infinito. Trate todas las lentes como delgadas. *a*) ¿Cuál es la distancia del objetivo al objeto que se observa? *b*) ¿Cuál es la magnitud del aumento lineal que el objetivo produce? *c*) ¿Cuál es el aumento angular total del microscopio?

34.54. Cierto microscopio cuenta con objetivos cuya distancia focal es de 16 mm, 4 mm y 1.9 mm, y con oculares que proporcionan aumentos angulares de 5× y 10×. Cada objetivo forma una imagen a 120 mm más allá de su segundo punto focal. Determine *a*) el máximo aumento angular total asequible; *b*) el mínimo aumento angular total asequible.

34.55. El telescopio de refracción Yerkes de la Universidad de Chicago tiene un objetivo de 1.02 m de diámetro con un número *f* de 19.0. (Se trata del telescopio de refracción de mayor diámetro del mundo.) ¿Cuál es su distancia focal?

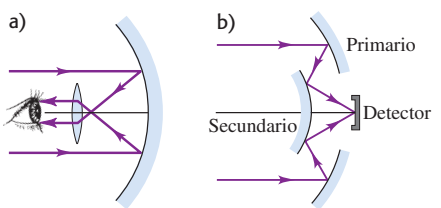
34.56. El ocular de un telescopio de refracción (véase la figura 34.53) tiene una distancia focal de 9.00 cm. La distancia entre el objetivo y el ocular es de 1.80 m, y la imagen final está en el infinito. ¿Cuál es el aumento angular del telescopio?

34.57. Se construye un telescopio con dos lentes con distancias focales de 95.0 cm y 15.0 cm, con la lente de 95.0 cm como objetivo. Tanto el objeto que se observa como la imagen final están en el infinito. *a*) Determine el aumento angular del telescopio. *b*) Calcule la altura de la imagen que el objetivo forma de un edificio de 60.0 m de altura que está a 3.00 km de distancia. *c*) ¿Cuál es el tamaño angular de la imagen final vista por un ojo muy próximo al ocular?

34.58. Desde el Observatorio Lick se observa Saturno por medio de un telescopio de refracción (distancia focal del objetivo, 18 m). Si el diámetro de la imagen de Saturno que produce el objetivo es de 1.7 mm, ¿qué ángulo subtiende Saturno cuando se le observa desde la Tierra?

34.59. Se va a construir un telescopio de reflexión (véase la figura 34.55a) con un espejo esférico cuyo radio de curvatura es de 1.30 m y un ocular con una distancia focal de 1.10 cm. La imagen final está en el infinito. *a*) ¿Cuál debe ser la distancia entre el ocular y el vértice del espejo, si se supone que el objeto está en el infinito? *b*) ¿Cuál será el aumento angular?

Figura **34.55** Ejercicios 34.59, 34.60 y problema 34.112.



34.60. Un telescopio reflectante del sistema Cassegrain utiliza dos espejos, y el espejo secundario se enfoca en la imagen a través de un orificio del espejo primario (similar al de la figura 34.55b). Se desea enfocar la imagen de una galaxia distante en el detector de la figura. Si el espejo primario tiene una distancia focal de 2.5 m, el espejo secundario tiene una distancia focal de -1.5 m y la distancia entre el vértice del espejo primario y el detector es de 15 cm. ¿Cuál debería ser la distancia entre los vértices de los dos espejos?

Problemas

34.61. Si se aleja corriendo de un espejo plano a 2.40 m/s, ¿con qué rapidez se aleja su imagen de usted?

34.62. Se coloca un objeto entre dos espejos planos dispuestos en ángulo recto entre sí, a una distancia d_1 de la superficie de uno de los espejos y a una distancia d_2 del otro. *a*) ¿Cuántas imágenes se forman? Muestre la ubicación de las imágenes en un diagrama. *b*) Dibuje la trayectoria de los rayos del objeto al ojo de un observador.

34.63. ¿De qué tamaño es el espejo vertical plano más pequeño en el que una mujer de estatura h puede ver su imagen completa?

34.64. Una bombilla luminosa está a 4.00 m de un muro. Se va a utilizar un espejo cóncavo para proyectar una imagen de la bombilla sobre el muro, de tal modo que la imagen sea 2.25 veces más grande que el objeto. ¿A qué distancia del muro debe estar el espejo? ¿Cuál debe ser su radio de curvatura?

34.65. Un espejo cóncavo debe formar una imagen del filamento de una lámpara de faro automotriz sobre una pantalla situada a 8.00 m del espejo. La altura del filamento es de 6.00 mm, y la imagen debe tener 36.0 cm de altura. *a*) ¿A qué distancia delante del vértice del espejo se debe colocar el filamento? *b*) ¿Cuál debe ser el radio de curvatura del espejo?

34.66. Espejo retrovisor. El espejo del lado del pasajero de su auto es convexo y tiene un radio de curvatura cuya magnitud es de 18.0 cm. *a*) Se observa otro auto en este espejo lateral a 13.0 m detrás del espejo. Si este auto tiene 1.5 m de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? *b*) El espejo lleva una advertencia con respecto a que los objetos que se ven en él están más cerca de lo que parecen. ¿A qué se debe esto?

34.67. Suponga que el filamento de la lámpara del ejemplo 34.1 (sección 34.2) se lleva a una posición a 8.0 cm delante del espejo. *a*) ¿Dónde se halla ahora la imagen? ¿Es real o virtual? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Es derecha o invertida? *c*) En el ejemplo 34.1, el filamento está a 10.0 cm delante del espejo, y se forma una imagen del filamento sobre un muro a 3.00 m del espejo. Si el filamento está a 8.0 cm del espejo, ¿se puede colocar un muro de modo que se forme una imagen sobre él? En caso afirmativo, ¿dónde se debe colocar el muro? En caso negativo, ¿por qué?

34.68. ¿Dónde se debe colocar un objeto delante de un espejo cóncavo de radio R, de modo que la imagen sea derecha y $2\frac{1}{2}$ veces más grande que el objeto? ¿Dónde se halla la imagen?

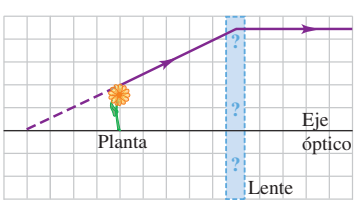
34.69. Objeto virtual. Si la luz que incide desde la izquierda en un espejo convexo no diverge a partir de un punto de objeto, sino que converge hacia un punto situado a una distancia (negativa) s a la derecha del espejo, este punto se describe como un *objeto virtual*. *a*) En el caso de un espejo convexo con un radio de curvatura de 24.0 cm, ¿en qué intervalo de posiciones del objeto virtual se forma una imagen real? *b*) ¿Cuál es la orientación de esta imagen real? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de esta imagen.

34.70. Una capa de benceno ($n = 1.50$) de 2.60 cm de espesor flota sobre agua ($n = 1.33$) cuya profundidad es de 6.50 cm. ¿Cuál es la distancia aparente de la superficie superior del benceno al fondo de la capa de agua, vista con una incidencia normal?

34.71. Dibuje varias lentes delgadas posibles que puedan obtenerse al combinar dos superficies cuyos radios de curvatura son de 4.00 cm y 8.00 cm en magnitud absoluta. ¿Cuáles son convergentes y cuáles son divergentes? Obtenga la distancia focal de cada una, si las superficies están hechas de vidrio cuyo índice de refracción es de 1.60.

34.72. La figura 34.56 muestra una pequeña planta ubicada cerca de una lente delgada. El rayo que se ilustra es uno de los rayos principales de la lente. Cada cuadro equivale a 2.0 cm a lo largo de la dirección horizontal, pero la dirección vertical no está a la misma escala. Utilice la información del diagrama para responder las siguientes preguntas: *a*) A partir sólo del rayo mostrado, defina qué tipo de lente es ésta (convergente o divergente). *b*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? *c*) Localice la imagen dibujando los otros dos rayos principales. *d*) Calcule dónde debería estar la imagen y compare este resultado con la solución gráfica en el inciso *c*).

Figura **34.56** Problema 34.72.



34.73. Usted conduce su automóvil por la autopista a 25 m/s, cuando echa un vistazo al espejo lateral del pasajero (un espejo convexo con radio de curvatura de 150 cm) y advierte que un camión se acerca a usted. Si la imagen del camión se acerca al vértice del espejo a una rapidez de 1.5 m/s, cuando el camión está a 2.0 m de distancia, ¿con qué rapidez se mueve el camión en relación con la autopista?

34.74. Se enfoca un microscopio sobre la superficie superior de una placa de vidrio. En seguida se coloca una segunda placa sobre la primera. Para enfocar la superficie inferior de la segunda placa, es necesario elevar el microscopio 0.780 mm. Para enfocar la superficie superior, es preciso elevarlo otros 2.50 mm. Calcule el índice de refracción de la segunda placa.

34.75. Imagen tridimensional. El aumento *longitudinal* se define como $m' = ds'/ds$. Relaciona la dimensión longitudinal de un objeto pequeño con la dimensión longitudinal de su imagen. *a*) Demuestre que, en el caso de un espejo esférico, $m' = -m^2$. ¿Cuál es el significado

del hecho de que m' sea *siempre* negativo? *b*) Una armazón de alambre en forma de un cubo pequeño de 1.00 mm por lado se coloca con su centro sobre el eje de un espejo cóncavo con un radio de curvatura de 150.0 cm. Los lados del cubo son todos ya sea paralelos o perpendiculares al eje. La cara del cubo que da hacia el espejo está a 200.0 cm a la izquierda del vértice del espejo. Obtenga i) la ubicación de la imagen de esta cara y de la cara opuesta del cubo; ii) los aumentos lateral y longitudinal, iii) la forma y dimensiones de cada una de las seis caras de la imagen.

34.76. Remítase al problema 34.75. Demuestre que el aumento longitudinal m' correspondiente a la refracción en una superficie esférica viene dado por

$$m' = -\frac{n_b}{n_a}m^2$$

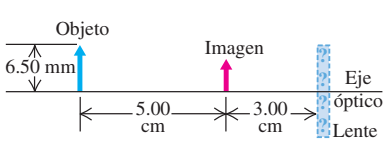
34.77. Cámara estenopeica. Una cámara estenopeica es tan sólo una caja rectangular con un diminuto orificio en una de sus caras. La película se coloca en la cara opuesta a este orificio y es ahí donde se forma la imagen. La cámara forma una imagen *sin* una lente. *a*) Dibuje claramente un diagrama de rayos, para mostrar cómo es que una cámara estenopeica puede formar una imagen en la película sin utilizar una lente. (*Sugerencia:* imagine que coloca un objeto fuera del agujero, y luego dibuje los rayos que pasan a través del agujero hacia el lado opuesto de la caja.) *b*) Cierta cámara estenopeica es una caja con lados cuadrados de 25 cm por lado y con 20.0 cm de profundidad, con un orificio en el medio de una de las caras de 25 cm × 25 cm. Si la cámara se utiliza para fotografiar un voraz pollo que mide 18 cm de altura y que está a 1.5 m enfrente de la cámara, ¿qué tan grande es la imagen del ave en la película? ¿Cuál es el aumento de esta cámara?

34.78. Una varilla de vidrio. Se esmerilan y se pulen ambos extremos de una varilla de vidrio con un índice de refracción de 1.60 para formar superficies hemisféricas convexas. En el extremo izquierdo el radio de curvatura es de 6.00 cm, y en el extremo derecho, de 12.0 cm. La longitud de la varilla entre los vértices es de 40.0 cm. Para la superficie del extremo izquierdo el objeto es una flecha que se encuentra 23.0 cm a la izquierda del vértice de esta superficie. La flecha tiene 1.50 mm de altura y forma un ángulo recto con el eje. *a*) ¿Qué es lo que constituye el objeto para la superficie del extremo derecho de la varilla? *b*) ¿Cuál es la distancia de objeto con respecto a esta superficie? *c*) ¿El objeto de esta superficie es real o virtual? (*Sugerencia:* véase el problema 34.69.) *d*) ¿Cuál es la posición de la imagen final? *e*) ¿La imagen final es real o virtual l? ¿Es derecha o invertida con respecto al objeto original? *f*) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

34.79. La varilla del problema 34.78 se acorta a una distancia de 25.0 cm entre sus vértices; las curvaturas de sus extremos no cambian. Como en el problema 34.78, para la superficie del extremo izquierdo el objeto es una flecha que se encuentra 23.0 cm a la izquierda del vértice de esta superficie. La flecha tiene 1.50 mm de altura y forma un ángulo recto con el eje. *a*) ¿Cuál es la distancia de objeto con respecto a la superficie del extremo derecho de la varilla? k) ¿El objeto de esta superficie es real o virtual? *c*) ¿Cuál es la posición de la imagen final? *d*) ¿La imagen final es real o virtual? ¿Es derecha o invertida con respecto al objeto original? *e*) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

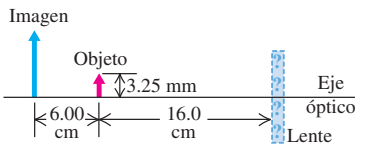
34.80. La figura 34.57 ilustra un objeto y su imagen formada mediante una lente delgada. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente y qué tipo de lente es (convergente o divergente)? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Es real o virtual?

Figura 34.57 Problema 34.80



34.81. La figura 34.58 ilustra un objeto y su imagen formada mediante una lente delgada. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente y qué tipo de lente es (convergente o divergente)? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Es real o virtual?

Figura 34.58 Problema 34.81



34.82. A una varilla transparente de 30.0 cm de largo se le hace un corte plano en un extremo. El otro extremo se redondea para formar una superficie hemisférica con un radio de 10.0 cm. Un objeto pequeño se encuentra incrustado dentro de la varilla a lo largo del eje de ésta y equidistante de sus extremos, a 15.0 cm del extremo plano y a 15.0 cm del vértice del extremo curvo. Vista desde el extremo plano de la barra, la profundidad aparente del objeto es de 9.50 cm con respecto al extremo plano. ¿Cuál es la profundidad aparente vista desde el extremo curvo?

34.83. Un hemisferio sólido de vidrio con radio de 12.0 cm y con un índice de refracción $n = 1.50$ se coloca con su cara plana hacia abajo sobre una mesa. Un haz luminoso paralelo con una sección transversal circular de 3.80 mm de diámetro se propaga en línea recta hacia abajo, y entra en el hemisferio por el centro de la superficie curva. *a*) ¿Cuál es el diámetro del círculo de luz que se forma sobre la mesa? *b*) ¿De qué modo el resultado depende del radio del hemisferio?

34.84. Una copa de vino de paredes gruesas que reposa sobre una mesa se puede considerar como una esfera de vidrio hueca, con un radio exterior de 4.00 cm y un radio interior de 3.40 cm. El índice de refracción del vidrio de la copa es de 1.50. *a*) Un haz de rayos luminosos paralelos entra por un lado de la copa vacía a lo largo de un radio horizontal. ¿Dónde, si acaso, se forma una imagen? *b*) Se llena la copa de vino blanco ($n = 1.37$). ¿Dónde se forma la imagen?

34.85. Foco del ojo. La córnea del ojo tiene un radio de curvatura de aproximadamente 0.50 cm, y el humor acuoso detrás de él tiene un índice de refracción de 1.35. El grosor de la córnea por sí solo es suficientemente pequeño como para despreciar su magnitud. La profundidad del ojo de una persona común es de cerca de 25 mm. *a*) ¿Cuál tendría que ser el radio de curvatura de la córnea para que, por sí sola, pudiera enfocar en la retina la imagen de una montaña distante? Considere que la retina se encuentra en la parte posterior del ojo, opuesta a la córnea. *b*) Si la córnea enfocara la montaña correctamente en la retina como se describió en el inciso *a*), ¿también enfocaría en la retina el texto en la pantalla de una computadora, si esa pantalla estuviera a 25 cm enfrente del ojo? Si no, ¿dónde enfocaría ese texto: enfrente o detrás de la retina? *c*) Si la córnea tiene un radio de curvatura de 5.0 mm aproximadamente, ¿dónde se enfocaría en realidad la montaña? ¿La imagen estaría enfrente o detrás de la retina? ¿Esto nos permite comprender por qué el ojo necesita ayuda de una lente para completar la tarea de enfocar?

34.86. A una varilla transparente de 50.0 cm de largo y con un índice de refracción de 1.60 se le practica un corte plano en el extremo derecho. El extremo izquierdo se redondea para formar una superficie hemisférica con un radio de 15.0 cm. Se coloca un objeto sobre el eje de la varilla a 12.0 cm a la izquierda del vértice del extremo hemisférico. *a*) ¿Cuál es la posición de la imagen final? *b*) ¿Cuál es su aumento?

34.87. ¿Cuál debe ser el índice de refracción de una esfera transparente para que los rayos paraxiales provenientes de un objeto infinitamente distante se enfoquen en el vértice de la superficie opuesta al punto de incidencia?

34.88. Los extremos de una varilla de vidrio con un índice de refracción de 1.55 se esmerilan y se pulen para formar superficies hemisféricas de 6.00 cm de radio. Cuando se coloca un objeto sobre el eje de la varilla, 25.0 cm a la izquierda del extremo izquierdo, la imagen final se forma 65.0 cm a la derecha del extremo derecho. ¿Cuál es la longitud de la barra medida entre los vértices de las dos superficies hemisféricas?

34.89. Dos lentes delgadas cuya distancia focal tiene una magnitud de 15.0 cm, la primera convergente y la segunda divergente, se disponen a 12.00 cm una de la otra. Se coloca un objeto de 4.00 mm de altura 5.00 cm a la izquierda de la primera lente (divergente). *a*) ¿A qué distancia de esta primera lente se forma la imagen? *b*) ¿A qué distancia del objeto se forma la imagen final? *c*) ¿La imagen final es real o virtual? *d*) ¿Cuál es la altura de la imagen final? ¿Es derecha o invertida?

34.90. Los radios de curvatura de las superficies de una lente convergente delgada de menisco son $R_1 = +12.0$ cm y $R_2 = +28.0$ cm. El índice de refracción es de 1.60. *a*) Calcule la posición y el tamaño de la imagen de un objeto con forma de flecha de 5.00 mm de altura, perpendicular al eje de la lente, 45.0 cm a la izquierda de la lente. *b*) Se coloca una segunda lente convergente, de la misma distancia focal, 3.15 m a la derecha de la primera. Determine la posición y el tamaño de la imagen final. ¿La imagen final es derecha o invertida con respecto al objeto original? *c*) Repita el inciso *b*) con la segunda lente 45.0 cm a la derecha de la primera.

34.91. Un objeto a la izquierda de una lente se proyecta por medio de ésta sobre una pantalla ubicada a 30.0 cm a la derecha de la lente. Cuando la lente se mueve 4.00 cm hacia la derecha, la pantalla debe moverse 4.00 cm hacia la izquierda para volver a enfocar la imagen. Determine la distancia focal de la lente.

34.92. Por refracción en una superficie esférica, la primer distancia focal f se define como el valor de s que corresponde a $s' = \infty$, como se ilustra en la figura 34.59a. La segunda distancia focal f' se define como el valor de s' cuando $s = \infty$, como se muestra en la figura 34.59b. *a*) Demuestre que $n_a/n_b = f/f'$. *b*) Demuestre que la relación general entre el objeto y la distancia de imagen es

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1$$

Figura **34.59** Problema 34.92.

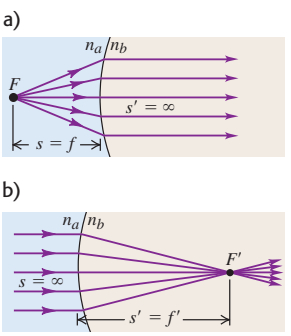
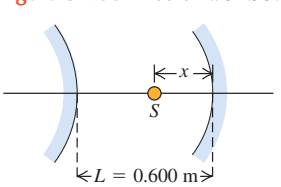


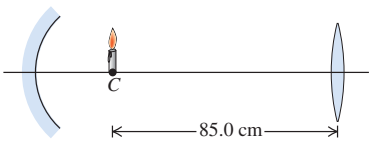
Figura **34.60** Problema 34.93.



34.93. Se colocan sobre un mismo eje óptico un espejo convexo y un espejo cóncavo, separados por una distancia $L = 0.600$ m. La magnitud del radio de curvatura de cada espejo es de 0.360 m. Una fuente de luz se encuentra a una distancia x del espejo cóncavo, como se muestra en la figura 34.60. *a*) ¿Con qué distancia x los rayos de la fuente regresarán a ésta, después de reflejarse primero en el espejo convexo y luego en el cóncavo? *b*) Repita el inciso *a*), pero ahora considerando que los rayos se reflejan primero en el espejo cóncavo y después en el convexo.

34.94. Como se muestra en la figura 34.61, la vela está en el centro de la curvatura del espejo cóncavo, cuya distancia focal es de 10.0 cm. El lente convergente tiene una distancia focal de 32.0 cm y está 85.0 cm a la derecha de la vela. Se observa la vela mirando a través de la lente de la derecha. La lente forma dos imágenes de la vela. La primera es producto de la luz que pasa directamente a través de la lente; la segunda, de la luz que se propaga de la vela al espejo, se refleja y luego pasa a través de la lente. *a*) Con respecto a cada una de estas dos imágenes, dibuje un diagrama de rayos principales para localizar la imagen. *b*) Con respecto a cada imagen, responda las preguntas siguientes: i) ¿Dónde está la imagen? ii) ¿La imagen es real o virtual? iii) ¿La imagen es derecha o invertida con respecto al objeto original?

Figura **34.61** Problema 34.94.



34.95. Se pule uno de los extremos de una larga varilla de vidrio para darle forma hemisférica convexa. Este vidrio tiene un índice de refracción de 1.55. Cuando se coloca una pequeña hoja a 20.0 cm enfrente del centro del hemisferio a lo largo del eje óptico, se forma una imagen dentro del vidrio a 9.12 cm de la superficie esférica. ¿Dónde se formaría la imagen si el vidrio ahora estuviera sumergido en agua (índice de refracción: 1.33), pero todo lo demás permaneciera igual?

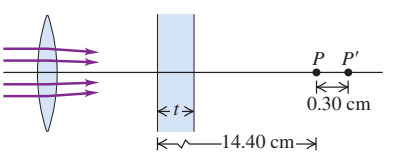
34.96. Dos lentes en contacto. *a*) Demuestre que, cuando se ponen *en contacto* dos lentes delgadas con distancias focales f_1 y f_2, la distancia focal f de la combinación está dada por la relación

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

b) Una lente convergente de menisco (véase la figura 34.32a) tiene un índice de refracción de 1.55, y los radios de curvatura de sus superficies son de 4.50 cm y 9.00 cm. La superficie cóncava se coloca hacia arriba y se llena de tetracloruro de carbono (CCl_4, $n = 1.46$). ¿Cuál es la distancia focal de la combinación de CCl_4 y vidrio?

34.97. Los rayos de una lente convergen hacia una imagen puntual P situada a la derecha de la lente. ¿Qué espesor t debe tener un vidrio con un índice de refracción de 1.60, interpuesto entre la lente y P, para que la imagen se forme en P', 0.30 cm a la derecha de P? En la figura 34.62 se muestra la ubicación tanto del vidrio como de los puntos P y P'.

Figura **34.62** Problema 34.97.



34.98. Lente en un líquido. Las lentes obedecen la ley de Snell: doblan los rayos de luz en cada superficie, en una medida determinada por el índice de refracción de la lente y el índice del medio en el que se encuentra la lente. *a*) La ecuación (34.19) supone que la lente está rodeada de aire. Considere, en cambio, una lente delgada inmersa en un líquido con un índice de refracción $n_{líq}$. Pruebe que la distancia focal f' viene dada en este caso por la ecuación (34.19) con $n/n_{líq}$ en vez de n. *b*) Una lente delgada con un índice n tiene una distancia focal f en un vacío. Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que, cuando esta lente se sumerge en un líquido con índice $n_{líq}$, tiene una nueva distancia focal dada por

$$f' = \left[\frac{n_{líq}(n-1)}{n - n_{líq}}\right] f$$

34.99. Cuando se coloca un objeto a la distancia adecuada a la izquierda de cierta lente convergente, la imagen queda enfocada en una pantalla situada 30.0 cm a la derecha de la lente. Ahora se coloca una lente divergente 15.0 cm a la derecha de la lente convergente, y se halla que es necesario desplazar la pantalla otros 19.2 cm a la derecha para obtener una imagen nítida. ¿Cuál es la distancia focal de la lente divergente?

34.100. Se dispone un espejo esférico convexo con una distancia focal de 24.0 cm de magnitud colocado a 20.0 cm a la izquierda de un espejo plano. Se coloca un objeto de 0.250 cm de altura a medio camino entre la superficie del espejo plano y el vértice del espejo esférico. El espejo esférico forma imágenes múltiples del objeto. ¿Dónde se localizan las dos imágenes del objeto formadas por el espejo esférico que se hallan más próximas a éste, y cuál es la altura de cada imagen?

34.101. Una plancha de vidrio de 3.50 cm de espesor, con un índice de refracción de 1.55 y caras planas paralelas, se sostiene con sus caras horizontales y su cara inferior a 6.00 cm arriba de una página impresa. Obtenga la posición de la imagen de la página formada por los rayos que forman un ángulo pequeño con la normal a la plancha.

34.102. Una lente delgada biconvexa y simétrica de vidrio, con un índice de refracción de 1.52, tiene una distancia focal en aire de 40.0 cm. La lente cierra herméticamente una abertura en el extremo izquierdo de un tanque lleno de agua. En el extremo derecho del tanque, opuesto a la lente, se halla un espejo plano a 90.0 cm de la lente. El índice de refracción del agua es de $\frac{4}{3}$. *a*) Calcule la posición de la imagen que forma el sistema de lente-agua-espejo de un objeto pequeño que se encuentra afuera del tanque, sobre el eje de la lente y a 70.0 cm a la izquierda de ésta. *b*) ¿La imagen es real o virtual? c) ¿Es derecha o invertida? *d*) Si la altura del objeto fuera de 4.00 mm, ¿cuál sería la altura de la imagen?

34.103. Su cámara fotográfica tiene una lente con una distancia focal de 35.0 mm y película de 36.0 mm de ancho. Al tomar una fotografía de un velero de 12.0 m de largo, usted observa que la imagen del bote ocupa sólo $\frac{1}{4}$ de la anchura de la película. *a*) ¿A qué distancia está usted del velero? *b*) ¿A qué distancia tendría que colocarse usted para que la imagen del velero ocupe toda la anchura de la película?

34.104. Un objeto se encuentra a 18.0 cm de una pantalla. *a*) ¿En cuáles dos puntos entre objeto y pantalla se puede colocar una lente convergente con una distancia focal de 3.00 cm, para obtener una imagen sobre la pantalla? *b*) ¿Cuál es el aumento de la imagen que corresponde a cada posición de la lente?

34.105. Tres lentes delgadas, cada una con una distancia focal de 40.0 cm, están alineadas sobre un eje común; la separación entre lentes adyacentes es de 52.0 cm. Calcule la posición de la imagen de un objeto pequeño situado sobre el eje, 80.0 cm a la izquierda de la primera lente.

34.106. Una cámara fotográfica cuya lente tiene una distancia focal de 90 mm está enfocada en un objeto situado a 1.30 m de la lente. Para enfocar ahora un objeto que está a 6.50 m de la lente, ¿en cuánto es necesario modificar la distancia entre la lente y la película? Para enfocar el objeto más distante, ¿se debe alejar o acercar la lente a la película?

34.107. Al deducir la expresión del aumento angular [ecuación (34.22)] se supuso un punto cercano de 25 cm. De hecho, el punto cercano cambia con la edad, como se muestra en la tabla 34.1. Para conseguir un aumento angular de 2.0×, ¿qué distancia focal debe emplear una persona con una edad de *a*) 10 años, *b*) 30 años, *c*) 60 años? *d*) Si una persona de 60 años utiliza la lente que proporciona una $M = 2.0$ a una persona de 10 años, ¿qué aumento angular obtendrá el observador de mayor edad? *e*) ¿Significa su respuesta al inciso *d*) que los observadores de mayor edad pueden ver imágenes más aumentadas que los observadores jóvenes? Explique su respuesta.

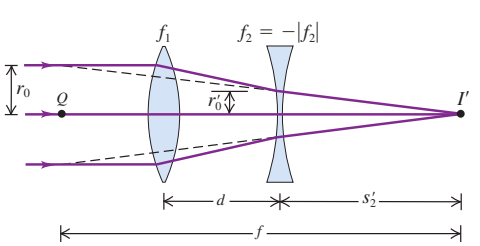
34.108. Aumento angular. Al deducir la ecuación (34.22) del aumento angular de una lente de aumento, se supuso que el objeto se encuentra en el punto focal de la lente de aumento, por lo que la imagen virtual se forma en el infinito. Suponga, en cambio, que se coloca el objeto de modo que la imagen virtual aparezca en el punto cercano de 25 cm de un observador promedio, el punto más próximo en el que éste puede enfocar el objeto. *a*) ¿Dónde se debe colocar el objeto para conseguir esto? Exprese su respuesta en términos de la distancia focal f de la lente de aumento. *b*) ¿Qué ángulo θ' subtenderá un objeto de altura y en la posición identificada en el inciso *a*)? *c*) Halle el aumento angular M con el objeto en la posición hallada en el inciso *a*). El ángulo θ es el mismo que en la figura 34.51a, pues se refiere a la observación del objeto *sin* la lente de aumento. *d*) Si se emplea una lente convexa de $f = +10.0$ cm, ¿cuál es el valor de M con el objeto en la posición identificada en el inciso *a*)? ¿Cuántas veces más grande es M en este caso, que cuando la imagen se forma en el infinito? *e*) En la descripción de un microscopio compuesto en la sección 34.8, se afirma que, en un instrumento proyectado correctamente, la imagen real que el objetivo forma se encuentra *inmediatamente por dentro* del primer punto focal F_1' del ocular. ¿Qué ventajas ofrece el hecho de que el objetivo forme una imagen inmediatamente por dentro de F_1', en comparación con una imagen formada precisamente en F_1'? ¿Qué ocurre si la imagen formada por el objetivo está *inmediatamente por fuera* de F_1'?

34.109. En una forma de cirugía para cataratas, se sustituye el cristalino natural del paciente, que se ha enturbiado, por una lente artificial. Es posible elegir las propiedades refractivas de la lente de repuesto, de modo que el ojo de la persona enfoque los objetos distantes. Pero no existe acomodación, y se necesitan anteojos o lentes de contacto para ver de cerca. ¿Cuál es la potencia, en dioptrías, de las lentes de contacto correctivas que permiten a una persona que ha sido sometida a una cirugía de este tipo enfocar una página de un libro a una distancia de 24 cm?

34.110. Ojo miope. Cierta persona muy miope es incapaz de enfocar nada que esté a más de 36.0 cm del ojo. Considere el modelo simplificado del ojo que se describe en el ejercicio 34.46. Si el radio de curvatura de la córnea es de 0.75 cm cuando el ojo está enfocado en un objeto a 36.0 cm del vértice de la córnea y los índices de refracción son como se describe en el ejercicio 34.46, ¿cuál es la distancia del vértice de la córnea a la retina? ¿Qué indica esto acerca de la forma del ojo miope?

34.111. Distancia focal de una lente zoom. La figura 34.63 muestra una versión simplificada de una lente zoom. La lente convergente tiene una distancia focal f_1, y la lente divergente, una distancia focal $f_2 = -|f_2|$. Las dos lentes están separadas por una distancia variable d que siempre es menor que f_1. Asimismo, la magnitud de la distancia focal de la lente divergente satisface la desigualdad $|f_2| > (f_1 - d)$. Para hallar la distancia focal efectiva de la lente combinada, considere un haz de rayos paralelos de radio r_0 que entran en la lente convergente. *a*) Demuestre que el radio del haz de rayos disminuye hasta $r_0' = r_0(f_1 - d)/f_1$, en el punto donde penetra en la lente divergente. *b*) Demuestre que la imagen final I' se forma a una distancia $s_2' = |f_2|(f_1 - d)/(|f_2| - f_1 + d)$ a la derecha de la lente divergente. *c*) Si los rayos que emergen de la lente divergente y alcanzan el punto de imagen final se prolongan hacia atrás, a la izquierda de la lente divergente, terminarán expandiéndose hasta el radio original r_0 en algún punto Q. La distancia de imagen final I' al punto Q es la *distancia focal efectiva* f de la combinación de lentes; si se sustituyera la combinación por una sola lente de distancia focal f colocada en Q, los rayos paralelos seguirían enfocándose en I'. Demuestre que la distancia focal efectiva es $f = f_1|f_2|/(|f_2| - f_1 + d)$. *d*) Si $f_1 = 12.0$ cm,

Figura **34.63** Problema 34.111.



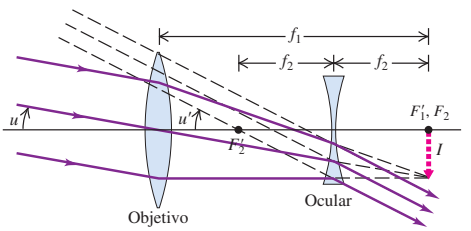
$f_2 = -18.0$ cm y la separación d es ajustable entre cero y 4.0 cm, halle las distancias focales máxima y mínima de la combinación. ¿Con qué valor de d se tiene $f = 30.0$ cm?

34.112. Cierto telescopio de reflexión, construido como se muestra en la figura 34.55a, tiene un espejo esférico con un radio de curvatura de 96.0 cm y un ocular con una distancia focal de 1.20 cm. Si la magnitud del aumento angular es de 36 y el objeto se encuentra en el infinito, halle la posición del ocular y la posición y naturaleza (real o virtual) de la imagen final. (*Nota*: $|M|$ *no* es igual a $|f_1/f_2|$, por lo tanto, la imagen formada por el ocular *no* está en el infinito.)

34.113. Un microscopio con un objetivo cuya distancia focal es de 8.00 mm, y un ocular con una distancia focal de 7.50 cm, se utiliza para proyectar una imagen sobre una pantalla situada a 2.00 m del ocular. Sea de 18.0 cm la distancia de imagen del objetivo. *a*) ¿Cuál es el aumento lateral de la imagen? *b*) ¿Cuál es la distancia entre el objetivo y el ocular?

34.114. El telescopio galileano. La figura 34.64 es un diagrama de un *telescopio galileano*, o *gemelos de teatro*, con el objeto y su imagen final en el infinito. La imagen I sirve como objeto virtual para el ocular. La imagen final es virtual y derecha. *a*) Pruebe que el aumento angular es $M = -f_1/f_2$. *b*) Se va a construir un telescopio galileano con la misma lente objetivo que en el ejercicio 34.57. ¿Cuál debe ser la distancia focal del ocular, para que este telescopio tenga un aumento angular de la misma magnitud que el del ejercicio 34.57? *c*) Compare la longitud de los telescopios.

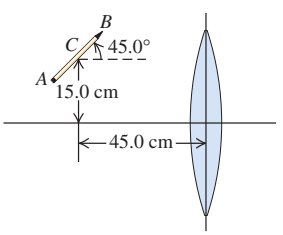
Figura 34.64 Problema 34.114.



Problemas de desafío

34.115. Objeto en un ángulo. Se coloca un lápiz de 16.0 cm de largo a un ángulo de 45.0°, con su centro 15.0 cm arriba del eje óptico y a 45.0 cm de una lente con una distancia focal de 20.0 cm, como se muestra en la figura 34.65. (Advierta que la figura no está dibujada a escala.) Suponga que el diámetro de la lente es suficientemente grande para que la aproximación paraxial sea válida. *a*) ¿Dónde está la imagen del lápiz? (Indique la ubicación de las imágenes de los puntos A, B y C del objeto, que se encuentran en el borrador, la punta y el centro del lápiz, respectivamente.) *b*) ¿Cuál es la longitud de la imagen (esto es, la distancia entre las imágenes de los puntos A y B)? *c*) Muestre en un dibujo la orientación de la imagen.

Figura 34.65 Problema de desafío 34.115.

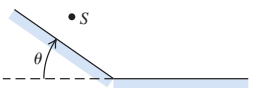


34.116. La *aberración esférica* es un desdibujamiento de la imagen formada por un espejo esférico. Se debe a que los rayos paralelos que inciden en el espejo, lejos del eje óptico, se enfocan en un punto diferente que los rayos próximos al eje. Por lo regular, este problema se reduce al máximo utilizando sólo el centro del espejo esférico. *a*) Demuestre que, en el caso de un espejo cóncavo, el foco se desplaza hacia el espejo conforme los rayos paralelos avanzan hacia el borde exterior del espejo. (*Sugerencia*: deduzca una expresión analítica de la distancia del vértice al foco del rayo con respecto a un rayo paralelo en particular. Esta expresión debería darse en términos de i) el radio de curvatura R del espejo y ii) el ángulo θ entre el rayo incidente y una recta que enlaza el centro de curvatura del espejo y el punto donde el rayo incide en el espejo.) *b*) ¿Qué valor de θ provoca un cambio del 2% en la ubicación del foco, en comparación con la ubicación cuando θ es casi cero?

34.117. *a*) Con respecto a una lente de distancia focal f, calcule la distancia más pequeña posible entre el objeto y su imagen real. *b*) Grafique la distancia entre el objeto y la imagen real, en función de la distancia entre el objeto y la lente. ¿Concuerda su gráfica con el resultado obtenido en el inciso *a*)?

34.118. Se colocan juntos dos espejos como se muestra en la figura 34.66. *a*) Demuestre que una fuente puntual frente a estos espejos y sus dos imágenes se localizan en un círculo. *b*) Determine el centro del círculo. *c*) En un diagrama, muestre dónde debe colocarse un observador para observar ambas imágenes.

Figura 34.66 Problema de desafío 34.118.



34.119. Las personas con visión normal no pueden enfocar los ojos bajo el agua, si no utilizan una careta o gafas protectoras y hay agua en contacto con sus ojos (véase la pregunta P34.23). *a*) ¿Por qué? *b*) Con base en el modelo simplificado del ojo que se describe en el ejercicio 34.46, ¿qué lente correctiva (especificada con base en su distancia focal medida en aire) se necesitaría para que una persona pudiera enfocar bajo el agua un objeto infinitamente distante? (Tenga cuidado: ¡la distancia focal de una lente bajo el agua *no* es la misma que en el aire! Véase el problema 34.98. Suponga que la lente correctiva tiene un índice de refracción de 1.62 y que la lente se utiliza en anteojos, no en gafas protectoras, por lo que hay agua a ambos lados de la lente. Suponga que los anteojos están a 2.00 cm delante del ojo.)

INTERFERENCIA

35

?El agua jabonosa es incolora, pero cuando forma burbujas presenta colores intensos. ¿Cómo es que el espesor de las paredes de la burbuja determina los colores particulares que aparecen?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Lo que pasa cuando dos ondas se combinan, o interfieren, en el espacio.
- A comprender el patrón formado por la interferencia de dos ondas luminosas coherentes.
- A calcular la intensidad en varios puntos de un patrón de interferencia.
- Cómo ocurre la interferencia cuando la luz se refleja en las dos superficies de una película delgada.
- La forma en que la interferencia posibilita la medición de distancias extremadamente pequeñas.

Una fea mancha de aceite en el pavimento se convierte en algo hermoso después de la lluvia, cuando el aceite refleja un arco iris de colores. También se observan reflejos multicolores en las superficies de las burbujas de jabón y de los discos compactos. Estas conocidas imágenes nos hacen sospechar que hay aspectos de la luz que aún no hemos explorado.

En nuestro estudio de las lentes, los espejos y los instrumentos ópticos usamos el modelo de la *óptica geométrica*, en el que la luz se representa con *rayos*, líneas rectas que se quiebran en una superficie reflectante o refractante. Pero muchos aspectos del comportamiento de la luz *no pueden* comprenderse con el concepto de rayos. Ya hemos aprendido que la luz es, en esencia, una *onda*, y en ciertas situaciones tenemos que considerar de manera explícita sus propiedades ondulatorias. Si dos o más ondas luminosas de la misma frecuencia se traslapan en un punto, el efecto total depende de las *fases* de las ondas y también de su amplitud. Los patrones resultantes de luz son consecuencia de la naturaleza *ondulatoria* de la luz y no es posible entenderlos sobre la base de los rayos. Los efectos ópticos que dependen de la naturaleza ondulatoria de la luz se estudian en el ámbito de la **óptica física**.

En este capítulo veremos los fenómenos de *interferencia* que ocurren cuando se combinan dos ondas. Los colores observados en las películas de aceite y las burbujas de jabón son el resultado de la interferencia entre la luz reflejada en las superficies anterior y posterior de una capa delgada de aceite o una disolución jabonosa. Los efectos que ocurren cuando se presentan *muchas* fuentes de ondas se llaman *fenómenos de difracción*, y los estudiaremos en el capítulo 36. En ese capítulo veremos que los efectos de difracción ocurren siempre que una onda pasa a través de una abertura o alrededor de un obstáculo. Son importantes en las aplicaciones prácticas de la óptica física, como las rejillas de difracción, la difracción de rayos x y la holografía.

Si bien nuestro objeto principal de estudio es la luz, debe decirse que la interferencia y la difracción ocurren con ondas de *cualquier* clase. Conforme avancemos, veremos aplicaciones a otros tipos de ondas, como las sonoras y las que se forman en el agua.

35.1 Interferencia y fuentes coherentes

Como vimos en el capítulo 15, el término **interferencia** se refiere a cualquier situación en la que dos o más ondas se traslapan en el espacio. Cuando esto ocurre, la onda total en cualquier punto y en cualquier instante está gobernada por el **principio de superposición**, que presentamos en la sección 15.6 en el contexto de ondas en una cuerda. Este principio también se aplica a las ondas electromagnéticas y es el más importante de toda la óptica física, por lo que el lector debe asegurarse de que lo comprende bien. El principio de superposición establece lo siguiente:

Cuando dos o más ondas se traslapan, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se encuentra sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales si cada una se presentara sola.

(Este principio podría no aplicarse en ciertas situaciones físicas especiales, como la propagación de las ondas electromagnéticas en un cristal. El análisis de esto se encuentra más allá de nuestro alcance.)

Usamos el término "desplazamiento" en un sentido general. Cuando se trata de ondas en la superficie de un líquido, nos referimos al desplazamiento real de la superficie por arriba o por debajo de su nivel normal. En el caso de las ondas sonoras, el término se refiere a un exceso o una deficiencia de presión. En el caso de las ondas electromagnéticas, por lo general, hacemos referencia a una componente específica del campo eléctrico o magnético.

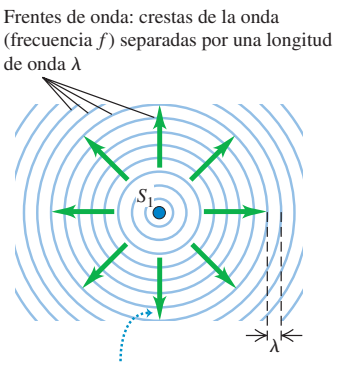
Interferencia en dos o tres dimensiones

Ya hemos estudiado un caso importante de interferencia, en el que dos ondas idénticas que se propagan en sentidos opuestos se combinan y producen una *onda estacionaria*. En los capítulos 15 y 16 vimos esto en el caso de las ondas transversales en una cuerda y de las ondas longitudinales en un fluido que llena un tubo; en la sección 32.5 describimos el mismo fenómeno en el caso de las ondas electromagnéticas. En todas estas situaciones, las ondas se propagan a lo largo de un solo eje: a lo largo de una cuerda, de un tubo lleno de fluido, o a lo largo de la dirección de propagación de una onda electromagnética plana. Pero las ondas luminosas pueden viajar (y de hecho viajan) en *dos* o *tres* dimensiones, igual que cualquier tipo de onda que se propague en un medio de dos o tres dimensiones. En esta sección veremos lo que pasa cuando se combinan ondas que se propagan en dos o tres dimensiones desde un par de fuentes de onda idénticas.

Los efectos de la interferencia se ven con más facilidad cuando se combinan ondas *sinusoidales* con una sola frecuencia f y longitud de onda λ. La figura 35.1 muestra una "instantánea" o imagen "congelada" de una fuente *única* S_1 de ondas sinusoidales y algunos de los frentes de onda producidos por ella. La figura sólo ilustra los frentes de onda que corresponden a las *crestas*, por lo que la separación entre frentes de onda sucesivos es de una longitud de onda. El material que rodea a S_1 es uniforme, de manera que la rapidez de la onda es la misma en todas direcciones y no hay refracción (y, por lo tanto, los frentes de onda no presentan ningún "doblez"). Si las ondas son bidimensionales, como las que se presentan en la superficie de un líquido, los círculos de la figura 35.1 representan frentes de onda circulares; si las ondas se propagan en tres dimensiones, los círculos representan frentes de onda esféricos que se propagan desde S_1.

En óptica, las ondas sinusoidales son características de la **luz monocromática** (la de un solo color). Si bien es muy fácil generar ondas acuáticas o sonoras de una sola frecuencia, las fuentes comunes de luz *no* emiten luz monocromática (de una sola frecuencia). Por ejemplo, las bombillas incandescentes y las flamas emiten una distribución continua de longitudes de onda. Sin embargo, hay varias maneras de producir *aproximadamente* luz monocromática. Por ejemplo, algunos filtros bloquean todas las longitudes de onda, salvo un intervalo muy angosto. La fuente que más se acerca a ser monocromática de todas las que se dispone actualmente es el *láser*. Un ejemplo es el láser de neón, que emite luz roja a 623.8 nm con un intervalo de longitud de onda del orden de ± 0.000001 nm, o alrededor de una parte en 10^9. Cuando estudiemos los

35.1 Una "instantánea" de ondas sinusoidales con frecuencia f y longitud de onda λ que se propagan en todas direcciones desde una fuente S_1.



efectos de la interferencia y la difracción en este capítulo y el siguiente, supondremos que trabajamos con ondas monocromáticas (a menos que se especifique otra cosa).

Interferencia constructiva y destructiva

En la figura 35.2a se muestran dos fuentes idénticas de ondas monocromáticas, S_1 y S_2. Ambas producen ondas de la misma amplitud y longitud de onda λ. Además, las dos fuentes están permanentemente *en fase*; vibran al unísono. Esas fuentes podrían ser dos agitadores sincronizados en un tanque de agua, dos altavoces alimentados por el mismo amplificador, dos antenas de radio energizadas por el mismo transmisor o dos agujeros pequeños o ranuras en una pantalla opaca, iluminada por la misma fuente de luz monocromática. Veremos que si no hubiera una relación de fase constante entre ambas fuentes, los fenómenos que vamos a estudiar no ocurrirían. Se dice que dos fuentes monocromáticas de la misma frecuencia y con una relación de fase constante definida (no necesariamente en fase) son **coherentes**. También se utiliza el término *ondas coherentes* (o, en el caso de las ondas luminosas, *luz coherente*) para hacer referencia a las ondas emitidas por dos fuentes de ese tipo.

Si las ondas emitidas por las dos fuentes coherentes son *transversales*, como las ondas electromagnéticas, entonces también supondremos que las perturbaciones ondulatorias que producen ambas fuentes tienen la misma *polarización* (es decir, se encuentran sobre la misma línea). Por ejemplo, en la figura 35.2a, las fuentes S_1 y S_2 podrían ser dos antenas de radio en la forma de varillas largas orientadas en forma paralela al eje z (perpendicular al plano de la figura); en cualquier punto del plano xy las ondas producidas por las dos antenas tienen campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ con sólo una componente z. Por eso, para describir cada onda solamente se necesita una sola función escalar; esto hace que el análisis sea mucho más fácil.

En la figura 35.2a colocamos las dos fuentes de igual a amplitud, igual longitud de onda y (si las sondas son transversales) la misma polarización a lo largo del eje y y equidistantes con respecto al origen. Considere un punto a en el eje x. Por simetría, las dos distancias de S_1 a a y de S_2 a a son *iguales*, de manera que las ondas procedentes de las dos fuentes requieren tiempos iguales para viajar a a. Así, las ondas que salen en fase de S_1 y S_2 llegan en fase a a. Las dos ondas se suman y la amplitud total en a es el *doble* de la amplitud de cada onda individual. Esto se cumple para *cualquier* punto que se localice sobre el eje x.

De manera similar, la distancia de S_2 al punto b es exactamente dos longitudes de onda *mayor* que la distancia de S_1 a b. Una cresta de onda de S_1 llega a b exactamente dos ciclos antes que una cresta emitida al mismo tiempo en S_2, y de nuevo las dos ondas arriban en fase. Igual que en el punto a, la amplitud total es la suma de las amplitudes de las ondas de S_1 y S_2.

En general, cuando las ondas de dos o más fuentes llegan *en fase* a un punto, la amplitud de la onda resultante es la *suma* de las amplitudes de las ondas individuales; éstas se refuerzan una a la otra. Esto se llama **interferencia constructiva** (figura 35.2b). Sea r_1 la distancia que hay entre S_1 y cualquier punto P, y r_2 la distancia que hay entre S_2 y P. Para que en P ocurra la interferencia constructiva, la diferencia de las trayectorias $r_2 - r_1$ para las dos fuentes debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ:

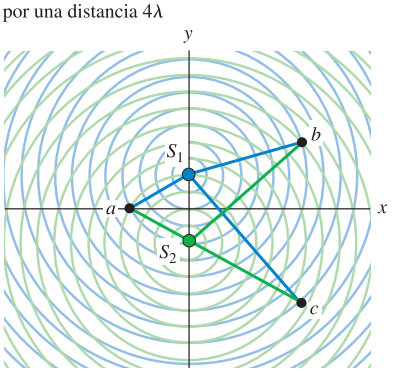
$$r_2 - r_1 = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad \begin{matrix}\text{(interferencia constructiva,}\\ \text{fuentes en fase)}\end{matrix} \qquad (35.1)$$

En la figura 35.2a, los puntos a y b satisfacen la ecuación (35.1) con $m = 0$ y $m = \pm 2$, respectivamente.

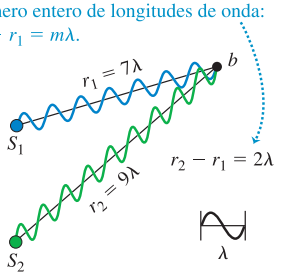
Algo diferente ocurre en el punto c en la figura 35.2a, donde la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1 = -2.50\ \lambda$, es *la mitad de un número entero* de longitudes de onda. Las ondas provenientes de las dos fuentes llegan al punto c exactamente medio ciclo fuera de fase. La cresta de una onda arriba al mismo tiempo que la cresta de una onda en sentido opuesto (un "valle") de la otra onda (figura 35.2c). La amplitud resultante es la *diferencia* entre las dos amplitudes individuales. Si éstas son iguales, entonces la amplitud total ¡es igual a *cero*! Esta cancelación o anulación parcial de las ondas

35.2 a) Una "instantánea" de ondas sinusoidales que se propagan a partir de dos fuentes coherentes S_1 y S_2. La interferencia constructiva ocurre en el punto a (equidistante a ambas fuentes) y b) en el punto b. c) En el punto c hay interferencia destructiva.

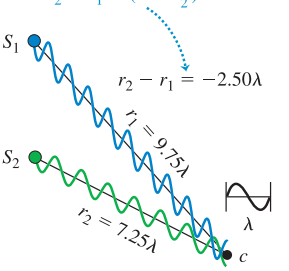
a) Dos fuentes de onda coherentes separadas por una distancia 4λ



b) Condiciones para la interferencia constructiva: las ondas interfieren en forma constructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren en un número entero de longitudes de onda: $r_2 - r_1 = m\lambda$.



c) Condiciones para la interferencia destructiva: las ondas interfieren en forma destructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren en la mitad de un número entero de longitudes de onda: $r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda$.



individuales recibe el nombre de **interferencia destructiva**. La condición para que haya interferencia destructiva en la situación que se ilustra en la figura 35.2a es

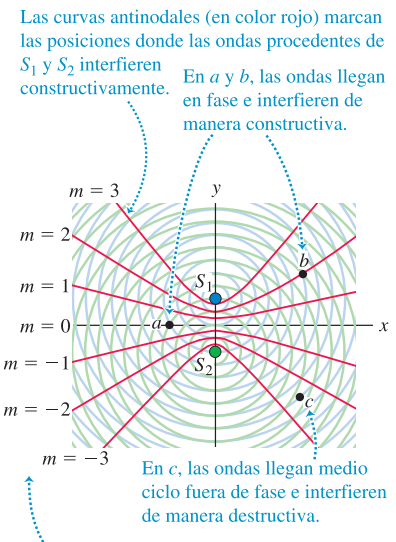
$$r_2 - r_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad \begin{matrix}\text{(interferencia}\\ \text{destructiva,}\\ \text{fuentes en fase)}\end{matrix} \qquad (35.2)$$

La diferencia de trayectorias en c en la figura 35.2a satisface la ecuación (35.2) con $m = -3$.

La figura 35.3 muestra la misma situación que la figura 35.2a, pero con curvas rojas que señalan todos los puntos en donde ocurre interferencia *constructiva*. En cada curva, la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ es igual a la longitud de onda multiplicada por un entero m, como en la ecuación (35.1). Estas curvas se llaman **curvas antinodales**, y son la analogía directa de los *antinodos* de los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 15 y 16 y la sección 32.5. En una onda estacionaria formada por la interferencia entre ondas que se propagan en sentidos opuestos, los antinodos son puntos en los que la amplitud es máxima; del mismo modo, la amplitud de la onda en la situación ilustrada en la figura 35.3 es máxima a lo largo de las curvas antinodales. En esa figura no aparecen las **curvas nodales**, que son aquellas que denotan puntos en los que ocurre interferencia *destructiva*, de acuerdo con la ecuación (35.2); éstas son análogas a los *nodos* en un patrón de onda estacionaria. En la figura 35.3, entre dos curvas antinodales adyacentes se presenta una curva nodal; una de tales curvas, que corresponde a $r_2 - r_1 = -2.50\lambda$, pasa a través del punto c.

En ciertos casos, como el de dos altavoces o dos antenas transmisoras de radio, el patrón de interferencia es tridimensional. Imagine que hacemos girar las curvas de color de la figura 35.3 en torno al eje y; en tal caso, la interferencia constructiva máxima ocurre en todos los puntos situados sobre las superficies de revolución resultantes.

35.3 Igual que la figura 35.2a, pero con curvas antinodales (curvas de amplitud máxima) en color rojo sobrepuestas. Todos los puntos en cada curva satisfacen la ecuación (35.1) con el valor de m que se indica. Las curvas nodales (no aparecen) se encuentran entre cada par adyacente de curvas antinodales.



CUIDADO **Los patrones de interferencia no son ondas estacionarias** Los patrones de interferencia en las figuras 35.2 y 35.3 *no* son ondas estacionarias, aunque tienen algunas similitudes con los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 15 y 16 y la sección 32.5. En una onda estacionaria la interferencia ocurre entre dos ondas que se propagan en sentidos opuestos; aparece un patrón estacionario de nodos y antinodos, y *no* hay flujo de energía neto en ninguna dirección (la energía en la onda queda "estacionaria"). En las situaciones mostradas en las figuras 35.2a y 35.3 también hay un patrón estacionario de curvas nodales y antinodales, pero hay un flujo neto de energía *hacia fuera* de las dos fuentes. Desde el punto de vista de la energía, todo lo que hace esa interferencia es "canalizar" el flujo de energía de manera que sea máximo a lo largo de las curvas antinodales, y mínimo a lo largo de las curvas nodales.

Para que se cumplan las ecuaciones (35.1) y (35.2), las dos fuentes deben tener la misma longitud de onda y *siempre* deben estar en fase. Estas condiciones son fáciles de satisfacer para las ondas sonoras (véase el ejemplo 16.15 en la sección 16.6). Pero con las ondas *luminosas* no hay forma práctica de lograr una relación de fase constante (coherencia) con dos fuentes independientes. Esto se debe al modo en que se emite la luz. En las fuentes de luz ordinaria, los átomos ganan exceso de energía por la agitación térmica o por el impacto con electrones acelerados. Un átomo "excitado" de ese modo comienza a irradiar energía y continúa así hasta que haya perdido toda la energía posible, por lo común en un tiempo del orden de 10^{-8} s. Los numerosos átomos en una fuente irradian, por lo general, en una relación de fase no sincronizada y aleatoria, y la luz que se emite desde *dos* de tales fuentes no tiene relación de fase definida.

Sin embargo, la luz procedente de una sola fuente se divide de manera que partes de ella emerjan de dos o más regiones del espacio para formar dos o más *fuentes secundarias*. Entonces, cualquier cambio de fase aleatorio en la fuente afecta a estas fuentes secundarias por igual y no cambia su fase *relativa*.

La característica distintiva de la luz de un *láser* es que la emisión de luz de muchos átomos está sincronizada en cuanto a frecuencia y fase. Como resultado, los cambios de fase aleatorios que mencionamos antes ocurren con frecuencia mucho menor. Las relaciones de fase definidas se preservan a lo largo de longitudes proporcionalmente mucho mayores del haz, y la luz láser es bastante más coherente que la luz ordinaria.

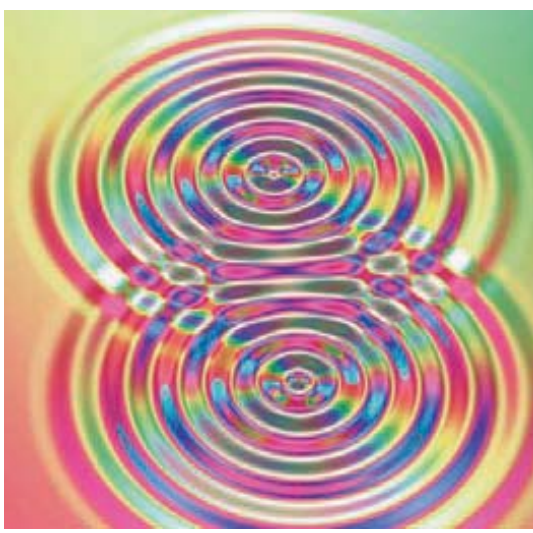
Evalúe su comprensión de la sección 35.1 Considere un punto en la figura 35.3 sobre la parte positiva del eje y arriba de S_1. ¿El punto queda sobre i) una curva antinodal; ii) una curva nodal; o iii) ninguna de las anteriores? (*Sugerencia:* considere que la distancia entre S_1 y S_2 es 4λ.)

35.2 Interferencia de la luz procedente de dos fuentes

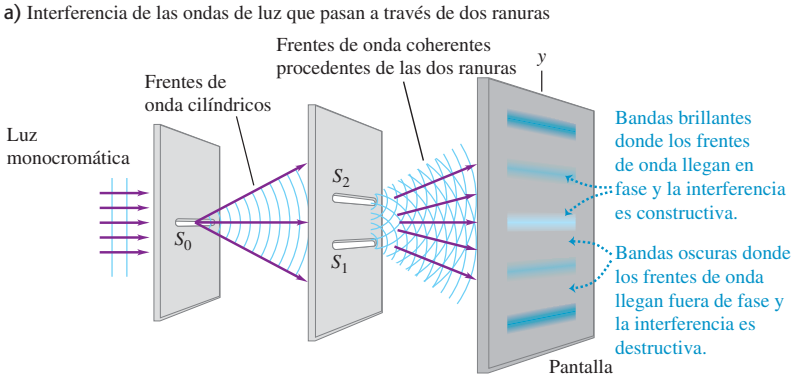
El patrón de interferencia producido por dos fuentes coherentes de ondas de *agua* de la misma longitud de onda se aprecia fácilmente en un tanque de olas con una capa de agua poco profunda (figura 35.4). Este patrón no resulta visible de manera directa cuando la interferencia ocurre entre ondas de *luz*, ya que no es posible ver la luz que viaja en un medio uniforme. (Un rayo de luz del atardecer que entra a una habitación se hace visible gracias a la dispersión que generan las partículas de polvo en el aire.)

Uno de los primeros experimentos cuantitativos encaminados a poner de manifiesto la interferencia de la luz de dos fuentes estuvo a cargo del científico inglés Thomas Young en 1800. En este capítulo y otros posteriores haremos referencia varias veces a ese experimento, así que es importante entenderlo con detalle. En la figura 35.5a se muestra en perspectiva el aparato de Young. Una fuente (no se ilustra) emite luz monocromática; sin embargo, esta luz no es apropiada para usarla en un experimento de interferencia porque las emisiones de las diferentes partes de una fuente ordinaria no están sincronizadas. Para remediar esto, se dirige la luz a una pantalla con una ranura angosta S_0, con ancho aproximado de 1 μm. La luz que sale de la ranura proviene sólo de una pequeña región de la fuente luminosa, de manera que la ranura S_0 se comporta de manera muy parecida a la fuente idealizada que se ilustra en la figura 35.1. (En versiones modernas del experimento se utiliza un láser como fuente de luz coherente, por lo que no se necesita la ranura S_0.) La luz que emana de S_0 ilumina una pantalla con otras dos ranuras S_1 y S_2, cada una con ancho aproximado de 1 μm y separadas por una distancia de algunas decenas o centenas de micrómetros. A partir de S_0 se propagan frentes de onda cilíndricos que llegan a S_1 y S_2 *en fase* porque recorren distancias iguales desde S_0. Por lo tanto, las ondas que *emergen* de las ranuras S_1 y S_2 siempre están en fase, por lo que S_1 y S_2 son fuentes *coherentes*. La interferencia de las ondas de S_1 y S_2 genera un patrón en el espacio como el que aparece a la derecha de las fuentes en las figuras 35.2a y 35.3.

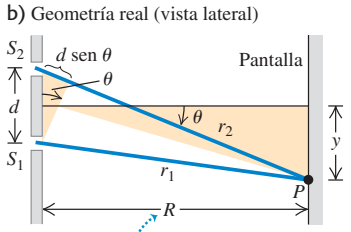
35.4 Los conceptos de interferencia constructiva y destructiva se aplican tanto a estas ondas en el agua como a las ondas luminosas y sonoras.



a) Interferencia de las ondas de luz que pasan a través de dos ranuras

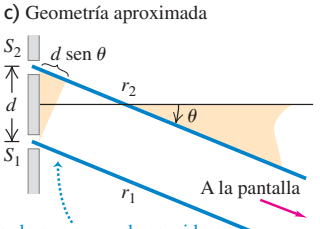


b) Geometría real (vista lateral)



En situaciones reales, la distancia R a la pantalla, por lo general, es mucho mayor que la distancia d entre las ranuras …

c) Geometría aproximada



… por lo que se puede considerar que los rayos son paralelos; en tal caso, la diferencia en la longitud de sus trayectorias es simplemente $r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta$.

35.5 a) Experimento de Young para demostrar la interferencia de la luz que pasa por dos ranuras. En la pantalla aparece un patrón de áreas brillantes y oscuras (véase la figura 35.6). b) Análisis geométrico del experimento de Young. Para el caso que se ilustra, $r_2 > r_1$ y tanto y como θ son positivos. Si el punto P está en el otro lado del centro de la pantalla, $r_2 < r_1$ y tanto y como θ son negativos. c) Geometría aproximada cuando la distancia R a la pantalla es mucho mayor que la distancia d entre las ranuras.

Activ ONLINE Physics
16.1 Interferencia de dos fuentes: introducción
16.1 Interferencia de dos fuentes: preguntas cualitativas
16.1 Interferencia de dos fuentes: problemas

Para visualizar el patrón de interferencia, se coloca una pantalla de manera que la luz procedente de S_1 y S_2 incida sobre ella (figura 35.5b). La pantalla se iluminará con intensidad máxima en los puntos P en los que las ondas luminosas procedentes de las ranuras interfieren constructivamente, y será más oscura en los puntos donde la interferencia es destructiva.

Para simplificar el análisis del experimento de Young, suponemos que la distancia R de las ranuras a la pantalla es tan grande en comparación con la distancia d entre las ranuras, que las líneas de S_1 y S_2 a P son casi paralelas, como se aprecia en la figura 35.5c. Por lo general, éste es el caso para experimentos con luz; es común que la separación entre las ranuras sea de unos cuantos milímetros, mientras que la pantalla está a un metro o más. Entonces, la diferencia en la longitud de las trayectorias está dada por

$$r_2 - r_1 = d\,\text{sen}\,\theta \tag{35.3}$$

donde θ es el ángulo entre una línea de las ranuras a la pantalla (en color azul, en la figura 35.5c) y la normal al plano de las ranuras (se ilustra con una línea delgada de color negro).

Interferencia constructiva y destructiva con dos ranuras

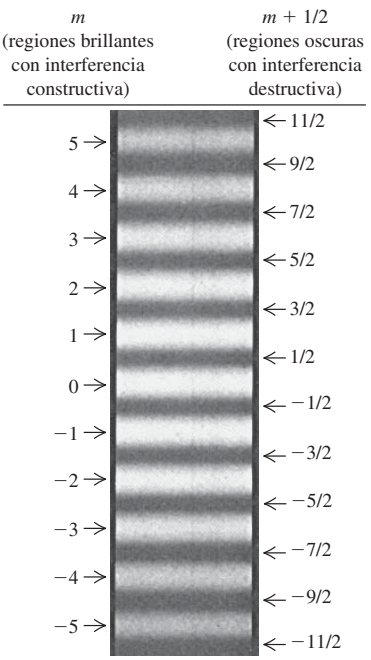
En la sección 35.1 vimos que la interferencia constructiva (refuerzo) ocurre en aquellos puntos donde la diferencia de las trayectorias es un número entero de longitudes de onda, $m\lambda$, donde $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Por lo tanto, las regiones brillantes en la pantalla de la figura 35.5 se presentan en ángulos θ en los que

$$d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad \text{(interferencia constructiva, dos ranuras)} \tag{35.4}$$

De manera similar, ocurre la interferencia destructiva (cancelación) que forma las regiones oscuras en la pantalla en los puntos para los que la diferencia de las trayectorias es la mitad de un número entero de longitudes de onda, $(m + \frac{1}{2})\lambda$:

$$d\,\text{sen}\,\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad \text{(interferencia destructiva, dos ranuras)} \tag{35.5}$$

35.6 Fotografía de las franjas de interferencia que se producen sobre la pantalla del experimento de Young de la doble ranura.



Así, el patrón en la pantalla de las figuras 35.5a y 35.5b es una sucesión de bandas brillantes y oscuras, o **franjas de interferencia**, paralelas a las ranuras S_1 y S_2. En la figura 35.6 se muestra una fotografía de ese patrón. El centro del patrón es una banda brillante que corresponde a $m = 0$ en la ecuación (35.4); este punto de la pantalla es equidistante a las dos ranuras.

Es posible obtener una expresión para las posiciones de los centros de las bandas brillantes en la pantalla. En la figura 35.5b, y está medida desde el centro del patrón y corresponde a la distancia desde el centro de la figura 35.6. Sea y_m la distancia entre el centro del patrón ($\theta = 0$) y el centro de la m-ésima banda brillante. Sea θ_m el valor correspondiente de θ; por lo tanto,

$$y_m = R\tan\theta_m$$

En experimentos como éste, las distancias y_m a menudo son mucho más pequeñas que la distancia R entre las ranuras y la pantalla. Como θ_m es muy pequeño, tan θ_m es casi igual a sen θ_m, y

$$y_m = R\,\text{sen}\,\theta_m$$

Al combinar esto con la ecuación (35.4) se encuentra que *solamente para ángulos pequeños*,

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d} \qquad \text{(interferencia constructiva en el experimento de Young)} \tag{35.6}$$

Es posible medir R y d, así como las posiciones y_m de las franjas brillantes, por lo que este experimento permite una medición directa de la longitud de onda λ. El experimento de Young fue, de hecho, la primera medición directa de las longitudes de onda de la luz.

CUIDADO **La ecuación (35.6) sólo es válida para ángulos pequeños** Si bien las ecuaciones (35.4) y (35.5) son válidas para cualquier ángulo, la (35.6) solamente es válida para ángulos *pequeños*. *Sólo* puede usarse si la distancia R entre las ranuras y la pantalla es mucho mayor que la separación d entre las ranuras y si R es mucho más grande que la distancia y_m desde el centro del patrón de interferencia a la m-ésima franja brillante.

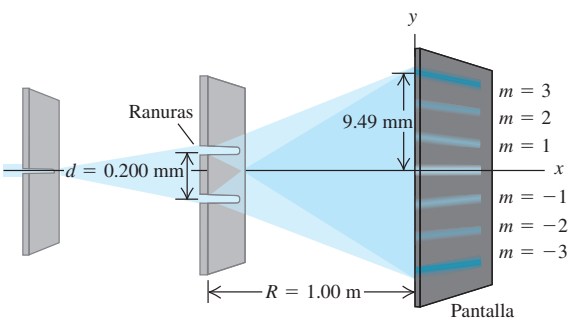
La distancia entre bandas brillantes adyacentes en el patrón es *inversamente* proporcional a la distancia d entre las ranuras. Cuanto más cerca estén las ranuras, más disperso será el patrón. Cuando las ranuras están muy separadas, las bandas del patrón están más próximas unas de otras.

Aunque hemos descrito el experimento realizado por Young con luz visible, los resultados dados en las ecuaciones (35.4) y (35.5) son válidos para *cualquier* tipo de onda, siempre y cuando la onda resultante de las dos fuentes coherentes se detecte en un punto que esté muy alejado en comparación con la separación d.

Ejemplo 35.1 Interferencia con dos ranuras

En un experimento de interferencia con dos ranuras, éstas se encuentran separadas por una distancia de 0.200 mm, y la pantalla está a una distancia de 1.00 m. Se observa que la tercera franja brillante (sin contar la franja brillante central frente a las ranuras) está desplazada 9.49 mm de la franja central (figura 35.7). Calcule la longitud de onda de la luz utilizada.

35.7 Medición de la longitud de onda de la luz a partir de un experimento con dos ranuras.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema pide que se calcule la longitud de onda λ a partir de las dimensiones $d = 0.200$ mm (separación entre las ranuras), $R = 1.00$ m (distancia de las ranuras a la pantalla) y $y_m = 9.49$ mm (distancia de la tercera franja brillante a partir del centro del patrón).

PLANTEAR: La tercera franja brillante corresponde a $m = 3$ en las ecuaciones (35.4) y (35.6), así como a la franja brillante indicada con $m = 3$ en la figura 35.6. Para determinar el valor de la variable buscada λ, podemos utilizar la ecuación (35.6) puesto que $R = 1.00$ m es mucho mayor que $d = 0.200$ mm o $y_3 = 9.49$ mm.

EJECUTAR: Al despejar λ en la ecuación (35.6) se obtiene

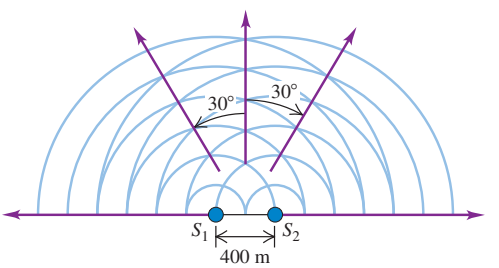
$$\lambda = \frac{y_m d}{mR} = \frac{(9.49 \times 10^{-3}\ \text{m})(0.200 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(3)(1.00\ \text{m})}$$
$$= 633 \times 10^{-9}\ \text{m} = 633\ \text{nm}$$

EVALUAR: Esta franja brillante también podría corresponder a $m = -3$. ¿Puede usted demostrar que esto da el mismo resultado para λ?

Ejemplo 35.2 Patrón de difusión de una estación de radio

Una estación de radio que opera en la frecuencia de 1500 kHz = 1.5×10^6 Hz (cerca del extremo superior de la banda de difusión de AM) tiene dos antenas dipolares verticales idénticas que oscilan en fase y que se encuentran separadas por una distancia de 400 m. A distancias mucho mayores de 400 m, ¿en qué direcciones es máxima la intensidad en el patrón de radiación resultante? (Éste no es un problema hipotético, ya que a menudo es deseable transmitir la mayor parte de la energía irradiada desde una transmisora de radio en ciertas direcciones y no de modo uniforme en todas direcciones. No es raro que se utilicen pares o filas de antenas para producir el patrón de radiación que se desea.)

35.8 Dos antenas de transmisión de radio que difunden en fase. Las flechas color púrpura indican las direcciones de máxima intensidad. No se indican las ondas que se emiten hacia la mitad inferior de la figura.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las dos antenas, que se representan en la figura 35.8, corresponden a las fuentes S_1 y S_2 de la figura 35.5. Por consiguiente, es posible aplicar a este problema las ideas de la interferencia con dos ranuras.

continúa

PLANTEAR: Como la onda resultante es detectada a distancias mucho mayores que $d = 400$ m, se puede usar la ecuación (35.4) para dar las direcciones de la intensidad *máxima*, los valores de θ para los que la diferencia de trayectorias es igual a cero o un número entero de longitudes de onda.

EJECUTAR: La longitud de onda es $\lambda = c/f = 200$ m. De acuerdo con la ecuación (35.4), con $m = 0, \pm 1$ y ± 2, la intensidad máxima está dada por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(200\text{ m})}{400\text{ m}} = \frac{m}{2} \qquad \theta = 0, \pm 30°, \pm 90°$$

En este ejemplo, los valores de m mayores que 2 o menores que -2 dan valores de sen θ mayores que 1 o menores que -1, lo cual es imposible. *No* hay una dirección para la que la diferencia de trayectorias sea de tres o más longitudes de onda. Por consiguiente, en este ejemplo los valores de m de ± 3 o más allá de estas cifras carecen de significado físico.

EVALUAR: Podemos comprobar el resultado calculando los ángulos para la intensidad *mínima* (interferencia destructiva). Debe haber un mínimo de intensidad entre cada par de máximos de intensidad, tal como ocurre en el patrón de interferencia de la figura 35.6. Los ángulos de los mínimos de intensidad están dados por la ecuación (35.5) con $m = -2, -1, 0$ y 1:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{m + \frac{1}{2}}{2} \qquad \theta = \pm 14.5°, \pm 48.6°$$

(Otros valores de m carecen de significado físico en este ejemplo.) Observe que estos ángulos son intermedios entre los ángulos correspondientes a máximos de intensidad, como debe ser. También advierta que como los ángulos no son pequeños, los ángulos correspondientes a los mínimos *no* están exactamente en el punto medio entre los ángulos correspondientes a los máximos.

Evalúe su comprensión de la sección 35.2 Se dirige un láser de longitud de onda variable (cuya longitud de onda se ajusta mediante una perilla) a un par de ranuras muy cercanas entre sí. La luz que sale de las dos ranuras genera un patrón de interferencia sobre una pantalla, como el de la figura 35.6. Si se ajusta la longitud de onda de manera que la luz láser cambie de roja a azul, ¿cómo cambiará la distancia de separación entre las franjas brillantes? i) Aumenta; ii) disminuye; iii) no cambia; iv) no hay suficiente información para saberlo.

35.3 La intensidad en los patrones de interferencia

En la sección 35.2 encontramos las posiciones de la intensidad máxima y mínima en un patrón de interferencia de dos fuentes. Ahora veremos cómo encontrar la intensidad en *cualquier* punto del patrón. Para hacerlo tenemos que combinar los dos campos con variación sinusoidal (desde las dos fuentes) en el punto P en el patrón de radiación, tomando en cuenta la diferencia de fase de las dos ondas en el punto P, que resulta de la diferencia de trayectorias. Entonces, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico resultante, como vimos en el capítulo 32.

Para calcular la intensidad supondremos que las dos funciones sinusoidales (correspondientes a ondas de las dos fuentes) tienen igual amplitud E y que los campos $\vec{E}$ se encuentran a lo largo de la misma línea (tienen la misma polarización). Esto supone que las fuentes son idénticas e ignora la pequeña diferencia de amplitud causada por la diferencia de las longitudes de las trayectorias (la amplitud disminuye al aumentar la distancia desde la fuente). De acuerdo la ecuación (32.29), cada fuente por sí misma daría una intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 cE^2$ en el punto P. Si las dos fuentes están en fase, entonces las ondas que llegan a P difieren en fase en una cantidad proporcional a la diferencia de las longitudes de sus trayectorias, $(r_2 - r_1)$. Si el ángulo de fase entre estas ondas que llegan es ϕ, entonces se utilizan las siguientes expresiones para los dos campos eléctricos superpuestos en P:

$$E_1(t) = E\cos(\omega t + \phi)$$
$$E_2(t) = E\cos\omega t$$

A continuación se describe el programa que efectuaremos. La superposición de los dos campos en P es una función sinusoidal con cierta amplitud E_p que depende de E y de la diferencia de fase ϕ. Primero trabajaremos en el cálculo de la amplitud E_p si E y ϕ son conocidos. Después encontraremos la intensidad I de la onda resultante, que es proporcional a E_P^2. Por último, relacionaremos la diferencia de fase ϕ con la diferencia de trayectorias, que está determinada por la geometría de la situación.

Amplitud en la interferencia de dos fuentes

Para sumar las dos funciones sinusoidales con una diferencia de fase, se utiliza la misma representación de *fasores* que se aplicó al movimiento armónico simple (sección 13.2) y a voltajes y corrientes en circuitos ca (sección 31.1). Le sugerimos que

repase estas secciones para recordar el concepto de fasores. Cada función sinusoidal está representada por un vector giratorio (fasor) cuya proyección en el eje horizontal en cualquier instante representa el valor instantáneo de la función sinusoidal.

En la figura 35.9, E_1 es la componente horizontal del fasor que representa la onda proveniente de la fuente S_1, y E_2 es la componente horizontal del fasor para la onda procedente de S_2. Como se observa en el diagrama, ambos fasores tienen la misma magnitud E, pero E_1 está un ángulo ϕ *adelante* de E_2 en términos de fase. Los dos fasores giran en sentido antihorario con rapidez angular constante ω, y la suma de las proyecciones en el eje horizontal en cualquier momento da el valor instantáneo del campo E total en el punto P. Así, la amplitud E_p de la onda sinusoidal resultante en P es la magnitud del fasor rojo oscuro en el diagrama (indicado con E_p); éste es la *suma vectorial* de los otros dos fasores. Para encontrar E_p se utiliza la ley de los cosenos y la identidad trigonométrica $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$.

$$\begin{aligned} E_P^2 &= E^2 + E^2 - 2E^2\cos(\pi - \phi) \\ &= E^2 + E^2 + 2E^2\cos\phi \end{aligned}$$

De esta forma, empleando la identidad $1 + \cos\phi = 2\cos^2(\phi/2)$, se obtiene

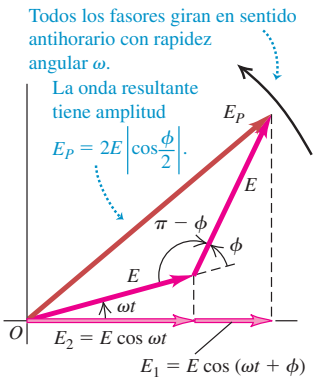
$$E_P^2 = 2E^2(1 + \cos\phi) = 4E^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_P = 2E\left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \quad \text{(amplitud en la interferencia con dos fuentes)} \tag{35.7}$$

Este resultado también se puede obtener algebraicamente sin el empleo de fasores (véase el problema 35.48).

Cuando las dos ondas están en fase, $\phi = 0$ y $E_p = 2E$. Cuando están exactamente medio ciclo fuera de fase, $\phi = \pi$ rad $= 180°$, $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y $E_p = 0$. Así, la superposición de dos ondas sinusoidales con la misma frecuencia y amplitud, pero con una diferencia de fase, produce una onda sinusoidal con la misma frecuencia y amplitud entre cero y el doble de las amplitudes individuales, de acuerdo con la diferencia de fase.

35.9 Diagrama del fasor para la superposición en un punto P de dos ondas de igual amplitud E, con diferencia de fase ϕ.



Intensidad en la interferencia de dos fuentes

Para obtener la intensidad I en el punto P, recordemos de la sección 32.4 que I es igual a la magnitud media del vector de Poynting, S_{med}. En el caso de una onda sinusoidal con amplitud de campo eléctrico E_p, esta magnitud está dada por la ecuación (32.9) con E_p en vez de $E_{\text{máx}}$. Así, podemos expresar la intensidad en cualquiera de las formas equivalentes que siguen:

$$I = S_{\text{med}} = \frac{E_P^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_P^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_P^2 \tag{35.8}$$

El contenido esencial de estas expresiones es que I es proporcional a E_P^2. Cuando se sustituye la ecuación (35.7) en la última expresión en la ecuación (35.8), se obtiene

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_P^2 = 2\epsilon_0 c E^2\cos^2\frac{\phi}{2} \tag{35.9}$$

En particular, la intensidad *máxima* I_0, que se presenta en los puntos donde la diferencia de fase es igual a cero ($\phi = 0$), es

$$I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$$

Advierta que la intensidad máxima I_0 es el *cuádruple* (no el doble) de la intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ desde cada fuente individual.

Al sustituir la expresión de I_0 en la ecuación (35.9) se puede expresar la intensidad I en cualquier punto de manera muy simple en términos de la intensidad máxima I_0:

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \qquad \text{(intensidad en la interferencia de dos fuentes)} \tag{35.10}$$

Para algunos ángulos de fase ϕ, la intensidad es I_0, que es cuatro veces más grande que para una fuente individual de onda, pero para otros ángulos de fase la intensidad es igual a cero. Si promediamos la ecuación (35.10) con respecto a todas las posibles diferencias de fase, el resultado es $I_0/2 = \epsilon_0 c E^2$ [el promedio de $\cos^2(\phi/2)$ es $\frac{1}{2}$]. Esto es el doble de la intensidad de cada fuente individual, como era de esperarse. La salida total de energía de las dos fuentes no se ve alterada por los efectos de la interferencia, pero la energía se redistribuye (como se dijo en la sección 35.1).

Diferencia de fase y diferencia de trayectoria

Nuestra siguiente tarea es determinar cómo se relaciona la diferencia de fase ϕ entre los dos campos en el punto P con la geometría de la situación. Sabemos que ϕ es proporcional a la diferencia de la longitud de la trayectoria desde las dos fuentes al punto P. Cuando la diferencia de trayectoria es de una longitud de onda, la diferencia de fase es de un ciclo, y $\phi = 2\pi$ rad $= 360°$. Cuando la diferencia de fase es $\lambda/2$, $\phi = \pi$ rad $= 180°$, y así sucesivamente. Es decir, la razón de la diferencia de fase ϕ con respecto a 2π es igual a la razón de la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ con respecto a λ:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Así, una diferencia de trayectoria $(r_2 - r_1)$ ocasiona una diferencia de fase dada por

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \qquad \text{(diferencia de fase relacionada con la diferencia de trayectoria)} \tag{35.11}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el *número de onda* que presentamos en la sección 15.3.

Si el material en el espacio entre las fuentes y P es diferente de un vacío, en la ecuación (35.11) debemos usar la longitud de onda *en el material*. Si el material tiene el índice de refracción n, entonces

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad \text{y} \qquad k = nk_0 \tag{35.12}$$

donde λ_0 y k_0 son la longitud de onda y el número de onda, respectivamente, en el vacío.

Por último, si el punto P está lejos de las fuentes en comparación con su separación d, la diferencia de trayectorias está dada por la ecuación (35.3):

$$r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta$$

Al combinar esto con la ecuación (35.11), se obtiene

$$\phi = k(r_2 - r_1) = kd \operatorname{sen} \theta = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \tag{35.13}$$

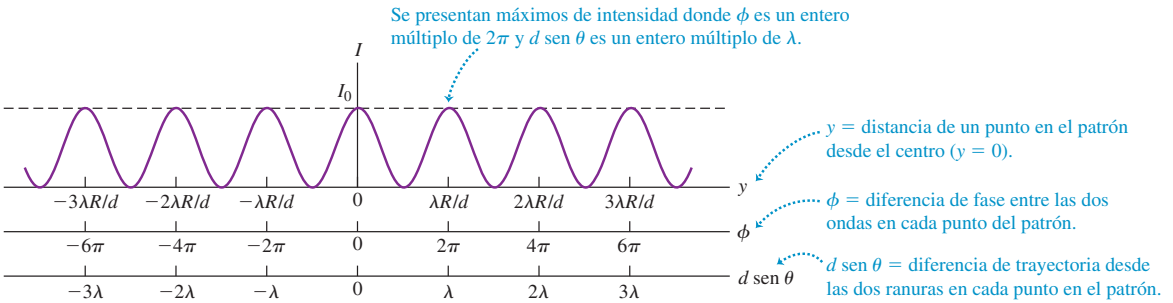
Cuando se sustituye esto en la ecuación (35.10), se obtiene

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2} kd \operatorname{sen} \theta\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta\right) \qquad \text{(intensidad lejos de dos fuentes)} \tag{35.14}$$

Las direcciones de *máxima* intensidad se presentan cuando el coseno tiene los valores ± 1, es decir, cuando

$$\frac{\pi d}{\lambda} \operatorname{sen} \theta = m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

35.10 Distribución de la intensidad en el patrón de interferencia de dos ranuras idénticas.



o bien,

$$d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$$

de acuerdo con la ecuación (35.4). Se deja como ejercicio para el lector la demostración de que también es posible obtener la ecuación (35.5) a partir de la (35.14) para las direcciones con intensidad igual a cero (véase el ejercicio 35.24).

Como se dijo en la sección 35.2, en experimentos con la luz se visualiza el patrón de interferencia debido a dos ranuras utilizando una pantalla colocada a una distancia R a partir de éstas. Las posiciones en la pantalla se describen con la coordenada y, y las de las franjas brillantes están dadas por la ecuación (35.6), donde lo común es que $y \ll R$. En este caso, sen θ es aproximadamente igual a y/R, y se obtienen las siguientes expresiones para la intensidad en *cualquier* punto sobre la pantalla como función de y:

$$I = I_0\cos^2\left(\frac{kdy}{2R}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda R}\right) \qquad \begin{matrix}\text{(intensidad en la interferencia}\\ \text{de dos ranuras)}\end{matrix} \qquad (35.15)$$

La figura 35.10 muestra la gráfica de la ecuación (35.15); esto se puede comparar con el patrón registrado por la fotografía de la figura 35.6. Todos los máximos en la figura 35.10 tienen la misma intensidad, mientras que los de la figura 35.6 se desvanecen conforme se alejan del centro. En el capítulo 36 exploraremos las razones para esta variación en la intensidad de los máximos.

Ejemplo 35.3 Arreglo de antenas de transmisión direccional

Suponga que se mueven de lugar las dos antenas de radio idénticas de la figura 35.8, de manera que queden separadas sólo por 10.0 m y que la frecuencia de las ondas irradiadas aumente a $f = 60.0$ MHz. La intensidad a una distancia de 700 m en la dirección $+x$ (correspondiente a $\theta = 0$ en la figura 35.5) es $I_0 = 0.020\ \text{W/m}^2$. *a*) ¿Cuál es la intensidad en la dirección $\theta = 4.0°$? *b*) ¿En qué dirección cerca de $\theta = 0$ la intensidad es igual a $I_0/2$? *c*) ¿En qué direcciones la intensidad es igual a cero?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se relaciona con la distribución de la intensidad como función de la *dirección*, es decir, como función del ángulo. (En otros problemas nos ocupamos de la intensidad como función de la *posición* sobre una pantalla, como en el patrón de interferencia mostrado en la figura 35.6.)

PLANTEAR: Como la distancia de 700 m desde las antenas al punto donde se mide la intensidad es mucho mayor que la distancia entre las antenas ($d = 10.0$ m), las amplitudes de las ondas provenientes de las dos antenas son casi iguales. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación (35.14) para relacionar la intensidad I con el ángulo θ.

EJECUTAR: Para utilizar la ecuación (35.14), primero se debe determinar la longitud de onda λ mediante la relación $c = \lambda f$:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00\times10^8\ \text{m/s}}{60.0\times10^6\ \text{s}^{-1}} = 5.00\ \text{m}$$

La distancia de separación $d = 10.0$ m entre las antenas es exactamente el doble de la longitud de onda, por lo que la ecuación (35.14) se convierte en

$$\begin{aligned} I &= I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\text{sen}\,\theta\right)\\ &= (0.020\ \text{W/m}^2)\cos^2\left[\frac{\pi(10.0\ \text{m})}{5.00\ \text{m}}\text{sen}\,\theta\right]\\ &= (0.020\ \text{W/m}^2)\cos^2[(2.00\pi\ \text{rad})\,\text{sen}\,\theta] \end{aligned}$$

a) Cuando $\theta = 4.0°$,

$$\begin{aligned} I &= (0.020\ \text{W/m}^2)\cos^2[(2.00\pi\ \text{rad})\,\text{sen}\,4.0°]\\ &= 0.016\ \text{W/m}^2 \end{aligned}$$

continúa

Esto es alrededor del 82% de la intensidad en $\theta = 0$.

b) La intensidad I es igual a $I_0/2$ cuando el coseno que aparece en la ecuación (35.14) tiene el valor $\pm 1/\sqrt{2}$. Esto ocurre cuando 2.00π sen $\theta = \pm\pi/4$ rad, por lo que sen $\theta = \pm(1/8.00) = \pm 0.125$ y $\theta = \pm 7.2°$.

c) La intensidad es igual a cero cuando $\cos[(2.00\pi \text{ rad})\text{sen } \theta] = 0$. Esto ocurre cuando 2.00π sen $\theta = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$, o sen $\theta = \pm 0.250, \pm 0.750, \pm 1.25, \ldots$ Los valores de sen θ mayores que 1 no tienen ningún significado, y encontramos que

$$\theta = \pm 14.5°, \pm 48.6°$$

EVALUAR: La condición en el inciso *b*) es que $I = I_0/2$, por lo que $(2.00\pi \text{ rad})$ sen $\theta = \pm\pi/4$ rad también se satisface cuando sen $\theta = \pm 0.375, \pm 0.625$ o ± 0.875, de manera que $\theta = \pm 22.0°$, $\pm 38.7°$ o $\pm 61.0°$. (¿Podría usted comprobar esto?) Sin embargo, sería incorrecto incluir estos ángulos en la solución porque el problema pide el ángulo *cerca* de $\theta = 0$ en el que $I = I_0/2$. Estos valores adicionales de θ no son los que buscamos.

Evalúe su comprensión de la sección 35.3 Un experimento de interferencia con dos ranuras usa luz coherente con longitud de onda de 5.00×10^{-7} m. Ordene los siguientes puntos en el patrón de interferencia según la intensidad en cada punto, de la más alta a la más baja. i) Un punto que está 4.00×10^{-7} m más cerca de una ranura que de la otra; ii) un punto donde las ondas luminosas recibidas desde las dos ranuras están 4.00 rad fuera de fase; iii) un punto que está 7.50×10^{-7} m más cerca de una ranura que de la otra; iv) un punto donde las ondas de luz recibidas por las dos ranuras están 2.00 rad fuera de fase.

35.4 Interferencia en películas delgadas

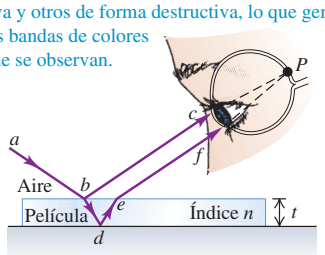
Cuando la luz se refleja en una capa delgada de aceite que flota en agua o en una burbuja de jabón, es común ver bandas brillantes de colores (véase la fotografía de inicio de capítulo). Éstos son los resultados de la interferencia. Las ondas luminosas se reflejan en las superficies anterior y posterior de esas finas películas y se produce interferencia constructiva entre las dos ondas reflejadas (con distintas longitudes de trayectoria) en diferentes lugares para distintas longitudes de onda. La figura 35.11a ilustra la situación. La luz que ilumina la superficie superior de una película delgada con espesor t se refleja parcialmente en esa superficie (trayectoria *abc*). La luz *transmitida* a través de la superficie superior se refleja parcialmente en la superficie inferior (trayectoria *abdef*). Las dos ondas reflejadas llegan juntas al punto P en la retina del ojo. En función de la relación de fase, interferirán en forma constructiva o destructiva. Diferentes colores tienen distintas longitudes de onda, por lo que la interferencia puede ser constructiva para unos colores y destructiva para otros. Por esa razón se observan anillos o franjas de colores en la figura 35.11b (que ilustra una fina capa de aceite que flota en agua) y en la fotografía que abre este capítulo (la cual muestra películas delgadas de una disolución jabonosa que forma las paredes de la burbuja). Las formas complejas de los anillos de colores que aparecen en las fotografías son el resultado de las variaciones en el espesor de la película.

35.11 a) Diagrama y b) fotografía que muestran la interferencia de la luz reflejada por una película delgada.

a) Interferencia entre los rayos reflejados en las dos superficies de una delgada película

La luz reflejada en las superficies superior e inferior de la película llega junta al punto P en el ojo y experimenta interferencia.

Algunos colores interfieren de forma constructiva y otros de forma destructiva, lo que genera las bandas de colores que se observan.



b) Franjas tipo arco iris en una película de aceite que flota en agua

Interferencia en una película delgada y cambios de fase durante la reflexión

Veamos una situación simplificada en la que luz *monocromática* se refleja en dos superficies casi paralelas con incidencia casi normal. La figura 35.12 muestra dos placas de vidrio separadas por una cuña o película fina de aire. Queremos considerar la interferencia entre las dos ondas de luz reflejadas en las superficies adyacentes a la cuña de aire, como se ilustra. (También ocurren reflexiones en la superficie superior de la placa de arriba y en la superficie inferior de la placa de abajo; para no complicar nuestro análisis, no las incluiremos.) La situación es la misma que la de la figura 35.11a, excepto que el espesor de la película (cuña) no es uniforme. La diferencia de trayectoria entre las dos ondas es exactamente el doble del espesor t de la cuña de aire en cada punto. En los puntos en que $2t$ es un número entero de longitudes de onda, esperamos que haya interferencia constructiva y una zona brillante; ahí donde hay un valor equivalente a la mitad de un número entero de longitudes de onda, es de esperar que la interferencia sea destructiva y que haya un área oscura. A lo largo de la línea donde las placas están en contacto, prácticamente *no* hay diferencia en las trayectorias, por lo que se espera una región brillante.

Cuando se efectúa el experimento, aparecen las franjas brillantes y oscuras, ¡pero están intercambiadas! A lo largo de la línea donde las placas están en contacto se ha-

lla una franja *oscura*, no una brillante. Esto sugiere que una u otra de las ondas reflejadas ha sufrido un cambio de fase de medio ciclo durante su reflexión. En ese caso, las dos ondas que se reflejan en la línea de contacto están medio ciclo fuera de fase aun cuando tengan la misma longitud de trayectoria.

De hecho, este cambio de fase puede predecirse a partir de las ecuaciones de Maxwell y la naturaleza electromagnética de la luz. Los detalles de la obtención se encuentran más allá de nuestro alcance, pero el resultado es el siguiente. Suponga que una onda de luz con amplitud de campo eléctrico E_i viaja en un material óptico con índice de refracción n_a. La onda incide en dirección normal en la interfaz con otro material óptico con índice n_b. La amplitud E_r de la onda que se refleja en la interfaz es proporcional a la amplitud E_i de la onda incidente, y está dada por

$$E_r = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_i \qquad \text{(incidencia normal)} \tag{35.16}$$

Este resultado demuestra que las amplitudes incidente y reflejada tienen el mismo signo cuando n_a es más grande que n_b, y signo contrario cuando n_b es mayor que n_a. Se distinguen tres casos, como se ilustra en la figura 35.13:

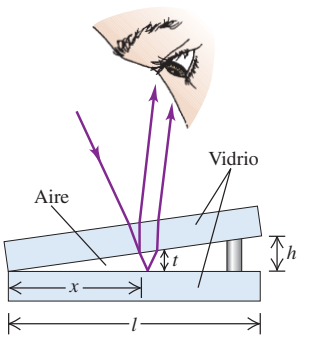
Figura 35.13a: cuando $n_a > n_b$, la luz viaja con más lentitud en el primer material que en el segundo. En este caso, E_r y E_i tienen el mismo signo, y el desplazamiento de fase de la onda reflejada en relación con la onda incidente es de cero. Esto es análogo a la reflexión de una onda mecánica transversal en una cuerda pesada en un punto en que está atada con otra cuerda más ligera o con un anillo que se puede mover en forma vertical sin fricción.

Figura 35.13b: cuando $n_a = n_b$, la amplitud E_r de la onda reflejada es cero. La onda luminosa incidente no puede "ver" la interfaz y *no* hay una onda reflejada.

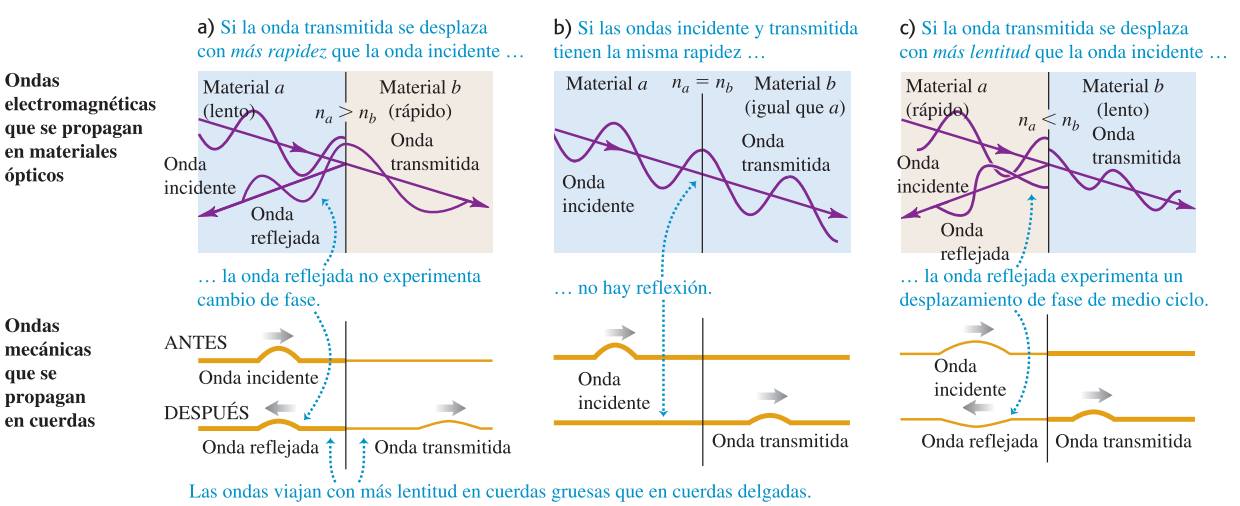
Figura 35.13c: cuando $n_a < n_b$, la luz viaja con más lentitud en el segundo material que en el primero. En este caso, E_r y E_i tienen signos opuestos y el desplazamiento de fase de la onda reflejada en relación con la onda incidente es π rad (180° o medio ciclo). Esto es análogo a la reflexión (con inversión) de una onda mecánica transversal en una cuerda ligera en un punto donde está atada a otra más pesada o a un soporte rígido.

Comparemos esto con la situación de la figura 35.12. En el caso de la onda reflejada por la superficie superior de la cuña de aire, n_a (vidrio) es mayor que n_b, por lo que esta onda tiene un desplazamiento de fase de cero. En el caso de la onda reflejada por la superficie inferior, n_a (aire) es menor que n_b (vidrio), por lo que esta onda tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo. Las ondas reflejadas en la línea de contacto no tienen diferencia de trayectoria que dé desplazamientos de fase adicionales, e interfieren destructivamente; esto es lo que observamos. El lector puede usar el principio

35.12 Interferencia entre ondas luminosas que se reflejan en los dos lados de una cuña de aire que separa dos placas de vidrio. Se han exagerado los ángulos y el espesor de la cuña de aire para obtener mayor claridad; en el texto suponemos que la luz incide en la placa superior con dirección normal y que las distancias h y t son mucho menores que l.



35.13 Figuras superiores: ondas electromagnéticas que inciden en una superficie entre materiales ópticos en dirección normal (por claridad, se muestra como un ángulo pequeño). Figuras inferiores: pulsos de una onda mecánica en cuerdas.



anterior para demostrar que en el caso de una incidencia normal, la onda reflejada en el punto b en la figura 35.11a está desplazada medio ciclo, en tanto que la onda reflejada en d no lo está (si hay aire bajo la película).

Este análisis se resume en forma matemática. Si la película tiene espesor t, la luz tiene incidencia normal y longitud de onda λ en la película; si ninguna o si ambas ondas reflejadas en las dos superficies tienen un desplazamiento de fase de medio ciclo por reflexión, las condiciones para que haya interferencia constructiva y destructiva son las siguientes:

$$2t = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$ (reflexión constructiva en película delgada, sin desplazamiento relativo de fase) (35.17a)

$$2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$ (reflexión destructiva en película delgada, sin desplazamiento relativo de fase) (35.17b)

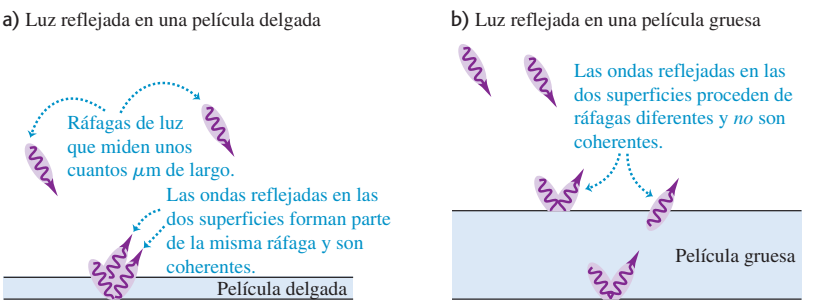
Si *una* de las dos ondas tiene un desplazamiento de fase de medio ciclo por reflexión, las condiciones para que haya interferencia constructiva y destructiva se invierten:

$$2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$ (reflexión constructiva en película delgada, con desplazamiento relativo de fase de medio ciclo) (35.18a)

$$2t = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$ (reflexión destructiva en película delgada, con desplazamiento relativo de fase de medio ciclo) (35.18b)

Películas delgadas y gruesas

Tal vez se pregunte por qué en nuestro análisis se hace hincapié en las películas *delgadas*; esto se debe a un principio que presentamos en la sección 35.1: para que dos ondas causen un patrón de interferencia estable, deben ser *coherentes*, con una relación de fase definida y constante. Sin embargo, el Sol y las bombillas eléctricas emiten luz en una corriente de pequeñas ráfagas, cada una de las cuales mide sólo unos cuantos micrómetros de longitud (1 micrómetro = 1 μm = 10^{-6} m). Si la luz se refleja en las dos superficies de una película delgada, las dos ondas reflejadas forman parte de la misma ráfaga (figura 35.14a). Por lo tanto, estas ondas son coherentes y la interferencia ocurre según hemos descrito. Sin embargo, si la película es demasiado gruesa, las dos ondas reflejadas pertenecerán a ráfagas diferentes (figura 35.14b). Entre distintas ráfagas de luz no hay una relación de fase definida, por lo que las dos ondas son incoherentes y no hay un patrón de interferencia fijo. Por eso vemos los colores de interferencia en la luz reflejada en la superficie resbalosa de una película de aceite con espesor de unos cuanto micrómetros (figura 35.11b), pero *no* vemos esos colores en la luz reflejada en el panel de una ventana de vidrio que tiene varios milímetros de grueso (miles de veces mayor).



35.14 a) La luz que se refleja en una película delgada genera un patrón de interferencia estable, pero b) la luz que se refleja en una película gruesa no lo hace.

Estrategia para resolver problemas 35.1 Interferencia en películas delgadas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Los problemas con las películas delgadas implican la interferencia de dos ondas: una reflejada en la superficie anterior de la película y otra reflejada en la superficie posterior. Es común que se pida relacionar la longitud de onda, el índice de refracción de la película y las dimensiones de ésta.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo que revele la geometría de la película delgada. El dibujo también debe representar los materiales adyacentes a la película; sus propiedades determinan si una o ambas ondas reflejadas tendrán un desplazamiento de fase de medio ciclo.
2. Determine la variable buscada.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Aplique la regla de cambios de fase a cada onda reflejada. Hay un desplazamiento de fase de medio ciclo cuando $n_b > n_a$, y ninguno cuando $n_b < n_a$.
2. Si ninguna onda reflejada sufre un desplazamiento de fase, o si las dos ondas reflejadas lo experimentan, se puede aplicar la ecuación (35.17). Si sólo una de las ondas reflejadas experimenta un desplazamiento de fase, se deben utilizar las ecuaciones (35.18).
3. Despeje la variable buscada en la ecuación de interferencia resultante. Si la película consiste sólo en vacío, asegúrese de usar en los cálculos la longitud de onda de la luz *en la película*. Si la película es de cualquier material excepto vacío, esta longitud de onda es más pequeña que la longitud de onda en el vacío por un factor de n. (En el caso del aire, $n = 1.000$, con una precisión de cuatro cifras.)
4. Si se hacen preguntas acerca de la onda que se transmite a través de la película, recuerde que la intensidad *mínima* en la onda *reflejada* corresponde a la intensidad *máxima transmitida*, y viceversa.

EVALUAR *la respuesta:* Los resultados se interpretan analizando lo que pasaría si la longitud de onda cambiara o si la película tuviera un espesor diferente.

Ejemplo 35.4 Interferencia de película delgada I

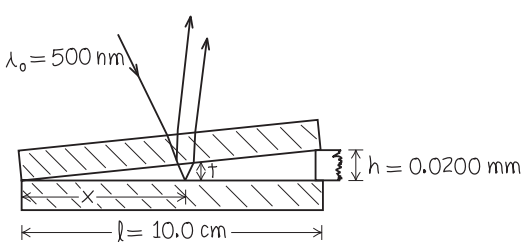
Suponga que las dos placas de vidrio de la figura 35.12 son dos portaobjetos de un microscopio que miden 10.0 cm de largo. Por un extremo están en contacto; por el otro están separados mediante un trozo de papel de 0.0200 mm de espesor. ¿Cuál es la separación de las franjas de interferencia que se observan por reflexión? ¿La franja en la línea de contacto es brillante u oscura? Suponga luz monocromática con longitud de onda en el aire de $\lambda = \lambda_0 = 500$ nm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Sólo consideraremos la interferencia entre la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la cuña de aire entre los portaobjetos. La placa de vidrio mide alrededor de un milímetro de espesor, por lo que se puede ignorar la interferencia entre la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la placa (véase la figura 35.14b).

PLANTEAR: La figura 35.15 ilustra la situación. La luz viaja más lentamente en el vidrio de los portaobjetos del microscopio que en el aire. Por consiguiente, la onda reflejada en la superficie superior de la cuña de aire no experimenta desplazamiento de fase (véase la figura 35.13a), mientras que la onda reflejada en la superficie inferior presenta un desplazamiento de fase de medio ciclo (véase la figura 35.13c).

35.15 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Como sólo una de las ondas reflejadas experimenta un desplazamiento de fase, la condición para la interferencia *destructiva* (franja oscura) es la ecuación (35.18b):

$$2t = m\lambda_0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Por triángulos semejantes en la figura 35.15, el espesor t de la cuña de aire en cada punto es proporcional a la distancia x con respecto a la línea de contacto:

$$\frac{t}{x} = \frac{h}{l}$$

Al combinar esto con la ecuación (35.18b) se obtiene

$$\frac{2xh}{l} = m\lambda_0$$

$$x = m\frac{l\lambda_0}{2h} = m\frac{(0.100\ \text{m})(500 \times 10^{-9}\ \text{m})}{(2)(0.0200 \times 10^{-3}\ \text{m})} = m(1.25\ \text{mm})$$

Las franjas oscuras sucesivas, correspondientes a valores enteros sucesivos de m, están separadas 1.25 mm. Al sustituir $m = 0$ en esta ecuación se obtiene $x = 0$, lo que corresponde a la línea de contacto entre los dos portaobjetos (en el lado izquierdo de la figura 35.15). Por consiguiente, en la línea de contacto hay una franja oscura.

EVALUAR: Nuestro resultado demuestra que la separación de los portaobjetos es proporcional a la longitud de onda de la luz utilizada; las franjas estarían más separadas con luz roja (λ_0 mayor) que con luz azul (λ_0 menor). Si se emplea luz blanca la que se refleja en cualquier punto sería una mezcla de longitudes de onda para la que ocurre interferencia constructiva; en la luz reflejada las longitudes de onda que interfieren destructivamente son débiles o inexistentes. (Este mismo efecto explica los colores que se observan cuando se ilumina una película de aceite con luz blanca, como en la figura 35.11b.)

Ejemplo 35.5 Interferencia de película delgada II

En el ejemplo 35.4, suponga que las placas de vidrio tienen $n = 1.52$ y que el espacio entre ellas contiene agua ($n = 1.33$) en vez de aire. ¿Qué sucede en esa situación?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El índice de refracción de la película de agua es aún menor que el del vidrio en cualquiera de los lados de la película, de manera que los desplazamientos de fase son los mismos que los del ejemplo 35.4. La única diferencia es que la longitud de onda en el agua es diferente que en el aire.

PLANTEAR: Se utiliza otra vez la ecuación (35.18b) para encontrar las posiciones de las franjas oscuras. La longitud de onda λ en el agua se relaciona con la longitud de onda λ_0 en el aire (en esencia, vacío) mediante la ecuación (33.5), $\lambda = \lambda_0/n$.

EJECUTAR: En la película de agua ($n = 1.33$), la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{500 \text{ nm}}{1.33} = 376 \text{ nm}$$

Cuando se sustituye λ_0 por λ en la expresión del ejemplo 35.4 para la posición x de la m-ésima franja oscura, se encuentra que la separación de las franjas se reduce en el mismo factor de 1.33 y es igual a 0.940 mm. Advierta que sigue habiendo una franja oscura en la línea de contacto.

EVALUAR: ¿Ve usted que, para regresar a la separación entre franjas del ejemplo 35.4, la dimensión h en la figura 35.15 tendría que reducirse a (0.0200 mm)/1.33 = 0.0150 mm? Esto demuestra que lo que importa en la interferencia de películas delgadas es la *razón* entre la longitud de onda y el espesor de la película. [Esto se observa si se analizan las ecuaciones (35.17a) y (35.17b).]

Ejemplo 35.6 Interferencia de película delgada III

Suponga que, de las dos placas del ejemplo 35.4, la de arriba es de un material plástico con $n = 1.40$ y que la cuña está llena con una grasa de silicona con $n = 1.50$, mientras que la placa inferior es de un cristal denso con $n = 1.60$. ¿Qué ocurre en este caso?

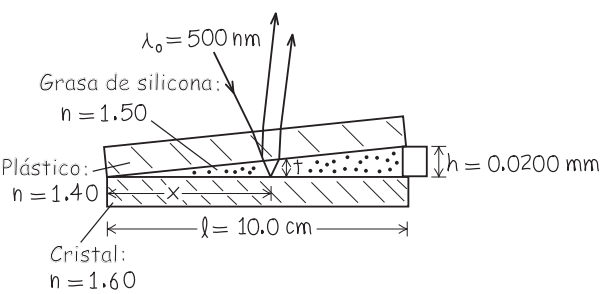
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La geometría sigue siendo la que se muestra en la figura 35.15, pero ahora los desplazamiento de fase de medio ciclo ocurren en *ambas* superficies de la cuña de grasa (véase la figura 35.13c).

PLANTEAR: La figura 35.16 ilustra la situación. Como en ambas superficies hay un desplazamiento de fase de medio ciclo, no hay un desplazamiento de fase *relativo* y se debe usar la ecuación (35.17b) para encontrar las posiciones de las franjas oscuras.

EJECUTAR: El valor de λ por usar en la ecuación (35.17b) es la longitud de onda en la grasa de silicona: $\lambda = \lambda_0/n$ = (500 nm)/1.50 = 333 nm. Es fácil demostrar que la separación de las bandas es de 0.833 mm. Note que las dos ondas reflejadas en la línea de contacto están en fase (ambas experimentan el mismo desplazamiento de fase), por lo que la línea de contacto se encuentra en una franja *brillante*.

35.16 Diagrama para este problema.



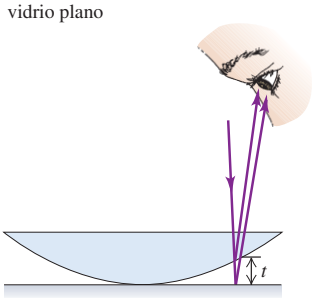
EVALUAR: ¿Qué pasaría si se elimina con cuidado el portaobjetos de arriba del microscopio, de manera que la cuña con grasa mantuviera su forma? Todavía habría cambios de fase de medio ciclo en las superficies superior e inferior de la cuña, de manera que el patrón de franjas sería el mismo que cuando estaba presente el portaobjetos superior.

Anillos de Newton

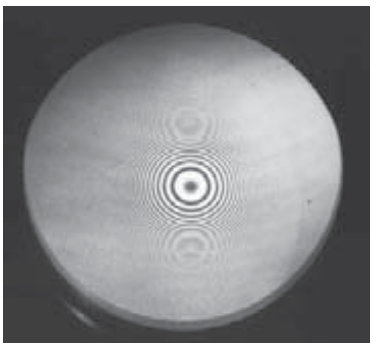
La figura 35.17a ilustra la superficie convexa de una lente en contacto con una placa de vidrio plano. Entre las dos superficies se forma una fina película de aire. Cuando se observa el conjunto con luz monocromática, se observan franjas de interferencia circulares (figura 35.17b). Newton se encargó de estudiarlas, por lo que se les conoce como **anillos de Newton**.

Se pueden usar las franjas de interferencia para comparar las superficies de dos partes ópticas colocando las dos en contacto para observar el patrón que se forma. La figura 35.18 es una fotografía tomada durante el proceso de tallado de la lente para el objetivo de un telescopio. El disco grueso inferior, de diámetro más grande, es la matriz de forma correcta, y el disco superior más pequeño es la lente de prueba. Las "curvas de nivel" son anillos de interferencia de Newton; cada una indica una distancia adicional de media longitud de onda entre el espécimen y la matriz. A 10 líneas del punto central, la distancia entre las dos superficies es de cinco longitudes de onda, o alrededor de 0.003 mm. Este valor no es muy bueno; comúnmente, las lentes de

a) Lente convexa en contacto con un vidrio plano



b) Anillos de Newton: franjas circulares de interferencia



35.17 a) Película de aire entre una lente convexa y una superficie plana. El espesor de la película t aumenta a partir de cero a medida que nos alejamos del centro, y con luz monocromática produce b) una serie de anillos brillantes y oscuros que se alternan.

alta calidad se pulen con una precisión de menos de una longitud de onda. La superficie del espejo primario del telescopio espacial Hubble se pulió a una precisión de menos de $\frac{1}{50}$ de longitud de onda. Por desgracia, se elaboró con especificaciones incorrectas, lo que generó uno de los errores "más precisos" en la historia de la tecnología óptica (véase la sección 34.2).

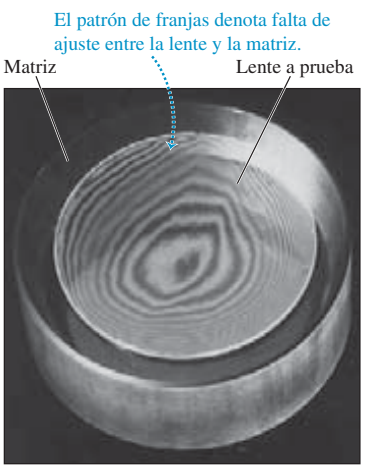
Recubrimientos reflectantes y no reflectantes

Los **recubrimientos no reflectantes** para superficies de lentes utilizan la interferencia de películas delgadas. Sobre la superficie de la lente se deposita una capa o película delgada de material duro transparente con índice de refracción menor que el del vidrio, como se ilustra en la figura 35.19. La luz se refleja en ambas superficies de la capa. En ambas reflexiones la luz se refleja en un medio de índice mayor que el del medio en el que se propaga, por lo que ocurre el mismo cambio de fase en ambas reflexiones. Si el espesor de la película es la cuarta parte (un cuarto) de la longitud de onda *en la película* (se supone incidencia normal), la diferencia total de las trayectorias es de media longitud de onda. De esta forma, la luz reflejada en la primera superficie está medio ciclo fuera de fase con respecto a la luz reflejada en la segunda, y hay interferencia destructiva.

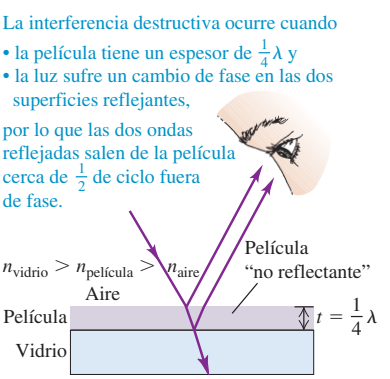
El espesor del recubrimiento no reflectante se puede hacer de un cuarto de longitud de onda sólo para una longitud de onda en particular. Por lo general, ésta se elige de la parte central amarillo verdosa del espectro ($\lambda = 550$ nm), para la que el ojo tiene mayor sensibilidad. En estas condiciones hay un poco más de reflexión tanto en las longitudes de onda más largas (rojo) como en las más cortas (azul), y la luz reflejada tiene una tonalidad púrpura. De esta manera, la reflexión general en la superficie de una lente o un prisma se reduce del 4 o 5% a menos del 1%. Este tratamiento tiene importancia particular para eliminar la luz reflejada dispersa en las lentes fotográficas muy corregidas con muchas piezas individuales de vidrio y numerosas superficies aire-vidrio. También aumenta la cantidad neta de luz que se *transmite* a través de la lente, ya que la luz que no se refleja se transmitirá. Se utiliza el mismo principio para minimizar la reflexión en las celdas solares fotovoltaicas ($n = 3.5$) mediante el empleo de una capa superficial delgada de monóxido de silicio (SiO, $n = 1.45$); esto ayuda a incrementar la cantidad de luz que llega en realidad a las celdas solares.

Si se deposita sobre vidrio un material con espesor de un cuarto de onda e índice de refracción *mayor* que el del vidrio, entonces la reflectividad *aumenta*, y el material depositado se llama **recubrimiento reflectante**. En este caso, hay un desplazamiento de fase de medio ciclo en la interfaz aire-película, pero no en la interfaz película-vidrio, y las reflexiones en los dos lados de la película interfieren en forma constructiva. Por ejemplo, un recubrimiento con índice de refracción de 2.5 ocasiona que el 38% de la energía incidente se refleje, en comparación con el 4% que lo haría si no hubiera recubrimiento. Empleando capas múltiples de recubrimiento es posible lograr cerca del 100% de transmisión o reflexión para longitudes de onda particulares. Algunas aplicaciones prácticas de estos recubrimientos son la separación de colores en las cámaras de televisión a color y los "reflectores térmicos" infrarrojos de los proyectores cinematográficos, las celdas solares y los visores de los astronautas. Los recubrimientos reflectantes se presentan en la naturaleza en las escamas de los arenques y otros peces plateados; esto les da su aspecto brillante característico (véase el problema 35.56).

35.18 Superficie de la lente del objetivo de un telescopio sometida a inspección durante su manufactura.



35.19 Un recubrimiento no reflectante tiene un índice de refracción intermedio entre el del vidrio y el del aire.



Ejemplo 35.7 Recubrimiento no reflectante

Un material de uso común para recubrir lentes es el fluoruro de magnesio, MgF_2, con $n = 1.38$. ¿Qué espesor debe tener un recubrimiento no reflectante para luz de 550 nm si se aplica a un vidrio con $n = 1.52$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este recubrimiento es de la clase ilustrada en la figura 35.19.

PLANTEAR: El espesor debe ser de un cuarto de la longitud de onda en el recubrimiento.

EJECUTAR: La longitud de onda de la luz amarillo-verde en el aire es de $\lambda_0 = 550$ nm, por lo que su longitud de onda en el recubrimiento de MgF_2 es

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{550 \text{ nm}}{1.38} = 400 \text{ nm}$$

Para que sea una película no reflectante, el recubrimiento debe tener un espesor de un cuarto de λ, o 100 nm. Se trata de una película muy delgada, con espesor no mayor de algunas centenas de moléculas.

EVALUAR: Advierta que este recubrimiento se convierte en *reflectante* si su espesor es igual a la *mitad* de una longitud de onda; entonces, la luz reflejada en la superficie inferior del recubrimiento viaja una longitud de onda más lejos que la luz que se refleja en la superficie superior, por lo que las dos ondas están en fase e interfieren de modo constructivo. Esto ocurre en el caso de luz con una longitud de onda de 200 nm en el MgF_2 y una longitud de onda de (200 nm)(1.38) = 276 nm en el aire. Ésta es una longitud de onda correspondiente al ultravioleta (véase la sección 32.1), por lo que los diseñadores de lentes ópticas con recubrimientos no reflectantes no necesitan preocuparse por el aumento en la reflexión de esta clase.

Evalúe su comprensión de la sección 35.4 Una delgada capa de benceno ($n = 1.501$) está sobre una lámina de fluorita ($n = 1.434$). Se ilumina desde arriba con luz cuya longitud de onda en el benceno es de 400 nm. ¿Cuál de los siguientes espesores posibles de la capa de benceno maximizará el brillo de la luz reflejada? i) 100 nm; ii) 200 nm; iii) 300 nm; iv) 400 nm.

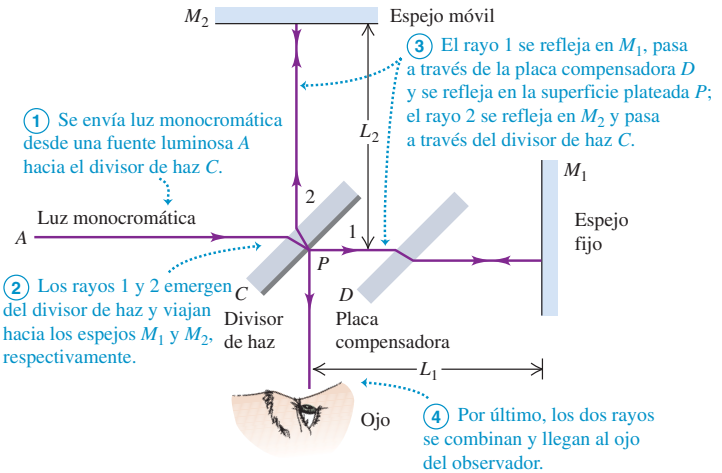
35.5 El interferómetro de Michelson

Un dispositivo experimental importante que utiliza la interferencia es el **interferómetro de Michelson**. A finales del siglo XIX, ayudó a probar uno de los aspectos experimentales clave de la teoría de la relatividad. En épocas más recientes, los interferómetros de Michelson se han empleado para hacer mediciones precisas de longitudes de onda y de distancias muy pequeñas, como los diminutos cambios en el espesor de un axón cuando un impulso nervioso se propaga a lo largo de él. Igual que el experimento de Young con dos ranuras, un interferómetro de Michelson toma luz monocromática de una sola fuente y la divide en dos ondas que siguen trayectorias distintas. En el experimento de Young esto se hace enviando parte de la luz a través de una ranura y parte a través de otra; en un interferómetro de Michelson el equipo que se usa recibe el nombre de *divisor de haz*. En ambos experimentos la interferencia ocurre cuando se vuelven a combinar las dos ondas luminosas.

Cómo funciona el interferómetro de Michelson

En la figura 35.20 se muestran de manera esquemática las componentes principales de un interferómetro de Michelson. Un rayo de luz procedente de una fuente monocromática A incide en el divisor de haz C, que consiste en una placa de vidrio con un fino recubrimiento de plata en su lado derecho. Parte de la luz (rayo 1) pasa a través de la superficie plateada y la placa compensadora D y se refleja en el espejo M_1. Después regresa a través de D y se refleja en la superficie plateada de C hacia el observador. El resto de la luz (rayo 2) se refleja en la superficie plateada en el punto P hacia el espejo M_2 y de regreso a través de C hacia el ojo del observador. El propósito de la placa compensadora D es garantizar que los rayos 1 y 2 pasen a través del mismo espesor de vidrio; la placa D se corta de la misma pieza de vidrio que la placa C con la finalidad de que sus espesores sean idénticos dentro de un margen de una fracción de longitud de onda.

Todo el aparato que se aprecia en la figura 35.20 está montado en una estructura muy rígida, y la posición del espejo M_2 se ajusta con un tornillo micrométrico muy exacto. Si las distancias L_1 y L_2 son exactamente iguales y los espejos M_1 y M_2 se encuentran colocados a ángulos rectos exactos, la imagen virtual de M_1 formada por reflexión en la superficie plateada de la placa C coincide con el espejo M_2. Si L_1 y L_2 *no*



35.20 Esquema del interferómetro de Michelson. El observador mira un patrón de interferencia que es resultado de la diferencia de las longitudes de las trayectorias de los rayos 1 y 2.

son exactamente iguales, la imagen de M_1 presentará un leve desplazamiento con respecto a M_2; y si los espejos no son exactamente perpendiculares, la imagen de M_1 forma un ángulo pequeño con M_2. Entonces, el espejo M_2 y la imagen virtual de M_1 desempeñan los mismos papeles que las dos superficies de una película delgada en forma de cuña (véase la sección 35.4), y la luz reflejada en estas superficies forma el mismo tipo de franjas de interferencia.

Suponga que el ángulo entre el espejo M_2 y la imagen virtual de M_1 es apenas suficientemente grande para que haya cinco o seis franjas verticales en el campo visual. Si ahora movemos despacio el espejo M_2 ya sea hacia delante o hacia atrás una distancia $\lambda/2$, la diferencia en las longitudes de las trayectorias entre los rayos 1 y 2 cambia en λ, y cada franja se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha una distancia igual a la separación entre franjas. Si observamos las posiciones de las franjas a través de un telescopio con un ocular con retículo y m franjas cruzan el retículo al mover el espejo una distancia y, entonces

$$y = m\frac{\lambda}{2} \qquad \text{o} \qquad \lambda = \frac{2y}{m} \tag{35.19}$$

Si m es de varios miles, la distancia y es suficientemente grande como para poderse medir con exactitud, y es posible obtener un valor exacto para la longitud de onda λ. De manera alternativa, si se conoce la longitud de onda, se puede medir la distancia y con sólo contar las franjas cuando se mueve M_2 esa distancia. De esta forma, es posible medir distancias del orden de una longitud de onda de luz con relativa facilidad.

El experimento de Michelson y Morley

La aplicación original del interferómetro de Michelson fue en el histórico **experimento de Michelson y Morley**. Antes de que se establecieran la teoría electromagnética de la luz y la teoría especial de la relatividad de Einstein, la mayoría de los físicos creían que la propagación de las ondas luminosas tenía lugar en un medio llamado **éter**, el cual se suponía que estaba presente en todo el espacio. En 1887 los científicos estadounidenses Albert Michelson y Edward Morley usaron el interferómetro de Michelson en un intento por detectar el movimiento de la Tierra a través del éter. Suponga que el interferómetro en la figura 35.20 se mueve de izquierda a derecha en relación con el éter. De acuerdo con la teoría del éter, esto ocasionaría cambios en la rapidez de la luz en las partes de la trayectoria que se indican con líneas horizontales en la figura. Habría desplazamientos en las franjas en relación con las posiciones que éstas tendrían si el instrumento estuviera en reposo en el éter. Entonces, cuando todo el instrumento se hizo girar 90°, las otras partes de las trayectorias se verían afectadas en forma similar, lo que produciría un desplazamiento de las franjas en la dirección opuesta.

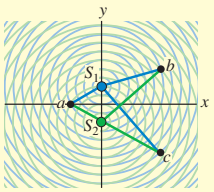
Michelson y Morley esperaban que el movimiento de la Tierra a través del éter provocara un desplazamiento de las franjas de alrededor de cuatro décimos de franja cuando se hiciera girar el instrumento. El desplazamiento que se observó en la realidad fue de menos de un centésimo de franja y, dentro de los límites de la incertidumbre experimental, parecía ser exactamente igual a cero. A pesar de su movimiento en órbita alrededor del Sol, la Tierra parecía estar *en reposo* en relación con el éter. Este resultado negativo desconcertó a los físicos hasta que Einstein desarrolló la teoría especial de la relatividad en 1905. Einstein postuló que la rapidez de una onda luminosa en el vacío tenía la misma magnitud c en relación con *todos* los marcos de referencia inerciales, sin importar cuál fuera su velocidad relativa de unos con respecto a otros. Se supo entonces que el supuesto éter no desempeñaba ningún papel, y el concepto fue abandonado.

La teoría de la relatividad es una piedra angular bien establecida de la física moderna y la estudiaremos en detalle en el capítulo 37. En retrospectiva, el experimento de Michelson y Morley constituye un apoyo experimental muy fuerte a la teoría especial de la relatividad y a menudo se le llama el experimento con "resultado negativo" más significativo jamás realizado.

Evalúe su comprensión de la sección 35.5 Usted está observando un patrón de franjas en un interferómetro de Michelson, como el de la figura 35.20. Si usted cambia el índice de refracción (pero no el grosor) de la placa compensadora, ¿se modificará el patrón?

CAPÍTULO 35 RESUMEN

Interferencia y fuentes coherentes: La luz monocromática es aquella que tiene una sola frecuencia. La coherencia es una relación de fase definida y constante entre dos ondas. El traslape de ondas provenientes de dos fuentes coherentes de luz monocromática forma un patrón de interferencia. El principio de superposición establece que la perturbación total ondulatoria en un punto cualquiera es la suma de las perturbaciones debidas a las ondas individuales.

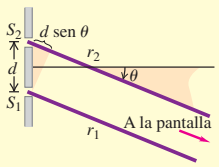


Interferencia de la luz de dos fuentes: Cuando dos fuentes están en fase, ocurre interferencia constructiva en puntos donde la diferencia en la longitud de las trayectorias desde las dos fuentes es igual a cero o un número entero de longitudes de onda; la interferencia destructiva tiene lugar en puntos donde la diferencia es la mitad de un número entero de longitudes de onda. Si dos fuentes que están separadas por una distancia d están muy alejadas de un punto P, y la recta entre las fuentes y P forma un ángulo θ con la recta perpendicular a la línea de las fuentes, entonces la condición para que haya interferencia constructiva en P es la ecuación (35.4). La condición para que haya interferencia destructiva es la ecuación (35.5). Cuando θ es muy pequeño, la posición y_m de la m-ésima franja brillante en una pantalla colocada a una distancia R de las fuentes está dada por la ecuación (35.6). (Véanse los ejemplos 35.1 y 35.2.)

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
(interferencia constructiva) (35.4)

$$d \operatorname{sen} \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
(interferencia destructiva) (35.5)

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d}$$
(franjas brillantes) (35.6)

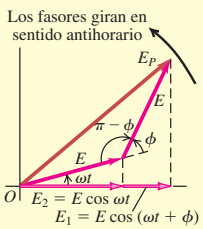


Intensidad en los patrones de interferencia: Cuando se superponen dos ondas sinusoidales con igual amplitud E y diferencia de fase ϕ, la amplitud resultante E_p y la intensidad I están dadas por las ecuaciones (35.7) y (35.10), respectivamente. Si las dos fuentes emiten en fase, la diferencia de fase ϕ en el punto P (localizado a una distancia r_1 de la fuente 1 y a una distancia r_2 de la fuente 2) es directamente proporcional a la diferencia de la longitud de las trayectorias $r_2 - r_1$. (Véase el ejemplo 35.3.)

$$E_P = 2E\left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \qquad (35.7)$$

$$I = I_0\cos^2\frac{\phi}{2} \qquad (35.10)$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \qquad (35.11)$$



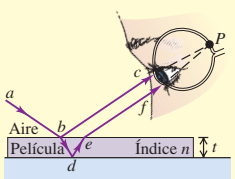
Interferencia en películas delgadas: Cuando se refleja luz en ambos lados de una película delgada de espesor t y no hay desplazamiento de fase en ninguna de las superficies, se presenta interferencia constructiva entre las ondas reflejadas cuando $2t$ es igual a un número entero de longitudes de onda. Si en una superficie tiene lugar un desplazamiento de fase de medio ciclo, ésta es la condición para que haya interferencia destructiva. Durante la reflexión ocurre un desplazamiento de fase de medio ciclo siempre que el índice de refracción del segundo material es mayor que el del primero. (Véanse los ejemplos 35.4 a 35.7.)

$$2t = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión constructiva en una película delgada, sin desplazamiento de fase relativo) (35.17a)

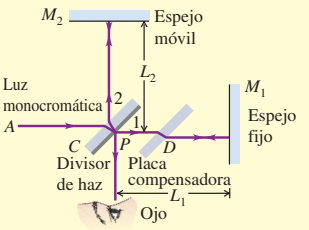
$$2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión destructiva en una película delgada, sin desplazamiento de fase relativo) (35.17b)

$$2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión constructiva en una película delgada, con desplazamiento de fase relativo de medio ciclo) (35.18a)

$$2t = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión destructiva en una película delgada, con desplazamiento de fase relativo de medio ciclo) (35.18b)



Interferómetro de Michelson: El interferómetro de Michelson utiliza una fuente de luz monocromática y se utiliza para medir longitudes de onda con gran precisión. Su propósito original fue detectar el movimiento de la Tierra con respecto a un hipotético éter, el supuesto medio de propagación de las ondas electromagnéticas. El éter nunca se detectó y el concepto se abandonó; la rapidez de la luz es la misma con respecto a todos los observadores. Esto es parte del fundamento de la teoría especial de la relatividad.



Términos clave

óptica física, *1207*
interferencia, *1208*
principio de superposición, *1208*
luz monocromática, *1208*
coherente, *1209*
interferencia constructiva, *1209*
interferencia destructiva, *1210*
curvas antinodales, *1210*
curvas nodales, *1210*
franjas de interferencia, *1212*
anillos de Newton, *1222*
recubrimiento no reflectante, *1223*
recubrimiento reflectante, *1223*
interferómetro de Michelson, *1224*
experimento de Michelson y Morley, *1225*
éter, *1225*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Los colores aparecen debido a la interferencia constructiva entre las ondas luminosas reflejadas en las superficies externa e interna de la burbuja de jabón. El espesor de las paredes de la burbuja en cada punto determina la longitud de onda de la luz para la que ocurre la interferencia más constructiva y, por lo tanto, el color más brillante aparece en ese punto (véase el ejemplo 35.4 en la sección 35.4).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

35.1 Respuesta: i) En cualquier punto P sobre el eje y positivo por arriba de S_1, la distancia r_2 de S_2 a P es mayor que la distancia r_1 de S_1 a P por 4λ. Esto corresponde a $m = 4$ en la ecuación (35.1), que es la que corresponde a la interferencia constructiva. Así, todos esos puntos forman una curva antinodal.

35.2 Respuesta: ii) La luz azul tiene una longitud de onda más corta que la roja (véase la sección 32.1). La ecuación (35.6) dice que la distancia y_m desde el centro del patrón a la m-ésima franja brillante es proporcional a la longitud de onda λ. Por consiguiente, todas las franjas se moverán hacia el centro del patrón conforme la longitud de onda disminuya, y la separación entre las franjas se reducirá.

35.3 Respuestas: i), iv), ii), iii) En los casos i) y iii) se da la longitud de onda λ y la diferencia de trayectorias d sen θ. Por lo tanto, se usa la ecuación (35.14): $I = I_0 \cos^2[\pi d \text{ sen } \theta/\lambda]$. En los incisos i) y iii) se da la diferencia de fase ϕ y se utiliza la ecuación (35.10), $I = I_0\cos^2(\phi/2)$. Se obtiene:
i) $I = I_0\cos^2[\pi(4.00 \times 10^{-7}\text{ m})/(5.00 \times 10^{-7}\text{ m})] = I_0\cos^2(0.800\pi\text{ rad}) = 0.655I_0$;
ii) $I = I_0\cos^2[(4.00\text{ rad})/2] = I_0\cos^2(2.00\text{ rad}) = 0.173I_0$;
iii) $I = I_0\cos^2[\pi(7.50 \times 10^{-7}\text{ m})/(5.00 \times 10^{-7}\text{ m})] = I_0\cos^2(1.50\pi\text{ rad}) = 0$;
iv) $I = I_0\cos^2[(2.00\text{ rad})/2] = I_0\cos^2(1.00\text{ rad}) = 0.292I_0$.

35.4 Respuestas: i) y iii) El benceno tiene un índice de refracción más grande que el del aire, por lo que la luz que se refleja en la superficie superior del benceno experimenta un desplazamiento de fase de medio ciclo. La fluorita tiene un índice de refracción *más pequeño* que el del benceno, de manera que la luz que se refleja en la interfaz benceno-fluorita no experimenta un desplazamiento de fase. Por lo tanto, la ecuación para la reflexión constructiva es la ecuación (35.18a), $2t = (m + \frac{1}{2})\lambda$, que se rescribe como $t = (m + \frac{1}{2})\lambda/2 = (m + \frac{1}{2})(400\text{ nm})/2 = 100\text{ nm}, 300\text{ nm}, 500\text{ nm}, \ldots$.

35.5 Respuesta: sí Al cambiar el índice de refracción cambia la longitud de onda de la luz dentro de la placa del compensador y, por lo tanto, cambia el número de longitudes de onda dentro del espesor de la placa. Así, esto tiene el mismo efecto que si se cambiara la distancia L_1 entre el divisor de haz y el espejo M_1, lo que modificaría el patrón de interferencia.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P35.1. Se realiza un experimento de interferencia de dos ranuras, y las franjas se proyectan en una pantalla. Después, todo el aparato se sumerge en la alberca más cercana. ¿Cómo cambia el patrón de las franjas?

P35.2. ¿Podría efectuarse un experimento similar al que hizo Young con dos ranuras con el sonido? ¿Cómo se llevaría a cabo? ¿Importa que las ondas sonoras sean longitudinales y las electromagnéticas transversales? Explique su respuesta.

P35.3. A través de dos ranuras delgadas pasa luz monocromática que se ve en una pantalla alejada. ¿Las franjas brillantes en la pantalla se encontrarán igualmente separadas? Si es así, ¿por qué? Si no, ¿cuáles están más cerca de estar igualmente separadas?

P35.4. En un patrón de interferencia de dos ranuras sobre una pantalla distante, ¿las franjas brillantes están a la mitad de la distancia que hay entre las franjas oscuras? ¿Siempre es ésta una buena aproximación?

P35.5. Las luces de un automóvil distante, ¿formarían un patrón de interferencia de dos fuentes? Si así fuera, ¿cómo podría observarse? Si no, ¿por qué?

P35.6. Las dos fuentes S_1 y S_2 que se aprecian en la figura 35.3 emiten ondas de la misma longitud de onda λ y están en fase entre sí. Suponga que S_1 es una fuente más débil, por lo que las ondas emitidas por S_1 tienen la mitad de la amplitud de las que emite S_2. ¿Cómo afectaría esto las posiciones de las líneas antinodales y de las nodales? ¿Habría un reforzamiento total en los puntos situados en las curvas antinodales? ¿Habría cancelación total en los puntos situados en las curvas nodales? Explique sus respuestas.

P35.7. ¿Podría efectuarse con rayos gamma el experimento de Young con dos ranuras? Si no fuera posible, ¿por qué? Si se pudiera, analice las diferencias en el diseño experimental en comparación con el experimento con luz visible.

P35.8. Luz coherente de color rojo ilumina dos ranuras angostas separadas por una distancia de 25 cm. ¿Se observará un patrón de interferencia de doble ranura cuando la luz proveniente de las ranuras ilumina una pantalla? Explique su respuesta.

P35.9. Se iluminan con luz coherente de longitud de onda λ dos ranuras estrechas separadas por una distancia d. Si d es menor que cierto valor mínimo, no se observan franjas oscuras. Explique lo que sucede. En términos de λ, indique cuál es este valor mínimo de d.

P35.10. Un compañero suyo, quien prefiere memorizar las ecuaciones en vez de entenderlas, combina las ecuaciones (35.4) y (35.13) para "probar" que ϕ *sólo* puede ser igual a $2\pi m$. ¿Cómo explicaría a este compañero que ϕ puede tener valores distintos de $2\pi m$?

P35.11. Si la luz monocromática que se ilustra en la figura 35.5a se sustituyera por luz blanca, ¿se vería sobre la pantalla un patrón de interferencia de dos ranuras? Explique su respuesta.

P35.12. Al usar el principio de superposición para calcular las intensidades de los patrones de interferencia, ¿se podrían sumar las intensidades de las ondas en vez de sus amplitudes? Explique su respuesta.

P35.13. Un vidrio de ventana con una fina película de agua sobre ella refleja menos que cuando está perfectamente seco. ¿Por qué?

P35.14. Una película de jabón *muy* delgada ($n = 1.33$), cuyo espesor es mucho menor que una longitud de onda de la luz visible, se ve negra; parece que no refleja ninguna luz. ¿Por qué? En contraste, una capa igualmente delgada de agua jabonosa ($n = 1.33$) sobre vidrio ($n = 1.50$) parece muy brillante. ¿Por qué existe una diferencia?

P35.15. En las películas delgadas puede ocurrir interferencia. ¿Por qué es importante que las películas sean *delgadas*? ¿Por qué no se obtienen estos efectos con una película relativamente *gruesa*? ¿Dónde se debe establecer la línea divisoria entre "delgada" y "gruesa"? Explique su razonamiento.

P35.16. Si se ilumina con luz blanca una cuña de aire como la que se ilustra en la figura 35.12, los colores que son débiles en la luz *reflejada* en cualquier punto a lo largo de la cuña son intensos en la luz *transmitida* a través de la cuña. Explique por qué sucede así.

P35.17. Se hace incidir con dirección normal luz monocromática sobre una película delgada. Hay interferencia destructiva para la luz reflejada, por lo que la intensidad de ésta es muy baja. ¿Qué pasó a la energía de la luz incidente?

P35.18. Cuando se extiende una capa delgada de aceite sobre un charco de agua, la parte más delgada de la película se ve oscura en el patrón de interferencia resultante. ¿Qué nos dice esto acerca de las magnitudes relativas de los índices de refracción del aceite y del agua?

Ejercicios

Sección 35.1 Interferencia y fuentes coherentes

35.1. Dos fuentes coherentes A y B de ondas de radio están separadas por una distancia de 5.00 m. Cada fuente emite ondas con longitud de onda de 6.00 m. Considere puntos a lo largo de la línea entre las dos fuentes. ¿A qué distancias (si hubiera alguna) de A la interferencia es *a*) constructiva y *b*) destructiva?

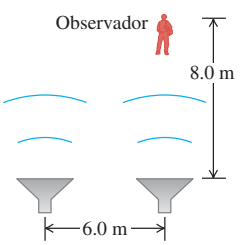
35.2. Interferencia de radio. Dos antenas de radio A y B irradian en fase. La antena B se encuentra a 120 m a la derecha de la antena A. Considere el punto Q a lo largo de la extensión de la línea que conecta ambas antenas, una distancia horizontal de 40 m a la derecha de la antena B. Se puede variar la frecuencia y, por lo tanto, la longitud de onda de las ondas emitidas. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda más larga para la que habrá interferencia destructiva en el punto Q? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda más larga para la que habrá interferencia constructiva en el punto Q?

35.3. Una estación transmisora de radio opera a una frecuencia de 1.20 MHz y tiene dos antenas idénticas que irradian en fase. La antena B está 9.00 m a la derecha de la antena A. Considere el punto P entre las antenas y a lo largo de la línea que las conecta, una distancia horizontal x a la derecha de la antena A. ¿Para qué valores de x ocurrirá interferencia constructiva en el punto P?

35.4. Dos fuentes de luz se pueden ajustar para que emitan luz monocromática de cualquier longitud de onda visible. Las dos fuentes son coherentes, están separadas por una distancia de 2.04 μm y alineadas con un observador, de manera que una fuente está 2.04 μm más lejos del observador que la otra. *a*) ¿Para qué longitudes de onda visibles (de 400 a 700 nm) el observador verá la luz más brillante debido a la interferencia constructiva? *b*) ¿Cómo se verían afectadas sus respuestas al inciso *a*) si las dos fuentes no estuvieran alineadas con el observador, pero mantuvieran un arreglo tal que una de ellas estuviera 2.04 μm más lejos del observador que la otra? *c*) ¿Para qué longitudes de onda de luz visible habría interferencia *destructiva* en la ubicación del observador?

35.5. Dos altavoces emiten ondas sonoras idénticas con longitud de onda de 2.0 m en fase una con la otra, y un observador está ubicado como se indica en la figura 35.21. *a*) En la ubicación del observador, ¿cuál es la diferencia en la trayectoria de las ondas que salen de los dos altavoces? *b*) En el sitio en que se encuentra el observador, ¿las ondas sonoras interferirán de manera constructiva o destructiva, o de alguna forma intermedia entre constructiva y destructiva? *c*) Suponga que ahora el observador aumenta su distancia con respecto a los altavoces a 17.0 m, y permanece directamente frente al mismo altavoz de antes. Responda las preguntas de los incisos *a*) y *b*) para la nueva situación.

Figura 35.21
Ejercicio 35.5



35.6. La figura 35.3 muestra el patrón de ondas producido por dos fuentes coherentes idénticas que emiten ondas con longitud de onda λ y que están separadas por una distancia $d = 4\lambda$. *a*) Explique por qué el eje y positivo por encima de S_1 constituye una curva antinodal con $m = +4$, y por qué el eje y negativo por debajo de S_2 constituye una curva antinodal con $m = -4$. *b*) Dibuje el patrón de ondas producido cuando la separación entre las fuentes se reduce a 3λ. En su dibujo, represente todas las curvas antinodales, es decir, aquellas en las que $r_2 - r_1 = m\lambda$. Identifique cada curva con su valor de m. *c*) En general, ¿qué es lo que determina los valores máximo (más positivo) y mínimo (más negativo) del entero m que identifica las líneas antinodales? *d*) Suponga que la separación entre las fuentes aumenta a $7\frac{1}{2}\lambda$. ¿Cuántas curvas antinodales habrá? ¿A qué valores de m corresponden? Explique su razonamiento. (Para responder estas preguntas no tiene que hacer un dibujo.)

35.7. Considere la figura 35.3, que podría representar la interferencia entre ondas en el agua de un tanque de olas. Elija al menos tres puntos sobre la curva antinodal indicada como "$m = 3$" y haga mediciones en esta figura para demostrar que se satisface la ecuación (35.1). Explique qué mediciones efectuó o cómo midió la longitud de onda λ.

Sección 35.2 Interferencia de la luz procedente dos fuentes

35.8. Se realiza el experimento de Young con luz de átomos de helio excitados ($\lambda = 502$ nm). Se miden con cuidado las franjas sobre una

pantalla que está a 1.20 m de la doble ranura, y se encuentra que el centro de la vigésima franja (sin contar la franja brillante central) está a 10.6 mm del centro de la franja brillante central. ¿Cuál es la separación entre las dos ranuras?

35.9. Dos ranuras separadas por una distancia de 0.450 mm se colocan a 75.0 cm de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la segunda y la tercera línea oscura del patrón de interferencia sobre la pantalla cuando las ranuras se iluminan con luz coherente con longitud de onda de 500 nm?

35.10. Se iluminan dos ranuras con luz coherente cuya longitud de onda es de 450 nm. Sobre una pantalla situada a 1.80 m, la distancia entre las franjas oscuras es de 4.20 mm. ¿Cuál es la separación entre las ranuras?

35.11. Se hace pasar luz coherente de una lámpara de vapor de sodio a través de un filtro que bloquea todo excepto la luz de una sola longitud de onda. Después incide sobre dos ranuras separadas por una distancia de 0.460 mm. En el patrón de interferencia resultante sobre una pantalla a 2.20 m de distancia, las franjas brillantes adyacentes están separadas por 2.82 mm. ¿Cuál es la longitud de onda?

35.12. A través de dos ranuras muy angostas separadas por una distancia de 0.200 mm se hace pasar luz coherente con longitud de onda de 400 nm, y el patrón de interferencia se observa en una pantalla ubicada a 4.00 m de las ranuras. *a*) ¿Cuál es el ancho (en mm) del máximo central de interferencia? *b*) ¿Cuál es el ancho de la franja brillante de primer orden?

35.13. Dos ranuras muy angostas están separadas por una distancia de 1.80 μm y situadas a 35.0 cm de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la primera y la segunda línea oscura del patrón de interferencia cuando las ranuras se iluminan con luz coherente con $\lambda = 550$ nm? (*Sugerencia:* considere que el ángulo θ en la ecuación (35.5) *no* es pequeño.)

35.14. A través de dos ranuras angostas separadas por una distancia de 0.300 mm pasa luz coherente que contiene dos longitudes de onda, 660 nm (rojo) y 470 nm (azul), y se observa el patrón de interferencia en una pantalla colocada a 5.00 m de las ranuras. ¿Cuál es la distancia en la pantalla entre las franjas brillantes de primer orden para las dos longitudes de onda?

35.15. Por dos ranuras muy angostas se hace pasar luz coherente con longitud de onda de 600 nm, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla situada a 3.00 m de las ranuras. La franja brillante de primer orden está a 4.84 mm del centro de la franja brillante central. ¿Con qué longitud de onda de la luz se observará la franja oscura de primer orden en ese mismo punto de la pantalla?

35.16. Luz coherente con frecuencia de 6.32×10^{14} Hz pasa a través de dos finas ranuras e incide en una pantalla ubicada a 85.0 cm de las ranuras. Usted observa que la tercera franja brillante se presenta a ± 3.11 cm a cada lado de la franja brillante central. *a*) ¿Qué tan separadas están las dos ranuras? *b*) ¿A qué distancia de la franja brillante central se presentará la tercera franja oscura?

35.17. Dos ranuras paralelas delgadas que están separadas 0.0116 mm son iluminadas por un rayo láser con longitud de onda de 585 nm. *a*) ¿Cuál es el número *total* de franjas brillantes (aquellas que indican interferencia constructiva completa), incluyendo la franja central y las que están a ambos lados de ésta, que aparecen en una pantalla distante muy grande? Resuelva este problema ¡sin calcular todos los ángulos! (*Sugerencia:* pregúntese cuál es el valor más grande que puede tener sen θ. ¿Qué le dice esto sobre cuál es el valor máximo de m?) *b*) ¿A qué ángulo con respecto a la dirección original del rayo se presentará la franja más distante de la franja brillante del centro?

35.18. Una estación de radio de FM tiene una frecuencia de 107.9 MHz y usa dos antenas idénticas montadas en la misma elevación y separadas por una distancia de 12.0 m. Las antenas irradian en fase. El patrón de radiación resultante tiene una intensidad máxima a lo largo de una línea horizontal perpendicular a la línea que une las antenas y en el punto medio entre ellas. Suponga que la intensidad se observa a distancias desde las antenas que son mucho mayores de 12.0 m. *a*) ¿A qué otros ángulos (medidos desde la línea de máxima intensidad) se encuentra el máximo de intensidad? *b*) ¿A qué ángulos es igual a cero?

Sección 35.3 La intensidad en los patrones de interferencia

35.19. En un patrón de interferencia de dos ranuras, la intensidad en el pico del máximo central es I_0. *a*) En cierto punto del patrón en el que la diferencia de fase entre las ondas desde las dos ranuras es de 60.0°, ¿cuál es la intensidad? *b*) ¿Cuál es la diferencia de las longitudes de las trayectorias para luz de 480 nm procedente de las dos ranuras en un punto en que el ángulo de fase es de 60.0°?

35.20. Fuentes coherentes A y B emiten ondas electromagnéticas con longitud de 2.00 cm. El punto P se halla a 4.86 m de A y a 5.24 m de B. ¿Cuál es la diferencia de fase en P entre estas dos ondas?

35.21. Luz coherente con longitud de onda de 500 nm pasa a través de ranuras angostas separadas por una distancia de 0.340 mm. A una distancia grande de las ranuras, en comparación con su separación, ¿cuál es la diferencia de fase (en radianes) de la luz procedente de las dos ranuras a un ángulo de 23.0° con respecto a la línea central?

35.22. Transmisión GPS. Los satélites del Sistema de posicionamiento global (GPS) miden aproximadamente 5.18 m de un lado a otro y transmiten dos señales de baja potencia, una de las cuales es de 1575.42 MHz (en la banda UHF). En una serie de pruebas de laboratorio, se colocan dos transmisores UHF a 1575.42 MHz en lados opuestos del satélite, los cuales trasmiten en fase de manera uniforme en todas direcciones. Se mide la intensidad en puntos en un círculo con radio de varias centenas de metros y con centro en el satélite. Sobre ese círculo se miden ángulos con respecto a un punto situado sobre la línea central del satélite (es decir, la bisectriz perpendicular de una línea que se extiende de un transmisor al otro). En este punto del círculo, la intensidad medida es de 2.00 W/m^2. *a*) ¿En cuántos otros ángulos en el intervalo $0° < \theta < 90°$ la intensidad también es de 2.00 W/m^2? *b*) Calcule los cuatro ángulos más pequeños en el intervalo $0° < \theta < 90°$ para los que la intensidad es de 2.00 W/m^2. *c*) ¿Cuál es la intensidad en el punto del círculo a un ángulo de 4.65° con respecto a la línea central?

35.23. Dos ranuras separadas 0.260 mm se colocan a 0.700 m de una pantalla y se las ilumina con luz coherente con longitud de onda de 660 nm. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. *a*) ¿Cuál es la distancia sobre la pantalla desde el centro del máximo central al primer mínimo? *b*) ¿Cuál es la distancia sobre la pantalla desde el centro del máximo central al punto donde la intensidad ha caído a $I_0/2$?

35.24. Demuestre que la ecuación (35.14) da direcciones de intensidad igual a cero que concuerdan con la ecuación (35.5).

35.25. Los puntos A y B están separados por una distancia de 56.0 m a lo largo de una línea que va de este a oeste. En cada punto hay un radiotransmisor que emite una señal horizontal de 12.5 MHz. Estos transmisores están en fase con otro y emiten sus haces de manera uniforme en un plano horizontal. Se lleva un receptor 0.500 km al norte de la línea AB y se coloca inicialmente en el punto C, directamente opuesto al punto medio de AB. El receptor se puede mover sólo a lo largo de la dirección este-oeste, pero, debido a su sensibilidad limitada, siempre debe estar dentro de un ámbito de alcance en el que la intensidad de la señal que recibe del transmisor no sea menor de $\frac{1}{4}$ de su valor máximo. ¿Qué tan lejos del punto C (a lo largo de la línea este-oeste) se puede mover el receptor de manera que en todo momento capte la señal?

35.26. Considere dos antenas separadas por una distancia de 9.00 m que irradian en fase a 120 MHz, como se describe en el ejercicio 35.3. Un receptor colocado a 150 m de ambas antenas mide una intensidad de I_0. El receptor se mueve de manera que está 1.8 m más cerca de una antena que de la otra. *a*) ¿Cuál es la diferencia de fase ϕ entre las dos ondas de radio producidas por esta diferencia en las trayectorias? *b*) En términos de I_0, ¿cuál es la intensidad medida por el receptor en su nueva posición?

Sección 35.4 Interferencia en películas delgadas

35.27. ¿Cuál es la película más delgada de un recubrimiento con $n = 1.42$ sobre vidrio ($n = 1.52$) con la cual puede haber interferencia destructiva de la componente roja (650 nm) de un haz incidente de luz blanca en aire por reflexión?

35.28. Vidrio no reflectante. Cuando se observa una obra de arte que se halla tras un vidrio, es frecuente que la afecte la luz que se refleja en la parte anterior del vidrio (lo que se llama *resplandor*) y que dificulta apreciar la obra claramente. Una solución es recubrir la superficie exterior del vidrio con una película que anule parte del resplandor. *a*) Si el vidrio tiene un índice de refracción de 1.62 y se utiliza TiO_2 (el cual tiene un índice de refracción de 2.62) como recubrimiento, ¿cuál es el espesor mínimo de película que cancelará la luz con longitud de onda de 505 nm? *b*) Si este recubrimiento es demasiado delgado para usarse, ¿qué otros espesores también funcionarían? Encuentre sólo los tres más delgados.

35.29. Se colocan dos piezas rectangulares de vidrio plano una sobre la otra y ambas en una mesa. Se coloca una tira delgada de papel entre ellas, en la orilla, de manera que se forma una cuña de aire muy delgada. Se iluminan las placas de vidrio con luz de una lámpara de vapor de mercurio con longitud de onda de 546 nm, que incide normalmente. Se forma un patrón de interferencia con 15.0 franjas por centímetro. Determine el ángulo de la cuña.

35.30. Una placa de vidrio de 9.00 cm de largo se pone en contacto con una segunda placa que forma un pequeño ángulo por medio de una tira de metal de 0.0800 mm de espesor situada en un extremo. El espacio entre las placas está lleno de aire. El vidrio es iluminado desde arriba con luz que tiene longitud de onda de 656 nm en el aire. ¿Cuántas franjas de interferencia se observan por centímetro en la luz reflejada?

35.31. Una película uniforme de TiO_2, con espesor de 1036 nm e índice de refracción de 2.62, se esparce uniformemente sobre una superficie de vidrio *crown* con índice de refracción de 1.52. Luz con longitud de onda de 520.0 nm procedente del aire incide con dirección normal sobre la película. Se desea incrementar el espesor de esta película de manera que la luz reflejada se cancele. *a*) ¿Cuál es el espesor *mínimo* de TiO_2 que debe *agregarse* de manera que la luz reflejada se cancele como se pretende? *b*) Después de hacer el ajuste del inciso *a*), ¿cuál es la diferencia de trayectorias entre la luz que se refleja en la parte superior de la película y la luz que se cancela después de viajar a través de la película? Exprese la respuesta en i) nanómetros y ii) longitudes de onda de la luz en la película de TiO_2.

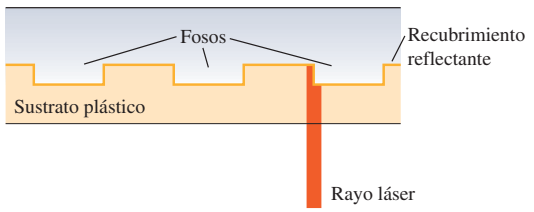
35.32. Sobre la superficie de la ventana de un automóvil se coloca una película plástica con índice de refracción de 1.85 para incrementar la reflectividad y mantener más fresco el interior del vehículo. El vidrio de la ventana tiene un índice de refracción de 1.52. *a*) ¿Cuál es el espesor mínimo que se requiere si luz con longitud de onda de 550 nm se refleja en ambos lados de la película para interferir constructivamente? *b*) Es difícil fabricar e instalar recubrimientos tan delgados como el del inciso *a*). ¿Cuál es el espesor siguiente más grueso para el que también habría interferencia constructiva?

35.33. Las paredes de una burbuja de jabón tienen aproximadamente el mismo índice de refracción que el del agua corriente, $n = 1.33$. Dentro y fuera de la burbuja hay aire. *a*) ¿Qué longitud de onda (en el aire) de luz visible se refleja con mayor intensidad en un punto localizado sobre una burbuja donde la pared de ésta mide 290 nm de espesor? ¿A qué color corresponde esto (véase la figura 32.4 y la tabla 32.1)? *b*) Repita el inciso *a*) para un espesor de pared de 340 nm.

35.34. Luz procedente del aire con longitud de onda de 648 nm incide perpendicularmente sobre una película con espesor de 8.76 μm e índice de refracción de 1.35. Parte de la luz se refleja en la primera superficie de la película y otra parte entra a la película y se refleja en la segunda superficie, donde la película está de nuevo en contacto con el aire. *a*) ¿Cuántas ondas están contenidas a lo largo de la trayectoria de esta segunda parte de la luz en su viaje completo a través de la película? *b*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos partes de la luz cuando salen de la película?

35.35. Reproductor de discos compactos. Los discos compactos (CD) se leen por la parte de abajo mediante un láser semiconductor con longitud de onda de 790 nm que pasa a través de un sustrato plástico cuyo índice de refracción es de 1.8. Cuando el haz encuentra un foso (*pit*), una parte del haz se refleja en el foso y otra parte en la región plana que separa los fosos, de manera que los dos haces interfieren uno con el otro (figura 35.22). ¿Cuál debe ser la profundidad mínima de los fosos de manera que la parte del haz que se refleja en un foso cancele la parte del haz que se refleja en la región plana? (Esta cancelación es lo que permite que el aparato reconozca el comienzo y final de un foso. Para una explicación más completa de la física en la que se basa la tecnología de los discos compactos, véase el artículo "The Compact Disc Digital Audio System", de Thomas D. Rossing, en la edición de diciembre de 1987 de *The Physics Teacher*.)

Figura **35.22** Ejercicio 35.35.



35.36. ¿Cuál es la película de jabón más delgada (excluya el caso de espesor igual a cero) que aparece negra cuando se la ilumina con luz cuya longitud de onda es de 480 nm? El índice de refracción de la película es 1.33, y en ambos lados de ella hay aire.

Sección 35.5 El interferómetro de Michelson

35.37. ¿A qué distancia se debe desplazar el espejo M_2 (véase la figura 35.20) del interferómetro de Michelson de manera que 1800 franjas de luz láser de He/Ne ($\lambda = 633$ nm) crucen una línea en el campo de visión?

35.38. Juan utiliza primero un interferómetro de Michelson con la luz de 606 nm de una lámpara de criptón 86. Él aleja el espejo movible con respecto a sí mismo, y cuenta 818 franjas que cruzan una línea en su campo de visión. Después, Linda sustituye la lámpara de criptón por luz filtrada de 502 nm de una lámpara de helio y desplaza el espejo móvil hacia ella. Linda también cuenta 818 franjas, pero éstas cruzan la línea de su campo de visión en dirección opuesta a la observada por Juan. Suponga que tanto Juan como Linda contaron correctamente las 818 franjas. *a*) ¿Qué distancia movió el espejo cada uno? *b*) ¿Cuál es el desplazamiento resultante del espejo?

Problemas

35.39. El radio de curvatura de la superficie convexa de una lente plano-convexa es de 95.2 cm. Se coloca el lado convexo hacia abajo sobre una placa de vidrio perfectamente plana que se ilumina desde arriba con luz roja cuya longitud de onda es de 580 nm. Determine el diámetro del segundo anillo brillante en el patrón de interferencia.

35.40. Los anillos de Newton se observan cuando una lente plano-convexa se coloca sobre una superficie plana de vidrio (véase el problema 35.39). Para una lente en particular con índice de refracción de $n = 1.50$ y una placa de vidrio con índice de $n = 1.80$, el diámetro del tercer anillo brillante es de 0.850 mm. Si ahora se llena con agua ($n = 1.33$) el espacio entre la lente y la placa, ¿cuál es el nuevo diámetro del anillo?

35.41. Suponga que usted ilumina dos ranuras delgadas con luz coherente monocromática procedente del aire y encuentra que producen sus primeros *mínimos* de interferencia en $\pm 35.20°$ a cualquier lado del punto brillante central. Después sumerge estas ranuras en un líquido transparente y las ilumina con la misma luz. Ahora encuentra que los primeros mínimos se presentan en $\pm 19.46°$. ¿Cuál es el índice de refracción de este líquido?

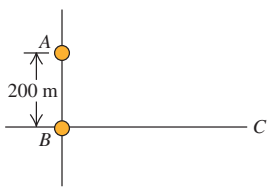
35.42. Una lámina muy delgada de latón contiene dos ranuras paralelas. Cuando sobre ellas brilla un rayo láser con incidencia normal y a

temperatura ambiente (20.0 °C), las primeras franjas oscuras de interferencia se presentan en ±32.5° desde la dirección original del rayo láser cuando se ve desde cierta distancia. Si ahora esta lámina se calienta lentamente a 135 °C, ¿en cuántos grados cambian su posición estas franjas oscuras? ¿Se acercan o se separan? Véase la tabla 17.1 para obtener la información pertinente e ignore cualquier efecto que pudiera ocurrir debido al cambio del espesor de las ranuras. (*Sugerencia:* como la expansión térmica normalmente produce cambios muy pequeños en la longitud, se pueden usar diferenciales para encontrar el cambio del ángulo.)

35.43. Dos altavoces, separados por una distancia de 2.50 m, son alimentados por el mismo oscilador de audio de manera que cada uno produce un sonido que consiste en *dos* frecuencias distintas, 0.900 kHz y 1.20 kHz. La rapidez del sonido en la habitación es de 344 m/s. Calcule todos los ángulos con respecto a la línea central habitual frente a (y lejos de) los altavoces con los que *ambas* frecuencias interfieren constructivamente.

35.44. Dos antenas de radio que irradian en fase están colocadas en los puntos *A* y *B*, separadas por una distancia de 200 m (figura 35.23). Las ondas de radio tienen una frecuencia de 5.80 MHz. Se desplaza un receptor de radio desde el punto *B* a lo largo de una línea perpendicular a la línea que une *A* con *B* (línea *BC* en la figura 35.23). ¿A qué distancias de *B* habrá interferencia *destructiva*? [*Nota:* la distancia entre el receptor y las fuentes no es grande en comparación con la separación de las fuentes, por lo que no se aplica la ecuación (35.5).]

Figura **35.23** Problema 35.44.



35.45. Una cara redonda de un tubo cilíndrico y sólido de plástico de 3.25 m está cubierta con un recubrimiento delgado negro que bloquea la luz por completo. La cara opuesta está cubierta por un recubrimiento fluorescente que brilla cuando lo toca la luz. En el centro de la cara negra se hacen dos ranuras paralelas, rectas y delgadas, separadas por 0.225 mm. Cuando a través de estas ranuras pasa luz láser con longitud de onda de 632.8 nm y perpendicular a la cara negra, se encuentra que la franja brillante central en la cara opuesta es de 5.82 mm de ancho, medida entre las bandas oscuras que la limitan a cada lado. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?

35.46. Una película delgada uniforme de material con índice de refracción de 1.40 cubre una placa de vidrio con índice de refracción de 1.55. Esta película tiene el espesor apropiado para cancelar luz que incide normalmente con longitud de onda de 525 nm y que llega a la película desde el aire, pero es algo mayor que el espesor mínimo para lograr esta cancelación. Con el paso del tiempo, la película se desgasta a razón constante de 4.20 nm por año. ¿Cuál es el número mínimo de años que deben transcurrir antes de que la luz reflejada de esa longitud de onda sea más intensa en vez de cancelarse?

35.47. *a*) En la figura 35.3, suponga que la fuente S_2 *no* está en fase con S_1, sino *fuera* de fase por $\frac{1}{2}$ ciclo. En esta situación, la ecuación (35.1) es la condición para que haya interferencia *destructiva*, y la ecuación (35.2) es la condición para que exista interferencia *constructiva*. Explique el porqué de esto. *b*) Suponga que S_2 *se adelanta* a S_1 por un ángulo de fase ϕ; es decir, si el desplazamiento de la fuente S_1 está dado por $x_1(t) = A\cos\omega t$, entonces el desplazamiento de la fuente S_2 es $x_2(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. (En la situación del inciso *a*), $\phi = \pi$.) Encuentre las expresiones para los valores de la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ que correspondan a la interferencia constructiva y a la destructiva.

35.48. Los campos eléctricos recibidos en el punto *P* desde dos fuentes de ondas coherentes e idénticas son $E_1(t) = E\cos(\omega t + \phi)$ y $E_2(t) = E\cos\omega t$. *a*) Utilice alguna identidad trigonométrica del Apéndice B para demostrar que la onda resultante es $E_P(t) = 2E\cos(\phi/2)\cos(\omega t + \phi/2)$. *b*) Demuestre que la amplitud de esta onda resultante está dada por la ecuación (35.7). *c*) Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que en un máximo de interferencia la amplitud de la onda resultante está en fase con las ondas originales $E_1(t)$ y $E_2(t)$. *d*) Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que cerca de un mínimo de interferencia la onda resultante está fuera de fase aproximadamente $\frac{1}{4}$ de ciclo con cualquiera de las ondas originales. *e*) Demuestre que el vector de Poynting *instantáneo* en el punto *P* tiene una magnitud $S = 4\epsilon_0 cE^2\cos^2(\phi/2)\cos^2(\omega t + \phi/2)$ y que el vector de Poynting *promediado en el tiempo* está dado por la ecuación (35.9).

35.49. Considere que las dos fuentes S_1 y S_2 que se ilustran en la figura 35.3 están colocadas en $y = d$ y $y = -d$, respectivamente. *a*) Vuelva a escribir la ecuación (35.1) en términos de las coordenadas *x* y *y* de un punto *P* en la figura 35.3 en el que ocurra interferencia constructiva. *b*) Su expresión en el inciso *a*) es la ecuación para las curvas antinodales que se muestran en la figura 35.3. Demuestre que estas curvas son hipérbolas. (*Sugerencia:* tal vez quiera revisar la definición de hipérbola en la geometría analítica.) *c*) Repita el inciso *a*) para la ecuación (35.2), que describe puntos en los que ocurre interferencia *destructiva*, y demuestre que las curvas *nodales* (no aparecen en la figura 35.3) también son hipérbolas.

35.50. Considere un experimento de interferencia con dos ranuras de diferente ancho. Según se mide en una pantalla distante, la amplitud de la onda procedente de la primera ranura es *E*, mientras que la amplitud de la onda procedente de la segunda ranura es 2*E*. *a*) Demuestre que la intensidad en cualquier punto en el patrón de interferencia es

$$I = I_0\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\cos\phi\right)$$

donde ϕ es la diferencia de fase entre las dos ondas medidas en un punto particular en la pantalla, e I_0 es la intensidad máxima en el patrón. *b*) Grafique *I* contra ϕ (como en la figura 35.10). ¿Cuál es el valor mínimo de la intensidad, y para qué valores de ϕ ocurre?

35.51. Se coloca una película delgada uniforme con índice de refracción de 1.750 sobre una lámina de vidrio con índice de refracción de 1.50. A temperatura ambiente (20.0 °C), la película tiene espesor apenas suficiente para que la luz con longitud de onda de 582.4 nm que se refleja en la parte superior de ella sea cancelada por la luz reflejada en la parte superior del vidrio. Después de colocar el vidrio en un horno y calentarlo con lentitud a 170 °C, se encuentra que la película cancela la luz reflejada con longitud de onda de 588.5 nm. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal de la película? (Ignore cualquier cambio en el índice de refracción de la película debido al cambio de temperatura.)

35.52. Se hace pasar luz roja con longitud de onda de 700 nm a través de un aparato con dos ranuras. Al mismo tiempo, por el aparato pasa luz visible monocromática con otra longitud de onda. Como resultado, la mayor parte del patrón que aparece en la pantalla es una mezcla de dos colores; sin embargo, el centro de la tercera franja brillante ($m = 3$) de la luz roja aparece como un rojo puro, sin nada del otro color. ¿Cuáles son las posibles longitudes de onda del segundo tipo de luz visible? ¿Necesita conocer la separación de las ranuras para responder esta pregunta? ¿Por qué?

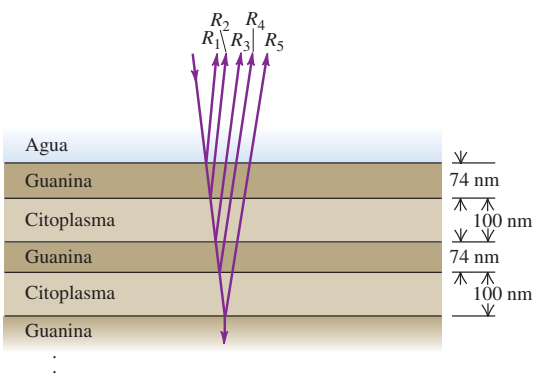
35.53. Considere un patrón de interferencia de dos ranuras para el que la distribución de la intensidad está dada por la ecuación (35.14). Sea θ_m la posición angular de la *m*-ésima franja brillante, donde la intensidad es I_0. Suponga que θ_m es pequeño, por lo que sen $\theta_m \cong \theta_m$. Sean θ_m^+ y θ_m^- los dos ángulos a cada lado de θ_m para los que $I = \frac{1}{2}I_0$. La cantidad $\Delta\theta_m = |\theta_m^+ - \theta_m^-|$ es la mitad del ancho de la *m*-ésima franja. Calcule $\Delta\theta_m$. ¿En qué forma $\Delta\theta_m$ depende de *m*?

35.54. Desde las superficies superior e inferior de una placa de vidrio ($n = 1.52$) se refleja luz blanca que incide en forma normal. Arriba y abajo de la placa hay aire. Se observa interferencia constructiva para luz cuya longitud de onda en el aire es de 477.0 nm. ¿Cuál es el espesor de la placa si la siguiente longitud de onda más larga para la que hay interferencia constructiva es 540.6 nm?

35.55. Se coloca una fuente S de luz monocromática y un detector D en aire a una distancia h sobre una hoja plana de vidrio en posición horizontal, y se separan una distancia horizontal x. Las ondas que llegan a D directamente desde S interfieren con las que se reflejan en el vidrio. La distancia x es pequeña en comparación con h, por lo que la reflexión sucede cerca de la incidencia normal. *a*) Demuestre que la condición para la interferencia constructiva es $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = (m + \frac{1}{2})\lambda$, y para la interferencia destructiva es $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = m\lambda$. (*Sugerencia:* tome en cuenta el cambio de fase en la reflexión.) *b*) Sea $h = 24$ cm y $x = 14$ cm. ¿Cuál es la longitud de onda más larga para la que habrá interferencia constructiva?

35.56. Recubrimientos reflectantes y los arenques. Los arenques y otros peces parecidos tienen un aspecto plateado brillante que les sirve de camuflaje cuando nadan en el océano iluminado por la luz del Sol. Esa apariencia se debe a las *plaquetas* adheridas a la superficie corporal de estos peces. Cada plaqueta está hecha de varias capas alternadas de guanina cristalina ($n = 1.80$) y de citoplasma ($n = 1.333$, un valor igual al del agua), con una capa de guanina en el exterior en contacto con el agua (figura 35.24). En una plaqueta común, las capas de guanina miden 74 nm de espesor y las capas de citoplasma miden 100 nm de espesor. *a*) Cuando llega luz a la superficie de la plaqueta con incidencia normal, ¿para qué longitudes de onda de la luz visible en el vacío estarán aproximadamente en fase todas las reflexiones R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5, ilustradas en la figura 35.24? Si a esta plaqueta la alcanza la luz blanca, ¿qué color se reflejará con más intensidad? (Véase la figura 32.4.) La superficie de un arenque tiene muchas plaquetas unas al lado de las otras en capas de diferente espesor, de manera que se reflejan *todas* las longitudes de onda visibles. *b*) Explique por qué una "pila" de capas es más reflectante que una sola capa de guanina con citoplasma debajo de ella. (Una pila de cinco capas de guanina separadas por capas de citoplasma refleja más del 80% de la luz incidente con la longitud de onda para la que está "sintonizada".) *c*) El color que se refleja con más intensidad en una plaqueta depende del ángulo con que se mira. Explique por qué debe ser así. (Estos cambios de color se aprecian si se observa un arenque desde distintos ángulos. La mayoría de las plaquetas de estos peces están orientadas de la misma manera, en forma tal que están verticales cuando el pez nada.)

Figura **35.24** Problema 35.56.



35.57. Una película opaca tiene dos ranuras paralelas delgadas. Cuando se dirige a través de ellas un haz de luz monocromática con incidencia normal, las primeras franjas brillantes en la luz transmitida se presentan en el aire a $\pm 18.0°$ con respecto a la dirección original del haz de luz en una pantalla distante cuando el aparato está en el aire, y si éste se sumerge en un líquido, las mismas franjas brillantes se presentan a $\pm 12.6°$. Determine el índice de refracción del líquido.

35.58. Un buque tanque derrama una gran cantidad de petróleo ($n = 1.45$) en el mar ($n = 1.33$). *a*) Si se observa al derrame desde arriba, ¿cuál es la longitud de onda predominante que se ve en un punto en el que el petróleo tiene un espesor de 380 nm? ¿De qué color es la luz? (*Sugerencia:* consulte la tabla 32.1). *b*) En el agua debajo de la mancha aceitosa, ¿qué longitud de onda visible (según se mide en el aire) predomina en la luz transmitida en el mismo punto de la mancha que se describe en el inciso *a*)?

35.59. En un experimento de Young con dos ranuras se coloca una pieza de vidrio con índice de refracción n y espesor L frente a la ranura superior. *a*) Describa en forma cualitativa lo que pasa con el patrón de interferencia. *b*) Obtenga una expresión para la intensidad I de la luz en puntos sobre una pantalla como función de n, L y θ. Aquí, θ es el ángulo habitual medido desde el centro de las dos ranuras. Es decir, determine la ecuación análoga a la (35.14) pero que también incluye a L y n de la placa de vidrio. *c*) Con el resultado del inciso *b*) obtenga una expresión para los valores de θ que ubican los máximos del patrón de interferencia [es decir, obtenga una ecuación análoga a la (35.4)].

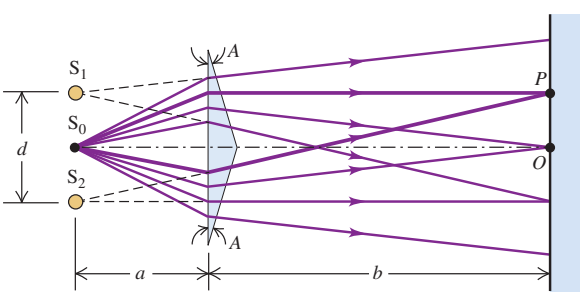
35.60. Después de que un rayo láser pasa a través de dos ranuras delgadas paralelas, las primeras franjas completamente oscuras se presentan a $\pm 15.0°$ con respecto a la dirección original del rayo, como se observa en una pantalla alejada de las ranuras. *a*) ¿Cuál es la razón de la distancia entre las ranuras con respecto a la longitud de onda de la luz que las ilumina? *b*) ¿Cuál es el ángulo más pequeño con respecto a la dirección original del rayo láser con el que la intensidad de la luz es $\frac{1}{10}$ de la intensidad máxima sobre la pantalla?

Problemas de desafío

35.61. El índice de refracción de una varilla de vidrio es 1.48 a $T = 20.0$ °C, y varía en forma lineal con la temperatura, con un coeficiente de 2.50×10^{-5}/C°. El coeficiente de expansión lineal del vidrio es 5.00×10^{-6}/C°. A 20.0 °C la longitud de la varilla es de 3.00 cm. Un interferómetro de Michelson tiene esta varilla en un brazo, y ésta se calienta de manera que su temperatura aumenta a razón de 5.00 C°/min. La fuente de luz tiene una longitud de onda $\lambda = 589$ nm, y la varilla está inicialmente a $T = 20.0$ °C. ¿Cuántas franjas cruzan el campo visual cada minuto?

35.62. La figura 35.25 ilustra un interferómetro conocido como *biprisma de Fresnel*. La magnitud del ángulo del prisma A es extremadamente pequeña. *a*) Si S_0 es una ranura fuente muy angosta, demuestre que la separación de las dos fuentes coherentes virtuales S_1 y S_2 está dada por $d = 2aA(n - 1)$, donde n es el índice de refracción del material del prisma. *b*) Calcule la separación de las franjas de luz verde con longitud de onda de 500 nm sobre una pantalla a 2.00 m del biprisma. Considere que $a = 0.200$ m, $A = 3.50$ mrad y $n = 1.50$.

Figura **35.25** Problema de desafío 35.62.



36 DIFRACCIÓN

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué sucede cuando la luz coherente incide sobre un objeto con un borde o una abertura.
- Cómo entender el patrón de difracción que se forma cuando la luz coherente pasa por una ranura angosta.
- Cómo calcular la intensidad en varios puntos de un patrón de difracción de una sola ranura.
- Qué sucede cuando la luz coherente incide sobre un sistema de ranuras angostas ligeramente espaciadas.
- Cómo utilizan los científicos las rejillas de difracción para hacer mediciones precisas de la longitud de onda.
- Cómo la difracción de rayos x revela la estructura de átomos en un cristal.
- Cómo la difracción establece límites a los detalles más pequeños que pueden verse con un telescopio.

? El láser utilizado para leer un disco compacto (CD) tiene una longitud de onda de 780 nm; en tanto que el láser utilizado para leer un DVD tiene una longitud de onda de 650 nm. ¿Cómo esto hace posible que un DVD contenga mayor información que un CD?

Todos estamos familiarizados con la idea de que el sonido dobla las esquinas. Si el sonido no se comportara de este modo, no podríamos oír una sirena de auto de policía que suena a la vuelta de la esquina, donde no la vemos, o lo que nos dice una persona que está de espaldas a nosotros. Lo que quizá resulte sorprendente (y sin duda lo fue para muchos científicos de principios del siglo XIX) es que la *luz* también puede doblar las esquinas. Cuando la luz proveniente de una fuente puntual ilumina un borde recto y proyecta una sombra, el borde de la sombra nunca es perfectamente nítido. Se observa un poco de luz en el área que esperaríamos estuviese en la sombra, y vemos que hay franjas brillantes y oscuras alternas en el área iluminada. En general, la luz que emerge de aberturas no se comporta exactamente de acuerdo con las predicciones del modelo de rayos rectilíneos de la óptica geométrica.

La razón de estos efectos es que la luz, como el sonido, tiene características de onda. En el capítulo 35 estudiamos los patrones de interferencia que surgen cuando se combinan dos ondas luminosas. En este capítulo investigaremos los efectos de la interferencia debidos a la combinación de *muchas* ondas luminosas. Estos efectos se describen como *difracción.* Descubriremos que el comportamiento de las ondas después de pasar a través de una abertura es un ejemplo de difracción; cada parte infinitesimal de la abertura actúa como una fuente de ondas, y el patrón resultante de luz y oscuridad es producto de la interferencia entre las ondas que emanan de estas fuentes.

La luz que emerge de sistemas de aberturas también forma patrones, cuyo carácter depende del color de la luz, así como del tamaño y la separación de las aberturas. Ejemplos de este efecto son los colores iridiscentes de las mariposas y el "arco iris" que vemos reflejado en la superficie de un disco compacto (CD). Exploraremos efectos parecidos con rayos x, mediante los cuales se estudia la estructura atómica de sólidos y líquidos. Por último, examinaremos la física de los *hologramas*, una clase especial de patrones de interferencia que se registran en película fotográfica y se reproducen. Cuando se ilumina como es debido, un holograma forma una imagen tridimensional del objeto original.

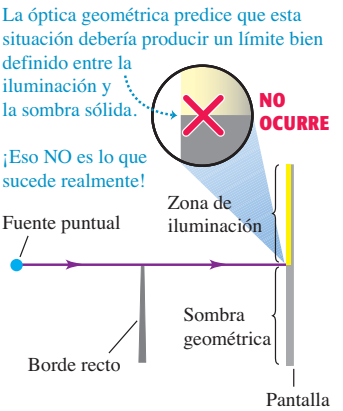
36.1 Difracción de Fresnel y Fraunhofer

De acuerdo con la óptica geométrica, cuando un objeto opaco se interpone entre una fuente puntual de luz y una pantalla, como en la figura 36. l, la sombra del objeto forma una línea perfectamente definida. Nada de luz incide en la pantalla en los puntos que están dentro de la sombra, y el área externa a la sombra aparece iluminada de modo casi uniforme. Sin embargo, como vimos en el capítulo 35, la naturaleza *ondulatoria* de la luz origina efectos que resultarían incomprensibles con base en el modelo simple de la óptica geométrica. Se produce una clase importante de estos efectos cuando la luz incide en una barrera que tiene una abertura o un borde. Los patrones de interferencia que se forman en tales situaciones se agrupan bajo el encabezado de **difracción**.

En la figura 36.2 se muestra un ejemplo de difracción. La fotografía de la figura 36.2a se obtuvo colocando una navaja de afeitar a medio camino entre un orificio muy pequeño, iluminado con luz monocromática, y una película fotográfica. La película registró la sombra que proyectaba la navaja. La figura 36.2b es una ampliación de una región próxima a la sombra del borde derecho de la navaja. Las flechas indican la posición de la línea de sombra *geométrica*. El área que se encuentra afuera de la sombra geométrica está bordeada por bandas brillantes y oscuras alternas. Hay un poco de luz en la región de la sombra, aunque esto no es muy visible en la fotografía. La primera banda brillante de la figura 36.2b, inmediatamente a la derecha de la sombra geométrica, es considerablemente más brillante que en la región de iluminación uniforme de la extrema derecha. Este sencillo experimento nos da idea de la riqueza y complejidad de algo que parecería una idea muy sencilla: la proyección de una sombra por un objeto opaco.

No es frecuente observar patrones de difracción como el de la figura 36.2 en la vida diaria, porque casi todas las fuentes ordinarias de luz no son monocromáticas ni tampoco son fuentes puntuales. Si se utilizara una bombilla eléctrica blanca esmerilada, en vez de una fuente puntual en la figura 36.1, cada longitud de onda de la luz proveniente de todos los puntos de la bombilla formaría su propio patrón de difracción; sin embargo, los patrones se superpondrían a tal grado que no veríamos ningún patrón individual.

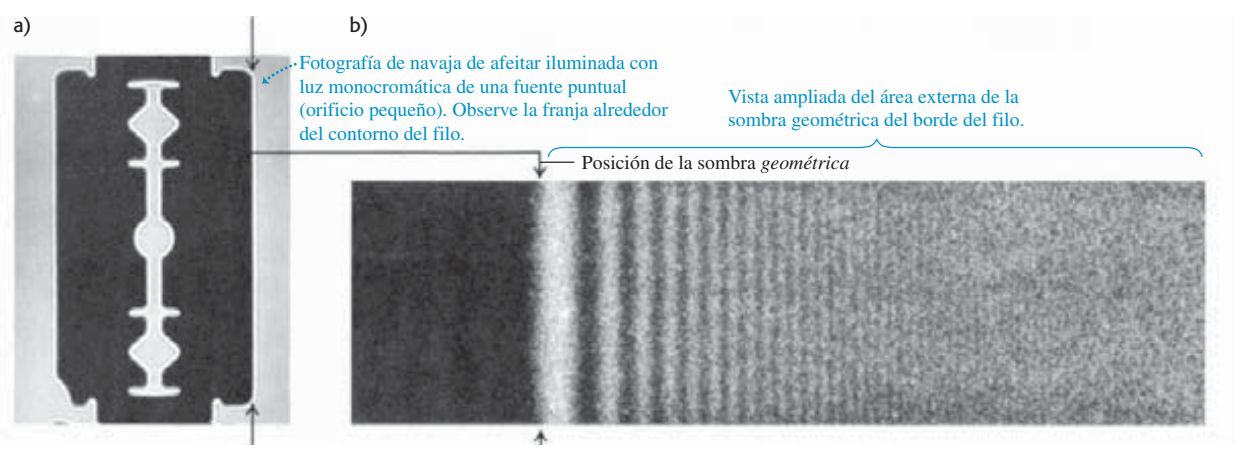
36.1 Una fuente puntual de luz ilumina un borde recto.



Difracción y principio de Huygens

Es posible analizar los patrones de difracción con base en el principio de Huygens (véase la sección 33.7). Repasemos brevemente este principio. Cada punto de un frente de onda puede considerarse como la fuente de onditas secundarias, que se extienden en todas direcciones con rapidez igual a la de propagación de la onda. La posición del frente de onda en cualquier momento subsiguiente es la *envolvente* de las ondas secundarias en ese instante. Para hallar el desplazamiento resultante en cualquier punto, se combinan todos los desplazamientos individuales producidos por estas

36.2 Un ejemplo de difracción.



ondas secundarias con base en el principio de superposición, teniendo en cuenta sus amplitudes y fases relativas.

En la figura 36.1, tanto la fuente puntual como la pantalla están relativamente cerca del obstáculo que forma el patrón de difracción. Esta situación se describe como una *difracción de campo cercano* o **difracción de Fresnel** se pronuncia "Frenel", (así llamada en honor del científico francés Augustin Jean Fresnel, 1788-1827). Si la fuente, el obstáculo y la pantalla están lo suficientemente alejados para considerar como paralelas todas las líneas de la fuente al obstáculo y todas las líneas del obstáculo a un punto del patrón, el fenómeno se describe como una *difracción de campo lejano* o **difracción de Fraunhofer** (en honor del físico alemán Joseph von Fraunhofer, 1787-1826). Restringiremos la exposición que sigue a la difracción de Fraunhofer, cuyo análisis pormenorizado es por lo regular más simple que el de la difracción de Fresnel.

A veces la difracción se describe como "la luz que rodea un obstáculo". Sin embargo, el proceso que origina la difracción está presente en la propagación de *todas* las ondas. Cuando un obstáculo impide el paso de una parte de la onda, se observan efectos de difracción que son resultado de la interferencia de las partes restantes de los frentes de onda. Típicamente, los instrumentos ópticos utilizan sólo una porción limitada de una onda; por ejemplo, los telescopios se sirven sólo de la parte de una onda que es admitida por su lente o espejo objetivo. Por consiguiente, la difracción está presente en casi todos los fenómenos ópticos.

Por último, hacemos hincapié en que no existe una distinción fundamental entre *interferencia* y *difracción*. En el capítulo 35 aplicamos el término *interferencia* a los efectos en los que intervienen ondas de un número pequeño de fuentes, dos por lo regular. La *difracción* se relaciona normalmente con una distribución *continua* de onditas de Huygens en toda el área de una abertura, o con un número muy grande de fuentes o aberturas. No obstante, ambas categorías de fenómenos están gobernadas por la misma física básica de superposición y del principio de Huygens.

Evalúe su comprensión de la sección 36.1 ¿Las ondas *sonoras* sufren difracción en torno a un borde?

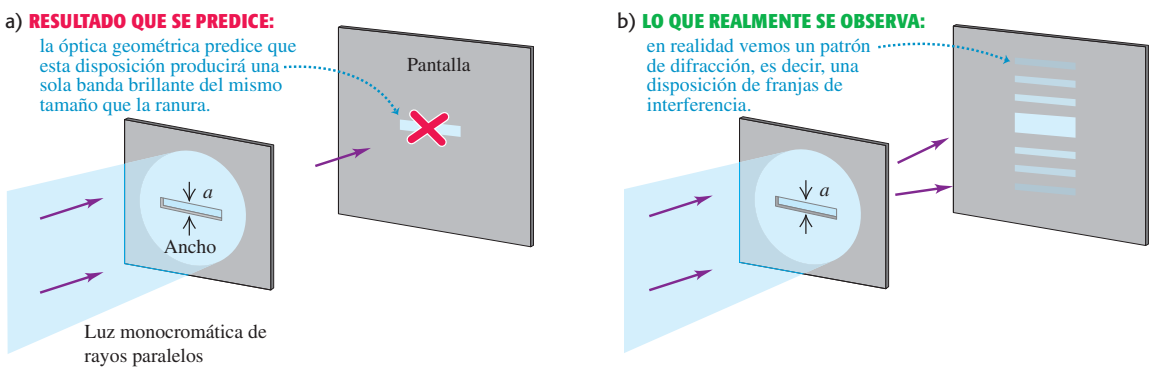
36.2 Difracción desde una sola ranura

Activ Physics ONLINE
16.6 Difracción desde una sola ranura

En esta sección analizaremos el patrón de difracción que forma la luz monocromática de ondas planas (rayos paralelos) cuando emerge de una ranura larga y angosta, como se muestra en la figura 36.3. Llamaremos *ancho* a la dimensión angosta, no obstante que en esta figura se trata de una dimensión vertical.

De acuerdo con la óptica geométrica, el haz transmitido debería tener la misma sección transversal que la ranura, como en la figura 36.3a. Lo que se observa *en realidad* es el patrón que se muestra en la figura 36.3b. El haz se ensancha en sentido vertical después de pasar por la ranura. El patrón de difracción consiste en una banda central

36.3 a) La óptica geométrica predice incorrectamente la "sombra" de una ranura horizontal. b) Una ranura horizontal forma en realidad un patrón de difracción. Por claridad se exageró considerablemente el ancho de la ranura.



brillante, que puede ser mucho más amplia que el ancho de la ranura, bordeada de bandas oscuras y brillantes alternas, cuya intensidad decrece rápidamente. Aproximadamente el 85% de la potencia del haz transmitido se encuentra en la banda brillante central, cuya anchura resulta ser *inversamente* proporcional al ancho de la ranura. En general, cuanto menos ancha sea la ranura, más amplio será el patrón de difracción en su totalidad. (El ensanchamiento *horizontal* del haz en la figura 36.3b es insignificante, porque la dimensión horizontal de la ranura es relativamente grande.) Es fácil observar un patrón de difracción similar mirando una fuente puntual, como un farol distante, por ejemplo, a través de una abertura angosta formada entre dos dedos y colocada delante del ojo; la retina del ojo corresponde a la pantalla.

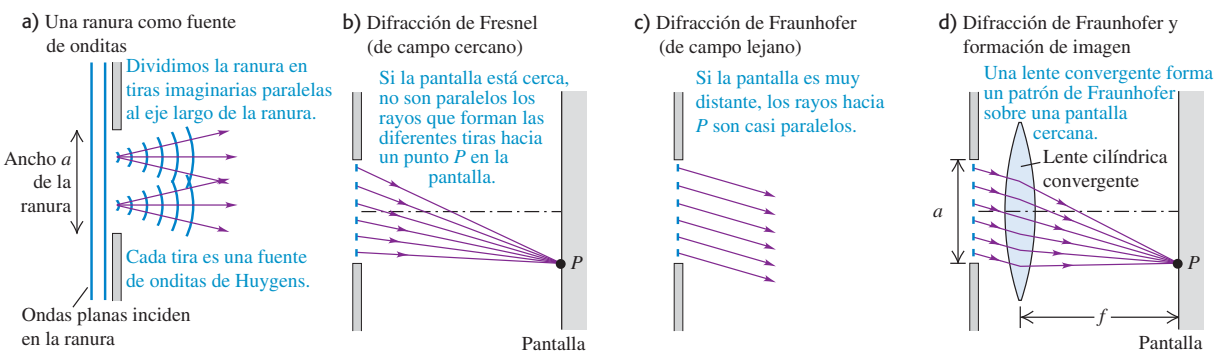
Difracción de una sola ranura: Posición de las franjas oscuras

La figura 36.4 muestra una vista lateral del mismo arreglo; los lados largos de la ranura son perpendiculares a la figura, y las ondas planas inciden en la ranura desde la izquierda. De acuerdo con el principio de Huygens, cada elemento de área de la abertura de la ranura puede considerarse una fuente de ondas secundarias. En particular, imaginemos que dividimos la ranura en varias tiras angostas de igual anchura, paralelas a los bordes largos y perpendiculares a la página. En la figura 36.4a se muestran dos de estas tiras. A partir de cada tira se propagan onditas secundarias cilíndricas, las cuales se muestran en sección transversal.

En la figura 36.4b se colocó una pantalla a la derecha de la ranura. Podemos calcular la intensidad resultante en el punto P de la pantalla sumando las contribuciones de las onditas individuales, teniendo en cuenta como es debido sus diversas fases y amplitudes. Resulta mucho más fácil hacer este cálculo si suponemos que la pantalla está lo suficientemente lejos como para que todos los rayos, que van de diversas partes de la ranura a un punto P específico de la pantalla, sean paralelos (como en la figura 36.4c). Una situación equivalente es la que se representa en la figura 36.4d, donde los rayos que inciden en la lente son paralelos y la lente forma una imagen reducida del patrón que se formaría en una pantalla infinitamente distante sin la lente. Cabría esperar que los diversos trayectos de la luz a través de la lente introdujeran nuevos desplazamientos de fase pero, de hecho, se puede demostrar que todos los trayectos tienen desplazamientos de fase *iguales*, por lo que esto no representa un problema.

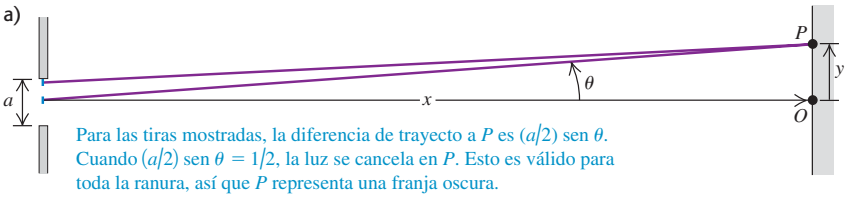
La situación de la figura 36.4b es una difracción de Fresnel; en las figuras 36.4c y 36.4d, donde se considera que los rayos salientes son paralelos, la difracción es de Fraunhofer. Podemos deducir de forma muy simple las características más importantes del patrón de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola ranura. Considere en primer término dos tiras largas, una inmediatamente debajo del borde superior del dibujo de la ranura y otra en su centro, la cual se muestra vista desde un extremo en la figura 36.5. La diferencia de longitud de trayecto al punto P es $(a/2)\,\text{sen}\,\theta$, donde a es el ancho de la ranura y θ, el ángulo entre la perpendicular a la ranura y una recta del centro de la ranura a P. Suponga que esta diferencia de trayecto resulta ser igual a $\lambda/2$; entonces, la luz proveniente de estas dos tiras alcanza el punto P con una diferencia de fase de medio ciclo, y hay cancelación.

36.4 Difracción producida por una sola ranura rectangular. Los lados largos de la ranura son perpendiculares a la figura.



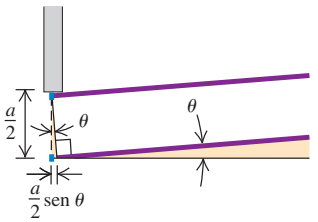
36.5 Vista lateral de una ranura horizontal. Cuando la distancia x a la pantalla es mucho mayor que el ancho de ranura a, los rayos provenientes de puntos separados por una distancia $a/2$ se pueden considerar como paralelos.

a)



Para las tiras mostradas, la diferencia de trayecto a P es $(a/2)$ sen θ. Cuando $(a/2)$ sen $\theta = 1/2$, la luz se cancela en P. Esto es válido para toda la ranura, así que P representa una franja oscura.

b) Vista aumentada de la mitad superior de la ranura



Por lo general θ es muy pequeño, así que podemos usar las aproximaciones sen $\theta = \theta$ y tan $\theta = \theta$. Por lo tanto, la condición para la banda oscura es

$$y_m = x\,\frac{m\lambda}{a}.$$

Asimismo, la luz proveniente de dos tiras inmediatamente *debajo* de las dos de la figura también llega a P desfasada medio ciclo. De hecho, la luz proveniente de *cada una* de las tiras de la mitad superior de la ranura cancela la luz proveniente de una tira correspondiente de la mitad inferior. El resultado es una cancelación total en P de la luz combinada que llega de toda la ranura, y se forma una franja oscura en el patrón de interferencia. Es decir, se presenta una franja oscura siempre que

$$\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \qquad \text{o bien} \qquad \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\lambda}{a} \tag{36.1}$$

El signo más menos ($\pm$) de la ecuación (36.1) significa que hay franjas oscuras simétricas arriba y abajo del punto O de la figura 36.5a. La franja superior ($\theta > 0$) aparece en un punto P, donde la luz proveniente de la mitad inferior de la ranura recorre $\lambda/2$ más para llegar a P que la luz procedente de la mitad superior; la franja inferior ($\theta < 0$) se presenta donde la luz proveniente de la mitad *superior* recorre $\lambda/2$ más que la luz procedente de la mitad *inferior*.

También podemos dividir la pantalla en cuartos, sextos, etcétera, y utilizar el argumento anterior para demostrar que se presenta una franja oscura siempre que $\operatorname{sen}\theta = \pm 2\lambda/a$, $\pm 3\lambda/a$, y así sucesivamente. Así, la condición para que haya una franja *oscura* es

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad \begin{matrix}\text{(franjas oscuras en difracción}\\ \text{desde una ranura)}\end{matrix} \tag{36.2}$$

Por ejemplo, si el ancho de ranura es igual a diez longitudes de onda ($a = 10\lambda$), aparecen franjas oscuras en $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{2}{10}, \pm\frac{3}{10}, \ldots$. Entre las franjas oscuras hay franjas brillantes. Advertimos además que $\operatorname{sen}\theta = 0$ corresponde a una banda *brillante*; en este caso, la luz de toda la ranura llega a P en fase. Por lo tanto, sería erróneo incluir $m = 0$ en la ecuación (36.2). La franja central brillante es más ancha que las otras franjas brillantes, como lo muestra la figura 36.3. En la aproximación de ángulos pequeños que utilizaremos en seguida, es exactamente *dos veces* más ancha.

Con luz, la longitud de onda λ es del orden de 500 nm $= 5 \times 10^{-7}$ m. Este valor es frecuentemente mucho más pequeño que el ancho de ranura a; un ancho de ranura representativo es de 10^{-2} cm $= 10^{-4}$ m. Por consiguiente, los valores de θ en la ecuación (36.2) suelen ser tan pequeños, que la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (donde θ está en radianes) es muy buena. En ese caso, podemos reformular esta ecuación como

$$\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \qquad \text{(con ángulos } \theta \text{ pequeños)}$$

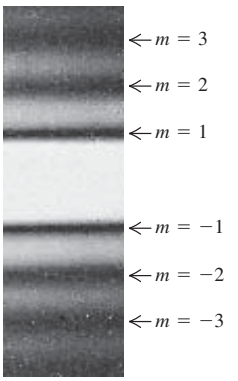
donde θ está en *radianes.* Asimismo, si la distancia de la ranura a la pantalla es x, como en la figura 36.5a, y la distancia vertical de la m-ésima banda oscura al centro del patrón es y_m, entonces $\tan\theta = y_m/x$. Si θ es pequeño también podemos tomar θ (en radianes) como aproximación de $\tan\theta$, y entonces resulta que

$$y_m = x\frac{m\lambda}{a} \qquad (\text{para } y_m \ll x) \tag{36.3}$$

La figura 36.6 es una fotografía de un patrón de difracción de una sola ranura donde se marcaron los mínimos $m = \pm 1, \pm 2$ y ± 3.

CUIDADO **Difracción desde una sola ranura contra interferencia de dos ranuras** Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación correspondiente al patrón de dos ranuras [ecuación (35.6)], excepto en que en la ecuación (36.3) representamos la distancia a la pantalla como x en vez de R. Pero la ecuación (36.3) proporciona las posiciones de las franjas *oscuras* en un patrón de una *sola ranura*, en vez de las franjas *brillantes* de un patrón de *doble ranura.* Además, en la ecuación (36.2) $m = 0$ *no* es una franja oscura. ¡Tenga cuidado!

36.6 Fotografía del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura horizontal.



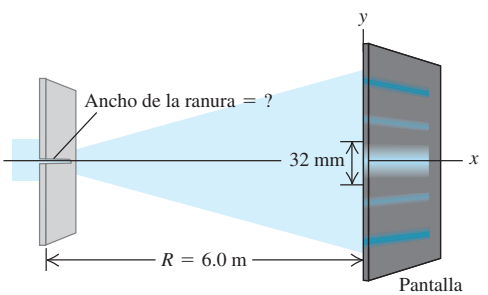
Ejemplo 36.1 Difracción en una ranura

Se hace pasar luz láser de 633 nm a través de una ranura angosta y se observa el patrón de difracción en una pantalla a 6.0 m de distancia. Se encuentra que, en la pantalla, la distancia entre los centros de los primeros mínimos afuera de la franja brillante central es de 32 mm (figura 36.7). ¿Cuál es el ancho de la ranura?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la relación entre las franjas oscuras en un patrón de difracción en una sola ranura y el ancho de la ranura (la incógnita).

36.7 Experimento de difracción de una sola ranura.



PLANTEAR: Las distancias entre puntos en la pantalla son mucho menores que la distancia de la ranura a la pantalla; por ello, el ángulo θ de la figura 36.5a es muy pequeño. En consecuencia, utilizamos la relación aproximada de la ecuación (36.3) para despejar el ancho de ranura a (la incógnita).

EJECUTAR: El primer mínimo corresponde a $m = 1$ en la ecuación (36.3). La distancia y_1 del máximo central al primer mínimo de uno u otro lado es la mitad de la distancia entre los primeros dos mínimos; así que $y_1 = (32\text{ mm})/2$. Sustituyendo estos valores y despejando a:

$$a = \frac{x\lambda}{y_1} = \frac{(6.0\text{ m})(633\times10^{-9}\text{ m})}{(32\times10^{-3}\text{ m})/2}$$

$$= 2.4\times10^{-4}\text{ m} = 0.24\text{ mm}$$

EVALUAR: El ángulo θ es pequeño sólo si la longitud de onda es pequeña en comparación con el ancho de ranura. Dado que $\lambda = 633\text{ nm} = 6.33\times10^{-7}$ m y hemos hallado que $a = 0.24\text{ mm} = 2.4\times10^{-4}$ m, nuestro resultado es congruente con esto: la longitud de onda es $(6.33\times10^{-7}\text{ m})/(2.4\times10^{-4}\text{ m}) = 0.0026$ veces el ancho de ranura.

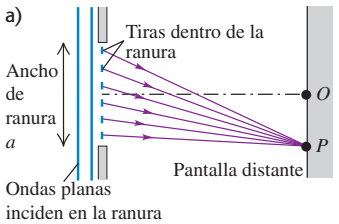
¿Puede usted demostrar que la distancia entre los *segundos* mínimos de los dos lados es 2(32 mm) = 64 mm, y así sucesivamente?

Evalúe su comprensión de la sección 36.2 Ordene de mayor a menor los siguientes experimentos de difracción de una sola ranura, según el tamaño del ángulo desde el centro del patrón de difracción hasta la primera franja oscura: i) longitud de onda de 400 nm, ancho de ranura 0.20 mm; ii) longitud de onda de 600 nm, ancho de ranura 0.20 mm; iii) longitud de onda de 400 nm, ancho de ranura de 3.0 mm; iv) longitud de onda de 600 nm, ancho de ranura 0.30 mm.

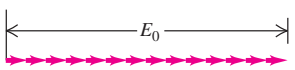
36.3 Intensidad en el patrón de una sola ranura

Podemos deducir una expresión de la distribución de intensidades en el patrón de difracción de una sola ranura, aplicando el mismo método que utilizamos en la sección 35.3, para obtener las ecuaciones (35.10) y (35.14) referentes al patrón de interferencia de dos ranuras. Una vez más, imaginamos un frente de onda plano en la ranura, subdividido en un gran número de tiras. Superponemos las contribuciones de las onditas de

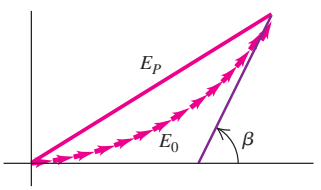
36.8 Uso de diagramas de fasores para calcular la amplitud del campo $\vec{E}$ en una difracción de una sola ranura. Cada fasor representa el campo $\vec{E}$ de una sola tira dentro de la ranura.



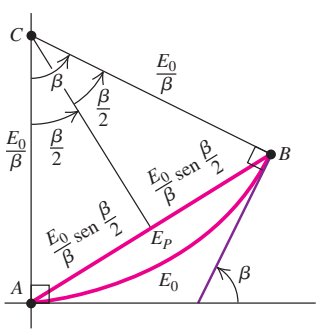
b) En el centro del patrón de difracción (punto *O*), los fasores de todas las tiras dentro de la ranura están en fase.



c) Diagrama del fasores en un punto ligeramente desviado del centro del patrón; β = diferencia de fase total entre los fasores primero y último.



d) Al igual que en c), pero en el límite en que la ranura se subdivide en un número infinito de tiras.



Huygens provenientes de todas las tiras en un punto *P* sobre una pantalla distante, a un ángulo θ con respecto a la normal al plano de la ranura (figura 36.8a). Para ello, representamos por medio de un fasor el campo $\vec{E}$ sinusoidalmente variable que corresponde a cada tira individual. La magnitud de la suma vectorial de los fasores en cada punto *P* es la amplitud E_P del campo total $\vec{E}$ en ese punto. La intensidad en *P* es proporcional a E_P^2.

En el punto *O* de la figura 36.8a, que corresponde al centro del patrón donde $\theta = 0$, las diferencias de trayecto cuando $x \gg a$ son insignificantes; los fasores están todos prácticamente *en fase* (es decir, tienen la misma dirección). En la figura 36.8b dibujamos los fasores en el tiempo $t = 0$ y denotamos la amplitud resultante en *O* con E_0. En esta ilustración dividimos la ranura en 14 tiras.

Considere ahora las onditas que llegan desde diferentes tiras al punto *P* de la figura 36.8a, a un ángulo θ del punto *O*. Debido a las diferencias de longitud de trayecto, ahora hay diferencias de fase entre las onditas que llegan de tiras adyacentes; el diagrama de fasores correspondiente se muestra en la figura 36.8b. La suma vectorial de los fasores es ahora parte del perímetro de un polígono de muchos lados, y E_P, la amplitud del campo eléctrico resultante en *P,* es la *cuerda*. El ángulo β es la diferencia de fase total entre la onda procedente de la tira superior de la figura 36.8a y la que llega de la tira del extremo inferior; es decir, β es la fase de la onda recibida en *P* proveniente del extremo superior, con respecto a la onda que se recibe en *P* de la tira del extremo inferior.

Podemos imaginar que dividimos la ranura en tiras cada vez más angostas. En el límite, donde se tiene un número infinito de tiras infinitamente angostas, la curva que describen los fasores se convierte en un *arco de círculo* (figura 36.8d), con una longitud de arco igual a la longitud E_0 de la figura 36.8b. El centro *C* de este arco se obtiene construyendo perpendiculares a *A* y *B*. Con base en la relación entre longitud de arco, radio y ángulo, el radio del arco es E_0/β; la amplitud E_P del campo eléctrico resultante en *P* es igual a la cuerda *AB*, que es $2(E_0/\beta)\,\text{sen}\,(\beta/2)$. (¡Advierta que β *debe* estar en radianes!) Tenemos entonces que

$$E_P = E_0\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \quad \text{(amplitud en la difracción de una sola ranura)} \qquad (36.4)$$

La intensidad en cada punto de la pantalla es proporcional al cuadrado de la amplitud dada por la ecuación (36.4). Si I_0 es la intensidad en la dirección hacia el frente donde $\theta = 0$ y $\beta = 0$, entonces, la intensidad *I* en cualquier punto es

$$I = I_0\left[\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \quad \text{(intensidad en la difracción de una sola ranura)} \qquad (36.5)$$

Podemos expresar la diferencia de fase β en términos de magnitudes geométricas, como hicimos en el caso del patrón de dos ranuras. De acuerdo con la ecuación (35.11), la diferencia de fase es $2\pi/\lambda$ por la diferencia de trayecto. La figura 36.5 muestra que la diferencia de trayecto entre el rayo proveniente del extremo superior de la ranura y el rayo que llega de la parte media es $(a/2)\,\text{sen}\,\theta$. La diferencia de trayecto entre los rayos procedentes del extremo superior y del extremo inferior de la ranura es el doble de esto:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}a\,\text{sen}\,\theta \qquad (36.6)$$

y la ecuación (36.5) se transforma en

$$I = I_0\left\{\frac{\text{sen}[\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda]}{\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda}\right\}^2 \quad \text{(intensidad en la difracción de una sola ranura)} \qquad (36.7)$$

Esta ecuación expresa la intensidad directamente en términos del ángulo θ. En muchos cálculos resulta más fácil hallar primero el ángulo de fase β mediante la ecuación (36.6), para luego aplicar la ecuación (36.5).

La figura 36.9a muestra una gráfica de la ecuación (36.7). Advierta que el máximo central de intensidad es mucho más grande que cualquiera de los otros. Esto significa que la mayoría de la potencia de la onda se mantiene dentro de un ángulo θ con respecto a la perpendicular a la ranura, donde $\text{sen}\,\theta = \lambda/a$ (el primer mínimo de difrac-

ción). Esto se ve claramente en la figura 36.9b, una fotografía de ondas acuáticas que sufren difracción desde una sola ranura. Advierta asimismo que las intensidades máximas de la figura 36.9a disminuyen rápidamente conforme aumenta la distancia al centro del patrón. (Compare con la figura 36.6, que muestra el patrón de difracción de luz desde una sola ranura.)

Las franjas oscuras del patrón son los lugares donde $I = 0$. Éstos se presentan en puntos donde el numerador de la ecuación (36.5) es cero, por lo que β es un múltiplo de 2π. De acuerdo con la ecuación (36.6) esto corresponde a

$$\frac{a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = m \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{36.8}$$

Esto concuerda con nuestro resultado anterior: la ecuación (36.2). Advierta de nuevo que $\beta = 0$ (correspondiente a $\theta = 0$) *no* es un mínimo. La ecuación (36.5) no está definida en $\beta = 0$, pero podemos evaluar el límite conforme $\beta \to 0$ mediante la regla de L'Hôpital. Encontramos que en $\beta = 0$, $I = I_0$, como es de esperarse.

Máximos de intensidad en el patrón de una sola ranura

La ecuación (36.5) también permite calcular las posiciones de las crestas, *o máximos de intensidad*, así como la intensidad en estas crestas. Esto no es tan simple como parecería. Cabría esperar que los máximos se presentaran donde la función seno alcanza el valor de ± 1, esto es, donde $\beta = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$ o, en general,

$$\beta \approx \pm(2m + 1)\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36.9}$$

Esto es *aproximadamente* correcto, pero debido al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (36.5), los máximos no se presentan exactamente en tales puntos. Cuando se deriva la ecuación (36.5) con respecto a β y se iguala a cero para intentar hallar los máximos y mínimos, se obtiene una ecuación trascendental que es necesario resolver por métodos numéricos. De hecho, *no* hay ningún máximo cerca de $\beta = \pm\pi$. Los primeros máximos a uno y otro lados del máximo central, cerca de $\beta = \pm 3\pi$, se presentan en realidad en $\pm 2.860\pi$. Los segundos máximos laterales, cerca de $\beta = \pm 5\pi$, se hallan efectivamente en $\pm 4.918\pi$, y así sucesivamente. El error de la ecuación (36.9) se desvanece en el límite donde m es grande, es decir, en los máximos de intensidad alejados del centro del patrón.

Para hallar la intensidad en los máximos laterales, se sustituyen de nuevo estos valores de β en la ecuación (36.5). A partir de la expresión aproximada de la ecuación (36.9) se obtiene

$$I_m \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \tag{36.10}$$

donde I_m es la intensidad del máximo lateral m-ésimo e I_0 es la intensidad del máximo central. La ecuación (36.10) proporciona la serie de intensidades

$$0.0450I_0 \qquad 0.0162I_0 \qquad 0.0083I_0$$

y así sucesivamente. Como hemos señalado, esta ecuación es sólo aproximadamente correcta. Las intensidades reales de los máximos laterales resultan ser de

$$0.0472I_0 \qquad 0.0165I_0 \qquad 0.0083I_0 \qquad \ldots$$

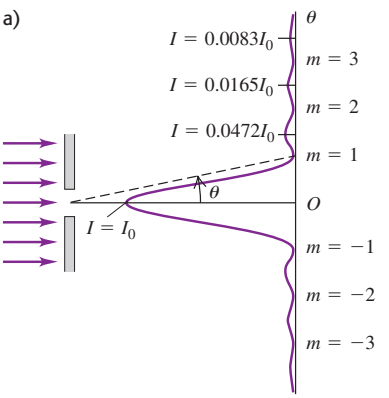
Advierta que la intensidad de los máximos laterales disminuye con gran rapidez, como también lo muestra la figura 36.9a. Incluso los primeros máximos laterales tienen ya menos del 5% de la intensidad del máximo central.

Anchura del patrón de una sola ranura

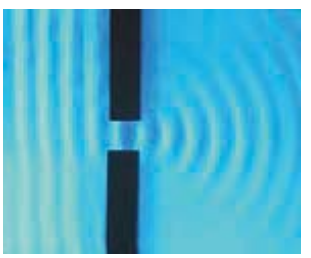
Cuando los ángulos son pequeños la extensión angular del patrón de difracción es inversamente proporcional al ancho de ranura a o, con más precisión, a la razón de a con respecto a la longitud de onda λ. La figura 36.10 muestra gráficas de intensidad I en función del ángulo θ con tres valores de la razón a/λ.

36.9 a) Intensidad contra ángulo en difracción de una sola ranura. Los valores de m indican la intensidad mínima dada por la ecuación (36.8). La mayoría de la potencia de las ondas va hacia el pico de intensidad central (entre la intensidad mínima $m = 1$ y $m = -1$). b) Estas ondas de agua pasan por una pequeña abertura y se comportan exactamente como ondas luminosas en difracción de una sola ranura. Sólo las ondas difractadas dentro de la cresta de intensidad central son visibles; las ondas a mayores ángulos son demasiado tenues para verse.

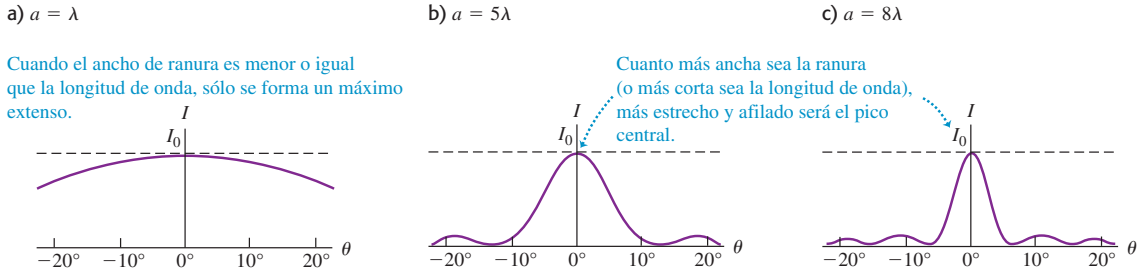
a)



b)



36.10 El patrón de difracción de una sola ranura depende de la razón del ancho de la ranura a con la longitud de onda λ.



En el caso de las ondas luminosas, la longitud de onda λ suele ser mucho menor que el ancho de ranura a, y los valores de θ en las ecuaciones (36.6) y (36.7) son tan pequeños que la aproximación $\operatorname{sen}\theta = \theta$ es muy aceptable. Con esta aproximación, la posición θ_1 del primer mínimo al lado del máximo central, que corresponde a $\beta/2 = \pi$, es, según la ecuación (36.7),

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \tag{36.11}$$

Esto caracteriza la anchura (extensión angular) del máximo central, y vemos que es *inversamente* proporcional al ancho de ranura a. Cuando la aproximación de ángulos pequeños es válida, el máximo central es exactamente dos veces más ancho que cada máximo lateral. Cuando a es del orden de un centímetro o más, θ_1 es tan pequeño que podemos considerar que prácticamente toda la luz está concentrada en el foco geométrico. Pero cuando a es menor que λ, el máximo central abarca 180° y no se observa el patrón de franjas.

Es importante tener presente que las ondas de *todo* tipo sufren difracción, no sólo la luz. Las ondas sonoras experimentan difracción cuando pasan a través de una ranura o abertura, como el vano de una puerta ordinaria, por ejemplo. Las ondas sonoras del habla tienen longitudes de onda de un metro o más, y un vano de puerta típico tiene menos de 1 m de ancho; en esta situación, a es menor que λ y el máximo central de intensidad abarca 180°. Por ello, los sonidos que pasan a través de una puerta abierta pueden escucharse sin dificultad por un oyente furtivo que se oculte a la vuelta de la esquina. Asimismo, las ondas sonoras rodean la cabeza del profesor que mira hacia el pizarrón mientras imparte su clase (figura 36.11). En cambio, prácticamente no hay difracción de luz a través de un vano de puerta porque la anchura a es mucho mayor que la longitud de onda λ (del orden de 5×10^{-7} m). Podemos *oír* a la vuelta de las esquinas porque las ondas sonoras ordinarias tienen longitudes de onda relativamente largas; no podemos *ver* a la vuelta de las esquinas porque la longitud de onda de la luz visible es muy corta.

36.11 Las ondas sonoras del habla tienen una longitud de onda larga (aproximadamente de 1 m) y fácilmente dan la vuelta en torno a la cabeza de este profesor. En cambio, las ondas luminosas tienen longitudes de onda muy cortas y sufren muy poca difracción. Por consiguiente, ¡no podemos *ver* alrededor de su cabeza!

Ejemplo 36.2 Difracción en una sola ranura: Intensidad I

a) En un patrón de difracción de una sola ranura, ¿cuál es la intensidad en un punto donde la diferencia de fase total entre las onditas provenientes del extremo superior e inferior de la ranura es de 66 rad? *b*) Si este punto se halla a 7.0° del máximo central, ¿cuál es el ancho de la ranura expresado en longitudes de onda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema nos pide calcular la intensidad de un punto en un patrón de difracción de una sola ranura, donde hay una diferencia de fase específica entre las ondas provenientes de los dos bordes de la ranura (figura 36.8a). Esto también nos pide relacionar la diferencia de fase, el ancho de la ranura, la longitud de onda y el valor de θ que se muestra en la figura 36.9a.

PLANTEAR: La diferencia de fase total entre las onditas provenientes de los dos bordes de la ranura es la magnitud que llamamos β en la figura 36.8d. Dada $\beta = 66$ rad, aplicamos la ecuación (36.5) para hallar la intensidad I en el punto en cuestión y usamos la ecuación (36.6) para hallar el ancho de ranura a en términos de la longitud de onda λ.

EJECUTAR: *a*) Puesto que $\beta = 66$ rad, $\beta/2 = 33$ rad y la ecuación (36.5) se transforma en

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(33\text{ rad})}{33\text{ rad}}\right]^2 = (9.2 \times 10^{-4})I_0$$

b) Despejamos a de la ecuación (36.6):

$$a = \frac{\beta\lambda}{2\pi \operatorname{sen}\theta} = \frac{(66 \text{ rad})\lambda}{(2\pi \text{ rad}) \operatorname{sen} 7.0^\circ} = 86\lambda$$

Por ejemplo, con luz de 550 nm, el ancho de ranura a es (86) (550 nm) $= 4.7 \times 10^{-5}$ m $= 0.047$ mm o, aproximadamente, $\frac{1}{20}$ mm.

EVALUAR: ¿A qué punto del patrón de difracción corresponde este valor de β? Para averiguarlo, advierta que $\beta = 66$ rad $= 21\pi$. Si se compara con la ecuación (36.9) se ve que esto es aproximadamente igual al valor de β en el *décimo* máximo lateral, muy afuera del intervalo de la figura 36.9a (la cual muestra sólo los tres primeros máximos laterales). La intensidad es muchísimo menor que la intensidad I_0 en el máximo central. (La posición *real* de este máximo se encuentra en $\beta = 65.91$ rad $= 20.98\pi$, o aproximadamente a medio camino entre los mínimos de $\beta = 20\pi$ y $\beta = 22\pi$.)

Ejemplo 36.3 Difracción en una sola ranura: Intensidad II

En el experimento que se describe en el ejemplo 36.1 (sección 36.2), ¿cuál es la intensidad en un punto de la pantalla situado a 3.00 mm del centro del patrón? La intensidad en el centro del patrón es I_0.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un ejemplo similar al 36.2, excepto que no conocemos el valor de la diferencia de fase β en el punto en cuestión.

PLANTEAR: Aplicamos la geometría para determinar el ángulo θ correspondiente a nuestro punto, y luego calculamos la intensidad I (la incógnita) mediante la ecuación (36.7).

EJECUTAR: Con respecto a la figura 36.5a, tenemos $y = 3.0$ mm y $x = 6.0$ m, de modo que $\tan\theta = y/x = (3.0 \times 10^{-3} \text{ m})/(6.0 \text{ m}) = 5.0 \times 10^{-4}$; como esto es tan pequeño, los valores de $\tan\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y θ (en radianes) son todos prácticamente iguales. Entonces, luego de aplicar la ecuación (36.7), tenemos lo siguiente:

$$\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \frac{\pi(2.4 \times 10^{-4} \text{ m})(5.0 \times 10^{-4})}{6.33 \times 10^{-7} \text{ m}} = 0.60$$

$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen} 0.60}{0.60}\right)^2 = 0.89 I_0$$

EVALUAR: Un examen de la figura 36.9a muestra que una intensidad tan grande como ésta sólo puede hallarse dentro del máximo central de intensidad. Esto concuerda con lo esperado; según el ejemplo 36.1, el primer mínimo de intensidad ($m = 1$ en la figura 36.9a) está a (32 mm)/2 $= 16$ mm del centro del patrón; así pues, de hecho, en este caso el punto en cuestión se encuentra dentro del máximo central.

Evalúe su comprensión de la sección 36.3 Se envía radiación electromagnética coherente a través de una ranura con ancho de 0.0100 mm. ¿Para cuál de las siguientes longitudes de onda *no* habrá puntos en el patrón de difracción donde la intensidad sea cero? i) luz azul con longitud de onda de 500 nm; ii) luz infrarroja con longitud de onda de 10.6 μm; iii) microondas con longitud de onda de 1.00 mm; iv) luz ultravioleta con longitud de onda de 50.0 nm.

36.4 Ranuras múltiples

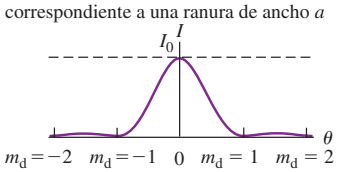
En las secciones 35.2 y 35.3 analizamos la interferencia de dos fuentes puntuales o de dos ranuras muy angostas; en este análisis pasamos por alto los efectos debidos al ancho de ranura finito (esto es, diferente de cero). En las secciones 36.2 y 36.3 consideramos los efectos de difracción que suceden cuando la luz pasa a través de una sola ranura de ancho finito. Se presentan otros efectos interesantes cuando se tienen dos ranuras de ancho finito o cuando hay varias ranuras muy angostas.

Dos ranuras de ancho finito

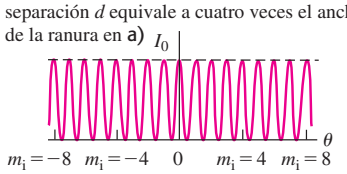
Examinemos de nuevo el patrón de dos ranuras en el caso más realista en el que las ranuras tienen un ancho finito. Si las ranuras son angostas en comparación con la longitud de onda, podemos suponer que la luz proveniente de cada ranura se extiende de modo uniforme en todas direcciones a la derecha de la ranura. Hicimos esta suposición en la sección 35.3 para calcular el patrón de interferencia descrito por la ecuación (35.10) o (35.15), consistente en una serie de máximos igualmente intensos y espaciados. Sin embargo, cuando las ranuras tienen un ancho finito, las crestas del patrón de interferencia de dos ranuras están moduladas por el patrón de difracción de una sola ranura característico del ancho de cada ranura.

36.12 Cálculo del patrón de intensidad para dos ranuras de ancho finito.

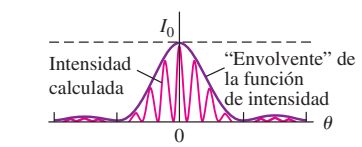
a) Patrón de difracción de una sola ranura correspondiente a una ranura de ancho a



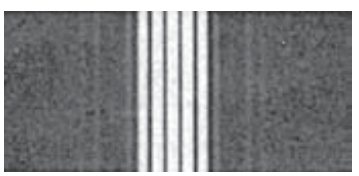
b) Patrón de interferencia de doble ranura correspondiente a ranuras angostas, cuya separación d equivale a cuatro veces el ancho de la ranura en a)



c) Cálculo del patrón intensidad para dos ranuras con ancho a y separación $d = 4a$, incluyendo los efectos tanto de la interferencia como de la difracción

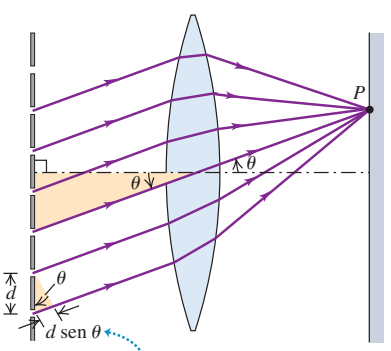


d) Fotografía real del patrón calculado en c)



Cuando $d = 4a$, falta un cuarto máximo de interferencia a los lados ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$).

36.13 Difracción de ranuras múltiples. Aquí se utiliza una lente para formar un patrón de Fraunhofer en una pantalla cercana, como en la figura 36.4d.



Ocurre un máximo si la diferencia de trayecto entre ranuras adyacentes es un número entero de longitudes de onda: $d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$.

La figura 36.12a muestra la intensidad en un patrón de difracción de una sola ranura de ancho a. Los *mínimos de difracción* están identificados mediante el entero $m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ("d" de difracción). La figura 36.12b muestra el patrón que forman dos ranuras muy angostas separadas por una distancia d, donde d equivale a cuatro veces el ancho a de la ranura única de la figura 36.12a; esto es, $d = 4a$. Los *máximos de interferencia* están identificados mediante el entero $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ("i" de interferencia). Advertimos que la separación entre mínimos adyacentes en el patrón de una sola ranura es cuatro veces mayor que en el patrón de dos ranuras. Suponga ahora que ensanchamos cada una de las ranuras angostas hasta el mismo ancho a de la ranura única de la figura 36.12a. La figura 36.12c muestra el patrón que forman dos ranuras de ancho a separadas por una distancia (entre centros) $d = 4a$. El efecto del ancho finito de las ranuras consiste en superponer los dos patrones; es decir, en multiplicar las dos intensidades en cada punto. Los máximos correspondientes a dos ranuras están en las mismas posiciones que antes; pero su intensidad está modulada por el patrón de una sola ranura, el cual actúa como una "envolvente" de la función de intensidad. La expresión de la intensidad que se muestra en la figura 36.12c es proporcional al producto de las expresiones correspondientes a dos ranuras y a una sola ranura, ecuaciones (35.10) y (36.5):

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \text{(dos ranuras de ancho finito)} \qquad (36.12)$$

donde, al igual que antes,

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \qquad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

Advierta que en la figura 36.12c *falta* cada cuarto máximo de interferencia a los lados, porque estos máximos de interferencia ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$) coinciden con mínimos de difracción ($m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Esto también se observa en la figura 36.12d, que es una fotografía de un patrón real con $d = 4a$. Usted debería ser capaz de convencerse por su cuenta de que habrá máximos "faltantes" siempre que d sea un múltiplo entero de a.

Las figuras 36.12c y 36.12d muestran que, a medida que aumenta la distancia con respecto al máximo central brillante del patrón de dos ranuras, disminuye la intensidad de los máximos. Esto es consecuencia del patrón de modulación de una sola ranura que se muestra en la figura 36.12a; en términos matemáticos, la disminución de intensidad se debe al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (36.12). Esta disminución de intensidad también se observa en la figura 35.6 (sección 35.2). Cuanto más angostas sean las ranuras, tanto más amplio será el patrón de una sola ranura (como en la figura 36.10) y más lenta será la disminución de intensidad de un máximo de interferencia al siguiente.

¿Debemos llamar *interferencia* o *difracción* al patrón de la figura 36.12d? En realidad es ambas cuestiones, pues es el resultado de la superposición de ondas provenientes de diversas partes de las dos aberturas. No existe una auténtica distinción fundamental entre interferencia y difracción.

Varias ranuras

Consideremos ahora los patrones que producen *varias* ranuras muy angostas. Como veremos, los sistemas de ranuras angostas tienen una importancia práctica enorme en la *espectroscopia*, la determinación de las longitudes de onda específicas de la luz que emana de una fuente. Suponga que cada ranura es estrecha en comparación con la longitud de onda, por lo que su patrón de difracción se extiende de modo casi uniforme. La figura 36.13 muestra un conjunto de ocho ranuras angostas, con una distancia d entre ranuras adyacentes. Sufren interferencia constructiva los rayos que forman un ángulo θ con la normal y que llegan al punto P con una diferencia de trayecto entre ranuras adyacentes igual a un número entero de longitudes de onda:

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Esto significa que hay reforzamiento cuando la diferencia de fase ϕ en P de la luz proveniente de ranuras adyacentes es un múltiplo entero de 2π. Es decir, los máximos

del patrón aparecen en las *mismas* posiciones que en el caso de *dos* ranuras con la misma separación. En esta medida el patrón se asemeja al patrón de dos ranuras.

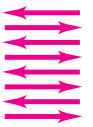
Pero, ¿qué ocurre *entre* los máximos? En el patrón de dos ranuras, hay exactamente un mínimo de intensidad situado a medio camino entre cada par de máximos, el cual corresponde a los ángulos a los que la diferencia de fase entre ondas provenientes de las dos fuentes es de π, 3π, 5π, y así sucesivamente. En el patrón de ocho ranuras, éstos también son mínimos porque la luz que llega de ranuras adyacentes se cancela por pares, lo cual corresponde al diagrama de fasores de la figura 36.14a. Pero no son éstos los únicos mínimos del patrón de ocho ranuras. Por ejemplo, cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a fuentes adyacentes es de $\pi/4$, el diagrama de fasores es como se muestra en la figura 36.14b; el fasor total (resultante) es cero y la intensidad es cero. Cuando $\phi = \pi/2$, se tiene el diagrama de fasores de la figura 36.14c, y nuevamente el fasor total y la intensidad son cero. En términos más generales, la intensidad con ocho ranuras es cero siempre que ϕ es un múltiplo entero de $\pi/4$, *salvo* cuando ϕ es un múltiplo de 2π. Así pues, hay siete mínimos por cada máximo.

Un cálculo pormenorizado muestra que el patrón de ocho ranuras es como se muestra en la figura 36.15b. Los máximos grandes, llamados *máximos principales*, están en la misma posición que en el caso del patrón de dos ranuras de la figura 36.15a, aunque son mucho más angostos. Si la diferencia de fase ϕ entre ranuras adyacentes difiere levemente de un múltiplo de 2π, las ondas provenientes de las ranuras 1 y 2 estarán sólo un poco fuera de fase; sin embargo, la diferencia de fase entre las ranuras 1 y 3 será mayor, la diferencia entre las ranuras 1 y 4 será aún más grande, y así sucesivamente. Esto da lugar a una cancelación parcial en el caso de los ángulos que difieren sólo levemente del ángulo correspondiente a un máximo, y forma los máximos estrechos de la figura 36.15b. Los máximos son aún más angostos con dieciséis ranuras (figura 36.15c).

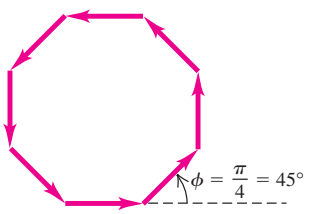
Le dejamos a usted la tarea de demostrar que, cuando hay N ranuras, hay $(N - 1)$ mínimos entre cada par de los máximos principales, y se presenta un mínimo siempre que ϕ sea un múltiplo entero de 2 π/N (salvo cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π, en cuyo caso se tiene un máximo principal). Hay pequeños máximos *secundarios* de intensidad entre los mínimos; éstos se reducen en comparación con el máximo principal a medida que N aumenta. Cuanto mayor sea el valor de N, más estrechos se volverán los máximos principales. Desde el punto de vista energético, la potencia total del patrón en su totalidad es proporcional a N. La altura de cada máximo principal es proporcional a N^2, de modo que, por la conservación de la energía, la anchura de cada máximo principal debe ser proporcional a $1/N$. Como veremos en la siguiente sección, en física y en astronomía, la estrechez de los máximos principales de un patrón de ranuras múltiples es de gran importancia práctica.

36.14 Diagrama de fasores correspondiente a luz que pasa a través de ocho ranuras angostas. Se presentan máximos de intensidad cuando la diferencia de fase $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ Entre los máximos en $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ hay siete mínimos, correspondientes a $\phi = \pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$ y $7\pi/4$. ¿Puede usted dibujar los diagramas de fasores correspondientes a los otros mínimos?

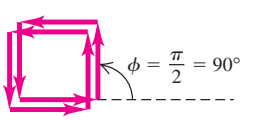
a) Diagrama de fasores para $\phi = \pi$



b) Diagrama de fasores para $\phi = \frac{\pi}{4}$

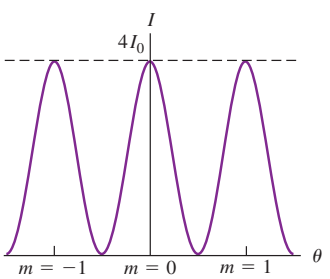


c) Diagrama de fasores para $\phi = \frac{\pi}{2}$

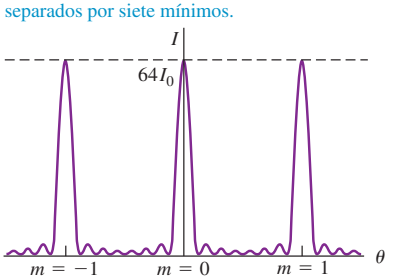


36.15 Patrones de interferencia correspondientes a N ranuras muy angostas uniformemente espaciadas. a) Dos ranuras. b) Ocho ranuras. c) Dieciséis ranuras. La escala vertical es diferente en cada gráfica; I_0 es la intensidad máxima correspondiente a una sola ranura, y la intensidad máxima con N ranuras es $N^2 I_0$. La anchura de cada máximo es proporcional a $1/N$.

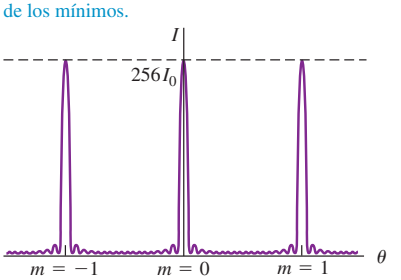
a) $N = 2$: dos ranuras producen un mínimo entre los máximos adyacentes.



b) $N = 8$: ocho ranuras producen máximos más altos y más angostos, en el mismo lugar, separados por siete mínimos.

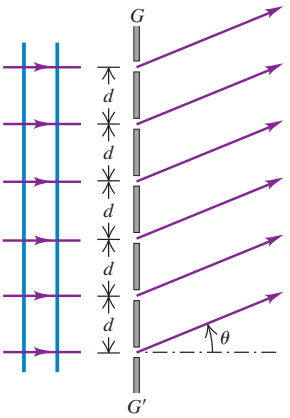


c) $N = 16$: con 16 ranuras, los máximos son aún más altos y estrechos, con más intervención de los mínimos.



Evalúe su comprensión de la sección 36.4 Suponga que dos ranuras, cada una de ancho a, están separadas por una distancia $d = 2.5a$. ¿Hay máximos faltantes en el patrón de interferencia producido por estas ranuras? En caso afirmativo, ¿cuáles faltan? En caso negativo, ¿por qué?

36.16 Parte de una rejilla (de difracción) de transmisión. La separación entre los centros de ranuras adyacentes es d.

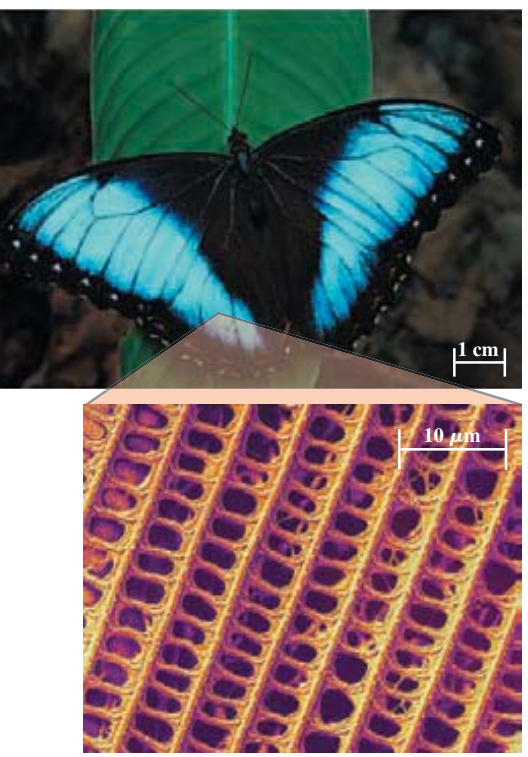


Activ ONLINE Physics

16.4 La rejilla: introducción y preguntas

16.5 La rejilla: problemas

36.17 Las millones de escalas microscópicas en las alas de la mariposa tropical *Morpho peleides* se comportan como rejilla de difracción. Vistas desde el ángulo adecuado, estas escamas reflejan intensamente la luz azul, que es como un mecanismo de defensa. Los destellos de luz que emiten las alas en movimiento de una *Morpho* pueden deslumbrar y aturdir momentáneamente a depredadores como lagartos y aves.



36.5 Rejilla de difracción

Hemos visto que si se aumenta el número de ranuras en un experimento de interferencia (manteniendo constante la separación entre ranuras adyacentes), se obtienen patrones de interferencia donde los máximos ocupan las mismas posiciones que con dos ranuras, pero son progresivamente más angostos. Por ser estos máximos tan angostos, se puede medir con una precisión muy grande su posición angular y, por lo tanto, su longitud de onda. Como veremos, este efecto tiene muchas aplicaciones relevantes.

Una serie de ranuras paralelas en gran número, todas del mismo ancho a y separadas por distancias iguales d entre sus centros, recibe el nombre de **rejilla de difracción**. Fraunhofer construyó la primera con alambres finos. Se pueden hacer rejillas rascando con un diamante muchos surcos igualmente espaciados sobre una superficie de vidrio o metal, o por reducción fotográfica de un patrón de tiras blancas y negras sobre papel. En el caso de una rejilla, se suele llamar *rayas* o *líneas* a lo que aquí hemos llamado *ranuras*.

En la figura 36.16, GG' es una sección transversal de una *rejilla de transmisión*; las ranuras son perpendiculares al plano de la página y la luz que se transmite a través de las ranuras forma un patrón de interferencia. El diagrama muestra sólo seis ranuras; una rejilla real puede contener varios miles. La separación d entre los centros de rejillas adyacentes se conoce como el *espaciado de rejilla*. Una onda monocromática plana incide en dirección normal sobre la rejilla desde el lado izquierdo. Suponemos condiciones de campo lejano (Fraunhofer); es decir, el patrón se forma sobre una pantalla lo suficientemente alejada, como para considerar como paralelos a todos los rayos que emergen de la rejilla y se dirigen hacia un punto determinado de la pantalla.

En la sección 36.4 vimos que los máximos principales de intensidad con ranuras múltiples se forman en las mismas direcciones que en el caso del patrón de dos ranuras. Estas direcciones son aquellas con respecto a las cuales la diferencia de trayecto correspondiente a ranuras adyacentes es un número entero de longitudes de onda. Por lo tanto, las posiciones de los máximos están dadas una vez más por

$$d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \quad \text{(máximos de intensidad, ranuras múltiples)} \qquad (36.13)$$

Los patrones de intensidad correspondientes a dos, ocho y 16 ranuras que se ilustran en la figura 36.15 muestran el aumento gradual de agudeza de los máximos a medida que se incrementa el número de ranuras.

Cuando se ilumina con un haz de rayos paralelos de luz monocromática una rejilla con cientos de miles de ranuras, el patrón es una serie de líneas muy marcadas en ángulos determinados por la ecuación (36.13). Las líneas $m = \pm 1$ se llaman *líneas de primer orden*, las líneas $m = \pm 2$, *líneas de segundo orden*, y así sucesivamente. Si se ilumina la rejilla con luz blanca con una distribución continua de longitudes de onda, cada valor de m corresponde a un espectro continuo en el patrón. El ángulo correspondiente a cada longitud de onda está determinado por la ecuación (36.13); con respecto a un valor dado de m, las longitudes de onda largas (el extremo rojo del espectro) se encuentran a ángulos más grandes (es decir, se desvían más de la dirección recta), que las longitudes de onda más cortas del extremo violeta del espectro.

Como se ve en la ecuación (36.13), el seno del ángulo de desviación de los máximos es proporcional a la razón λ/d. Para que haya una desviación importante, el espaciado de rejilla d debería ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda λ. Las rejillas que se utilizan con luz visible (λ de 400 a 700 nm) tienen por lo regular unas 1000 ranuras por milímetro; el valor de d es el *recíproco* del número de ranuras por unidad de longitud, por lo que d es del orden de $\frac{1}{1000}$ mm $= 1000$ nm.

En una *rejilla de reflexión*, la serie de ranuras igualmente espaciadas de la figura 36.16 se sustituye por una serie de crestas o surcos igualmente espaciados en una pantalla reflectora. La luz reflejada tiene una intensidad máxima a ángulos donde la diferencia de fase entre las ondas luminosas que se reflejan de crestas o surcos adyacentes es un múltiplo entero de 2π. Si sobre una rejilla de reflexión con una separación d entre crestas o surcos adyacentes incide luz de longitud de onda λ en dirección normal, los ángulos *reflejados* a los que se presentan máximos de intensidad vienen dados por la ecuación (36.13). Los colores iridiscentes de ciertas mariposas tienen su origen en crestas microscópicas de las alas de la mariposa que forman una rejilla de reflexión

(figura 36.17). Cuando se contemplan las alas desde diferentes ángulos, que corresponden a un θ variable en la ecuación (36.13), la longitud de onda y el color que se reflejan de forma predominante hacia el ojo del observador también varían.

Los reflejos de colores del arco iris que vemos en la superficie de un disco compacto son efectos de la rejilla de reflexión (figura 36.18). Los "surcos" son diminutos fosos de 0.1 μm de profundidad en la superficie del disco, con un espaciado radial uniforme $d = 1.60\ \mu\text{m} = 1600$ nm. La información se codifica en el CD haciendo variar la *longitud* de los fosos; el aspecto de rejilla de reflexión del disco es tan sólo una ventaja estética colateral.

36.18 Los fosos microscópicos en la superficie de este disco compacto actúan como una rejilla de difracción y dividen la luz blanca en los colores que la componen.

Ejemplo 36.4 Anchura de un espectro de rejilla

Las longitudes de onda del espectro visible abarcan aproximadamente desde 400 nm (violeta) hasta 700 nm (rojo). *a*) Calcule la anchura angular del espectro visible de primer orden que produce una rejilla plana con 600 ranuras por milímetro cuando incide luz blanca sobre la rejilla en dirección normal. *b*) ¿Se traslapan los espectros de primero y de segundo órdenes? ¿Y los espectros de segundo y de tercer orden? ¿Dependen sus respuestas del espaciado de rejilla?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Los espectros de primero, segundo y tercer órdenes corresponden a $m = 1$, 2 y 3 en la ecuación (36.13). En este problema se nos pide observar los ángulos que comprende el espectro visible en cada uno de estos órdenes.

PLANTEAR: Aplicamos la ecuación (36.13) para hallar la desviación angular θ correspondiente a la luz violeta de 400 nm y a la luz roja de 700 nm en el espectro de primer orden; la diferencia entre éstas es la anchura angular del espectro de primer orden, la incógnita del inciso *a*). La misma técnica aplicada a $m = 2$ y $m = 3$ nos indica la desviación angular máxima y mínima correspondiente a estos órdenes.

EJECUTAR: *a*) El espaciado de rejilla d es

$$d = \frac{1}{600\ \text{ranuras/mm}} = 1.67 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

De acuerdo con la ecuación (36.13), con $m = 1$, la desviación angular θ_v de la luz violeta (400 nm o 400×10^{-9} m) es

$$\operatorname{sen}\theta_v = \frac{400 \times 10^{-9}\ \text{m}}{1.67 \times 10^{-6}\ \text{m}} = 0.240$$
$$\theta_v = 13.9°$$

La desviación angular θ_r de la luz roja (700 nm) es

$$\operatorname{sen}\theta_r = \frac{700 \times 10^{-9}\ \text{m}}{1.67 \times 10^{-6}\ \text{m}} = 0.419$$
$$\theta_r = 24.8°$$

Por lo tanto, la anchura angular del espectro visible de primer orden es

$$24.8° - 13.9° = 10.9°$$

b) De acuerdo con la ecuación (36.13), con un espaciado de rejilla d la desviación angular θ_{vm} de la luz violeta de 400 nm en el espectro de orden m-ésimo es

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta_{vm} &= \frac{m(400 \times 10^{-9}\ \text{m})}{d} \\ &= \frac{4.00 \times 10^{-7}\ \text{m}}{d} \quad (m = 1) \\ &= \frac{8.00 \times 10^{-7}\ \text{m}}{d} \quad (m = 2) \\ &= \frac{1.20 \times 10^{-6}\ \text{m}}{d} \quad (m = 3)\end{aligned}$$

Asimismo, la desviación angular θ_{rm} de la luz roja de 700 nm en el orden m-ésimo está dada por

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta_{rm} &= \frac{m(700 \times 10^{-9}\ \text{m})}{d} \\ &= \frac{7.00 \times 10^{-7}\ \text{m}}{d} \quad (m = 1) \\ &= \frac{1.40 \times 10^{-6}\ \text{m}}{d} \quad (m = 2) \\ &= \frac{2.10 \times 10^{-6}\ \text{m}}{d} \quad (m = 3)\end{aligned}$$

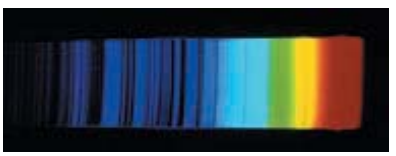
Cuanto mayor sea el valor de $\operatorname{sen}\theta$, más grande será el valor de θ (en el caso de ángulos entre cero y 90°). Por lo tanto, nuestros resultados muestran que, con cualquier valor del espaciado de rejilla d, el ángulo más grande (en el extremo rojo) del espectro de $m = 1$ siempre es menor que el ángulo más pequeño (en el extremo violeta) del espectro de $m = 2$, por lo que los órdenes primero y segundo *nunca* se traslapan. En cambio, el ángulo más grande (rojo) del espectro de $m = 2$ siempre es mayor que el ángulo más pequeño (violeta) del espectro de $m = 3$, por lo que los órdenes segundo y tercero *siempre* se traslapan.

EVALUAR: La razón fundamental por la que los espectros visibles de primer orden y de segundo orden no se traslapan es que el ojo humano es sensible sólo a un intervalo estrecho de longitudes de onda. ¿Puede usted demostrar que si el ojo pudiera detectar longitudes de onda de 400 nm a 900 nm (en el infrarrojo cercano), los órdenes primero y segundo sí se *traslaparían*?

36.19 a) Fotografía de luz visible del Sol. b) Una rejilla de difracción dispersa la luz solar para formar un espectro. Ciertas longitudes de onda específicas son absorbidas cuando la luz solar pasa a través de la atmósfera del Sol, dejando líneas oscuras en el espectro.

a)

b)



Espectrógrafos de rejilla

Las rejillas de difracción se utilizan extensamente para medir el espectro de la luz que emite una fuente, mediante un procedimiento que se conoce como *espectroscopia* o *espectrometría.* La luz que incide en una rejilla de espaciado conocido se dispersa para formar un espectro. Se miden entonces los ángulos de desviación de los máximos y se calcula la longitud de onda con base en la ecuación (36.13). Utilizando una rejilla con muchas ranuras, se obtienen máximos muy pronunciados y se puede medir con gran precisión el ángulo de desviación (y, por ende, la longitud de onda).

Una aplicación importante de esta técnica se da en la astronomía. Cuando la luz que se ha generado en el interior del Sol atraviesa la atmósfera de éste, se absorben selectivamente ciertas longitudes de onda. El resultado es que el espectro de luz solar que se obtiene mediante una rejilla de difracción tiene *líneas de absorción* oscuras (figura 36.19). Los experimentos de laboratorio muestran que los distintos tipos de átomos y de iones absorben luz a diferentes longitudes de onda. Comparando estos resultados de laboratorio con las longitudes de onda de absorción que se observan en el espectro de la luz solar, los astrónomos son capaces de deducir la composición química de la atmósfera del Sol. Esta misma técnica se utiliza para efectuar análisis químicos de galaxias que están a millones de años luz de distancia.

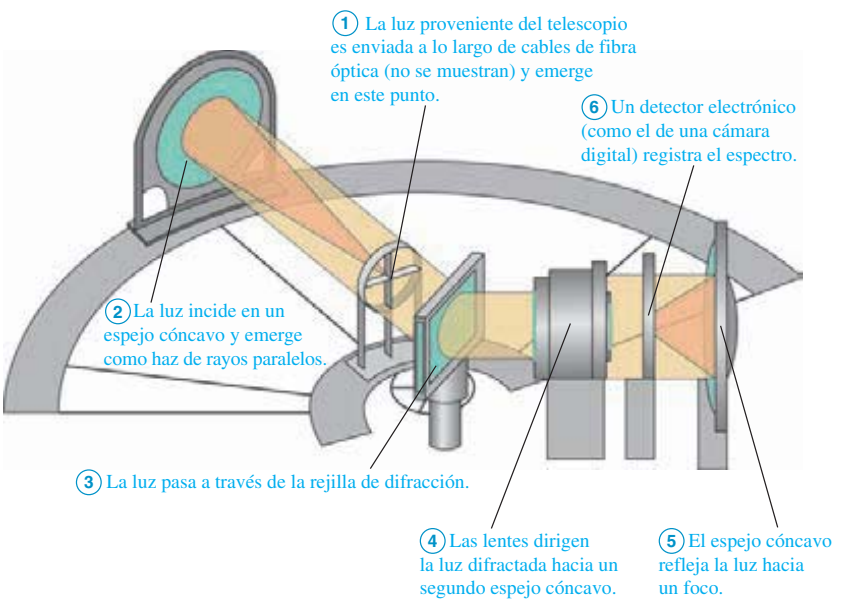
La figura 36.20 muestra un diseño de un *espectrógrafo de rejilla* que se utiliza en astronomía. En la figura se emplea una rejilla de transmisión; en otros sistemas, se usa una rejilla de reflexión. En diseños más antiguos se utilizaba un prisma en vez de una rejilla, y se formaba un espectro por dispersión (sección 33.4) en vez de difracción. Sin embargo, en el caso de un prisma no existe una relación simple entre la longitud de onda y el ángulo de desviación, los prismas absorben parte de la luz que pasa a través de ellos y son menos eficaces con respecto a muchas longitudes de onda no visibles que son importantes en astronomía. Por éstas y otras razones se prefieren las rejillas en las aplicaciones de precisión.

Resolución de un espectrógrafo de rejilla

En espectroscopia suele ser importante distinguir longitudes de onda que difieren muy poco. La diferencia mínima de longitud de onda $\Delta\lambda$ que un espectrógrafo es capaz de distinguir se describe mediante el **poder de resolución cromático** R, el cual se define como

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad \text{(poder de resolución cromático)} \tag{36.14}$$

36.20 Diagrama esquemático de un espectrógrafo de rejilla de difracción para uso astronómico. Advierta que la luz no incide en la rejilla en dirección normal a su superficie; en consecuencia, los máximos de intensidad están dados por una expresión un poco diferente de la ecuación (36.13). (Véase el problema 36.66.)



Por ejemplo, cuando se calientan átomos de sodio, éstos emiten intensamente en las longitudes de onda amarillas de 589.00 nm y 589.59 nm. Un espectrógrafo que apenas es capaz de distinguir estas dos líneas del espectro de la luz de sodio (conocidas como el *doblete del sodio*) tiene un poder de resolución cromático $R = (589.00\ \text{nm})/(0.59\ \text{nm}) = 1000$. (Podemos ver estas longitudes de onda al hervir agua en una estufa de gas. Si el agua se derrama en la llama, el sodio disuelto de la sal común emite una flama de luz amarilla.)

Podemos deducir una expresión del poder de resolución de una rejilla de difracción de las que se utilizan en los espectrógrafos. Dos longitudes de onda diferentes dan máximos de difracción a ángulos ligeramente distintos. Como criterio razonable (aunque arbitrario), supongamos que podemos distinguirlas como dos crestas individuales si el máximo de una coincide con el primer mínimo de la otra.

Con base en lo expuesto en la sección 36.4, el máximo de orden m-ésimo se presenta cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a ranuras adyacentes es $\phi = 2\pi m$. El primer mínimo al lado de ese máximo aparece cuando $\phi = 2\pi m + 2\pi/N$, donde N es el número de ranuras. La diferencia de fase también está dada por $\phi = (2\pi d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$, por lo tanto, el intervalo angular $d\theta$ que corresponde a un pequeño incremento $d\phi$ de desplazamiento de fase se obtiene a partir de la diferencial de esta ecuación:

$$d\phi = \frac{2\pi d \cos\theta\, d\theta}{\lambda}$$

Cuando $d\phi = 2\pi/N$, esto corresponde al intervalo angular $d\theta$ entre un máximo y el primer mínimo adyacente. Por lo tanto, $d\theta$ está dado por

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi d \cos\theta\, d\theta}{\lambda} \qquad \text{o bien} \qquad d\cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{N}$$

CUIDADO **Esté atento a los diferentes usos del símbolo *d*** ¡No confunda la separación d con la diferencial "d" del intervalo angular $d\theta$ o del incremento de desplazamiento de fase $d\phi$! ▮

Ahora necesitamos hallar la separación angular $d\theta$ entre máximos de dos longitudes de onda levemente distintas. Esto es fácil; tenemos $d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$, de modo que la diferencial de esta ecuación da

$$d\cos\theta\, d\theta = m\, d\lambda$$

De acuerdo con nuestro criterio, se alcanza el límite o la resolución cuando estas dos separaciones angulares son iguales. Igualando las dos expresiones de la cantidad $(d\cos\theta\, d\theta)$, encontramos que

$$\frac{\lambda}{N} = m\, d\lambda \qquad \text{y} \qquad \frac{\lambda}{d\lambda} = Nm$$

Si $\Delta\lambda$ es pequeña, podemos sustituir $d\lambda$ por $\Delta\lambda$ y el poder de resolución es simplemente

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm \tag{36.15}$$

Cuanto mayor sea el número de ranuras N, mejor será la resolución; asimismo, cuanto más alto sea el orden m del máximo de patrón de difracción que se utilice, mejor será la resolución.

Evalúe su comprensión de la sección 36.5 ¿Cuál es el número mínimo de ranuras que debería tener una rejilla para resolver el doblete de sodio en el cuarto orden? i) 250; ii) 400; iii) 1000; iv) 4000.

36.6 Difracción de rayos x

Los rayos x fueron descubiertos por Wilhelm Röntgen (1845-1923) en 1895, y los primeros experimentos sugerían que se trataba de ondas electromagnéticas con longitudes de onda del orden de 10^{-10} m. Por esa misma época, comenzó a surgir la idea de que en un sólido cristalino los átomos están dispuestos en un patrón que se repite de forma regular, con una separación entre átomos adyacentes también del orden de 10^{-10} m. Combinando estas dos ideas, en 1912 Max von Laue (1879-1960) propuso que un cristal podría servir como una especie de rejilla de difracción tridimensional para los rayos x. Es decir, los átomos individuales de un cristal podrían dispersar (esto es, absorber y emitir de nuevo) un haz de rayos x, y las ondas dispersadas podrían interferir del mismo modo que las ondas provenientes de una rejilla de difracción.

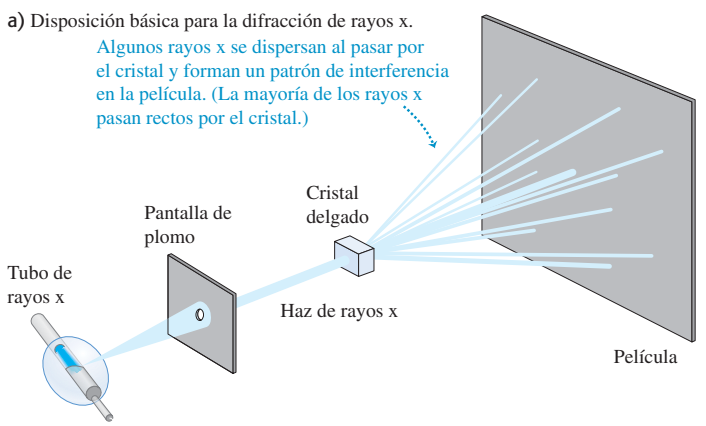
Los primeros experimentos de **difracción de rayos x** fueron realizados en 1912 por Friederich, Knipping y Von Laue, empleando el sistema experimental que aparece bosquejado en la figura 36.21a. Los rayos x dispersados *formaron* un patrón de interferencia, el cual se registró en película fotográfica. La figura 36.21b es una fotografía de un patrón de este tipo. Con estos experimentos se comprobó que los rayos x *son* ondas, o al menos tienen propiedades ondulatorias, y también que los átomos *están* dispuestos conforme a una distribución regular (figura 36.22). A partir de entonces, la difracción de rayos x ha probado ser una valiosísima herramienta de investigación, tanto para medir longitudes de onda de rayos x como para estudiar la estructura de cristales y moléculas complejas.

Modelo simple de difracción de rayos x

Para entender mejor la difracción de rayos x, consideremos en primer término una situación de dispersión bidimensional, como se muestra en la figura 36.23a, donde una onda plana incide sobre una formación rectangular de centros de dispersión. La situación podría ser un tanque de ondas con una serie de pequeños postes, microondas de 3 cm que chocan con una formación de pequeñas esferas conductoras, o rayos x que inciden en una formación de átomos. En el caso de las ondas electromagnéticas, la onda induce un momento dipolar eléctrico oscilante en cada elemento dispersor. Estos dipolos actúan como pequeñas antenas que emiten ondas dispersadas. El patrón de interferencia resultante es la superposición de todas estas ondas dispersadas. La situación no es la misma que la de una rejilla de difracción, donde las ondas provenientes de todas las rejillas son emitidas *en fase* (en el caso de una onda plana que incide en dirección normal). En el caso que nos ocupa, las ondas dispersadas *no* están todas en fase porque sus distancias con respecto a la *fuente* son diferentes. Para calcular el patrón de interferencia, es necesario considerar las diferencias de trayecto *totales* de las ondas dispersadas, incluso las distancias de la fuente al elemento dispersor y de éste al observador.

Como se observa en la figura 36.23b, la longitud de trayecto de la fuente al observador es la misma con respecto a todos los elementos dispersores de una sola fila, si

36.21 a) Un experimento de difracción de rayos. b) Patrón de difracción (o *patrón de Laue*) formado dirigiendo un haz de rayos x hacia un corte fino de cristal de cuarzo.



los dos ángulos θ_a y θ_r son iguales. La radiación dispersada de filas *adyacentes también* está en fase, si la diferencia de trayecto correspondiente a filas adyacentes es un número entero de longitudes de onda. La figura 36.23c muestra que esta diferencia de trayecto es $2d \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el valor común de θ_a y θ_r. Por lo tanto, las condiciones para que la radiación proveniente de la *formación completa* lleguen al observador en fase son: 1) el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de dispersión y 2) la diferencia de trayecto correspondiente a filas adyacentes debe ser igual a $m\lambda$, donde m es un entero. Podemos expresar la segunda condición como

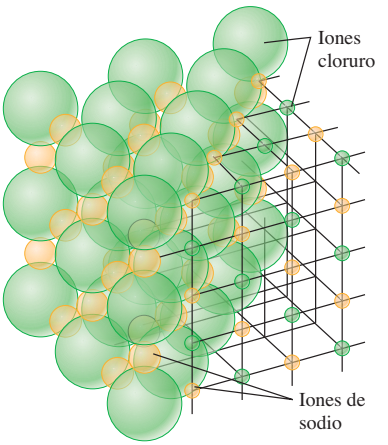
$$2d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(condición de Bragg para que haya interferencia constructiva desde una formación)} \qquad (36.16)$$

CUIDADO **Dispersión desde una formación** En la ecuación (36.16) el ángulo θ se mide con respecto a la *superficie* del cristal, no con respecto a la *normal* al plano de una serie de ranuras o de una rejilla. Asimismo, advierta que la diferencia de trayecto de la ecuación (36.16) es $2d \operatorname{sen}\theta$, no $d \operatorname{sen}\theta$ como en la ecuación (36.13) referente a una rejilla de difracción.

En las direcciones con respecto a las cuales se satisface la ecuación (36.16), vemos un máximo intenso en el patrón de interferencia. Podemos describir esta interferencia en términos de *reflexiones* de la onda en las filas horizontales de elementos dispersores de la figura 36.23a. Hay reflexión intensa (interferencia constructiva) en los ángulos en los que los ángulos incidente y de dispersión son iguales y se satisface la ecuación (36.16). Como sen θ nunca puede ser mayor que 1, la ecuación (36.16) indica que para tener interferencia constructiva, la cantidad $m\lambda$ debe ser menor que $2d$ y así λ debe ser menor que $2d/m$. Por ejemplo, el valor de d en un cristal de NaCl (figura 36.22) es sólo de 0.282 nm. Por ello, para tener el máximo orden m-ésimo presente en el patrón de difracción, λ debe ser menor que 2 (0.282 nm)$/m$; esto es, $\lambda < 0.564$ nm para $m = 1$, $\lambda < 0.282$ nm para $m = 2$, $\lambda < 0.188$ nm para $m = 3$, y así sucesivamente. Todas éstas son longitudes de onda de rayos x (véase la figura 32.4), que es la causa de que los rayos x se usen al estudiar la estructura del cristal.

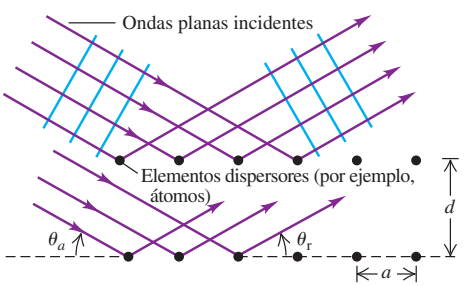
Podemos extender este análisis a una formación tridimensional considerando *planos* de elementos dispersores en vez de *filas.* La figura 36.24 muestra dos conjuntos diferentes de planos paralelos que pasan por todos los elementos dispersores. Las ondas

36.22 Modelo de la disposición de los iones en un cristal de NaCl (sal común). La separación entre átomos adyacentes es de 0.282 nm. (En realidad, las nubes electrónicas de los átomos se traslapan ligeramente.)



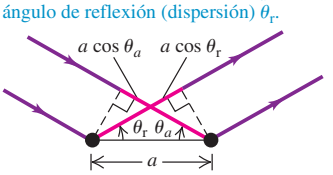
36.23 Modelo bidimensional de dispersión con respecto a una formación rectangular. Observe que los ángulos en b) se miden desde la *superficie* del cristal no desde su normal.

a) Dispersión de ondas desde una formación rectangular



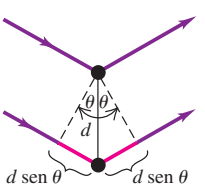
b) Dispersión desde los átomos adyacentes en una fila

La interferencia desde átomos adyacentes de una fila es constructiva cuando las longitudes del trayecto $a \cos\theta_a$ y $a \cos\theta_r$ son iguales; así que el ángulo de incidencia θ_a es igual al ángulo de reflexión (dispersión) θ_r.



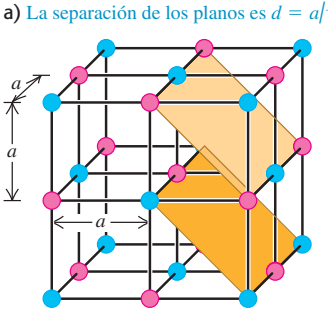
c) Dispersión desde átomos en filas adyacentes

La interferencia desde átomos en filas adyacentes es constructiva cuando la diferencia de trayecto $2d \operatorname{sen}\theta$ es igual a un número entero de longitudes de onda, como en la ecuación (36.16).

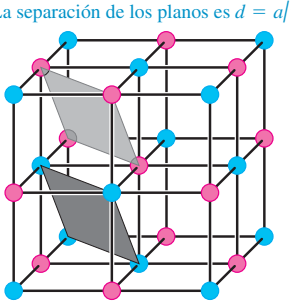


36.24 Cristal cúbico y dos familias diferentes de planos cristalinos. Hay además tres conjuntos de planos paralelos a las caras del cubo, con separación a.

a) La separación de los planos es $d = a/\sqrt{2}$.



b) La separación de los planos es $d = a/\sqrt{3}$.



provenientes de todos los elementos dispersores de un plano determinado interfieren constructivamente, si son iguales los ángulos de incidencia y de dispersión. También hay interferencia constructiva entre planos cuando se satisface la ecuación (36.16), donde d es ahora la distancia entre planos adyacentes. Debido a que existen muchos conjuntos distintos de planos paralelos, también son muchos los valores de d y los conjuntos de ángulos que producen interferencia constructiva en toda la red cristalina. Este fenómeno se conoce como **reflexión de Bragg**, y la ecuación (36.16) recibe el nombre de **condición de Bragg**, en honor de Sir William Bragg y su hijo Laurence Bragg, dos pioneros del análisis con rayos x.

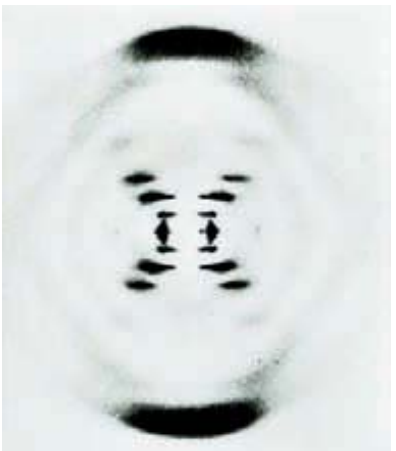
CUIDADO **La *reflexión* de Bragg es en realidad *interferencia* de Bragg** Aunque empleamos el término *reflexión*, recuerde que se trata de un efecto de *interferencia*. De hecho, las reflexiones en diversos planos presentan una estrecha analogía con los efectos de interferencia en películas delgadas (sección 35.4).

Como se ve en la figura 36.21b, en la difracción de rayos x hay una cancelación casi total en casi todas direcciones, salvo algunas en las que hay interferencia constructiva y se forman manchas brillantes. Los patrones de este tipo se conocen habitualmente como patrones de *difracción* de rayos x, aunque sería más adecuado llamarlos patrones de *interferencia*.

Podemos determinar la longitud de onda de los rayos x examinando el patrón de difracción de un cristal de estructura y separación entre átomos conocidas, tal como determinamos longitudes de onda de luz visible midiendo patrones formados por ranuras o rejillas. (La separación entre los átomos de cristales simples de estructura conocida, como el cloruro de sodio, por ejemplo, se hallan con base en la densidad del cristal y el número de Avogadro.) Así, una vez conocida la longitud de onda de los rayos x, podemos usar la difracción de rayos x para explorar la estructura y establecer la separación entre los átomos de cristales de estructura desconocida.

La difracción de rayos x es, con mucho, la herramienta experimental más importante en la investigación de la estructura cristalina de sólidos. La difracción de rayos x también desempeña un importante papel en el estudio de estructuras de líquidos y de moléculas orgánicas. Ha sido una de las principales técnicas experimentales para establecer la estructura de doble hélice del DNA (figura 36.25) y lograr avances ulteriores en genética molecular.

36.25 La científica británica Rosalind Franklin obtuvo esta revolucionaria imagen de difracción de rayos x del DNA en 1953. Las bandas oscuras dispuestas en cruz suministraron la primera prueba de la estructura helicoidal de la molécula de DNA.



Ejemplo 36.5 Difracción de rayos x

Se dirige un haz de rayos x con una longitud de onda de 0.154 nm hacia ciertos planos de un cristal de silicio. Conforme se aumenta el ángulo de incidencia a partir de cero, se encuentra el primer máximo de interferencia intenso debido a estos planos, cuando el haz forma un ángulo de 34.5° con los planos. *a*) ¿Cuál es la separación entre los planos? *b*) ¿Se hallarán otros máximos de interferencia debidos a estos planos a ángulos mayores?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica reflexión de Bragg de rayos x desde los planos de un cristal.

PLANTEAR: En el inciso *a*) se aplica la condición de Bragg [ecuación (36.16)] para relacionar la longitud de onda λ y el ángulo θ correspondientes al máximo de interferencia de $m = 1$ (ambos conocidos) con la separación d entre planos (que es la incógnita). Dado el valor de d, se aplica nuevamente la condición de Bragg en el inciso *b*) para obtener los valores de θ de los máximos de interferencia que corresponden a otros valores de m.

EJECUTAR: *a*) Se despeja d de la ecuación de Bragg [ecuación (36.16)] y se hace $m = 1$:

$$d = \frac{m\lambda}{2\,\text{sen}\,\theta} = \frac{(1)(0.154\ \text{nm})}{2\,\text{sen}\,34.5^\circ} = 0.136\ \text{nm}$$

Ésta es la distancia entre planos adyacentes.

b) Para calcular otros ángulos, se despeja $\text{sen}\,\theta$ de la ecuación (36.16):

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{2d} = m\frac{0.154\ \text{nm}}{2(0.136\ \text{nm})} = m(0.566)$$

Los valores de m de 2 o más dan valores de $\text{sen}\,\theta$ mayores que la unidad, lo cual es imposible. Por lo tanto, *no* hay otros ángulos de máximos de interferencia con este conjunto específico de planos cristalinos.

EVALUAR: Nuestro resultado del inciso *b*) muestra que *habría* un segundo máximo de interferencia si la cantidad $\lambda/2d$ fuera igual a 0.500 o menos. Éste sería el caso si la longitud de onda de los rayos x fuera menor que $2d = 0.272$ nm. ¿Cuán corta tendría que ser la longitud de onda para tener *tres* máximos de interferencia?

Evalúe su comprensión de la sección 36.6 Usted está haciendo un experimento de difracción de rayos x con un cristal, en el cual los planos atómicos están separados 0.200 nm. Usa rayos x con longitud de onda de 0.100 nm. ¿El máximo de quinto orden estará presente en el patrón de difracción?

36.7 Aberturas circulares y poder de resolución

Hemos estudiado detenidamente los patrones de difracción formados por ranuras largas y angostas, o por series de ranuras. Pero una abertura de *cualquier* forma crea un patrón de difracción. El patrón de difracción que forma una abertura *circular* tiene un interés especial debido a su papel en la limitación de la capacidad de un instrumento óptico para resolver detalles finos. En principio, podríamos calcular la intensidad en cualquier punto P del patrón de difracción, dividiendo el área de la abertura en elementos pequeños, hallando la amplitud de onda resultante y la fase en P, e integrando después sobre el área de la abertura para determinar la amplitud e intensidad resultantes en P. En la práctica, esta integración no se puede llevar a cabo en términos de funciones elementales. Tan sólo *describiremos* el patrón y citaremos algunas cifras importantes.

Activ Online Physics
16.7 Difracción en orificios circulares
16.8 Poder de resolución

El patrón de difracción que forma una abertura circular consiste en una mancha central brillante, rodeada por una serie de anillos brillantes y oscuros, como se observa en la figura 36.26. Podemos describir el patrón en términos del ángulo θ, que representa el radio angular de cada anillo. Si el diámetro de la abertura es D y la longitud de onda es λ, el radio angular θ_1 del primer anillo *oscuro* está dado por

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \text{(difracción por una abertura circular)} \tag{36.17}$$

Los radios angulares de los dos anillos oscuros siguientes están dados por

$$\operatorname{sen}\theta_2 = 2.23\frac{\lambda}{D} \qquad \operatorname{sen}\theta_3 = 3.24\frac{\lambda}{D} \tag{36.18}$$

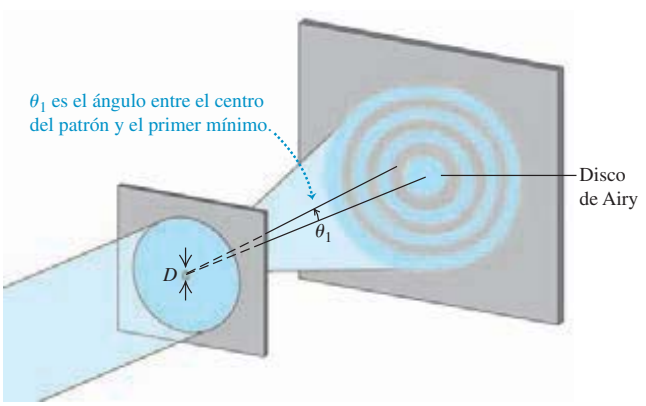
Entre éstos hay anillos brillantes con radios angulares dados por

$$\operatorname{sen}\theta = 1.63\frac{\lambda}{D}, \qquad 2.68\frac{\lambda}{D}, \qquad 3.70\frac{\lambda}{D} \tag{36.19}$$

y así sucesivamente. La mancha central brillante recibe el nombre de **disco de Airy**, en honor de Sir George Airy (1801-1892), astrónomo real de Inglaterra, quien dedujo por primera vez la expresión de la intensidad en el patrón. El radio angular del disco de Airy es el del primer anillo oscuro, dado por la ecuación (36.17).

La intensidad de los anillos brillantes decae con gran rapidez conforme aumenta el ángulo. Cuando D es mucho más grande que la longitud de onda λ, como es normalmente el caso en los instrumentos ópticos, la intensidad máxima del primer anillo es de sólo el 1.7% del valor en el centro del disco de Airy, y la intensidad máxima del segundo anillo es de sólo el 0.4%. La mayoría (85%) de la energía lumínica incide dentro del disco de Airy. La figura 36.27 muestra un patrón de difracción formado por una abertura circular.

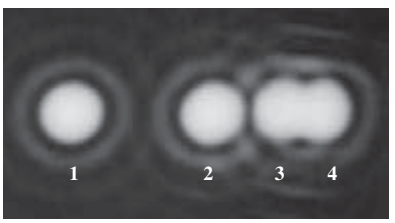
36.26 Patrón de difracción formado por una abertura circular de diámetro D. El patrón consiste en una mancha central brillante, así como en anillos oscuros y brillantes alternos. Se muestra el radio angular θ_1 del primer anillo oscuro. (Este diagrama no está a escala.)



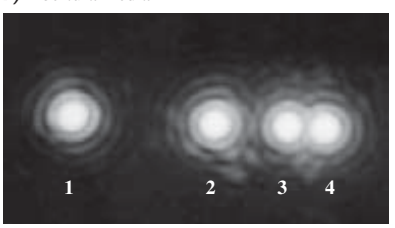
36.27 Fotografía del patrón de difracción formado por una abertura circular.

36.28 Patrones de difracción de cuatro fuentes luminosas muy pequeñas ("puntuales"). Las fotografías fueron tomadas con una abertura circular delante de la lente. a) La abertura es tan pequeña que los patrones de las fuentes 3 y 4 se traslapan, y aparecen apenas resueltas conforme al criterio de Rayleigh. Al aumentar el tamaño de la abertura, disminuye el tamaño de los patrones de difracción, como se aprecia en b) y c).

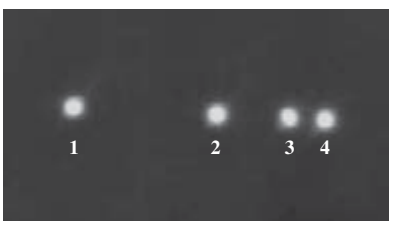
a) Abertura pequeña



b) Abertura media



c) Abertura grande



Difracción y formación de imágenes

La difracción tiene implicaciones de gran alcance en la formación de imágenes por medio de lentes y espejos. En nuestro estudio de los instrumentos ópticos en el capítulo 34, supusimos que una lente de distancia focal f enfoca un haz paralelo (onda plana) en un *punto* situado a una distancia f de la lente. Esta suposición pasa por alto los efectos de difracción. Vemos ahora que lo que se obtiene no es un punto, sino el patrón de difracción que hemos descrito. Si se tienen dos objetos puntuales, sus imágenes no son dos puntos, sino dos patrones de difracción. Cuando los objetos están cerca entre sí, sus patrones de difracción se traslapan; si están lo suficientemente próximos, sus patrones se traslapan casi totalmente y es imposible distinguirlos. Este efecto se muestra en la figura 36.28, donde se presentan los patrones correspondientes a cuatro fuentes "puntuales" de luz muy pequeñas. En la figura 36.28a la imagen de la fuente izquierda está muy separada de las otras dos, pero las imágenes de las fuentes intermedia y derecha se han fusionado. En la figura 36.28b, con un diámetro de abertura más grande y, por consiguiente, discos de Airy más pequeños, las imágenes intermedia y derecha aparecen con mejor resolución. En la figura 36.28c, con una abertura aún mayor, tienen resolución perfecta.

Un criterio de uso muy extendido de la resolución de dos objetos puntuales, propuesto por el físico inglés Lord Rayleigh (1842-1919) y conocido como **criterio de Rayleigh**, es que los objetos están apenas resueltos (es decir, son apenas distinguibles), si el centro de un patrón de difracción coincide con el primer mínimo del otro. En ese caso, la separación angular de los centros de las imágenes está dada por la ecuación (36.17). La separación angular de los *objetos* es la misma que la de las *imágenes* formadas por un telescopio, un microscopio u otro dispositivo óptico. Así, dos objetos puntuales están apenas resueltos, de acuerdo con el criterio de Rayleigh, cuando su separación angular está dada por la ecuación (36.17).

La separación mínima de dos objetos que pueden ser apenas resueltos por un instrumento óptico es el **límite de resolución** o definición del mismo. Cuanto más pequeño sea el límite de resolución, mayor será la *definición*, o **poder de resolución**, del instrumento. La difracción fija los límites últimos a la definición de las lentes. La óptica *geométrica* puede hacernos creer que podemos formar imágenes tan grandes como queramos. Tarde o temprano, sin embargo, se alcanza un punto donde la imagen se hace más grande pero no más detallada. Si se ampliaran aún más, las imágenes de la figura 36.28 no se harían más nítidas.

CUIDADO **Poder de resolución contra poder de resolución cromático** Tenga cuidado de no confundir el poder de resolución de un instrumento óptico con el poder de resolución *cromático* de una rejilla (descrito en la sección 36.5). El poder de resolución se refiere a la capacidad para distinguir las imágenes de objetos que aparecen muy cerca entre sí, ya sea al mirarlos a través de un instrumento óptico o en una fotografía tomada con el instrumento. El poder de resolución cromático describe la medida en que es posible distinguir longitudes de onda diferentes, en un espectro formado por una rejilla de difracción.

El criterio de Rayleigh combinado con la ecuación (36.17) muestra que la definición (poder de resolución) mejora al aumentar el diámetro; también mejora con longitudes de onda más cortas. Los microscopios de luz ultravioleta tienen mejor definición que los microscopios de luz visible. En los microscopios electrónicos, la resolución o definición está limitada por las longitudes de onda asociadas con los electrones, que tienen aspectos ondulatorios (que estudiaremos más ampliamente en el capítulo 39). Estas longitudes de onda pueden llegar a ser 100,000 veces más pequeñas que las longitudes de onda de la luz visible, con la correspondiente ganancia en definición. El poder de resolución también explica la diferencia en la capacidad de almacenamiento entre los discos compactos (CD) y los discos de video digital (DVD). En ambos la información se almacena en una serie de fosos diminutos. Para que no se pierda información en el proceso de lectura, la óptica de escaneo debe ser capaz de resolver dos fosos adyacentes, de manera que no parezcan mezclarse en un solo foso (véanse fuentes 3 y 4 en la figura 36.28). El láser rojo utilizado en un reproductor de DVD tiene una longitud de onda más corta (650 nm) y por ende mejor poder de resolución, que el láser infrarrojo en un reproductor de CD (780 nm). De esta manera, los fosos pueden espaciarse más cercanos en un DVD que en un CD, y se puede almacenar más información en un disco del mismo tamaño (4.7 giga bytes en un DVD contra 700 mega bytes, o 0.7 giga bytes, en un CD. La más reciente tecnología de almacenamiento en discos utiliza un

láser azul violeta con longitud de onda de 405 nm; es una de las razones para usar un espaciado entre fosos más pequeño y por ende aun más almacenamiento de datos (15 a 25 gigabytes) en un disco del mismo tamaño que un CD o un DVD.

La difracción es una consideración importante en los "platos" de satélites, reflectores parabólicos cuyo propósito es recibir transmisiones de satélites. Los platos de satélites deben ser capaces de captar transmisiones provenientes de dos satélites separados sólo unos cuantos grados y que transmiten a la misma frecuencia; la necesidad de resolver dos transmisiones de esta índole determina el diámetro mínimo del plato. A medida que se utilizan frecuencias más altas, el diámetro necesario disminuye. Por ejemplo, cuando dos satélites con una separación de 5.0° difunden microondas de 7.5 cm, el diámetro mínimo de disco que permite resolverlas (según el criterio de Rayleigh) es de alrededor de 1.0 m.

Una de las causas para construir telescopios muy grandes es aumentar el diámetro de abertura y así reducir los efectos de la difracción. El diámetro efectivo de un telescopio puede ampliarse usando series de telescopios más pequeños. El Very Large Array (VLA: Arreglo Muy Grande) es un conjunto de 27 radiotelescopios que se pueden extender en una disposición con forma de "Y" de 36 km de ancho (figura 36.29a). De este modo, el diámetro de abertura efectivo es de 36 km, y confiere al VLA un límite de resolución de menos de 3×10^{-7} rad. Esto es comparable, en el terreno óptico, con ser capaz de leer el renglón final de un cartel de agudeza visual ¡a 7 km de distancia! Tal disposición se conoce como *interferometría de radio* porque utiliza las diferencias de fase entre las señales recibidas en diferentes telescopios. El mismo principio también es útil para mejorar la resolución de telescopios de luz visible (figura 36.29b).

36.29 Al observar simultáneamente el mismo objeto con telescopios muy separados, los astrónomos pueden obtener mejor poder de resolución que con un solo telescopio.

a) **Interferometría de radio.** El Very Large Array, a 80 km al oeste de Socorro, Nuevo México, consiste en 27 radiotelescopios que pueden moverse en sus pistas. En su máxima separación su resolución equivale a un telescopio individual de 36 km de diámetro.

b) **Interferometría óptica.** Los cuatro telescopios de 8.2 m del Very Large Telescope del European Southern Obsevatory en Cerro Paranal, Chile, pueden combinarse de manera óptica en pares. Al funcionar juntos, los dos telescopios externos tienen la resolución de un solo telescopio de 130 m de diámetro.

Ejemplo 36.6 Poder de resolución de una lente de cámara

Una lente de cámara de distancia focal $f = 50$ mm y abertura máxima $f/2$ forma una imagen de un objeto situado a 9.0 m de distancia. *a*) Si la definición está limitada por la difracción, ¿cuál es la distancia mínima entre dos puntos del objeto que están apenas resueltos, y cuál es la distancia correspondiente entre los puntos de imagen? *b*) ¿Cómo cambia la situación si se "baja" la lente a $f/16$? Suponga que $\lambda = 500$ nm en ambos casos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo se basa en ideas expuestas en esta sección y en las secciones 34.4 (donde se analizó la formación de imágenes por medio de lentes) y 34.5 (donde se presentó el concepto del número f).

PLANTEAR: De acuerdo con la ecuación (34.20), el número f de una lente es el cociente de su distancia focal f entre el diámetro de abertura D. Se obtiene D con base en la información que se proporciona y luego se aplica la ecuación (36.17) para calcular la separación angular θ entre dos puntos del objeto apenas resueltos. A continuación, y con ayuda de la geometría de formación de imágenes por una lente (véase la sección 34.4), se obtiene la distancia entre esos puntos y la distancia entre los puntos de imagen correspondientes.

EJECUTAR: *a*) El diámetro de abertura es $D = f/(\text{número } f) = (50 \text{ mm})/2 = 25 \text{ mm} = 25 \times 10^{-3}$ m. De acuerdo con la ecuación

continúa

(36.17), la separación angular θ de dos puntos de objeto apenas resueltos es

$$\theta \approx \operatorname{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\frac{500 \times 10^{-9}\,\text{m}}{25 \times 10^{-3}\,\text{m}}$$
$$= 2.4 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

Sea y la separación de los puntos de objeto y y' la separación de los puntos de imagen correspondientes. De acuerdo con nuestro análisis de las lentes delgadas de la sección 34.4 sabemos que, aparte del signo, $y/s = y'/s'$. Por lo tanto, la separación angular de los puntos de objeto y la de los puntos de imagen correspondientes son ambas iguales a θ. Como la distancia objeto s es mucho mayor que la distancia focal f = 50 mm, la distancia imagen s' es aproximadamente igual a f. Por lo tanto,

$$\frac{y}{9.0\,\text{m}} = 2.4 \times 10^{-5} \qquad y = 2.2 \times 10^{-4}\,\text{m} = 0.22\,\text{mm}$$
$$\frac{y'}{50\,\text{mm}} = 2.4 \times 10^{-5} \qquad y' = 1.2 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$
$$= 0.0012\,\text{mm} \approx \frac{1}{800}\,\text{mm}$$

b) El diámetro de abertura es ahora (50 mm)/16, u ocho veces más pequeño que antes. La separación angular entre puntos apenas resueltos es ocho veces mayor, en tanto que los valores de y y y' también son ocho veces más grandes que antes:

$$y = 1.8\,\text{mm} \qquad y' = 0.0096\,\text{mm} = \frac{1}{100}\,\text{mm}$$

Sólo las mejores lentes de cámara se aproximan a este poder de resolución.

EVALUAR: Muchos fotógrafos utilizan siempre la abertura más pequeña posible para conseguir la máxima nitidez, pues las aberraciones de las lentes provocan que los rayos luminosos alejados del eje óptico converjan en un punto de imagen diferente que los rayos próximos al eje. Los fotógrafos deben saber que, como nos enseña este ejemplo, los efectos de difracción se tornan más importantes cuando la abertura es pequeña. Es entonces necesario balancear una causa de imágenes borrosas contra la otra.

Evalúe su comprensión de la sección 36.7 Se le pide a usted comparar cuatro diferentes propuestas para telescopios que se pondrán en órbita, arriba de los efectos borrosos de la atmósfera terrestre. Ordene del mejor al peor, los telescopios propuestos de acuerdo con su capacidad para resolver detalles pequeños. i) un radiotelescopio de 100 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 21 cm; ii) un telescopio óptico de dos metros de diámetro que observa a una longitud de onda de 500 nm; iii) un telescopio ultravioleta de 1.0 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 100 nm; iv) un telescopio infrarrojo de 2.0 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 10 μm.

*36.8 Holografía

La **holografía** es una técnica para registrar y reproducir una imagen de un objeto por medio de efectos de interferencia. A diferencia de las imágenes bidimensionales que registra un sistema ordinario de fotografía o televisión, una imagen holográfica es auténticamente tridimensional. Las imágenes de este tipo se pueden ver desde diferentes direcciones para poner al descubierto distintos lados y desde diversas distancias para observar una perspectiva cambiante. Quien nunca hubiese visto un holograma, ¡no creería que fuera posible!

En la figura 36.30a se muestra el procedimiento básico para obtener un holograma. Se ilumina el objeto por holografiar con luz monocromática y se dispone una película fotográfica, de modo que incida en ella la luz dispersada desde el objeto y también la luz directa de la fuente. En la práctica, la fuente de luz debe ser un láser, por razones que comentaremos más adelante. La interferencia entre la luz directa y la dispersada da lugar a la formación y registro de un complejo patrón de interferencia en la película.

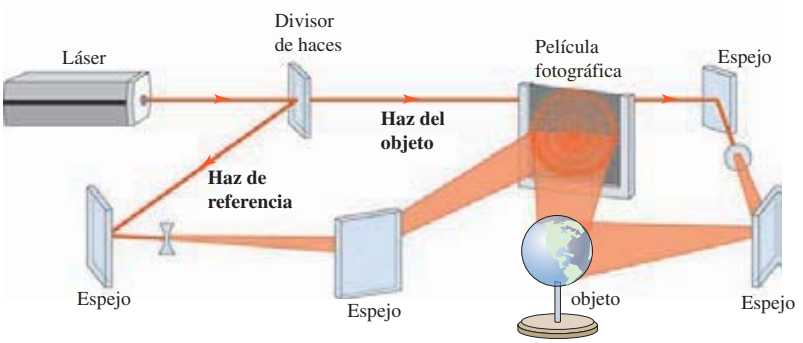
Para formar las imágenes, simplemente se proyecta luz a través de la película revelada, como se indica en la figura 36.30b. Se forman dos imágenes: una imagen virtual del lado de la película más próximo a la fuente, y una imagen real del lado opuesto.

Holografía y patrones de interferencia

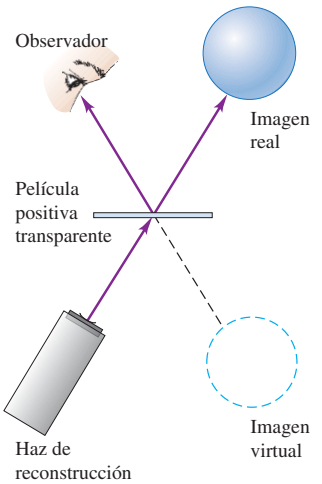
Un análisis completo de la holografía queda fuera de nuestro alcance; no obstante, comprenderemos el proceso en cierta medida examinando cómo se holografía un solo punto y cómo se forma su imagen. Considere el patrón de interferencia que se forma sobre una hoja de negativo fotográfico para película, por superposición de una onda plana incidente y una onda esférica, como se muestra en la figura 36.31a. El origen de la onda esférica está en una fuente puntual P a una distancia b_0 de la película;

36.30 a) Un holograma es un registro sobre película del patrón de interferencia que se forma con luz de la fuente coherente y luz dispersada desde el objeto. b) Se forman imágenes cuando se proyecta luz a través del holograma. El observador ve la imagen virtual que se forma detrás del holograma.

a) Registro de un holograma

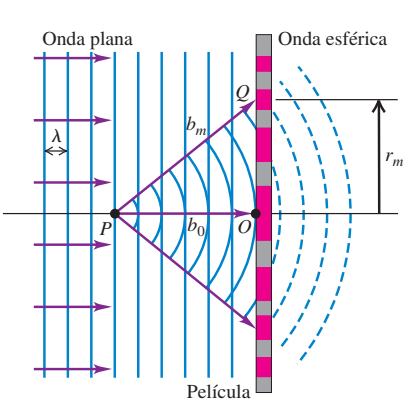


b) Observación de un holograma

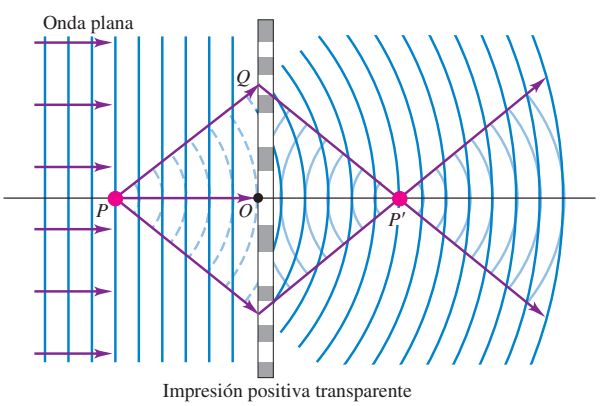


36.31 a) Hay interferencia constructiva de las ondas plana y esférica en el plano de la película en todos los puntos Q cuya distancia b_m con respecto a P excede la distancia b_0 de P a O en un número entero de longitudes de onda mλ. En el caso del punto Q que se muestra, $m = 2$. b) Cuando una onda plana incide en una impresión positiva transparente de la película revelada, la onda difractada consiste en una onda que converge en P' y luego diverge de nuevo, y en una onda divergente que parece provenir de P. Estas ondas forman una imagen real y una virtual, respectivamente.

a)



b)



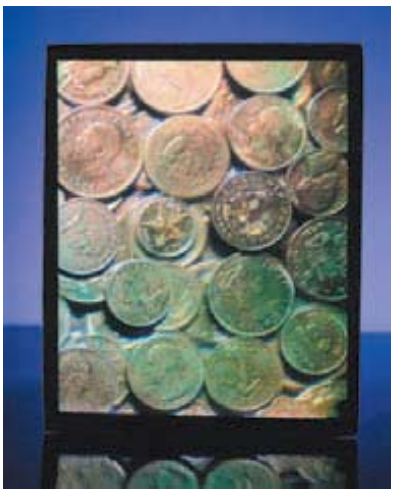
P puede ser de hecho un objeto pequeño que dispersa parte de la onda plana incidente. Suponemos que las dos ondas son monocromáticas y coherentes, y que la relación de fase es tal que hay interferencia constructiva en el punto O del diagrama. En estas condiciones *también* habrá interferencia constructiva en cualquier punto Q de la película, que esté más distante de P que O un número entero de longitudes de onda. Es decir, si $b_m - b_0 = m\lambda$, donde m es un entero, entonces hay interferencia constructiva. Los puntos donde se satisface esta condición forman en la película círculos centrados en O, con radios r_m dados por

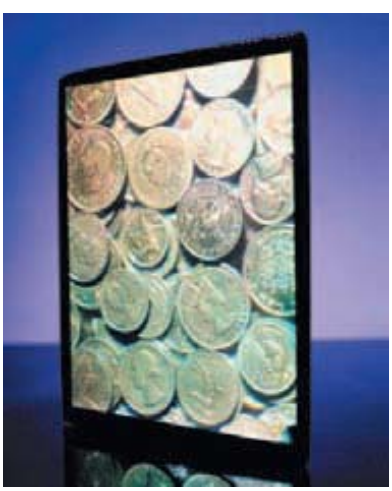
$$b_m - b_0 = \sqrt{b_0^2 + r_m^2} - b_0 = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (36.20)$$

Despejando r_m^2 de esto:

$$r_m^2 = \lambda(2mb_0 + m^2\lambda)$$

36.32 Dos vistas del mismo holograma observado desde ángulos diferentes.





Ordinariamente, b_0 es mucho mayor que λ; por ello, despreciamos el segundo término entre paréntesis y obtenemos

$$r_m = \sqrt{2m\lambda b_0} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{36.21}$$

El patrón de interferencia consiste en una serie de franjas circulares concéntricas brillantes cuyo radio viene dado por la ecuación (36.21). Entre estas franjas brillantes hay franjas oscuras.

En seguida se revela la película y se obtiene una impresión positiva transparente, de modo que las áreas de franjas brillantes sean las más transparentes en la película. Después, se ilumina esta impresión con luz monocromática de onda plana de la misma longitud de onda λ que se utilizó inicialmente. En la figura 36.31b, considere un punto P' a una distancia b_0 a lo largo del eje proveniente de la película. Los centros de las franjas brillantes sucesivas difieren en su distancia con respecto a P' un número entero de longitudes de onda y, por lo tanto, se presenta en la onda difractada un *máximo* intenso en P'. Es decir, la luz converge en P' y luego diverge a partir de ese punto en el lado opuesto. Por consiguiente, P' es una *imagen real* del punto P.

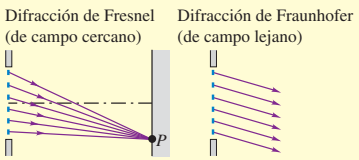
Sin embargo, esto no constituye toda la onda difractada. La interferencia de las onditas que se extendieron a partir de todas las áreas transparentes forma una segunda onda esférica que es divergente en vez de convergente. Cuando se sigue el rastro de esta onda detrás de la película en la figura 36.31b, parecería que se propaga a partir del punto P. Así, la onda difractada total procedente del holograma es una superposición de una onda esférica que converge para formar una imagen real en P' y una onda esférica que diverge como si hubiera provenido del punto de imagen virtual P.

Por el principio de superposición de las ondas, lo que es válido acerca de la formación de la imagen de un solo punto, también lo es con respecto a la formación de la imagen de cualquier número de puntos. La película registra el patrón de interferencia superpuesto de los diversos puntos, y cuando se proyecta luz a través de la película, se reproducen simultáneamente los diversos puntos de imagen. De este modo, se pueden registrar y reproducir las imágenes de un objeto extenso del mismo modo que en el caso de un solo objeto puntual. La figura 36.32 muestra fotografías de una imagen holográfica tomadas desde dos ángulos diferentes; en ellas, se observa la perspectiva cambiante de esta imagen tridimensional.

Para hacer un holograma es necesario resolver varios problemas prácticos. Primero, la luz que se utiliza debe ser *coherente* a lo largo de distancias grandes, en comparación con las dimensiones del objeto y su distancia con respecto a la película. Las fuentes ordinarias de luz *no* satisfacen este requisito, por razones que comentamos en la sección 35.1. Por consiguiente, la luz láser es indispensable para hacer un holograma. (La luz blanca ordinaria puede servir para *ver* ciertos tipos de hologramas, como los que tienen las tarjetas de crédito.) Segundo, se requiere una estabilidad mecánica extrema. Si se produce cualquier movimiento relativo de la fuente, el objeto o la película durante la exposición, incluso uno tan pequeño como un cuarto de longitud de onda, el patrón de interferencia en la película se desdibuja lo suficiente como para impedir la formación de una imagen satisfactoria. Sin embargo, estos obstáculos no son insuperables y la holografía ha adquirido importancia en la investigación, el entretenimiento y una extensa variedad de aplicaciones tecnológicas.

CAPÍTULO 36 RESUMEN

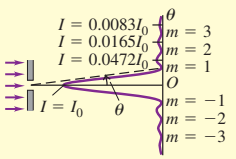
Difracción de Fresnel y Fraunhofer: Se produce difracción cuando pasa luz a través de una abertura o alrededor de un borde. Cuando la fuente y el observador se encuentran tan lejos de la superficie obstructora, como para considerar como paralelos los rayos salientes, se produce difracción de Fraunhofer. Cuando la fuente y el observador están relativamente cerca de la superficie obstructora, se tiene difracción de Fresnel.



Difracción de una sola ranura: La luz monocromática que pasa a través de una ranura angosta de ancho a produce un patrón de difracción en una pantalla distante. La ecuación (36.2) establece la condición para que haya interferencia destructiva (una franja oscura) en un punto P del patrón a un ángulo θ. La ecuación (36.7) proporciona la intensidad en el patrón en función de θ. (Véanse los ejemplos 36.1 a 36.3.)

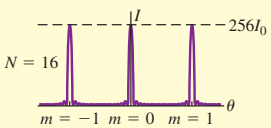
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{36.2}$$

$$I = I_0\left\{\frac{\operatorname{sen}[\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda]}{\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda}\right\}^2 \tag{36.7}$$



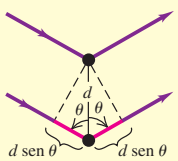
Rejillas de difracción: Una rejilla de difracción consiste en un gran número de ranuras finas paralelas, espaciadas una distancia d. La condición para que se alcance la intensidad máxima en el patrón de interferencia es la misma que en el caso del patrón de dos fuentes; pero los máximos producidos por la rejilla son muy marcados y angostos. (Véase el ejemplo 36.4.)

$$d\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{36.13}$$



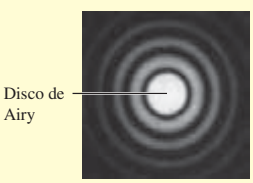
Difracción de rayos x: Un cristal actúa como una rejilla tridimensional de difracción ante los rayos x, cuya longitud de onda es del mismo orden de magnitud que la separación entre átomos del cristal. Con respecto a un conjunto de planos cristalinos separados entre sí por una distancia d, hay interferencia constructiva cuando los ángulos de incidencia y de dispersión (medidos con respecto a los planos cristalinos) son iguales y cuando se satisface la condición de Bragg [ecuación (36.16)]. (Véase el ejemplo 36.5.)

$$2d\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{36.16}$$



Aberturas circulares y poder de resolución: El patrón de difracción producido por una abertura circular de diámetro D consiste en una mancha central brillante, llamada disco de Airy, y una serie de anillos concéntricos oscuros y brillantes. La ecuación (36.17) proporciona el radio angular θ_1 del primer anillo oscuro, igual al tamaño angular del disco de Airy. La difracción fija el límite último de definición (nitidez de la imagen) de los instrumentos ópticos. De acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos objetos puntuales están apenas resueltos cuando su separación angular está dada por la ecuación (36.17). (Véase el ejemplo 36.6.)

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{36.17}$$



Términos clave

difracción, *1235*
difracción de Fresnel, *1236*
difracción de Fraunhofer, *1236*
rejilla de difracción, *1246*
poder de resolución cromático, *1248*
difracción de rayos x, *1250*
reflexión de Bragg, *1252*
condición de Bragg, *1252*
disco de Airy, *1253*
criterio de Rayleigh, *1254*
límite de resolución, *1254*
poder de resolución, *1254*
holografia, *1256*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La menor longitud de onda de un lector láser de DVD brinda un poder de resolución superior. Así que la información puede empacarse más apretadamente en un DVD que en un CD. Véase la sección 36.7 para mayor detalle.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

36.1 Respuesta: sí Cuando se escucha la voz de una persona que se halla a la vuelta de la esquina, se oyen ondas sonoras que sufrieron difracción. Si no hubiera difracción del sonido, sólo podríamos escuchar sonidos procedentes de objetos que estuviesen directo a la vista.

36.2 Respuestas: ii), i) y iv) (empate), iii) El ángulo θ de la primera franja oscura está dado por la ecuación (36.2) con $m = 1$ o sen $\theta = \lambda/a$. Cuanto mayor sea el valor de la razón λ/a, más grande será el valor de sen θ y, por lo tanto, el valor de θ. La razón λ/a en cada caso es i) $(400\text{ nm})/(0.20\text{ mm}) = (4.0 \times 10^{-7}\text{ m})/(2.0 \times 10^{-4}\text{ m}) = 2.0 \times 10^{-3}$; ii) $(600\text{ nm})/(0.20\text{ mm}) = (6.0 \times 10^{-7}\text{ m})/(2.0 \times 10^{-4}\text{ m}) = 3.0 \times 10^{-3}$; iii) $(400\text{ nm})/(0.30\text{ mm}) = (4.0 \times 10^{-7}\text{ m})/(3.0 \times 10^{-4}\text{ m}) = 1.3 \times 10^{-3}$; iv) $(600\text{ nm})/(0.30\text{ mm}) = (6.0 \times 10^{-7}\text{ m})/(3.0 \times 10^{-4}\text{ m}) = 2.0 \times 10^{-3}$.

36.3 Respuestas: ii) y iii) Si el ancho a de la ranura es menor que la longitud de onda λ, no habrá puntos en el patrón de difracción donde la intensidad sea cero (véase la figura 36.10a). El ancho de la ranura es $0.0100\text{ mm} = 1.00 \times 10^{-5}$ m, de manera que esta condición se satisface para ii) ($\lambda = 10.6\ \mu\text{m} = 10.6 \times 10^{-6}$ m) y iii) ($\lambda = 1.00\text{ mm} = 1.00 \times 10^{-3}$ m), pero no para i) ($\lambda = 500\text{ nm} = 500 \times 10^{-7}$) ni para iv) ($\lambda = 50.0\text{ nm} = 5.00 \times 10^{-8}$m).

36.4 Respuestas: sí; $m_i = \pm 5, \pm 10, \ldots$ Un "máximo faltante" satisface tanto $d\,\text{sen}\,\theta = m_i\lambda$ (la condición para un máximo de interferencia) como $a\,\text{sen}\,\theta = m_d\lambda$ (la condición para un mínimo de difracción). Sustituyendo $d = 2.5a$, podemos combinar estas dos condiciones en la relación $m_i = 2.5m_d$. Esto se satisface con $m_i = \pm 5$ y $m_d = \pm 2$ (falta el quinto máximo de interferencia, porque coincide con el segundo mínimo de difracción), $m_i = \pm 10$ y $m_d = \pm 4$ (falta el décimo máximo de interferencia porque coincide con el cuarto mínimo de difracción), y así sucesivamente.

36.5 Respuesta: i) Como se describe en el texto, el poder de resolución que se necesita es $R = Nm = 1000$. En el primer orden ($m = 1$) se necesitan $N = 1000$ ranuras, pero en el cuarto orden ($m = 4$) basta con $N = R/m = 1000/4 = 250$ ranuras. (Estos números son sólo aproximados debido a la índole arbitraria de nuestro criterio de resolución, y porque las rejillas reales siempre tienen ligeras imperfecciones en cuanto a la forma y la separación de las ranuras.)

36.6 Respuesta: no La posición angular del m-ésimo máximo está dada por la ecuación (36.16), $2d$ sen $\theta = m\lambda$. Con $d = 0.200$ nm, $\lambda = 0.100$ nm y $m = 5$; esto nos da sen $\theta = m\lambda/2d = (5)(0.100\text{ nm})/(2)(0.200\text{ nm}) = 1.25$. Como la función seno nunca puede ser mayor que 1, esto significa que no hay solución a esta ecuación y no aparece el máximo $m = 5$.

36.7 Respuestas: iii), ii), iv), i) El criterio de Rayleigh combinado con la ecuación (36.17) indica que cuanto menor sea el valor de la razón λ/D, mejor será el poder de resolución de un telescopio de diámetro D. Para los cuatro telescopios, esta razón es igual a i) $(21\text{ cm})/(100\text{ m}) = (0.21\text{ m})/(100\text{ m}) = 2.1 \times 10^{-3}$; ii) $(500\text{ nm})/$ ii) $(2.0\text{ m}) = (5.0 \times 10^{-7}\text{ m})/(2.0\text{ m}) = 2.5 \times 10^{-7}$; iii) $(100\text{ nm})/(1.0\text{ m}) = (1.0 \times 10^{-7}\text{ m})/(1.0\text{ m}) = 1.0 \times 10^{-7}$; iv) $(10\ \mu\text{m})/(2.0\text{ m}) = (1.0 \times 10^{-5}\text{ m})/(2.0\text{ m}) = 5.0 \times 10^{-6}$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P36.1. ¿Por qué podemos observar fácilmente los efectos de la difracción en el caso de las ondas sonoras y de las ondas en el agua, pero no en el caso de la luz? ¿Se debe a que la luz viaja mucho más rápido que esas otras ondas? Explique su respuesta.

P36.2. ¿Cuál es la diferencia entre la difracción de Fresnel y la de Fraunhofer? ¿Son procesos *físicos* diferentes? Explique su respuesta.

P36.3. Con una lente de diámetro D y luz de longitud de onda λ y frecuencia f se forma una imagen de dos objetos distantes y muy próximos uno de otro. De las acciones siguientes, ¿cuáles aumentan el poder de resolución? *a*) Emplear una lente de diámetro más pequeño. *b*) Emplear luz de mayor frecuencia. *c*) Emplear luz de longitud de onda más larga. Justifique su respuesta en cada caso.

P36.4. A través de una única ranura de ancho a pasa luz de longitud de onda λ y frecuencia f. Se observa el patrón de difracción en una pantalla a una distancia x de la ranura. De las acciones siguientes, ¿cuáles *reducen* la anchura del máximo central? *a*) Disminuir el ancho de ranura. *b*) Disminuir la frecuencia f de la luz. *c*) Disminuir la longitud de onda λ de la luz. *d*) Disminuir la distancia x de la ranura a la pantalla. Justifique su respuesta en cada caso.

P36.5. En un experimento de difracción con ondas con longitud de onda λ, *no* habrá mínimos de intensidad (es decir, no habrá franjas oscuras), si la anchura de la rendija es lo suficientemente pequeña. ¿Cuál es el ancho máximo de rendija con el cual ocurre esto? Explique su respuesta.

P36.6. Las ondas sonoras predominantes en el habla humana tienen longitudes de onda del orden de 1.0 a 3.0 metros. Con base en las ideas de la difracción, explique cómo es posible escuchar la voz de una persona cuando ésta se halla de espaldas a nosotros.

P36.7. En la difracción desde una sola ranura, ¿a qué equivale sen $(\beta/2)$ cuando $\beta = 0$? En función de su respuesta, ¿por qué la intensidad de una sola ranura *no* es igual a cero en el centro?

P36.8. Ordinariamente, un arco iris muestra una gama de colores (véase la sección 33.4). Sin embargo, si las gotitas de agua que forman el arco iris son suficientemente pequeñas, el arco iris se ve blanco. Explique

por qué, con base en ideas de difracción. En su opinión, ¿cuán pequeñas tendrían que ser las gotas de lluvia para que esto ocurra?

P36.9. Ciertos altavoces para conciertos al aire libre (donde todos los oyentes se sientan en el suelo) son más anchas en el sentido vertical que en el horizontal. Con base en ideas de difracción, explique por qué esto resulta más eficiente para difundir el sonido de modo uniforme entre los espectadores, que un altavoz cuadrado o un altavoz más ancho en el sentido horizontal que en el vertical. ¿Seguiría siendo éste el caso si los espectadores se sentaran a diferentes alturas, como en un anfiteatro? ¿Por qué?

P36.10. La figura 31.12 (sección 31.2) muestra un sistema de altavoces. El *woofer*, o bafle de bajos, que es un altavoz de diámetro grande, produce los sonidos de baja frecuencia; el *tweeter*, o bafle de agudos, un altavoz de diámetro más pequeño, produce sonidos de frecuencia más alta. Con base en ideas de difracción, explique por qué el *tweeter* es más eficaz que el *woofer*, para distribuir uniformemente los sonidos de alta frecuencia en una habitación.

P36.11. En un disco compacto de audio, CD-ROM o disco DVD, se guarda información en una serie de fosos del disco. Un rayo láser se encarga de examinar estos fosos. Una importante limitación a la cantidad de información que se puede almacenar en un disco de este tipo es la anchura del rayo láser. Explique a qué se debe esto, y cómo es que el uso de un láser de longitud de onda más corta permite almacenar más información en un disco del mismo tamaño.

P36.12. ¿Con qué color de luz puede el telescopio espacial Hubble ver detalles más finos en un objeto astronómico distante: rojo, azul o ultravioleta? Explique su respuesta.

P36.13. Un telescopio representativo de los que utilizan los astrónomos aficionados tiene un espejo de 20 cm de diámetro. Con un telescopio como éste (y un filtro para reducir la intensidad de la luz solar a un nivel que se pueda ver sin peligro) se observan detalles finos en la superficie del Sol. Explique por qué un *radiotelescopio* tendría que ser *mucho* más grande para "ver" detalles comparables en el Sol.

P36.14. ¿Se podrían observar efectos de difracción de rayos x con cristales, empleando luz visible en vez de rayos x? ¿Por qué?

P36.15. ¿Por qué es mejor una rejilla de difracción que un conjunto de dos ranuras para medir longitudes de onda de luz?

P36.16. En ocasiones vemos filas de torres de antenas de radio uniformemente espaciadas. Una estudiante comenta que éstas actúan como rejillas de difracción. ¿Qué quiere decir con eso? ¿Por qué querría uno que actuasen como rejilla de difracción?

P36.17. Si se hace un holograma con luz de 600 nm y luego se observa con luz de 500 nm, ¿cómo se ven las imágenes en comparación con las que se observan cuando se emplea luz de 600 nm? Explique su respuesta.

P36.18. Se hace un holograma con luz de 600 nm y luego se ve con luz blanca de una bombilla incandescente. ¿Qué se observa? Explique su respuesta.

P36.19. La película fotográfica ordinaria invierte el blanco y el negro, en el sentido de que las áreas más brillantemente iluminadas se convierten en las más negras después del revelado (de ahí el término *negativo*). Suponga que se observa directamente un negativo de holograma, sin hacer una transparencia positiva. ¿En qué diferirán las imágenes resultantes de las que se obtienen con el positivo? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 36.2 Difracción desde una sola ranura

36.1. Sobre una ranura de 0.750 mm de ancho incide luz monocromática proveniente de una fuente lejana. En una pantalla distante 2.00 m de la ranura, la distancia medida del máximo central del patrón de difracción al primer mínimo resulta ser de 1.35 mm. Calcule la longitud de onda de la luz.

36.2. Rayos paralelos de luz verde de mercurio con una longitud de onda de 546 nm pasan a través de una rendija que cubre una lente con distancia focal de 60.0 cm. En el plano focal de la lente, la distancia entre el máximo central y el primer mínimo es de 10.2 mm. ¿Cuál es el ancho de la rendija?

36.3. Luz con longitud de onda de 585 nm incide sobre una rendija de 0.0666 mm de ancho. *a*) En una pantalla muy lejana, ¿cuántas franjas *totalmente* oscuras (lo que indica cancelación absoluta) habrá, incluyendo ambos lados del punto central brillante? Resuelva este problema ¡sin calcular todos los ángulos! (*Sugerencia:* pregúntese cuál es el valor máximo que puede tener $\operatorname{sen}\theta$. ¿Qué le dice esto acerca del valor máximo que puede tener m?) *b*) ¿A qué ángulo se presenta la franja oscura que está más alejada de la franja brillante central?

36.4. Luz con longitud de onda de 633 nm proveniente de una fuente distante incide sobre una rendija de 0.750 mm de ancho, y el patrón de difracción resultante se observa en una pantalla ubicada a 3.50 m de distancia. ¿Cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras a cada lado de la franja brillante central?

36.5. Las ondas de todo tipo sufren difracción, incluso las ondas sonoras. A través de una ranura angosta de 12.0 cm de ancho pasa sonido de alta frecuencia, proveniente de una fuente distante, con una longitud de onda de 9.00 cm. Un micrófono se encuentra a 40.0 cm directamente enfrente de la ranura, en la posición que corresponde al punto O de la figura 36.5a. Se desplaza el micrófono en dirección perpendicular a la recta que une el centro de la ranura con el punto O. ¿A qué distancias de O la intensidad que el micrófono detecta es cero?

36.6. ¡Tsunami! El 26 de diciembre de 2004, ocurrió un violento terremoto con magnitud de 9.1 en la costa de Sumatra, el cual provocó un enorme tsunami (similar a un maremoto) y causó la muerte a más de 150,000 personas. Los científicos, quienes observaron la enorme ola en el océano abierto, midieron que el tiempo entre las crestas fue de 1.0 h y que la rapidez de la ola fue de 800 km/h. Modelos por computadora de la evolución de la enorme ola mostraron que ésta se dobló alrededor de los continentes y se difundió a todos los océanos de la Tierra. Cuando la onda alcanzó las brechas entre los continentes, se difractó entre ellas como si se tratara de rendijas. *a*) ¿Cuál fue la longitud de onda de este tsunami? *b*) La distancia entre la punta sur de África y la punta norte de Antártida es aproximadamente de 4500 km; mientras que la distancia entre el extremo sur de Australia y la Antártida es de unos 3700 km. Como una aproximación, podemos modelar el comportamiento de esta onda usando la difracción de Fraunhofer. Determine el ángulo más pequeño con respecto al máximo central para el que las ondas se cancelarían después de pasar a través de cada una de esas brechas continentales.

36.7. Una serie de frentes de onda de agua, lineales y paralelos, viajan directamente hacia la orilla a 15.0 cm/s en un lago que, si no fuera por eso, estaría completamente tranquilo. Una larga barrera de concreto que corre paralela a la orilla a una distancia de 3.20 m tiene un orificio. Usted cuenta las crestas de onda y observa que pasan 75.0 crestas por minuto; también observa que ninguna onda llega a la orilla a ± 61.3 cm del punto directamente opuesto al orificio, pero las ondas sí llegan a la orilla en cualquier otro punto a menos de esa distancia. *a*) ¿Cuál es el ancho del orificio en la barrera? *b*) ¿A qué otros ángulos encuentra usted que ninguna onda choca con la orilla?

36.8. A través de una sola ranura pasa luz monocromática con una longitud de onda de 580 nm, y se observa el patrón de difracción en una pantalla. La fuente y la pantalla están lo suficientemente lejos de la ranura como para que sea aplicable la difracción de Fraunhofer. *a*) Si los primeros mínimos de difracción están en $\pm 90.0°$, de modo que el máximo central ocupa totalmente la pantalla, ¿cuál será el ancho de la ranura? *b*) Con el ancho de ranura calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la razón de la intensidad en $\theta = 45.0°$ con respecto a la intensidad en $\theta = 0°$?

36.9. Difracción en un vano de puerta. A través del vano de una puerta de 1.00 m de ancho de una habitación, sale sonido con una frecuencia de 1250 Hz (véase el ejercicio 36.5). ¿A qué ángulos con respecto a la línea media perpendicular al vano de puerta una persona que se encuentre afuera de la habitación no escuchará sonido alguno? Tome

344 m/s como la rapidez del sonido en aire y suponga que la fuente y el escucha están ambos lo suficientemente lejos del vano, de manera que sea aplicable la difracción de Fraunhofer. Desprecie los efectos de las reflexiones.

36.10. Ciertas ondas luminosas, cuyo campo eléctrico es $E_y(x, t) = E_{\text{máx}} \operatorname{sen}[(1.20 \times 10^7\ \text{m}^{-1})x - \omega t]$, pasan a través de una ranura y forman las primeras bandas oscuras a $\pm 28.6°$ del centro del patrón de difracción. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de esta luz? *b*) ¿Cuál es el ancho de la ranura? *c*) ¿Con qué otros ángulos aparecen otras bandas oscuras?

36.11. A través de una ranura que cubre una lente con una distancia focal de 40.0 cm pasan rayos de luz paralelos cuya longitud de onda es de 620 nm. Se observa el patrón de difracción en el plano focal de la lente, y la distancia del máximo central al primer mínimo es de 36.5 cm. ¿Cuál es el ancho de la ranura? (*Nota:* el ángulo que ubica el primer mínimo *no* es pequeño.)

36.12. A través de una ranura pasa radiación electromagnética monocromática de longitud de onda λ proveniente de una fuente distante. Se observa el patrón de difracción en una pantalla que está a 2.50 m de la ranura. Si el ancho del máximo central es de 6.00 mm, ¿cuál será el ancho de ranura a si la longitud de onda es de: *a*) 500 nm (luz visible), *b*) 50.0 μm (radiación infrarroja), *c*) 0.500 nm (rayos x)?

36.13. A través de una ranura de 0.350 mm de ancho pasa luz roja con una longitud de onda de 633 nm, emitida por un láser de helio y neón. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de distancia. Defina el ancho de una franja brillante como la distancia entre los mínimos a ambos lados. *a*) ¿Cuál es el ancho de la franja central brillante? *b*) ¿Cuál es el ancho de la primera franja brillante a uno y otro lados de la franja central?

Sección 36.3 Intensidad en el patrón de una sola ranura

36.14. A través de una ranura de 0.450 mm de ancho pasa luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 620$ nm proveniente de una fuente distante. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de la ranura. En términos de la intensidad I_0 en la cresta del máximo central, ¿cuál es la intensidad de la luz en la pantalla a las distancias siguientes del centro del máximo central? *a*) 1.00 mm; *b*) 3.00 mm; *c*) 5.00 mm.

36.15. Se ilumina una ranura de 0.240 mm de ancho con rayos luminosos paralelos, cuya longitud de onda es de 540 nm. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es de $6.00 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$. *a*) En la pantalla ¿cuál es la distancia del máximo central al primer mínimo? *b*) ¿Cuál es la intensidad en un punto de la pantalla intermedio entre el centro del máximo central y el primer mínimo?

36.16. Luz láser con longitud de onda de 632.8 nm incide con dirección normal sobre una rendija que mide 0.0250 mm de ancho. La luz transmitida se ve sobre una pantalla distante, donde la intensidad en el centro de la franja brillante central es de $8.50\ \text{W/m}^2$. *a*) Determine el número máximo de franjas totalmente oscuras sobre la pantalla, suponiendo que ésta es suficientemente grande para mostrarlas todas. *b*) ¿A qué ángulo se presenta la franja oscura que está más alejada del centro? *c*) ¿Cuál es la intensidad máxima de la franja brillante que se presenta inmediatamente antes de la franja oscura en el inciso *b*)? Aproxime el ángulo al que se presenta esta franja, suponiendo que está a medio camino entre los ángulos y las franjas oscuras a cada lado de ella.

36.17. En un patrón de difracción de una sola ranura, creado por radiación electromagnética monocromática de una fuente distante que pasa a través de una ranura de 0.105 mm de ancho. ¿En qué punto del patrón a 3.25° del centro del máximo central, la diferencia total de fase entre las onditas provenientes de los extremos superior e inferior de la ranura es de 56.0 rad. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación? *b*) ¿Cuál es la intensidad en este punto, si la intensidad en el centro del máximo central es I_0?

36.18. Considere un experimento de difracción de una sola ranura, en el que la amplitud de la onda en el punto O de la figura 36.5a es E_0. En cada uno de los casos siguientes, dibuje un diagrama de fasores como el de la figura 36.8c y determine *gráficamente* la amplitud de la onda en el punto en cuestión. (*Sugerencia:* a partir de la ecuación (36.6), calcule el valor de β correspondiente a cada caso.) Calcule la intensidad y compare con la ecuación (36.5). *a*) $\operatorname{sen}\theta = \lambda/2a$; *b*) $\operatorname{sen}\theta = \lambda/a$; *c*) $\operatorname{sen}\theta = 3\lambda/2a$.

36.19. La estación de radio pública KXPR-FM en Sacramento difunde su señal a 88.9 MHz. Las ondas de radio pasan entre dos grandes rascacielos, que están separados 15.0 m considerando sus paredes más cercanas entre sí. *a*) ¿A qué ángulos horizontales, en relación con la dirección original de las ondas, una antena alejada no recibirá señal alguna de esa estación? *b*) Si la intensidad máxima es de $3.50\ \text{W/m}^2$ en la antena, ¿cuál es la intensidad a $\pm 5.00°$ a partir del centro del máximo central en la antena alejada?

Sección 36.4 Ranuras múltiples

36.20. Difracción en un patrón de interferencia. Considere el patrón de interferencia formado por dos ranuras paralelas de ancho a y con una separación d. Sea $d = 3a$. Las ranuras están iluminadas por luz normalmente incidente con longitud de onda λ. *a*) Sin tener en cuenta los efectos de difracción debidos al ancho de ranura, ¿a qué ángulos θ con respecto al máximo central aparecerán los cuatro máximos siguientes del patrón de interferencia de dos ranuras? Exprese su respuesta en términos de d y λ). *b*) Ahora incluya los efectos de difracción. Si la intensidad en $\theta = 0$ es I_0, ¿cuál será la intensidad en cada uno de los ángulos calculados en el inciso *a*)? *c*) ¿Qué máximo de interferencia de doble ranura se pierde en el patrón? *d*) Compare sus resultados con la figura 36.12c. ¿En qué formas su resultado es diferente?

36.21. Número de franjas en un máximo de difracción. En la figura 36.12c el máximo central de difracción contiene exactamente siete franjas de interferencia, y en este caso $d/a = 4$. *a*) ¿Cuál debe ser la razón d/a para que el máximo central contenga exactamente cinco franjas? *b*) En el caso considerado en el inciso *a*), ¿cuántas franjas contiene el primer máximo de difracción a un lado del máximo central?

36.22. Ocho ranuras angostas paralelas e igualmente espaciadas crean un patrón de interferencia. Hay un mínimo de interferencia cuando la diferencia de fase ϕ entre la luz que sale de ranuras adyacentes es de $\pi/4$. El diagrama de fasores es el de la figura 36.14b. ¿Con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

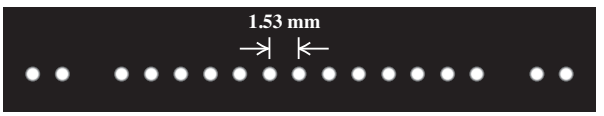
36.23. Se produce un patrón de interferencia mediante luz de una fuente distante, cuya longitud de onda es de 580 nm, que incide sobre dos ranuras paralelas idénticas separadas por una distancia (entre centros) de 0.530 mm. *a*) Si las ranuras son muy angostas, ¿cuál sería la posición angular de los máximos de interferencia de primero y de segundo órdenes de dos ranuras? *b*) Las ranuras tienen 0.320 mm de ancho. En términos de la intensidad I_0 en el centro del máximo central, ¿cuál es la intensidad en cada una de las posiciones angulares del inciso *a*)?

36.24. Luz monocromática ilumina un par de ranuras delgadas paralelas con incidencia normal, formando un patrón de interferencia en una pantalla lejana. El ancho de cada ranura es de $\frac{1}{7}$ de la distancia entre los centros de cada ranura. *a*) ¿Qué interferencia máxima se pierde en el patrón de la pantalla? *b*) La respuesta al inciso *a*) depende de la longitud de onda de la luz utilizada? ¿El lugar del máximo faltante depende de la longitud de onda?

36.25. Cuatro ranuras angostas paralelas igualmente espaciadas producen un patrón de interferencia. Dibujando los diagramas de fasores adecuados, demuestre que hay un mínimo de interferencia cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a ranuras adyacentes es *a*) $\pi/2$; *b*) π; *c*) $3\pi/2$. En cada caso, ¿con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.26. Un experimento de difracción implica dos ranuras delgadas paralelas que producen el patrón de franjas brillantes y oscuras, cercanamente espaciadas, el cual se muestra en la figura 36.33. Sólo la porción central del patrón se muestra en la figura. Los puntos brillantes están igualmente espaciados a 1.53 mm entre sus centros (excepto por el punto faltante) sobre una pantalla a 2.50 m de las ranuras. La fuente de luz era un láser de helio-neón que produce una longitud de onda de 632.8 nm. *a*) ¿A qué distancia están las dos ranuras? *b*) ¿Qué tan ancha es cada una?

Figura **36.33** Ejercicio 36.26



36.27. Se iluminan dos ranuras idénticas con luz láser de longitud de onda = 500.0 nm, con lo cual se produce un patrón de interferencia en una pantalla situada a 90.0 cm de las ranuras. Las bandas brillantes están a 1.00 cm unas de otras, y en el patrón faltan las terceras bandas brillantes a ambos lados del máximo central. Determine el ancho y la separación de las dos ranuras.

Sección 36.5 Rejilla de difracción

36.28. Sobre una rejilla plana de transmisión incide luz monocromática en dirección normal. El máximo de primer orden del patrón de interferencia está a un ángulo de 8.94°. ¿Cuál es la posición angular del máximo de cuarto orden?

36.29. Si una rejilla de difracción produce su banda brillante de tercer orden a un ángulo de 78.4° con luz de longitud de onda de 681 nm, calcule *a*) el número de ranuras por centímetro de la rejilla; *b*) la ubicación angular de las bandas brillantes de primero y de segundo órdenes. *c*) ¿Habría una banda brillante de cuarto orden? Explique su respuesta.

36.30. Si una rejilla de difracción produce una mancha brillante de tercer orden para la luz roja (con longitud de onda de 700 nm), a 65.0° del máximo central, ¿con qué ángulo estará la segunda mancha brillante de segundo orden para la luz violeta (con longitud de onda de 400 nm)?

36.31. A través de una rejilla de difracción con 900 ranuras/cm pasa luz visible, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a 2.50 m de la rejilla. *a*) ¿La posición angular del espectro de primer orden es lo suficientemente pequeña para que sen $\theta \approx \theta$ sea una buena aproximación? *b*) En el espectro de primer orden, los máximos correspondientes a dos longitudes de onda diferentes están separados en la pantalla por una distancia de 3.00 mm. ¿Cuál es la diferencia entre estas longitudes de onda?

36.32. El intervalo de longitudes de onda del espectro visible es aproximadamente de 400 nm a 700 nm. Sobre una rejilla de difracción de 350 ranuras/mm incide luz blanca en dirección normal. Calcule la anchura angular del espectro visible en *a*) el primer orden, y *b*) el tercer orden. (*Nota:* una ventaja de trabajar a órdenes más altos es que se tiene mayor extensión angular y mejor definición. Una desventaja es el traslape de los distintos órdenes, como se mostró en el ejemplo 36.4.)

36.33. Medir longitudes de onda con un CD. Un rayo láser con longitud de onda $\lambda = 632.8$ nm incide en dirección normal sobre el lado reflector de un disco compacto. Las pistas de fosos diminutos donde se encuentra codificada la información en el CD tienen una separación de 1.60 μm. ¿A qué ángulos de reflexión (medidos con respecto a la normal) será máxima la intensidad de la luz?

36.34. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda que se desvía un ángulo de 13.5° en el primer orden por una rejilla de transmisión con 5000 ranuras/cm? *b*) ¿Cuál es la desviación de segundo orden de esta longitud de onda? Suponga que la incidencia es normal.

36.35. Sobre una rejilla plana de transmisión con 350 ranuras/mm inciden, en modo normal, ondas monocromáticas planas con una longitud de onda de 520 nm. Obtenga los ángulos de desviación en los órdenes primero, segundo y tercero.

36.36. Identificar isótopos mediante espectros. Los diferentes isótopos de un mismo elemento emiten luz a longitudes de onda ligeramente distintas. Una longitud de onda del espectro de emisión del átomo de hidrógeno es de 656.45 nm; en el caso del deuterio, la longitud de onda correspondiente es de 656.27 nm. *a*) ¿Cuál es el número mínimo de ranuras que se requiere para resolver estas dos longitudes de onda en el segundo orden? *b*) Si la rejilla tiene 500.00 ranuras/mm, obtenga los ángulos y la separación angular de estas dos longitudes de onda en el segundo orden.

36.37. Una rejilla de difracción típica de laboratorio tiene 5.00×10^3 líneas/cm, y estas líneas están contenidas en un ancho de rejilla de 3.50 cm. *a*) ¿Cuál es el poder de resolución cromático de una rejilla de este tipo en el primer orden? *b*) ¿Esta rejilla podría resolver las líneas de la dupla de sodio (véase la sección 36.5) en el primer orden? *c*) Al hacer un análisis espectral de una estrella, usted utiliza esta rejilla en el *segundo* orden, para resolver líneas espectrales que están muy cerca de la línea espectral de 587.8002 nm del hierro. i) Para longitudes de onda más largas que la línea del hierro, ¿cuál es la longitud de onda más corta que usted podría distinguir de la línea del hierro? ii) Para longitudes de onda más cortas que la línea del hierro, ¿cuál es la longitud de onda más larga que usted podría distinguir de la línea del hierro? iii) ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda que usted *no* podría distinguir de la línea del hierro?

36.38. La luz que emite un arco de hierro incluye muchas longitudes de onda. Dos de éstas son $\lambda = 587.9782$ nm y $\lambda = 587.8002$ nm. Se desea resolver estas líneas espectrales en el primer orden por medio de una rejilla de 1.20 cm de largo. ¿Qué número mínimo de ranuras por centímetro debe tener la rejilla?

Sección 36.6 Difracción de rayos x

36.39. Los átomos de un cristal dispersan rayos x con una longitud de onda de 0.0850 nm. El máximo de segundo orden de la reflexión de Bragg se presenta cuando el ángulo θ de la figura 36.23 es de 21.5°. ¿Cuál es la separación entre planos atómicos adyacentes en el cristal?

36.40. Si los planos de un cristal están separados 3.50 Å (1 Å = 10^{-10} m = 1 unidad de Ångstrom), ¿qué longitud de onda de ondas electromagnéticas se requiere para que el primer máximo de interferencia fuerte de la reflexión de Bragg se presente, cuando las ondas inciden en los planos a un ángulo de 15.0°, y qué parte del espectro electromagnético se encuentran dichas ondas? (Véase la figura 32.4.) *b*) ¿Con cuáles otros ángulos ocurriría otro máximo de interferencia fuerte?

Sección 36.7 Aberturas circulares y poder de resolución

36.41. Debido al desdibujamiento que provoca la deformación atmosférica, la mejor definición que es posible obtener de un telescopio normal de luz visible montado en la Tierra es de aproximadamente 0.3 segundos de arco (un grado tiene 60 minutos de arco, y un minuto de arco tiene 60 segundos de arco). *a*) Con base en el criterio de Rayleigh, calcule el diámetro de un telescopio montado en la Tierra que proporcione esta definición con luz de 550 nm. *b*) Si se aumenta el diámetro del telescopio más allá del valor encontrado en el inciso *a*), aumenta el poder de recolección de luz del telescopio; esto permite estudiar objetos astronómicos más distantes y tenues, aunque no mejora la definición. ¿En qué aspectos son superiores los telescopios Keck (cada uno con 10 m de diámetro) montados en la cima del Mauna Kea, en Hawai, al Telescopio Hale (de 5 m de diámetro) de Monte Palomar, California? ¿En qué aspectos *no* son superiores? Explique su respuesta.

36.42. Si puede leer el renglón más bajo del diagrama de agudeza visual de su médico, su ojo tiene un poder de resolución de un minuto de arco, equivalente a $\frac{1}{60}$ de grado. Si este poder resolutivo está limitado

por la difracción, ¿a qué diámetro efectivo del sistema óptico de su ojo corresponde este valor? Aplique el criterio de Rayleigh y suponga que $\lambda = 550$ nm.

36.43. Entre dos satélites que se encuentran a una altitud de 1200 km hay una separación de 28 km. Si los satélites transmiten microondas de 3.6 cm, ¿qué diámetro mínimo debe tener un plato receptor para resolver (de acuerdo con el criterio de Rayleigh) las dos transmisiones?

36.44. La VLBA puede resolver (según el criterio de Rayleigh) señales de fuentes separadas por 1.0×10^{-8} rad. Si el diámetro efectivo del receptor es de 8000 km, ¿cuál es la longitud de onda de la señal?

36.45. A través de una abertura circular con 7.4 μm de diámetro, pasa luz monocromática con una longitud de onda de 620 nm. El patrón de difracción resultante se observa en una pantalla que está a 4.5 m de la abertura. ¿Cuál es el diámetro del disco de Airy en la pantalla?

36.46. Fotografía. Un fotógrafo de la vida silvestre utiliza una lente telefoto moderada con distancia focal de 135 mm y abertura máxima de $f/4.00$ para fotografiar un oso que está a 11.5 m de distancia. Suponga que la longitud de onda es de 550 nm. *a*) ¿Cuál es el ancho del rasgo más pequeño en el oso que esa lente puede resolver, si se abre a su máxima abertura? *b*) Si, para ganar profundidad de campo, el fotógrafo ajusta la lente a $f/22.0$, ¿cuál sería el ancho del rasgo resoluble más pequeño en el oso?

36.47. Observación de Júpiter. Se le ha pedido proyectar un telescopio espacial que se pondrá en órbita alrededor de la Tierra. Cuando Júpiter esté a 5.93×10^8 km de distancia (su aproximación máxima a la Tierra), el telescopio debe resolver, conforme al criterio de Rayleigh, rasgos de Júpiter que están a 250 km entre sí. ¿Cuál es el diámetro mínimo de espejo que se requiere? Suponga una longitud de onda de 500 nm.

36.48. Una lente convergente de 7.20 cm de diámetro tiene una distancia focal de 300 mm. Si la definición está limitada por la difracción, ¿cuánto es lo más lejos que puede estar un objeto, si se desea resolver (según el criterio de Rayleigh) puntos separados de él por una distancia de 4.00 mm? Tome $\lambda = 550$ nm.

36.49. Hubble contra Arecibo. El telescopio espacial Hubble tiene una abertura de 2.4 m y enfoca luz visible (400 nm a 700 nm). El radiotelescopio de Arecibo, en Puerto Rico, tiene un diámetro de 305 m (1000 ft) (está construido en un valle de una montaña) y enfoca las ondas de radio con una longitud de onda de 75 cm. *a*) En condiciones de observación óptimas, ¿de qué tamaño es el cráter más pequeño de la Luna que cada uno de estos telescopios podría resolver? *b*) Si se decidiera dedicar el telescopio Hubble a tareas de vigilancia, ¿cuál es la órbita más alta que podría tener por encima de la superficie terrestre, sin dejar de ser capaz de resolver la placa de matrícula (no las letras, sólo la placa) de un automóvil situado en tierra? Suponga condiciones de observación óptimas, de modo que la definición esté limitada por la difracción.

36.50. Búsqueda de manchas estelares. El telescopio Hale de Monte Palomar, California, tiene un espejo de 200 in (5.08 m) de diámetro y enfoca la luz visible. Dado que una mancha solar grande tiene aproximadamente 10,000 mi de diámetro, ¿a qué distancia máxima tendría que hallarse una estrella para que este telescopio pudiera resolver una mancha solar, con la finalidad de saber si otras estrellas tienen este tipo de manchas? (Suponga condiciones de observación óptimas, de modo que la definición esté limitada por la difracción.) ¿Hay estrellas que estén tan cerca de nosotros, aparte del Sol?

36.51. Búsqueda de planetas. El telescopio Keck de Mauna Kea, Hawai, tiene un espejo de 10.0 m de diámetro. ¿Podría este telescopio resolver planetas del tamaño de Júpiter en torno a la estrella más cercana a nosotros, Alfa Centauri, que está a 4.28 años luz de distancia?

Problemas

36.52. Suponga que el aparato completo (ranura, pantalla y espacio intermedio) del ejercicio 36.4 se sumerge en agua ($n = 1.33$). En estas condiciones, ¿cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras?

36.53. Considere un patrón de difracción de una sola ranura. El centro del máximo central, donde la intensidad es I_0, se encuentra en $\theta = 0$. *a*) Sean $\theta_+ = \theta_-$ los dos ángulos a los lados de $\theta = 0$ en los cuales $I = \frac{1}{2}I_0$. $\Delta\theta = |\theta_+ - \theta_-|$ se conoce como el *ancho completo a medio máximo*, o *ACMM*, del máximo central de difracción. Despeje $\Delta\theta$ cuando la razón del ancho de ranura a y la longitud de onda λ sea i) $a/\lambda = 2$; ii) $a/\lambda = 5$; iii) $a/\lambda = 10$. (*Sugerencia:* su ecuación de θ_+ o θ_- no se puede resolver analíticamente. Es necesario emplear aproximaciones sucesivas o resolverla gráficamente.) *b*) El ancho del máximo central también se puede definir como $2\theta_0$, donde θ_0 es el ángulo que ubica el mínimo a un lado del máximo central. Calcule $2\theta_0$ con respecto a cada caso considerado en el inciso *a*), y compare con $\Delta\theta$.

36.54. Un altavoz tiene un diafragma que vibra a 1250 Hz y viaja a 80.0 m/s directamente hacia un par de orificios en una pared muy grande, para la cual la rapidez del sonido es de 344 m/s. Usted observa que el sonido que pasa a través de los orificios se cancela primero a $\pm 12.7°$ con respecto a la dirección original del altavoz, cuando se le observa desde una distancia lejos de la pared. *a*) ¿Cuál es la distancia de separación entre los dos orificios? *b*) ¿A qué ángulos el sonido se cancelaría primero si la fuente dejara de moverse?

36.55. Medir el índice de refracción. Una ranura fina iluminada con luz de frecuencia f forma su primera banda oscura a $\pm 38.2°$ en aire. Cuando se sumerge el aparato completo (ranura, pantalla y espacio intermedio) en un líquido transparente desconocido, las primeras bandas oscuras de la ranura aparecen ahora a $\pm 17.4°$. Calcule el índice de refracción del líquido.

36.56. Diseño de rejilla. Su jefe le pide diseñar una rejilla de difracción capaz de dispersar el espectro visible de primer orden en un intervalo angular de 15.0° (véase el ejemplo 36.4 de la sección 36.5). *a*) ¿Cuántas ranuras por centímetro debe tener esta rejilla? *b*) ¿A qué ángulos comenzará y terminará el espectro visible de primer orden?

36.57. Unos rayos paralelos de luz con una longitud de onda de 540 nm iluminan una ranura de 0.360 mm de ancho. El patrón de difracción se observa en una pantalla que está a 1.20 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. *a*) ¿Cuál es la distancia en la pantalla del centro del máximo central al primer mínimo? *b*) ¿Cuál es la distancia en la pantalla del centro del máximo central al punto donde la intensidad ha decaído a $I_0/2$? (Véase en el problema 36.53 una pista acerca de cómo despejar el ángulo de fase β.)

36.58. La intensidad de la luz en el patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura es

$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma}\right)^2$$

donde

$$\gamma = \frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}$$

a) Demuestre que la ecuación de los valores de γ a los que I es un máximo es $\tan\gamma = \gamma$. *b*) Calcule los tres valores positivos más pequeños de γ que sean soluciones de esta ecuación. (*Sugerencia:* puede utilizar un procedimiento de aproximaciones sucesivas. Suponga un valor de γ y ajuste su conjetura de modo que $\tan\gamma$ se aproxime más a γ. Una resolución gráfica de la ecuación resulta muy útil para localizar las soluciones de modo aproximado, con la finalidad de obtener buenas conjeturas iniciales.)

36.59. Anchura angular de un máximo principal. Considere N ranuras angostas uniformemente espaciadas. Aplique la aproximación de ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta = \theta$ (con θ en radianes) para probar lo siguiente: con respecto a un máximo de intensidad que aparece a un ángulo θ, los mínimos de intensidad inmediatamente adyacentes a este máximo se encuentran a los ángulos $\theta + \lambda/Nd$ y $\theta - \lambda/Nd$, por lo que la anchura angular del máximo principal es $2\lambda/Nd$. Esto es proporcional a

1/N, como se concluyó en la sección 36.4 sobre la base de la conservación de la energía.

36.60. El Universo en expansión. Un cosmólogo que está estudiando la luz proveniente de una galaxia identificó el espectro de hidrógeno, pero descubre que las longitudes de onda están un tanto desplazadas con respecto a aquéllas encontradas en el laboratorio. En el laboratorio, la línea H_α tiene una longitud de onda de 656.3 nm. El cosmólogo está usando una rejilla de difracción de transmisión que tiene 5758 líneas/cm en el primer orden y encuentra que la primera franja brillante para el H_α se presenta en $\pm 23.41°$ a partir del punto central. ¿Con qué rapidez se está desplazando la galaxia? Exprese su respuesta en m/s y como un porcentaje de la rapidez de la luz. ¿Se desplaza hacia nosotros o se aleja de nosotros? (*Sugerencia:* véase la sección 16.8.)

36.61. Diagrama de fasores de ocho ranuras. Ocho ranuras angostas uniformemente espaciadas forman un patrón de interferencia. La figura 36.14 muestra diagramas de fasores correspondientes a los casos donde la diferencia de fase ϕ entre la luz proveniente de ranuras adyacentes es $\phi = \pi$, $\phi = \pi/4$ y $\phi = \pi/2$. Cada uno de estos casos da un mínimo de intensidad. El pie de la figura 36.14 también afirma que se presenta un mínimo cuando $\phi = 3\pi/4$, $\phi = 5\pi/4$, $\phi = 3\pi/2$ y $\phi = 7\pi/4$. *a*) Dibuje el diagrama de fasores correspondiente a cada uno de estos cuatro casos, y explique por qué cada diagrama prueba que, de hecho, hay un mínimo. (*Nota:* es conveniente emplear un lápiz de diferente color para cada ranura.) *b*) Con respecto a cada uno de los cuatro casos $\phi = 3\pi/4$, $\phi = 5\pi/4$, $\phi = 3\pi/2$ y $\phi = 7\pi/4$, ¿con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.62. Difracción de rayos x de la sal. Se dispersan rayos x, con una longitud de onda de 0.125 nm, desde una formación cúbica (de un cristal de cloruro de sodio), donde la separación entre átomos adyacentes es $a = 0.282$ nm. *a*) Si se considera la difracción desde planos paralelos a una cara del cubo, ¿a qué ángulos θ del haz entrante con respecto a los planos cristalinos se observarán máximos? *b*) Repita el inciso *a*) con respecto a la difracción producida por los planos que se muestran en la figura 36.24a, cuya separación es de $a/\sqrt{2}$.

36.63. Al final de la sección 36.4 se hicieron las siguientes aseveraciones acerca de una serie de N ranuras. Explique, con ayuda de diagramas de fasores, por qué cada aseveración es válida. *a*) Se presenta un mínimo siempre que ϕ es un múltiplo entero de $2\pi/N$, excepto cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π (que da un máximo principal). *b*) Hay $(N - 1)$ mínimos entre cada par de máximos principales.

36.64. En la ecuación (36.12), considere el caso en que $d = a$. En un dibujo, demuestre que en este caso las dos ranuras se reducen a una sola ranura de ancho $2a$. A continuación, demuestre que la ecuación (36.12) se reduce a la ecuación (36.5) con un ancho de ranura $2a$.

36.65. ¿Cuál es la longitud de onda más larga que se puede observar en el tercer orden, correspondiente a una rejilla de transmisión con 6500 ranuras/cm? Suponga que la incidencia es normal.

36.66. *a*) La figura 36.16 muestra ondas planas de luz que inciden *en dirección normal* en una rejilla de difracción. Si, en cambio, la luz incide en la rejilla con un ángulo de incidencia θ' (medido con respecto a la normal), demuestre que la condición para que haya un máximo de intensidad *no* es la ecuación (36.13), sino

$$d(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta') = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

b) Con respecto a la rejilla descrita en el ejemplo de la sección 36.5, con 600 ranuras/mm, obtenga los ángulos de los máximos correspondientes a $m = 0$, 1 y -1 con luz roja ($\lambda = 650$ nm) en los casos en que $\theta' = 0$ (incidencia normal) y $\theta' = 20.0°$.

36.67. Cierta rejilla de difracción tiene 650 ranuras/mm. ¿Cuál es el orden más alto que contiene todo el espectro visible? (El intervalo de longitudes de onda del espectro visible es aproximadamente de 400 a 700 nm.)

36.68. Los *quásares* (su nombre es una abreviatura de *fuentes cuasiestelares de radio*) son objetos distantes que parecen estrellas a través de un telescopio, pero que emiten mucho más radiación electromagnética que una galaxia entera de estrellas normal. Un ejemplo es el objeto brillante que aparece abajo y a la izquierda del centro de la figura 36.34; los otros objetos alargados de esta imagen son galaxias normales. El modelo más destacado de la estructura de un cuásar es una galaxia con un agujero negro de masa inmensamente grande en su centro. En este modelo, la radiación es emitida por el gas y el polvo interestelares presentes en la galaxia conforme este material cae hacia el agujero negro. Se piensa que la radiación emana de una región de apenas unos pocos años luz de diámetro. (Se cree que el resplandor difuso que rodea al brillante cuásar de la figura 36.34 es la galaxia que hospeda a este cuásar.) Con la finalidad de investigar este modelo de los cuásares y de estudiar otros objetos astronómicos extraños, el Organismo Espacial Ruso se propone colocar un radiotelescopio en una órbita que se extiende a 77,000 km de la Tierra. Cuando se combinen las señales de este telescopio con señales de los telescopios terrestres de la VLBA, la definición será la de un solo radiotelescopio de 77,000 km de diámetro. ¿De qué tamaño es el detalle más pequeño que este sistema podría resolver en el cuásar 3C 405, que se halla a 7.2×10^8 años luz de la Tierra, si se utilizan ondas de radio a una frecuencia de 1665 MHz? (*Sugerencia:* aplique el criterio de Rayleigh.) Exprese su respuesta en años luz y en kilómetros.

Figura **36.34** Problema 36.68

36.69. Radar de formación sincronizada. En un tipo común de instalación de radar, una antena giratoria barre el cielo con un haz de radio. No obstante, en un sistema de radar de *formación sincronizada*, las antenas permanecen inmóviles y el barrido del haz se lleva a cabo electrónicamente. Para saber cómo se hace esto, considere una formación de N antenas dispuestas a lo largo del eje horizontal de las x en $x = 0, \pm d, \pm 2d, \ldots, \pm(N - 1)d/2$. (El número N es impar.) Cada antena emite radiación uniformemente en todas direcciones en el plano horizontal xy. Todas las antenas emiten la radiación de forma coherente, con la misma amplitud E_0 y longitud de onda λ. Sin embargo, se puede modificar la fase relativa δ de la emisión de antenas adyacentes. Si la antena que está en $x = 0$ emite una señal dada por $E_0 \cos \omega t$, medida en un punto próximo a la antena, la antena que se halla en $x = d$ emite una señal dada por $E_0 \cos(\omega t + \delta)$, medida en un punto próximo a esa antena. La cantidad correspondiente a la antena que está en $x = -d$ es $E_0 \cos(\omega t - \delta)$; en el caso de las antenas que están en $x = \pm 2d$, es $E_0 \cos(\omega t \pm 2\delta)$, y así sucesivamente. *a*) Si $\delta = 0$, el patrón de interferencia a

cierta distancia de las antenas es grande en comparación con d y tiene un máximo principal en $\theta = 0$ (es decir, en la dirección $+y$, perpendicular a la línea de las antenas). Demuestre que, si $d < \lambda$, éste es el *único* máximo principal de interferencia en el intervalo angular $-90° < \theta < 90°$. Por consiguiente, este máximo principal describe un haz emitido en la dirección $\theta = 0$. Como se describe en la sección 36.4, si N es grande, el haz tiene una gran intensidad y es muy angosto. *b*) Si $\delta \neq 0$, demuestre que el máximo principal de intensidad descrito en el inciso *a*) se encuentra en

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\delta\lambda}{2\pi d}\right)$$

donde δ se mide en radianes. De este modo, haciendo variar δ de valores positivos a valores negativos y viceversa, lo cual se consigue fácilmente por medios electrónicos, se logra que el haz efectúe un barrido en un sentido y otro en torno a $\theta = 0$. *c*) Una unidad meteorológica de radar que se va a instalar en un avión emite ondas de radio a 8800 MHz. La unidad utiliza una formación de 15 antenas de 28.0 cm de largo (de la antena de un extremo de la formación a la antena del otro extremo). ¿Cuáles deben ser los valores máximo y mínimo de δ (esto es, el valor más positivo y el más negativo), si el haz del radar debe barrer 45° a la izquierda o a la derecha de la dirección de vuelo? Exprese su respuesta en radianes.

36.70. Fotografía subacuática. Una cámara subacuática tiene una lente con distancia focal de 35.0 mm y una abertura máxima de $f/2.80$. La película que utiliza tiene una emulsión sensible a la luz con frecuencia de 6.00×10^{14} Hz. Si el fotógrafo toma una foto de un objeto ubicado a 2.75 m frente a la cámara con la lente abierta por completo, ¿cuál es el ancho del detalle resoluble más pequeño en el objeto si éste es *a*) un pez bajo el agua y la cámara está dentro del agua, y *b*) una persona en la playa, y la cámara está fuera del agua?

36.71. Una astronauta en órbita puede resolver apenas dos fuentes puntuales ubicadas en la Tierra y separadas por una distancia de 75.0 m. Suponga que la definición está limitada por la difracción y aplique el criterio de Rayleigh. ¿A qué altitud con respecto a la Tierra se encuentra la astronauta? Considere su ojo como una abertura circular con un diámetro de 4.00 mm (el diámetro de su pupila) y suponga que la longitud de onda de la luz es de 500 nm.

36.72. Observación de planetas más allá de nuestro Sistema Solar. La NASA está evaluando un proyecto denominado *Planet Imager* (*Formador de imágenes de planetas*) que daría a los astrónomos la capacidad para ver detalles de planetas en órbita alrededor de otras estrellas. Con base en el principio de la Very Large Array (véase la sección 36.7), el *Planet Imager* se serviría de una formación de telescopios de infrarrojo distribuidos a lo largo de miles de kilómetros en el espacio. (La luz visible permitiría alcanzar una definición aún mejor. Por desgracia, a las longitudes de onda visibles las estrellas son tan brillantes que el resplandor ocultaría los planetas. Esto no es un problema tan grande a las longitudes de onda de infrarrojo). *a*) Si el *Planet Imager* tiene un diámetro efectivo de 6000 km y observa radiación infrarroja a una longitud de onda de 10 μm, ¿cuál es la distancia máxima a la que sería capaz de observar detalles de 250 km de ancho como mínimo (aproximadamente el tamaño de la zona metropolitana de Los Ángeles) en un planeta? Exprese su respuesta en años luz (véase el Apéndice E). (*Sugerencia:* aplique el criterio de Rayleigh.) *b*) Con fines comparativos, considere la definición de un solo telescopio espacial de infrarrojo de 1.0 m de diámetro que observa radiación de 10 μm. ¿Cuál es el tamaño de los detalles más pequeños que un telescopio como éste podría resolver a la distancia de la estrella más cercana al Sol, Próxima Centauri, que dista 4.22 años luz? Cómo es este tamaño en comparación con el diámetro de la Tierra (1.27×10^4 km)? ¿Y con la distancia media de la Tierra al Sol (1.50×10^8 km)? ¿Sería capaz un telescopio de este tipo de detectar la presencia de un planeta como la Tierra, en una órbita del tamaño de la órbita terrestre, alrededor de *cualquier* otra estrella? Explique su respuesta. *c*) Suponga que se utiliza el *Planet Imager* para observar un planeta en órbita alrededor de la estrella 70 Virginis, a 59 años luz de nuestro Sistema Solar. De hecho, se ha detectado un planeta (aunque no parecido a la Tierra) en órbita alrededor de esta estrella, no obteniendo una imagen directa de él, sino observando el ligero "bamboleo" de la estrella, debido a que ésta y el planeta giran en órbita alrededor de un centro de masa común. ¿De qué tamaño son los detalles más pequeños que el *Planet Imager* tendría la posibilidad de resolver sobre el planeta de 70 Virginis? ¿Cómo es este tamaño en comparación con el diámetro del planeta, que se supone es parecido al de Júpiter (1.38×10^5 km)? (Aunque se cree que el planeta de 70 Virginis tiene una masa 6.6 veces mayor que la de Júpiter, probablemente su radio no sea muy distinto del de éste. La razón es que se considera que los planetas tan grandes como el de 70 Virginis se componen principalmente de gases, no de material rocoso y, por lo tanto, la atracción gravitatoria mutua de las diferentes partes del planeta los comprime en alto grado.)

Problemas de desafío

36.73. Es posible calcular la intensidad del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura *sin* emplear el método de fasores de la sección 36.3. Sea y' la posición de un punto dentro de la ranura de ancho a de la figura 36.5a, con $y' = 0$ en el centro de la ranura, de modo que ésta se extiende de $y' = -a/2$ a $y' = a/2$. Imaginemos que dividimos la ranura en tiras infinitesimales de ancho dy', cada una de las cuales actúa como fuente de onditas secundarias. *a*) La amplitud de la onda total en el punto O de la pantalla distante de la figura 36.5a es E_0. Explique por qué la amplitud de la ondita proveniente de cada tira infinitesimal de la ranura es $E_0(dy'/a)$, por lo que el campo eléctrico de la ondita a una distancia x de la tira infinitesimal es $dE = E_0(dy'/a)\,\text{sen}(kx - \omega t)$. *b*) Explique por qué la ondita proveniente de cada tira, tal como se detecta en el punto P de la figura 36.5a, se puede expresar como

$$dE = E_0\frac{dy'}{a}\text{sen}[k(D - y'\,\text{sen}\,\theta) - \omega t]$$

donde D es la distancia del centro de la ranura al punto P y $k = 2\pi/\lambda$. *c*) Integrando las contribuciones dE de todas las partes de la ranura, demuestre que la onda total que se detecta en el punto P es

$$E = E_0\,\text{sen}(kD - \omega t)\frac{\text{sen}[ka(\text{sen}\,\theta)/2]}{ka(\text{sen}\,\theta)/2}$$
$$= E_0\,\text{sen}(kD - \omega t)\frac{\text{sen}[\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda]}{\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda}$$

(Le serán útiles las identidades trigonométricas del Apéndice B.) Demuestre que en $\theta = 0$, correspondiente al punto O de la figura 36.5a, la onda es $E = E_0\,\text{sen}(Kd - \omega t)$ y su amplitud es E_0, como se indica en el inciso *a*). *d*) Con base en el resultado del inciso *c*), demuestre que, si la intensidad en el punto O es I_0, entonces la intensidad en un punto P está dada por la ecuación (36.7).

36.74. Distribución de intensidades de N ranuras. *a*) Considere una formación de N ranuras con una distancia d entre ranuras adyacentes. Las ranuras emiten, coherentemente y en fase, a una longitud de onda λ. Demuestre que, en el tiempo t, el campo eléctrico en un punto distante P es

$$E_P(t) = E_0\cos(kR - \omega t) + E_0\cos(kR - \omega t + \phi)$$
$$+ E_0\cos(kR - \omega t + 2\phi) + \cdots$$
$$+ E_0\cos(kR - \omega t + (N-1)\phi)$$

donde E_0 es la amplitud en P del campo eléctrico debido a una ranura individual, $\phi = (2\pi d\,\text{sen}\,\theta)/\lambda$, θ es el ángulo de los rayos que llegan a P (medidos desde la bisectriz perpendicular de la formación de ranuras), y R es la distancia de P a la ranura más distante. En este problema,

suponga que R es mucho mayor que d. *b*) Para efectuar la sumatoria del inciso *a*), es conveniente utilizar la relación de números complejos

$$e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\, z$$

donde $i = \sqrt{-1}$. En esta expresión, $\cos z$ es la *parte real* del número complejo e^{iz}, y sen z es su *parte imaginaria*. Demuestre que el campo eléctrico $E_P(t)$ es igual a la parte real de la cantidad compleja

$$\sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{i(kR-\omega t+n\phi)}$$

c) Con base en las propiedades de la función exponencial según las cuales $e^A e^B = e^{(A+B)}$ y $(e^A)^n = e^{nA}$, demuestre que la sumatoria del inciso *b*) se puede escribir como:

$$E_0\left(\frac{e^{iN\phi}-1}{e^{i\phi}-1}\right)e^{i(kR-\omega t)} = E_0\left(\frac{e^{iN\phi/2}-e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2}-e^{-i\phi/2}}\right)e^{i[kR-\omega t+(N-1)\phi/2]}$$

En seguida, con base en la relación $e^{iz} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\, z$, demuestre que el campo eléctrico (real) en el punto P es

$$E_p(t) = \left[E_0\frac{\mathrm{sen}\,(N\phi/2)}{\mathrm{sen}\,(\phi/2)}\right]\cos[kR - \omega t + (N-1)\phi/2]$$

La cantidad que aparece entre los primeros corchetes de esta expresión es la amplitud del campo eléctrico en P. *d*) Con base en el resultado de la amplitud del campo eléctrico del inciso *c*), demuestre que la intensidad a un ángulo θ es

$$I = I_0\left[\frac{\mathrm{sen}\,(N\phi/2)}{\mathrm{sen}\,(\phi/2)}\right]^2$$

donde I_0 es la intensidad máxima correspondiente a una sola ranura. *e*) Compruebe el resultado del inciso *d*) con respecto al caso $N = 2$. Conviene recordar que sen $2A = 2$ sen A cos A. Explique por qué su resultado difiere de la ecuación (35.10), la expresión de la intensidad en una interferencia de dos fuentes, por un factor de 4. (*Sugerencia:* ¿está definida I_0 de la misma forma en ambas expresiones?)

36.75. Distribución de intensidades de *N* ranuras, continuación. El inciso *d*) del problema de desafío anterior proporciona una expresión de la intensidad en el patrón de interferencia de N ranuras idénticas. Verifique los enunciados siguientes con base en este resultado. *a*) La intensidad máxima del patrón es $N^2 I_0$. *b*) El máximo principal del centro del patrón se extiende desde $\phi = -2\pi/N$ a $\phi = 2\pi/N$, por lo que su anchura es inversamente proporcional a $1/N$. *c*) Se presenta un mínimo siempre que ϕ sea un múltiplo entero de 2π (en cuyo caso se tiene un máximo principal). *d*) Hay $(N-1)$ mínimos entre cada par de máximos principales. *e*) En un punto cualquiera entre dos máximos principales, la intensidad no puede ser mayor que I_0; es decir, no puede ser mayor que $1/N^2$ veces la intensidad en el máximo principal.

37 RELATIVIDAD

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Los dos postulados de la teoría especial de la relatividad de Einstein y lo que motiva tales postulados.
- Por qué distintos observadores pueden discernir acerca de si dos sucesos son simultáneos.
- Cómo la relatividad predice que los relojes que se mueven se hacen lentos y la evidencia experimental que lo confirma.
- Cómo cambia la longitud de un objeto debido al movimiento de éste.
- Cómo la velocidad de un objeto depende del marco de referencia desde el que se observa.
- Cómo la teoría de la relatividad modifica la relación entre velocidad y cantidad de movimiento.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y energía cinética para partículas que se mueven a rapideces relativas.
- Algunos conceptos fundamentales de la teoría general de la relatividad de Einstein.

? En el Brookhaven National Laboratory de Nueva York, se aceleran núcleos atómicos al 99.995% del último límite de rapidez del Universo: la rapidez de la luz. ¿También hay un límite máximo en la energía cinética de la partícula?

Al comenzar el año de 1905, Albert Einstein era un anónimo empleado de 25 años de edad en la oficina suiza de patentes. Al terminar ese año asombroso Einstein había publicado tres artículos de extraordinaria importancia. Uno era un análisis del movimiento browniano; un segundo (por el que se hizo acreedor al Premio Nobel) trataba sobre el efecto fotoeléctrico. En el tercero, Einstein presentó su **teoría especial de la relatividad**, y propuso revisiones drásticas a los conceptos newtonianos del espacio y el tiempo.

La teoría especial de la relatividad ha traído consigo cambios de gran alcance en nuestra comprensión de la naturaleza; no obstante, Einstein la fundamentó tan sólo en dos sencillos postulados. Uno de ellos establece que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales; el otro, que la rapidez de la luz en un vacío es la misma en todos los marcos inerciales. Estas propuestas aparentemente inocentes tienen implicaciones de enorme trascendencia. Veamos tres de ellas: 1) Los sucesos que son simultáneos para un observador quizá no sean simultáneos para otro. 2) Cuando dos observadores que se desplazan uno con respecto al otro miden un intervalo de tiempo o una longitud, puede ser que no obtengan los mismos resultados. 3) Para que los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía sean válidos en todos los sistemas inerciales, es necesario revisar la segunda ley de Newton, así como las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía cinética.

La relatividad tiene importantes consecuencias en *todos* los campos de la física, entre ellos el electromagnetismo, la física atómica y nuclear, y la física de alta energía. Aunque muchos de los resultados que se deducen en este capítulo tal vez contradigan nuestra intuición, la teoría concuerda sólidamente con las observaciones experimentales.

37.1 Invariabilidad de las leyes físicas

Examinemos los dos postulados que constituyen la teoría especial de la relatividad. Ambos postulados describen lo que ve un observador que se halla en un *marco inercial de referencia*, el cual presentamos en la sección 4.2. La teoría es "especial" en el sentido de que se aplica a observadores en este tipo de marcos de referencia: especiales.

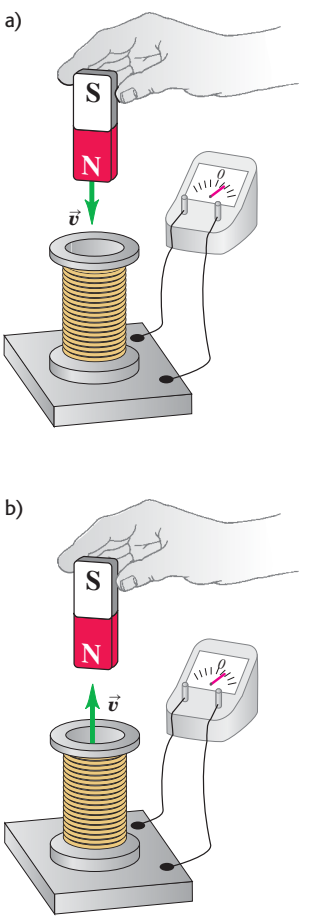
Primer postulado de Einstein

El primer postulado de Einstein, conocido como el **principio de relatividad**, afirma que **las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales**. Si las leyes difirieran, esa diferencia permitiría distinguir un marco inercial de los otros o haría que un marco fuera de algún modo más "correcto" que otro. Veamos dos ejemplos. Suponga que observa a dos niños que juegan a atrapar una pelota, mientras usted y los niños se hallan a bordo de un tren que avanza con velocidad constante. Sus observaciones del movimiento *de la pelota*, no importa con cuánto cuidado las haga, no le pueden indicar con qué rapidez (o si acaso) se mueve el tren. Esto se debe a que las leyes de Newton del movimiento son las mismas en todos los marcos inerciales.

Otro ejemplo es la fuerza electromotriz (fem) que induce en una bobina de alambre un imán permanente que se mueve cerca de ella. En un marco de referencia donde la *bobina* está inmóvil (figura 37.1a), el imán en movimiento provoca un cambio de flujo magnético a través de la bobina, y esto induce una fem. En un marco de referencia diferente, donde el *imán* está inmóvil (figura 37.1b), el movimiento de la bobina a través de un campo magnético induce la fem. De acuerdo con el principio de relatividad, ambos marcos de referencia son igualmente válidos. Por consiguiente, se debe inducir la misma fem en las dos situaciones que muestra la figura 37.1. Como vimos en el capítulo 29, esto es en efecto lo que ocurre, así que la ley de Faraday es congruente con el principio de relatividad. De hecho, *todas* las leyes del electromagnetismo son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

Igualmente significativa es la predicción de la rapidez de la radiación electromagnética, deducida de las ecuaciones de Maxwell (véase la sección 32.2). De acuerdo con este análisis, la luz y todas las demás ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con cierta rapidez constante, que ahora se ha definido como exactamente igual a 299,792,458 m/s. (Se suele emplear el valor aproximado $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, que difiere en una parte en 1000 del valor exacto.) Como veremos, la rapidez de la luz en el vacío desempeña un papel central en la teoría de la relatividad.

37.1 Se induce la misma fem en la bobina, ya sea que **a)** el imán se mueva con respecto a la bobina o **b)** la bobina se mueva con respecto al imán.



Segundo postulado de Einstein

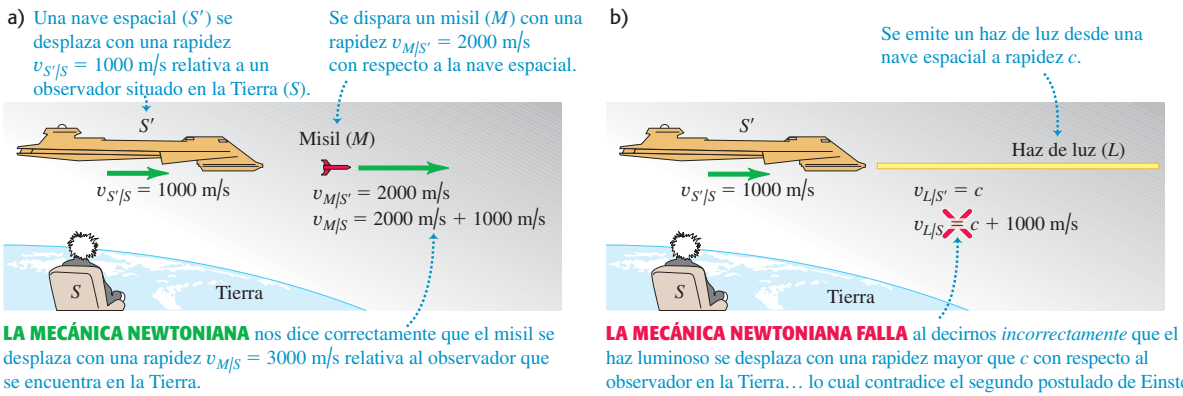
A lo largo del siglo XIX, casi todos los físicos creían que la luz viajaba a través de un medio hipotético al que llamaban *éter*, tal como las ondas sonoras viajan por el aire. De ser así, la rapidez de la luz medida por observadores dependería del movimiento de éstos con respecto al éter y, por lo tanto, sería distinta en diferentes direcciones. El experimento de Michelson-Morley, descrito en la sección 35.5, fue un esfuerzo por detectar el movimiento de la Tierra con respecto al éter. El salto conceptual de Einstein consistió en reconocer que, si las ecuaciones de Maxwell eran válidas en todos los marcos inerciales, entonces la rapidez de la luz en un vacío también debería ser la misma en todos los marcos y en todas direcciones. De hecho, Michelson y Morley *no* detectaron algún movimiento del éter a través de la Tierra, y se desechó el concepto del éter. Aunque quizá Einstein no tenía el conocimiento de este resultado negativo, apoyaba su audaz hipótesis de la constancia de la rapidez de la luz en el vacío.

El segundo postulado de Einstein: afirma que la rapidez de la luz en un vacío es la misma en todos los marcos de referencia inerciales y es independiente del movimiento de la fuente.

Reflexionemos acerca de lo que esto significa. Suponga que dos observadores miden la rapidez de la luz en el vacío. Uno de ellos está en reposo con respecto a la fuente de luz, y el otro se aleja de ella. Ambos se encuentran en marcos de referencia inerciales. De acuerdo con el principio de relatividad, los dos observadores deben obtener el mismo resultado, a pesar del hecho de que uno de ellos se desplaza con respecto al otro.

Si esto parece fácil, considere la siguiente situación. Una nave espacial que pasa cerca de la Tierra a 1000 m/s dispara un misil hacia adelante con una rapidez de 2000 m/s (con respecto a la nave espacial) (figura 37.2). ¿Cuál es la rapidez del misil con respecto a la Tierra? Muy sencillo, diríamos; se trata de un problema elemental de velocidad relativa (véase la sección 3.5). La respuesta correcta, de acuerdo con la mecánica newtoniana, es de 3000 m/s. Pero suponga ahora que la nave espacial enciende un reflector y lo apunta en la dirección en la que se disparó el misil. Un

37.2 a) La mecánica newtoniana predice correctamente acerca de objetos que se mueven relativamente lento; b) y predice incorrectamente el comportamiento del haz luminoso.



observador a bordo de la nave espacial mide la rapidez de la luz que emite el reflector y obtiene el valor c. De acuerdo con el segundo postulado de Einstein, el movimiento de la luz una vez que ésta ha dejado la fuente no puede depender del movimiento de la fuente. Por lo tanto, el observador situado en la Tierra que mide la rapidez de esta misma luz también debe obtener el valor c, *no* c + 1000 m/s. Este resultado contradice nuestra noción elemental de las velocidades relativas, y quizá parezca que no concuerda con el sentido común. Pero el "sentido común" es la intuición basada en la experiencia ordinaria, y por lo regular ésta no incluye mediciones de la rapidez de la luz.

Último límite de rapidez

El segundo postulado de Einstein implica de inmediato el siguiente resultado:

Es imposible que un observador inercial viaje a c, la rapidez de la luz en el vacío.

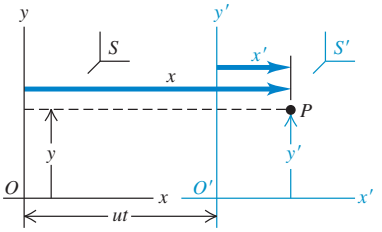
Probamos esto demostrando que viajar a c implica una contradicción lógica. Suponga que la nave espacial S' de la figura 37.2b se desplaza con la rapidez de la luz con respecto a un observador que se encuentra en la Tierra, de modo que $v_{S'|S} = c$. Si la nave espacial enciende un faro, el segundo postulado afirma ahora que el observador terrestre S encuentra que el haz del faro también se desplaza a c. Así, las mediciones de este observador le indican que el haz del faro y la nave espacial se desplazan juntos, y siempre están en el mismo punto del espacio. Sin embargo, el segundo postulado de Einstein también afirma que el haz del faro se desplaza con una rapidez c con respecto a la nave espacial, de modo que *no pueden* hallarse en el mismo punto del espacio. Este resultado contradictorio sólo se evita si es imposible que un observador inercial, como por ejemplo un pasajero de la nave espacial, se desplace a c. Conforme avancemos en nuestro análisis de la relatividad, quizá nos encontremos haciéndonos la pregunta que Einstein se formuló a sí mismo cuando era un estudiante de 16 años: "¿Qué vería yo si viajara con la rapidez de la luz?" No fue sino varios años más tarde que Einstein comprendió que el error básico de su pregunta era que él *no* podía viajar a c.

La transformación galileana de coordenadas

Formulemos de nuevo este argumento en términos simbólicos, con base en dos marcos de referencia inerciales, identificados como S para el del observador en la Tierra; y S' para la nave espacial en movimiento (figura 37.3). Para simplificar las cosas lo más posible, hemos omitido el eje de las z. Los ejes de las x de los dos marcos se hallan a lo largo de la misma recta, pero el origen O' del marco S' se desplaza con respecto al origen O del marco S con velocidad constante u a lo largo del eje común x-x'. Nosotros en la Tierra ajustamos nuestros relojes de modo que los dos orígenes coincidan en el tiempo $t = 0$, por lo que su separación algún tiempo t después es ut.

El marco S' se desplaza con respecto al marco S con velocidad constante u a lo largo del eje común x-x'.

Los orígenes O y O' coinciden en el tiempo $t = 0 = t'$.



37.3 La posición de la partícula P se describe mediante las coordenadas x y y en el marco de referencia S o mediante x' y y' en el marco S'.

CUIDADO **Elija concienzudamente las coordenadas del marco inercial** Muchas de las ecuaciones que se deducen en este capítulo son válidas *sólo* si se definen los marcos de referencia inerciales como se indica en el párrafo anterior. Por ejemplo, la dirección x positiva debe ser la dirección en la que el origen O' se desplaza con respecto al origen O. En la figura 37.3 esta dirección es hacia la derecha; si, en cambio, O' se desplaza hacia la izquierda con respecto a 0, es preciso definir que la dirección x positiva es hacia la izquierda.

Ahora piense acerca de cómo describimos el movimiento de una partícula P. Ésta podría ser un vehículo explorador lanzado desde la nave espacial o una pulsación de luz de un láser. Podemos describir la *posición* de esta partícula con base en las coordenadas terrestres (x, y, z) en S o las coordenadas de la nave espacial (x', y', z') en S'. La figura 37.3 muestra que entre ellas existe la relación simple:

$$x = x' + ut \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad \text{(transformación galileana de coordenadas)} \tag{37.1}$$

Estas ecuaciones, basadas en las conocidas nociones newtonianas de espacio y tiempo, se conocen como la **transformación galileana de coordenadas**.

Si la partícula P se desplaza en la dirección x, su velocidad instantánea v_x medida por un observador inmóvil en S es $v_x = dx/dt$. Su velocidad v_x' medida por un observador inmóvil en S' es $v_x' = dx'/dt$. Podemos deducir una relación entre v_x y v_x' derivando con respecto a t la primera de las ecuaciones (37.1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u$$

Ahora dx/dt es la velocidad v_x medida en S, y dx'/dt es la velocidad v_x' medida en S', de manera que obtenemos la *transformación galileana de velocidades* correspondiente a un movimiento unidimensional:

$$v_x = v_x' + u \quad \text{(transformación galileana de velocidades)} \tag{37.2}$$

Aunque la notación es diferente, este resultado concuerda con nuestro análisis de las velocidades relativas en la sección 3.5.

Ahora bien, el problema fundamental es el siguiente. Aplicada a la rapidez de la luz en un vacío, la ecuación (37.2) afirma que $c = c' + u$. El segundo postulado de Einstein, respaldado ulteriormente por abundantes pruebas experimentales, afirma que $c = c'$. Esto es una incongruencia auténtica, no una ilusión, y es necesario resolverla. Si aceptamos este postulado, nos vemos obligados a concluir que las ecuaciones (37.1) y (37.2) *no pueden* ser exactamente correctas, a pesar de nuestra convincente deducción. Es preciso modificar estas ecuaciones para que armonicen con este principio.

La resolución implica ciertas modificaciones muy fundamentales a nuestros conceptos cinemáticos. La primera idea que debemos cambiar es el supuesto aparentemente obvio de que los observadores de los marcos S y S' emplean la misma *escala de tiempo*, enunciado formalmente como $t = t'$. Por desgracia, estamos por demostrar que esta suposición ordinaria no puede ser correcta: los dos observadores *deben* tener escalas de tiempo diferentes. Debemos definir la velocidad v' en el marco S' como $v' = dx'/dt'$, no como dx'/dt; las dos cantidades no son iguales. La dificultad radica en el concepto de *simultaneidad*, que es nuestro siguiente tema. Un análisis minucioso de la simultaneidad nos ayudará a formular las modificaciones adecuadas para nuestras nociones acerca del espacio y el tiempo.

Evalúe su comprensión de la sección 37.1 Al pasar volando cerca de usted, una nave espacial a alta velocidad enciende una luz estroboscópica que emite una pulsación de luz en todas direcciones. Un observador a bordo de la nave mide un frente de onda esférico que se propaga a partir de la nave con la misma rapidez c en todas direcciones. *a)* ¿Qué forma tiene el frente de onda que *usted* mide? i) esférica, ii) elipsoidal, con el eje más largo del elipsoide en la dirección del movimiento de la nave espacial; iii) elipsoidal, con el eje más corto del elipsoide en la dirección del movimiento de la nave espacial; iv. no se dispone de suficiente información para decidir. *b)* ¿Coincide el centro del frente de onda con la nave espacial?

37.2 Relatividad de la simultaneidad

La medición de tiempos e intervalos de tiempo implica el concepto de **simultaneidad**. En un marco de referencia dado, un **suceso** es un acontecimiento con una posición y un tiempo definidos (figura 37.4). Cuando decimos que despertamos a las siete de la mañana, queremos decir que dos sucesos (el despertar y que el reloj marcara las 7:00) ocurrieron *simultáneamente*. El problema fundamental de la medición de intervalos de tiempo es éste: en general, dos sucesos que son simultáneos en un marco de referencia *no* lo son en un segundo marco que se desplaza con respecto al primero, aun cuando ambos sean marcos inerciales.

37.4 Un suceso tiene una posición y un tiempo definidos, por ejemplo, en el pavimento directamente debajo del centro de la torre Eiffel, a media noche, en la víspera de Año Nuevo.

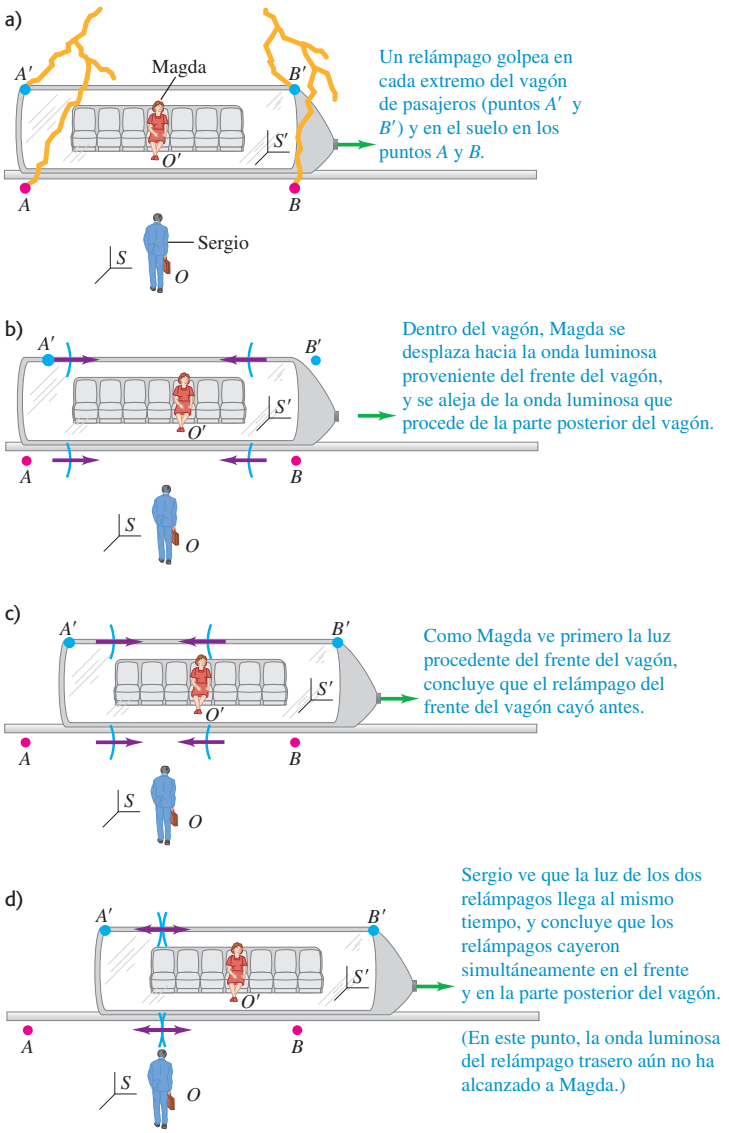
Un experimento mental en simultaneidad

Esto parecería contradecir el sentido común. Para ilustrar el argumento, veamos una versión de uno de los *experimentos mentales* (experimentos de razonamiento que siguen los conceptos hasta sus consecuencias lógicas) de Einstein. Imaginemos un tren que se desplaza con una rapidez comparable a c, con velocidad uniforme (figura 37.5). Caen dos relámpagos en un vagón de pasajeros, uno cerca de cada extremo. Cada relámpago deja una marca en el vagón y otra en el suelo en el instante en que cae. Los puntos del suelo aparecen marcados como A y B en la figura, y los puntos correspondientes del vagón son A' y B'. Sergio se encuentra inmóvil en el suelo en O, equidistante entre A y B. Magda se mueve junto con el tren en O', a la mitad del vagón de pasajeros, equidistante entre A' y B'. Tanto Sergio como Magda ven los destellos luminosos emitidos desde los puntos donde cayeron los relámpagos.

Suponga que los dos frentes de onda generados por la caída de los relámpagos llegan a Sergio en O simultáneamente. Él sabe que está a la misma distancia de B y de A, por lo que concluye que ambos relámpagos cayeron en B y A simultáneamente. Magda coincide en que los dos frentes de onda llegaron a Sergio al mismo tiempo, pero no está de acuerdo en que los destellos fueran emitidos simultáneamente.

Sergio y Magda coinciden en que los dos frentes de onda no llegan a Magda al mismo tiempo. Magda, en O', se desplaza hacia la derecha junto con el tren, por lo que se encuentra con el frente de onda proveniente de B' *antes* que el frente de onda procedente de A' le dé alcance. Sin embargo, debido a que Magda se halla a la mitad del vagón de pasajeros, equidistante de A' y B', su observación es que ambos frentes de onda tardaron el mismo tiempo en llegar a ella, porque ambos recorrieron la misma distancia con la misma rapidez c. (Recuerde que la rapidez de cada frente de onda con respecto a *cualquiera* de los observadores es c.) Por lo tanto, Magda concluye que el relámpago de B' cayó *antes* que el relámpago de A'. Sergio, en O, encuentra por medición que los dos sucesos son simultáneos, ¡pero no así Magda, en O'! *El que dos sucesos en diferentes ubicaciones del eje de las x sean simultáneos o no depende del estado de movimiento del observador.*

Quizá nos sintamos inclinados a argumentar que en este ejemplo los relámpagos *son* realmente simultáneos, y que si Magda, en O', pudiera comunicarse con los puntos distantes sin la demora debida a la rapidez finita de la luz, se daría cuenta de ello. Pero eso sería erróneo; la rapidez finita de la transmisión de información no es el verdadero problema. Si O' está a medio camino entre A' y B', entonces en su marco de referencia el tiempo para que una señal viaje de A' a O' es el mismo que de B' a O'. Dos señales llegarán simultáneamente a O' sólo si fueron emitidas simultáneamente en A' y B'. En este ejemplo *no* llegan simultáneamente a O', por lo que Magda se ve obligada a concluir que los sucesos en A' y B' *no* fueron simultáneos.



37.5 Experimento mental de simultaneidad.

Además, no existe base alguna para afirmar que Sergio tiene razón y Magda está equivocada, o viceversa. Según el principio de relatividad, ningún marco inercial de referencia es más correcto que cualquier otro para la formulación de leyes físicas. Cada observador está en lo correcto *en su propio marco de referencia.* En otras palabras, la simultaneidad no es un concepto absoluto. El que dos sucesos sean simultáneos depende del marco de referencia. Como mencionamos al comienzo de esta sección, la simultaneidad desempeña un papel fundamental en la medición de intervalos de tiempo. Se sigue que *el intervalo de tiempo entre dos sucesos puede ser diferente en distintos marcos de referencia.* Así, nuestra siguiente tarea consiste en aprender cómo comparar intervalos de tiempo en diferentes marcos de referencia.

Evalúe su comprensión de la sección 37.2 Sergio, que trabaja para el sistema ferroviario de la figura 37.5, sincronizó minuciosamente los relojes de todas las estaciones del ferrocarril. En el momento en que Sergio ve que todos los relojes marcan el mediodía, Magda se encuentra en el vagón de pasajeros de alta velocidad viajando de Buenos Aires a Montevideo. Según Magda, cuando el reloj de Buenos Aires marca las doce del día, ¿qué hora es en Montevideo: i) mediodía, ii) antes del mediodía o iii) después del mediodía?

37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo

Activ ONLINE Physics
17.1 Relatividad del tiempo

Para deducir una relación cuantitativa entre intervalos de tiempo en diferentes sistemas de coordenadas, consideremos otro experimento mental. Como en el caso anterior, un marco de referencia S' se desplaza a lo largo de un eje común x-x' con rapidez constante u con respecto a un marco S. Como se explicó en la sección 37.1, u debe ser menor que la rapidez de la luz c. Magda, que viaja junto con el marco S', mide el intervalo de tiempo entre dos sucesos que ocurren en el *mismo* punto del espacio. El suceso 1 corresponde al momento en que un destello de luz parte de O' desde una fuente luminosa. El suceso 2 es cuando el destello regresa a O', luego de haberse reflejado en un espejo situado a una distancia d, como se muestra en la figura 37.6a. Denotamos el intervalo de tiempo como Δt_0, donde el subíndice cero es un recordatorio de que el aparato se halla en reposo, con velocidad cero, en el marco S'. El destello de luz recorre una distancia total $2d$; por lo tanto, el intervalo de tiempo es

$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c} \tag{37.3}$$

El tiempo del recorrido de ida y vuelta medido por Sergio en el marco S es un intervalo diferente Δt; en su marco de referencia los dos sucesos ocurren en puntos *diferentes* del espacio. Durante el tiempo Δt, la fuente se desplaza con respecto a S una distancia $u\,\Delta t$ (figura 37.6b). En S' la distancia del recorrido de ida y vuelta es $2d$, perpendicular a la velocidad relativa, pero en S la distancia del recorrido de ida y vuelta es una distancia más grande $2l$, donde

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\,\Delta t}{2}\right)^2}$$

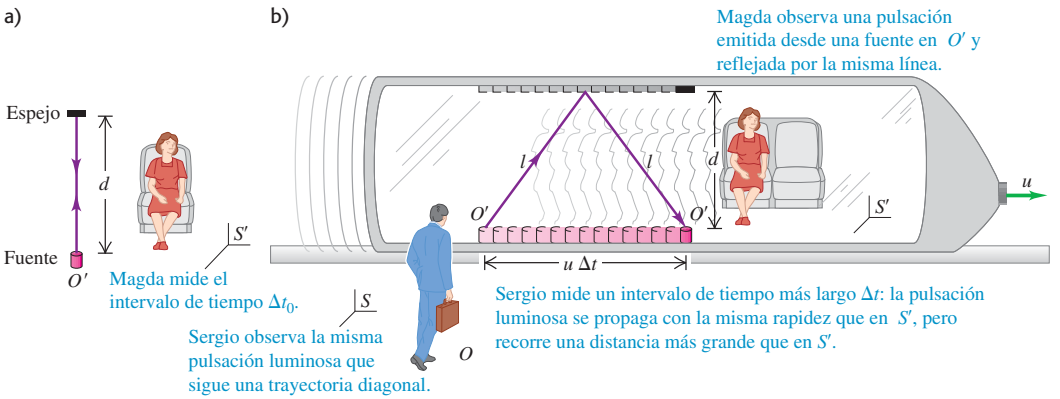
Al escribir esta expresión hemos supuesto que ambos observadores miden la misma distancia d. Justificaremos esta suposición en la sección que sigue. La rapidez de la luz es la misma para ambos observadores; así que el tiempo del recorrido de ida y vuelta medido en S es

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\,\Delta t}{2}\right)^2} \tag{37.4}$$

Preferiríamos tener una relación entre Δt y Δt_0 que fuera independiente de d. Para obtenerla, despejamos d de la ecuación (37.3) y sustituimos el resultado en la ecuación (37.4); tenemos, entonces,

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{c\,\Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\,\Delta t}{2}\right)^2} \tag{37.5}$$

37.6 a) Magda, en el marco de referencia S', observa una pulsación luminosa emitida desde una fuente en O' y reflejada de regreso a lo largo de la misma línea. b) Sergio, en el marco de referencia S, y Magda ven la misma pulsación luminosa. Se muestran las posiciones de O' en los momentos de partida y retorno de la pulsación.



Ahora lo elevamos al cuadrado y despejamos Δt, cuyo resultado es

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Puesto que la cantidad $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es menor que 1, Δt es mayor que Δt_0: de esta manera Sergio mide un tiempo de viaje de ida y vuelta mayor, para la pulsación luminosa, que Magda.

Dilatación del tiempo

Podemos generalizar este importante resultado. En un marco de referencia específico, suponga que ocurren dos sucesos en un mismo punto del espacio. El intervalo de tiempo entre estos sucesos, medido por un observador en reposo en este mismo marco (al cual denominamos el *marco en reposo* de este observador), es Δt_0. En estas condiciones. un observador en un segundo marco que se desplaza con rapidez constante u con respecto al marco en reposo medirá un intervalo de tiempo Δt, donde

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \text{(dilatación del tiempo)} \tag{37.6}$$

Recordemos que ningún observador inercial puede viajar a $u = c$, y advirtamos que $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es imaginaria cuando $u > c$. Por lo tanto, la ecuación (37.6) da resultados razonables sólo cuando $u < c$. El denominador de la ecuación (37.7) siempre es menor que 1; por ello, Δt siempre es *mayor* que Δt_0. En consecuencia, llamamos a este efecto **dilatación del tiempo**.

Piense en un reloj de péndulo antiguo, en el que transcurre un segundo entre cada tic, medido por Magda en el marco en reposo del reloj; esto es Δt_0. Si el marco en reposo del reloj se desplaza con respecto a Sergio, éste mide un tiempo Δt de más de un segundo entre cada tic. En pocas palabras, *los observadores perciben que cualquier reloj marcha más despacio si se desplaza con respecto a ellos* (figura 37.7). Advierta que esta conclusión es un resultado directo del hecho de que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en ambos marcos de referencia.

La cantidad $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ de la ecuación (37.6) aparece con tanta frecuencia en la relatividad que se le ha asignado su propio símbolo: γ (gamma):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.7}$$

En términos de este símbolo, podemos expresar la fórmula de la dilatación del tiempo [ecuación (37.6)] como

$$\Delta t = \gamma\, \Delta t_0 \qquad \text{(dilatación del tiempo)} \tag{37.8}$$

Como simplificación adicional, en ocasiones a u/c se asigna el símbolo β (beta), en cuyo caso $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

La figura 37.8 muestra una gráfica de γ en función de la rapidez relativa u de dos marcos de referencia. Cuando u es muy pequeña en comparación con c, u^2/c^2 es mucho menor que 1 y γ es prácticamente *igual* a 1. En ese límite, las ecuaciones (37.6) y (37.8) tienden a la relación newtoniana $\Delta t = \Delta t_0$, que corresponde a un mismo intervalo de tiempo en todos los marcos de referencia.

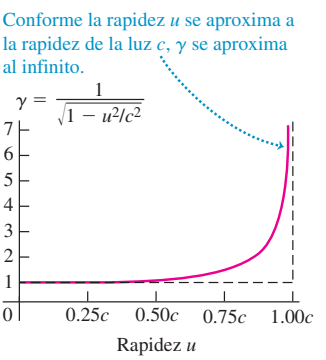
Si la rapidez relativa u es lo suficiente grande para que γ sea considerablemente mayor que 1, se dice que la rapidez es *relativista*; si la diferencia entre γ y 1 es despreciablemente pequeña, la rapidez u se denomina *no relativista*. Así, $u = 6.00 \times 10^7$ m/s $= 0.200c$ (para la que $\gamma = 1.02$) es una rapidez relativista, pero $u = 6.00 \times 10^4$ m/s $= 0.000200c$ (para el que $\gamma = 1.00000002$) es una rapidez no relativista.

Tiempo propio

Hay un solo marco de referencia donde un reloj está en reposo, y existe un número infinito de ellos en el que está en movimiento. Por consiguiente, el intervalo de tiempo medido entre dos sucesos (por ejemplo, dos tics del reloj) que ocurren en el mismo

37.7 Esta imagen muestra la explosión de una estrella, llamada *supernova*, en el interior de una galaxia distante. El brillo de una supernova representativa decae a cierto ritmo. No obstante, las supernovas que se alejan de nosotros a una fracción considerable de la rapidez de la luz decaen con más lentitud, de acuerdo con la ecuación (37.6): la supernova en extinción es un "reloj" en movimiento que marcha con lentitud.

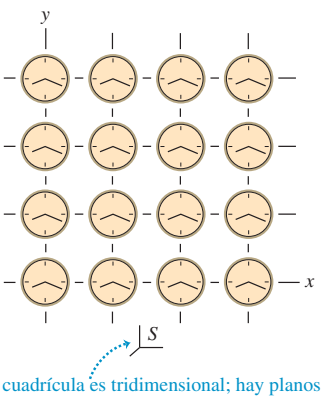
37.8 La cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ en función de la rapidez relativa u de dos marcos de referencia.



punto en un marco determinado es una magnitud más fundamental que el intervalo entre sucesos en puntos diferentes. Utilizamos el término **tiempo propio** para describir el intervalo de tiempo Δt_0 entre dos sucesos que ocurren *en el mismo punto*.

CUIDADO **Medición de los intervalos de tiempo** Es importante advertir que el intervalo de tiempo Δt de la ecuación (37.6) se refiere a sucesos que ocurren en *puntos espaciales diferentes* en el marco de referencia *S*. Advierta asimismo que cualesquiera diferencias entre Δt y el tiempo propio Δt_0 *no* se deben a diferencias en los tiempos necesarios para que la luz se propague de esos puntos del espacio a un observador en reposo en *S*. Suponemos que nuestro observador es capaz de hacer correcciones por las diferencias de tiempo de tránsito de la luz, del mismo modo que un astrónomo que observa el Sol sabe que un suceso que se ve en este momento en la Tierra ocurrió en realidad hace 500 s en la superficie del Sol. Otra opción es considerar a *dos* observadores, uno inmóvil en la ubicación del primer suceso y el otro en la del segundo, cada uno con su propio reloj. Podemos sincronizar estos dos relojes sin dificultad, siempre y cuando se encuentren en reposo en el mismo marco de referencia. Por ejemplo, podríamos enviar una pulsación luminosa simultáneamente a los dos relojes desde un punto equidistante de ambos. Cuando la pulsación llega, los observadores ajustan sus relojes a un tiempo acordado previamente. (Sin embargo, advierta que, en general, los relojes que están sincronizados en un marco de referencia *no* están sincronizados en cualquier otro marco.)

37.9 Marco de referencia representado como un sistema de coordenadas con una cuadrícula de relojes sincronizados.



La cuadrícula es tridimensional; hay planos idénticos de relojes paralelos a la página, delante y detrás de ella, enlazados por líneas de cuadrícula perpendiculares a la página.

En los experimentos mentales, suele ser conveniente imaginar muchos observadores con relojes sincronizados en reposo en diversos puntos de un marco de referencia en particular. Podemos imaginar un marco de referencia como una cuadrícula de coordenadas con muchos relojes sincronizados distribuidos por todas partes, como lo sugiere la figura 37.9. Sólo cuando un reloj está en movimiento con respecto a un marco de referencia dado, es necesario estar alerta para reconocer ambigüedades de sincronización o simultaneidad.

A lo largo de este capítulo utilizaremos con frecuencia frases como "Sergio *observa* que Magda pasa por el punto $x = 5.00$ m, $y = 0$, $z = 0$ en el momento 2.00 s". Esto significa que Sergio está utilizando una cuadrícula de relojes en su marco de referencia, como la que se muestra en la figura 37.9, para registrar el momento en que ocurre un suceso. Podríamos reformular la frase como "cuando Magda pasa por el punto situado en $x = 5.00$ m, $y = 0$, $z = 0$, el reloj ubicado en ese punto del marco de referencia de Sergio marca 2.00 s". Evitaremos el uso de frases como "Sergio *ve* que Magda está en un punto determinado en cierto momento", porque la luz tarda cierto tiempo en viajar al ojo de Sergio desde la posición donde ocurre el suceso.

Estrategia para resolver problemas 37.1 Dilatación del tiempo

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Se utiliza el concepto de dilatación del tiempo, siempre que se compara el intervalo de tiempo entre sucesos medido por observadores en marcos de referencia inerciales distintos.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Para describir un intervalo de tiempo, primero decida cuáles son los dos sucesos que definen el comienzo y el final del intervalo. Asimismo, identifique los dos marcos de referencia en los que se mide el intervalo de tiempo.
2. Determine cuál es la variable que se busca.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. En muchos problemas donde interviene una dilatación del tiempo, el intervalo de tiempo entre sucesos medido en un marco de referencia es el tiempo *propio* Δt_0. El tiempo propio es el intervalo de tiempo entre dos sucesos en un marco de referencia en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto del espacio. El tiempo dilatado Δt es el intervalo de tiempo más largo entre los mismos dos sucesos, medido en un marco de referencia que tiene una rapidez u con respecto al primer marco. Medidos en el segundo marco, los dos sucesos ocurren en puntos diferentes. Será necesario decidir en qué marco el intervalo de tiempo es Δt_0, y en cuál es Δt.
2. Relacione Δt_0 con Δt por medio de la ecuación (37.6) o la (37.8), y luego despeje la variable que se busca.

EVALUAR *la respuesta:* Advierta que Δt nunca es menor que Δt_0, y que u nunca es más grande que c. Si sus resultados sugieren algo distinto, deberá revisar sus cálculos.

Ejemplo 37.1 Dilatación del tiempo en 0.990*c*

Las partículas subatómicas de alta energía que llegan del espacio interactúan con los átomos de las capas altas de la atmósfera terrestre, produciendo partículas inestables llamadas *muones*. Un muón se desintegra con una vida media de 2.20×10^{-6} s medida en un marco de referencia en el que se halla en reposo. Si un muón se desplaza a $0.990c$ (aproximadamente 2.97×10^8 m/s) con respecto a la Tierra, ¿cuál será su vida media medida por usted (un observador que se encuentra en la Tierra)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema tiene que ver con el tiempo de vida de un muón, que es el intervalo entre dos sucesos: la producción del muón y su desintegración subsecuente. Dos observadores distintos miden el periodo de vida: uno que observa el muón en reposo y otro (usted) que lo observa en movimiento a $0.990c$.

PLANTEAR: Sea S su marco de referencia (de usted) en la Tierra, y sea S' el marco de referencia del muón. La variable que se busca es el intervalo entre estos sucesos medido en S.

EJECUTAR: El intervalo de tiempo entre los dos sucesos medido en S', 2.20×10^{-6} s, es un tiempo *propio*, porque los dos sucesos ocurren en la misma posición con respecto al muón. Por ello, $\Delta t_0 = 2.20 \times 10^{-6}$ s. El muón se desplaza con respecto a la Tierra entre los dos sucesos, por lo que, medidos en S, los sucesos ocurren en posiciones diferentes, y el intervalo de tiempo en ese marco es Δt (la variable que se busca). De acuerdo con la ecuación (37.6),

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2.20 \times 10^{-6}\ \text{s}}{\sqrt{1 - (0.990)^2}} = 15.6 \times 10^{-6}\ \text{s}$$

EVALUAR: Nuestro resultado predice que la vida media del muón en el marco terrestre (Δt) es alrededor de siete veces más larga que en el marco del muón (Δt_0). Esta predicción se ha comprobado experimentalmente; de hecho, fue la primera confirmación experimental de la fórmula de dilatación del tiempo [ecuación (37.6)].

Ejemplo 37.2 Dilatación del tiempo a la rapidez de un avión a reacción

Un avión vuela de San Francisco a Nueva York (aproximadamente 4800 km, o 4.80×10^6 m) con una rapidez constante de 300 m/s (aproximadamente 670 mi/h). ¿Cuánto tiempo toma el viaje, medido por un observador en tierra? ¿Y por un observador a bordo del avión?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ahora nos interesa lo que nuestros dos observadores miden para el intervalo de tiempo entre la partida del avión de San Francisco y su llegada a Nueva York.

PLANTEAR: Las variables que se buscan son los intervalos de tiempo entre estos sucesos, medidos en el marco de referencia del suelo S y en el marco de referencia del avión S'.

EJECUTAR: Medidos en S, los dos sucesos ocurren en posiciones diferentes (San Francisco y Nueva York); por lo tanto, el intervalo de tiempo medido por observadores en tierra corresponde a Δt en la ecuación (37.6). Para hallarlo, basta con dividir la distancia entre la rapidez:

$$\Delta t = \frac{4.80 \times 10^6\ \text{m}}{300\ \text{m/s}} = 1.60 \times 10^4\ \text{s} \qquad (\text{aprox. } 4\tfrac{1}{2}\ \text{horas})$$

En el marco del avión S', el paso de San Francisco a Nueva York en el avión ocurre en el mismo punto (la posición del avión). El intervalo de tiempo en el avión es un tiempo propio, el cual corresponde a Δt_0 en la ecuación (37.6). Tenemos, entonces,

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{(300\ \text{m/s})^2}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 1.00 \times 10^{-12}$$

De acuerdo con la ecuación (37.6),

$$\Delta t_0 = (1.60 \times 10^4\ \text{s})\sqrt{1 - 1.00 \times 10^{-12}}$$

Este radical no se puede evaluar con la precisión adecuada con una calculadora ordinaria. Sin embargo, obtendremos una aproximación usando el teorema del binomio (véase el Apéndice B):

$$(1 - 1.00 \times 10^{-12})^{1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)(1.00 \times 10^{-12}) + \cdots$$

Los términos restantes son del orden de 10^{-24} o menos, y se pueden desechar. El resultado aproximado de Δt_0 es

$$\Delta t_0 = (1.60 \times 10^4\ \text{s})(1 - 0.50 \times 10^{-12})$$

El tiempo propio Δt_0, medido en el avión, es ligeramente menor (menos de una parte en 10^{12}) que el tiempo medido en tierra.

EVALUAR: No advertimos los efectos de este tipo en la vida diaria. Pero en la sección 1.3 mencionamos que los relojes atómicos modernos alcanzan una precisión de alrededor de una parte en 10^{13}. Se ha utilizado un reloj de cesio que recorre una distancia larga en un avión para medir este efecto y, de este modo, verificar la ecuación (37.6) incluso a una rapidez mucho menor que c.

Ejemplo 37.3 ¿Cuál es entonces el tiempo propio?

Magda aborda una nave espacial, y luego pasa velozmente por donde está Sergio en la Tierra con una rapidez relativa de $0.600c$. En el instante en que Magda pasa, ambos ponen en marcha sendos cronómetros. *a*) En el instante en que Sergio mide que Magda ha recorrido 9.00×10^7 m más allá de donde él está, ¿qué tiempo indica el cronómetro de Magda? *b*) En el instante en que Magda lee 0.400 s en su cronómetro, ¿qué tiempo lee Sergio en el suyo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema implica la dilatación del tiempo para dos conjuntos de sucesos *diferentes*: el arranque y la parada del cronómetro de Magda, así como el arranque y la parada del cronómetro de Sergio.

PLANTEAR: Sea S el marco de referencia de Sergio; y S', el marco de referencia de Magda. Los dos sucesos de interés en el inciso *a*) son cuando Magda pasa por donde se halla Sergio, y cuando Sergio mide que Magda ha recorrido una distancia de 9.00×10^7 m; las incógnitas son los intervalos de tiempo entre estos dos sucesos medidos en S y en S'. En el inciso *b*) los dos sucesos son cuando Magda pasa por donde se halla Sergio y cuando Magda mide un tiempo transcurrido de 0.400 s; la incógnita es el intervalo de tiempo entre estos dos sucesos medido en S. Como veremos, la comprensión de este ejemplo depende de que se entienda la diferencia entre estos dos pares de sucesos.

EJECUTAR: *a*) Los dos sucesos, el paso de Magda cerca de la Tierra y el que Magda alcance una distancia $x = 9.00 \times 10^7$ m medida por Sergio, ocurren en posiciones diferentes en el marco de Sergio, pero en la misma posición en el marco de Magda. Por lo tanto, el intervalo de tiempo en el marco de Sergio S es Δt; en tanto que el intervalo de tiempo en el marco de Magda, S', es el tiempo propio Δt_0. Según las mediciones

continúa

de Sergio, Magda se desplaza a $0.600c = 0.600\ (3.00 \times 10^8\ \text{m/s}) = 1.80 \times 10^8\ \text{m/s}$ y recorre los 9.00×10^7 m en un tiempo $\Delta t = (9.00 \times 10^7\ \text{m})/(1.80 \times 10^8\ \text{m/s}) = 0.500$ s. De acuerdo con la ecuación (37.6), el cronómetro de Magda indica un tiempo transcurrido de

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.500\ \text{s}\sqrt{1 - (0.600)^2} = 0.400\ \text{s}$$

b) Suena tentador, aunque sería incorrecto, responder que el cronómetro de Sergio indica 0.500 s. Ahora estamos considerando un par *diferente* de sucesos, el arranque y la lectura del cronómetro de Sergio, que ocurren ambos en el mismo punto en el marco terrestre S de Sergio. Estos dos sucesos ocurren en posiciones diferentes en el marco S' de Magda, por lo que el intervalo de tiempo de 0.400 s que ella mide entre estos sucesos es igual a Δt. (En el marco de Magda, Sergio pasa por donde ella está en el tiempo cero, y se halla detrás de ella a una distancia de $(1.80 \times 10^8\ \text{m/s})\ (0.400\ \text{s}) = 7.20 \times 10^7$ m en el tiempo de 0.400 s.) El tiempo en el cronómetro de Sergio es ahora el tiempo propio:

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.400\ \text{s}\sqrt{1 - (0.600)^2} = 0.320\ \text{s}$$

EVALUAR: Si aún le inquieta la diferencia entre 0.500 s y 0.320 s, considere lo siguiente: Sergio, teniendo en cuenta como es debido el tiempo de tránsito de una señal proveniente de $x = 9.00 \times 10^7$ m, afirma que Magda pasó por ese punto y su cronómetro indicó 0.500 s en el mismo instante. Pero Magda afirma que esos dos sucesos ocurrieron en posiciones diferentes y *no* fueron simultáneos: ella pasó por el punto en el instante en que su cronómetro indicaba 0.320 s. Este ejemplo muestra la relatividad de la simultaneidad.

La paradoja de los gemelos

Las ecuaciones (37.6) y (37.8) de la dilatación del tiempo sugieren una paradoja aparente conocida como la **paradoja de los gemelos**. Considere dos astronautas gemelas idénticas llamadas Elena y Astrid. Elena permanece en la Tierra mientras su gemela Astrid emprende un viaje a gran velocidad a través de la galaxia. Debido a la dilatación del tiempo, Elena observa que el latido cardiaco y todos los demás procesos vitales de Astrid se llevan a cabo con más lentitud que los suyos. Es así que, para Elena, Astrid envejece más despacio; cuando Astrid regresa a la Tierra es más joven (ha envejecido menos) que Elena.

La paradoja es la siguiente. Todos los marcos inerciales son equivalentes. ¿Acaso no puede Astrid emplear exactamente los mismos argumentos para concluir que Elena es, de hecho, la más joven? En tal caso las mediciones de cada gemela indican que la otra es más joven cuando se reúnen de nuevo, y eso es una paradoja.

Para resolver la paradoja, es preciso reconocer que las gemelas *no* son idénticas en todos los aspectos. En tanto que Elena permanece en un marco aproximadamente inercial en todo momento, Astrid debe *acelerar* con respecto a ese marco inercial durante algunas partes de su recorrido con la finalidad de partir, dar la vuelta y regresar a la Tierra. El marco de referencia de Elena siempre es aproximadamente inercial; el de Astrid está en muchos casos lejos de ser inercial. Así, hay una diferencia física real entre las circunstancias de las dos gemelas. Un análisis minucioso muestra que Elena está en lo correcto; cuando Astrid regresa, *es* más joven que Elena.

Evalúe su comprensión de la sección 37.3 Samuel (que se encuentra en el suelo) pone en marcha su cronómetro en el instante en que María pasa volando en su nave espacial por donde él se encuentra, con una rapidez de $0.600c$. En el mismo instante, María pone en marcha su cronómetro *a*) Medida en el marco de referencia de Samuel, ¿cuál es la lectura en el cronómetro de María en el instante en que el cronómetro de Samuel indica 10.0 s? i) 10.0 s; ii) menos de 10.0 s; iii) más de 10.0 s. *b*) Medida en el marco de referencia de María, ¿cuál es la lectura en el cronómetro de Samuel en el instante en que el cronómetro de María indica 10.0 s? i) 10.0 s; ii) menos de 10.0 s; iii) más de 10.0 s.

37.4 Relatividad de la longitud

Activ ONLINE Physics
17.2 Relatividad de la longitud

No sólo el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del marco de referencia del observador; también la *distancia* entre dos puntos puede depender del marco de referencia del observador. En esto interviene el concepto de simultaneidad. Suponga que se desea medir la longitud de un automóvil en movimiento. Una forma de lograrlo es hacer que dos ayudantes marquen el pavimento en las posiciones de los parachoques delantero y trasero, y luego medir la distancia entre las marcas. Pero los ayudantes tendrían que hacer las marcas *al mismo tiempo*. Si uno marca la posición del parachoques delantero en un momento determinado, y el otro marca la posición del parachoques trasero, medio segundo más tarde, no se obtendrá la longitud real del auto. Como ya sabemos que la simultaneidad no es un concepto absoluto, es necesario proceder con precaución.

Longitudes paralelas al movimiento relativo

Para hallar una relación entre las longitudes que se miden paralelas a la dirección de movimiento en diversos sistemas de coordenadas, consideremos otro experimento mental. Fijamos una fuente de luz a un extremo de una regla y un espejo al otro extremo. La regla se halla en reposo en el marco de referencia S', y su longitud en este marco es l_0 (figura 37.10a). En estas condiciones el tiempo Δt_0 que se requiere para que una pulsación luminosa haga el recorrido de la fuente al espejo y viceversa es

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} \tag{37.9}$$

Éste es un intervalo de tiempo propio porque la partida y el regreso ocurren en el mismo punto en S'.

En el marco de referencia S la regla se desplaza hacia la derecha con rapidez u durante este recorrido de la pulsación luminosa (figura 37.10b). La longitud de la regla en S es l, y el tiempo de recorrido de la fuente al espejo, medido en S, es Δt_1. Durante este intervalo la regla, junto con la fuente y el espejo, se desplaza una distancia $u\,\Delta t_1$. La longitud total de la trayectoria d de la fuente al espejo no es l, sino

$$d = l + u\,\Delta t_1 \tag{37.10}$$

La pulsación luminosa se propaga con una rapidez c; por tanto, también es válido que

$$d = c\,\Delta t_1 \tag{37.11}$$

Combinando las ecuaciones (37.10) y (37.11) para eliminar d:

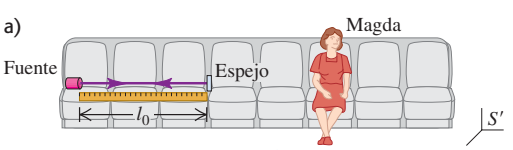
$$c\,\Delta t_1 = l + u\,\Delta t_1 \quad \text{o bien}$$

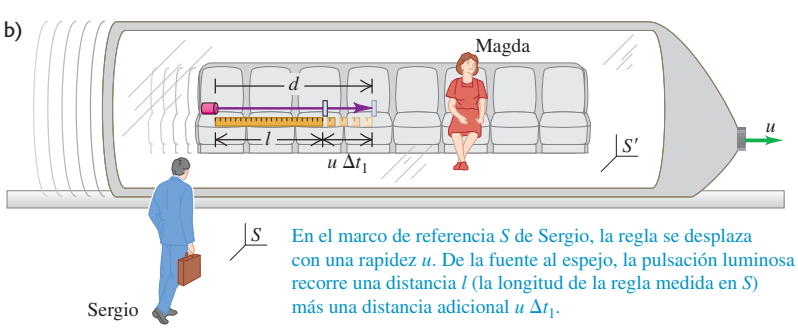
$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - u} \tag{37.12}$$

(La división de la distancia l entre $c - u$ *no* significa que la luz viaje con una rapidez $c - u$, sino que la distancia que la pulsación recorre en S es mayor que l.)

De igual forma, podemos demostrar que el tiempo Δt_2 del recorrido de regreso del espejo a la fuente es

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + u} \tag{37.13}$$





37.10 a) Una regla se halla en reposo en el marco S' de Magda. Una fuente en un extremo de la regla emite una pulsación luminosa que se refleja en un espejo en el otro extremo y regresa a la posición de la fuente. b) Movimiento de la pulsación luminosa medido en el marco S de Sergio.

El tiempo *total* $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ del recorrido de ida y vuelta, medido en S, es

$$\Delta t = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2l}{c(1-u^2/c^2)} \tag{37.14}$$

Sabemos además que la ecuación (37.6) describe la relación entre Δt y Δt_0, porque Δt_0 es un tiempo propio en S'. Por lo tanto, la ecuación (37.9) del tiempo del recorrido de ida y vuelta en el marco en reposo S' de la regla se transforma en

$$\Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c} \tag{37.15}$$

Por último, combinando las ecuaciones (37.14) y (37.15) para eliminar Δt y simplificar, se obtiene

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \qquad \text{(contracción de la longitud)} \tag{37.16}$$

[Hemos empleado la cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ definida en la ecuación (37.7).] Así, la longitud l medida en S, donde la regla está en movimiento, es *más corta* que la longitud l_0 medida en su marco en reposo S'.

CUIDADO **La contracción de la longitud es real** ¡Esto *no* es una ilusión óptica! La regla es efectivamente más corta en el marco de referencia S que en S'.

Una longitud medida en el marco donde el cuerpo está en reposo (el marco en reposo del cuerpo) recibe el nombre de **longitud propia**; así, l_0 es una longitud propia en S', y la longitud medida en cualquier otro marco en movimiento con respecto a S' es *menor que* l_0. Este efecto se llama **contracción de la longitud**.

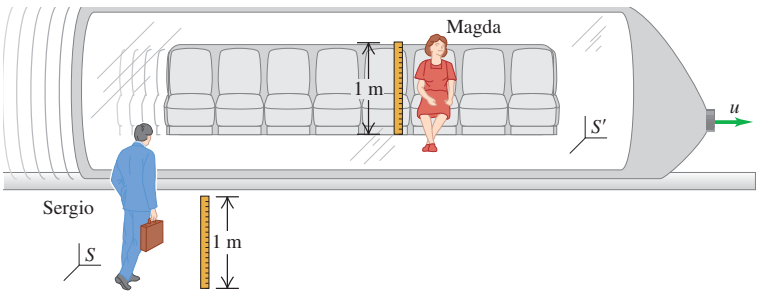
Cuando u es muy pequeña en comparación con c, γ se acerca a 1. Así, en el límite de la pequeña rapidez nos acercamos a la relación newtoniana $l = l_0$. Esto, junto con el resultado correspondiente a la dilatación del tiempo, muestra que las ecuaciones (37.1), la transformación galileana de coordenadas, son por lo regular suficientemente exactas cuando la rapidez relativa es mucho menor que c. Cuando u es una fracción considerable de c, no obstante, la cantidad $\sqrt{1-u^2/c^2}$ puede ser sustancialmente menor que 1. Entonces, l puede ser mucho menor que l_0 y los efectos de la contracción de la longitud pueden ser considerables (figura 37.11).

37.11 En el Stanford Linear Accelerator Center, la rapidez con que los electrones recorren la línea del haz de 3 km es más lenta que c en menos de 1 cm/s. Al medirse en el marco de referencia de tales electrones, la línea del haz (que se extiende de la parte superior a la inferior de esta fotografía) ¡es sólo de aproximadamente 15 cm de longitud!

Longitudes perpendiculares al movimiento relativo

Hemos deducido la ecuación (37.16) con respecto a longitudes medidas en la dirección *paralela* al movimiento relativo de dos marcos de referencia. Las longitudes medidas *perpendicularmente* a la dirección de movimiento *no* se contraen. Para probarlo, considere dos metros de madera idénticos. Un metro está en reposo en el marco S y yace a lo largo del eje de las y positivas con un extremo en O, el origen de S. El otro está en reposo en el marco S' y yace a lo largo del eje de las y' positivas con un extremo en O', el origen de S'. El marco S' se desplaza en la dirección x positiva con respecto al marco S. Los observadores Sergio y Magda, en reposo en S y S' respectivamente, se sitúan en la marca de 50 cm de sus metros. En el instante en que los dos orígenes coinciden, los dos metros yacen a lo largo de la misma línea. En ese instante, Magda hace una marca en el metro de Sergio, en el punto que coincide con su propia marca de 50 cm, y Sergio hace lo mismo en el metro de Magda.

Suponga que Sergio ve el metro de Magda más largo que el suyo. Entonces, la marca que Sergio hace en el metro de Magda estará *abajo* de su centro. En ese caso, Magda pensará que el metro de Sergio se ha acortado, pues la mitad de su longitud coincide con *menos* de la mitad de la longitud del metro de ella. Por consiguiente, Magda ve que los metros en movimiento se acortan y Sergio ve que se alargan. Pero esto implica una asimetría entre los dos marcos que contradice el postulado básico de la relatividad, según el cual todos los marcos inerciales son equivalentes. Se concluye entonces que la congruencia con los postulados de la relatividad exige que ambos observadores vean las reglas de una misma longitud, aunque para cada observador uno de ellos está inmóvil y el otro se halla en movimiento (véase la figura 37.12). Por tanto,



37.12 Los metros de madera son perpendiculares a la velocidad relativa. Cualquiera que sea el valor de u, tanto para Sergio como para Magda, ambos metros de madera tienen una longitud de 1 metro.

no hay contracción de longitud perpendicularmente a la dirección del movimiento relativo de los sistemas de coordenadas. Empleamos este resultado en nuestra deducción de la ecuación (37.6) al suponer que la distancia d es la misma en ambos marcos de referencia.

Por ejemplo, suponga que una varilla en movimiento, de longitud l_0, forma un ángulo θ_0 con la dirección del movimiento relativo (el eje de las x), medido en su marco en reposo. Su componente de longitud en ese marco paralela al movimiento, $l_0 \cos\theta_0$, se contrae a $(l_0 \cos\theta_0)/\gamma$. Sin embargo, no cambia su componente de longitud perpendicular al movimiento $l_0 \operatorname{sen}\theta_0$.

Estrategia para resolver problemas 37.2 Contracción de la longitud

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Se utiliza el concepto de contracción de la longitud siempre que se compara la longitud de un objeto medida por observadores en marcos de referencia inerciales diferentes.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Decida qué es lo que define la longitud en cuestión. Si el enunciado del problema describe un objeto como una regla, es simplemente la distancia entre los extremos del objeto. No obstante, si el problema se refiere a una distancia entre dos puntos sin ningún objeto entre ellos, sería útil imaginar una regla o varilla que se extiende de un punto al otro.
2. Establezca cuál es la incógnita.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Establezca el marco de referencia donde el objeto en cuestión se encuentra en reposo. En este marco, la longitud del objeto es su longitud propia l_0. En un segundo marco de referencia que se desplaza con rapidez u con respecto al primer marco, el objeto tiene una longitud contraída l.
2. Tenga presente que la contracción de longitud ocurre sólo con respecto a las longitudes paralelas a la dirección del movimiento relativo de los dos marcos. Toda longitud perpendicular al movimiento relativo es la misma en ambos marcos.
3. Relacione l y l_0 por medio de la ecuación (37.16), y luego despeje la incógnita.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que sus respuestas tengan sentido: l nunca será mayor que l_0, y u nunca será mayor que c.

Ejemplo 37.4 ¿Cuál es la longitud de la nave espacial?

Una nave espacial pasa volando cerca de la Tierra con una rapidez de $0.990c$. Un miembro de la tripulación a bordo de la nave mide la longitud de ésta, y obtiene un valor de 400 m. ¿Qué longitud miden los observadores que se hallan en la Tierra?

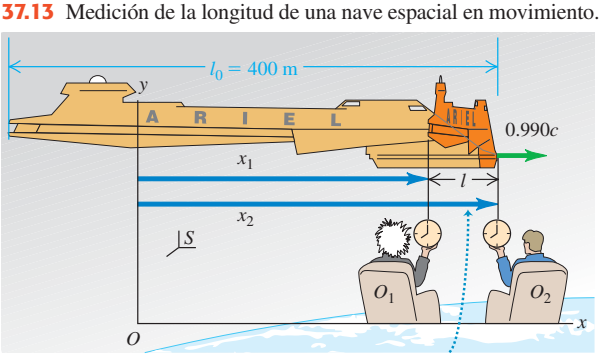
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema nos pide relacionar la longitud de la nave espacial —es decir, la distancia de la punta a la cola— medida por observadores en dos marcos de referencia diferentes: uno a bordo de la nave espacial y otro en la Tierra.

PLANTEAR: La longitud en cuestión coincide con la dirección del movimiento relativo (figura 37.13); por lo tanto, habrá una contracción de longitud medida en uno de los marcos de referencia. La variable que se busca es la longitud medida en el marco terrestre.

EJECUTAR: La longitud de 400 m de la nave espacial es la longitud *propia* l_0 porque ha sido medida en el marco donde la nave está en re-

37.13 Medición de la longitud de una nave espacial en movimiento.



Los dos observadores que están en la Tierra (S) deben medir x_2 y x_1 simultáneamente, para obtener la longitud correcta $l = x_2 - x_1$ en su marca de referencia.

continúa

poso. Se busca la longitud l medida por observadores situados en la Tierra. De acuerdo con la ecuación (37.16),

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (400\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2}$$
$$= 56.4\text{ m}$$

EVALUAR: Esta respuesta tiene lógica: la nave espacial es más corta en un marco en el que está en movimiento, que en un marco donde se halla en reposo. Para medir la longitud l, dos observadores con relojes sincronizados podrían medir las posiciones de los dos extremos de la nave simultáneamente en el marco de referencia terrestre, como se muestra en la figura 37.13. (Estas dos mediciones *no* le parecerán simultáneas a un observador a bordo de la nave.)

Ejemplo 37.5 ¿Cuál es la separación entre los observadores?

Los dos observadores mencionados en el ejemplo 37.4 están a una distancia de 56.4 m uno del otro en la Tierra. ¿Cuál es la separación entre ellos, medida por la tripulación de la nave espacial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Los dos conjuntos de observadores son los mismos que en el ejemplo anterior, pero ahora la distancia que se mide es la separación entre los dos observadores en la Tierra.

PLANTEAR: La distancia entre los observadores en la Tierra medida en el marco terrestre es una longitud *propia*, ya que los dos observadores están en reposo en dicho marco. Piense en la longitud de un tubo de 56.4 m de largo que se extiende de O_1 a O_2 en la figura 37.13. Este tubo se halla en reposo en el marco terrestre; por lo tanto, su longitud es la longitud propia. La Tierra está en movimiento relativo con la nave espacial a $0.990c$, de manera que la tripulación de la nave espacial medirá una distancia más corta que los 56.4 m entre los dos observadores terrestres. El valor que ellos miden es nuestra incógnita.

EJECUTAR: Con $l_0 = 56.4$ m y $u = 0.990c$, la longitud l que miden los miembros de la tripulación es

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (56.4\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2}$$
$$= 7.96\text{ m}$$

EVALUAR: Esta respuesta *no* indica que la nave espacial, medida por su tripulación, tiene a la vez 400 m de largo y 7.96 m de largo. Para los observadores que están en la Tierra, la nave espacial tiene una longitud contraída de 56.4 m, porque ellos están a 56.4 m entre sí cuando miden las posiciones de los extremos en lo que para ellos es el mismo instante. (Vistos desde el marco de la nave espacial, los observadores no miden esas posiciones simultáneamente.) La medición realizada por la tripulación indica que la longitud propia de 56.4 m se redujo a 7.96 m. El punto clave es que se efectúan dos mediciones distintas en el ejemplo 37.4 (en el que los observadores terrestres miden la distancia entre los extremos de la nave) y en el ejemplo que nos ocupa (donde la tripulación de la nave mide la distancia entre los observadores terrestres).

Ejemplo conceptual 37.6 De paseo en un muón

Como se indicó en el ejemplo 37.1, un muón tiene, en promedio, una vida propia de 2.20×10^{-6} s y una vida dilatada de 15.6×10^{-6} s en un marco en el que su rapidez es de $0.990c$. Al multiplicar la rapidez constante por el tiempo para calcular la distancia se obtiene $0.990\,(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \times (2.20 \times 10^{-6}\text{ s}) = 653$ m y $0.990\,(3.00 \times 10^8\text{ m/s}) \times (15.6 \times 10^{-6}\text{ s}) = 4630$ m. Interprete estas dos distancias.

SOLUCIÓN

Si un muón promedio pasa a $0.990c$ cerca de los observadores, de acuerdo con las mediciones de éstos el muón se crea en cierto punto y se desintegra 15.6×10^{-6} s más tarde en otro punto a 4630 m de distancia. Por ejemplo, este muón podría ser creado a la altura de la cima de una montaña y luego descender en línea recta para desintegrarse en la base de la montaña 4630 m más abajo.

Sin embargo, un observador que se desplazase a la par de un muón promedio diría que recorrió sólo 653 m porque el muón existió sólo durante 2.20×10^{-6} s. Para demostrar que esta respuesta es totalmente congruente, considérese la montaña. La distancia de 4630 m es su altura, una longitud propia en la dirección del movimiento. Con respecto a un observador que viaja junto con este muón, sube la montaña a $0.990c$ con la longitud de 4630 m contraída a

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (4630\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2}$$
$$= 653\text{ m}$$

Entonces, vemos que la contracción de la longitud es congruente con la dilatación del tiempo. Lo mismo es válido para un electrón que se mueve a rapidez u en un acelerador lineal (véase la figura 37.11). En comparación con los valores medidos por un físico que está parado al lado del acelerador, un observador que viajara junto con el electrón mediría la longitud del acelerador y el tiempo para recorrer esa longitud en ambos casos sería menor en un factor de $\sqrt{l - u^2/c^2}$.

Qué parecería un objeto que se mueve cerca de *c*

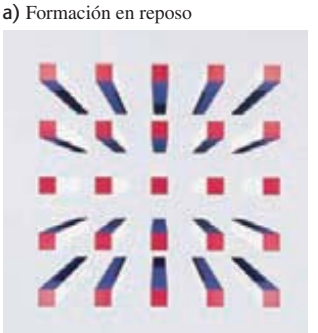
Reflexionemos un poco acerca de la apariencia visual de un cuerpo tridimensional en movimiento. Si pudiéramos ver simultáneamente la posición de todos los puntos del cuerpo, éste parecería que se encoge sólo en la dirección del movimiento. Pero *no* vemos todos los puntos simultáneamente; la luz proveniente de los puntos más alejados tarda más tiempo en llegar a nosotros que la luz procedente de los puntos cercanos, por lo cual vemos los puntos más alejados en la posición que tenían en tiempos anteriores.

Suponga que tenemos una varilla rectangular con sus caras paralelas a los planos de coordenadas. Cuando miramos desde un extremo hacia el centro de la cara más próxima de una varilla de este tipo en reposo, vemos sólo esa cara. (Véase la varilla central generada por computadora en la figura 37.14a.) Pero cuando esa varilla pasa cerca de nosotros moviéndose hacia la derecha a una fracción apreciable de la rapidez de la luz, quizá también veamos su lado izquierdo debido al efecto de tiempos anteriores que hemos descrito. Es decir, podemos ver ciertos puntos que no pudimos ver cuando la varilla estaba en reposo porque la varilla se quita del paso de los rayos luminosos que vienen de esos puntos hacia nosotros. A la inversa, la varilla en movimiento impide el paso de parte de la luz que puede llegar hasta nosotros cuando la varilla está en reposo. Por todo esto, las varillas de las figuras 37.14b y 37.14c se ven giradas y deformadas.

Evalúe su comprensión de la sección 37.4 Una nave espacial miniatura vuela y pasa junto a usted, desplazándose horizontalmente a una fracción considerable de la rapidez de la luz. A cierta distancia, usted observa que la punta y la cola de la nave espacial se alinean exactamente con los dos extremos de un metro de madera que usted sostiene con sus manos. Ordene de la más larga a la más corta las siguientes distancias: i) la longitud propia del metro de madera; ii) la longitud propia de la nave espacial; iii) La longitud de la nave espacial medida en el marco de referencia de usted; iv) la longitud del metro de madera medida en el marco de referencia de la nave espacial.

37.14 Simulación de computadora de la apariencia de una formación de 25 varillas con sección transversal cuadrada. La varilla central se ve desde un extremo. La simulación no tiene en cuenta los cambios de color de la formación debidos al efecto Doppler (véase la sección 37.6).

a) Formación en reposo



b) Formación desplazándose hacia la derecha a 0.2*c*

c) Formación desplazándose hacia la derecha a 0.9*c*

37.5 Transformaciones de Lorentz

En la sección 37.1 estudiamos las ecuaciones de la transformación galileana de coordenadas [ecuación (37.1)], las cuales relacionan las coordenadas (x, y, z) de un punto en un marco de referencia S con las coordenadas (x', y', z') del punto en un segundo marco de referencia S'. El segundo marco se desplaza con rapidez constante u con respecto a S en la dirección positiva a lo largo del eje común x-x'. Esta transformación supone asimismo que la escala de tiempo es la misma en los dos marcos de referencia, como lo expresa la relación adicional $t = t'$. Esta transformación galileana, como hemos visto, es válida sólo en el límite cuando u tiende a cero. Ahora estamos en condiciones de deducir transformaciones de carácter más general que sean congruentes con el principio de relatividad. Estas relaciones más generales se conocen como las **transformaciones de Lorentz**.

Transformación de coordenadas de Lorentz

Nuestra primera pregunta es la siguiente: cuando ocurre un suceso en el punto (x, y, z) en el tiempo t, observado en un marco de referencia S, ¿cuáles son las coordenadas (x', y', z') y el tiempo t' del suceso observado en un segundo marco de referencia S', que se desplaza con respecto a S con rapidez constante u en la dirección $+x$?

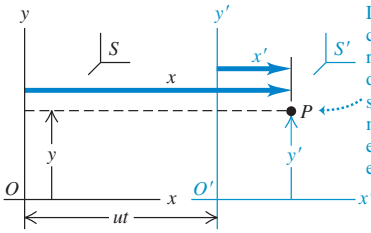
Para deducir la transformación de coordenadas haremos referencia a la figura 37.15 (siguiente página), que es igual a la figura 37.3. Como hicimos antes, suponemos que los orígenes coinciden en el tiempo inicial $t = 0 = t'$. Entonces, en S la distancia de O a O' en el tiempo t sigue siendo ut. La coordenada x' es una *longitud propia* en S'; por lo tanto, en S se ha contraído por el factor $1/\gamma = \sqrt{1 - u^2/c^2}$, como en la ecuación (37.16). En consecuencia, la distancia x de O a P, vista en S, no es simplemente $x = ut + x'$, como en la transformación galileana de coordenadas, sino

$$x = ut + x'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{37.17}$$

37.15 Medida en un marco de referencia S, x' se ha contraído a x'/γ; por lo tanto, $x = ut + x'/\gamma$ y $x' = \gamma(x - ut)$.

El marco S' se desplaza con respecto al marco S con velocidad constante u a lo largo del eje común x-x'.

Los orígenes O y O' coinciden en el tiempo $t = 0 = t'$.



La transformación de coordenadas de Lorentz relaciona las coordenadas de espacio-tiempo de un suceso medidas en los dos marcos: (x, y, z, t) en el marco S y (x', y', z', t') en el marco S'.

Despejando x' de esta ecuación:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.18}$$

La ecuación (37.18) es parte de la transformación de coordenadas de Lorentz; otra parte es la ecuación que proporciona t' en términos de x y t. Para obtenerla, advertimos que el principio de relatividad demanda que la transformación de S a S' sea idéntica en cuanto a *forma* a la transformación de S' a S. La única diferencia es un cambio en el signo de la componente de velocidad relativa u. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (37.17) debe ser cierto que

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{37.19}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (37.18) y (37.19) para eliminar x'. Esto nos da una ecuación de t' en términos de x y t. Dejamos a usted la resolución de los detalles algebraicos; el resultado es

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.20}$$

Como ya comentamos, el movimiento no influye en las longitudes perpendiculares a la dirección del movimiento relativo; por lo tanto, $y' = y$ y $z' = z$.

Agrupando todas estas ecuaciones de transformación, tenemos

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2) \end{aligned} \qquad \text{(transformación de coordenadas de Lorentz)} \tag{37.21}$$

Estas ecuaciones son la *transformación de coordenadas de Lorentz*, la generalización relativista de la transformación galileana de coordenadas: las ecuaciones (37.1) y $t = t'$. Con valores de u que tienden a cero, los radicales de los denominadores y γ tienden a 1, y el término ux/c^2 tiende a cero. En este límite, las ecuaciones (37.21) se tornan idénticas a la ecuación (37.1), junto con $t = t'$. En general, sin embargo, tanto las coordenadas como el tiempo de un suceso en un marco dependen de sus coordenadas y tiempo en otro marco. *El espacio y el tiempo han quedado ligados; ya no podemos afirmar que la longitud y el tiempo tienen significados absolutos independientes del marco de referencia.* Por tal razón, nos referimos al tiempo y a las tres dimensiones del espacio colectivamente, como una entidad tetradimensional denominada **espacio-tiempo**, y denominamos a (x, y, z, t) en conjunto las **coordenadas de espacio-tiempo** de un suceso.

Transformación de velocidades de Lorentz

Las ecuaciones (37.21) nos permiten deducir la generalización relativista de la transformación galileana de velocidades [ecuación (37.2)]. Consideramos sólo el movimiento unidimensional a lo largo del eje de las x y empleamos el término "velocidad" como una abreviatura de la "componente x de la velocidad". Suponga que en un tiempo dt una partícula se desplaza una distancia dx, medida en el marco S. La distancia dx' y el tiempo dt' correspondientes en S' se obtienen diferenciando las ecuaciones (37.21):

$$dx' = \gamma(dx - u\,dt)$$
$$dt' = \gamma(dt - u\,dx/c^2)$$

Dividimos la primera ecuación entre la segunda, y luego el numerador y el denominador del resultado entre dt:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

Ahora dx/dt es la velocidad v_x en S, y dx'/dt' es la velocidad v_x' en S', y así obtenemos finalmente la generalización relativista

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \qquad \text{(transformación de velocidades de Lorentz)} \qquad (37.22)$$

Cuando u y v_x son mucho menores que c, el denominador de la ecuación (37.22) tiende a 1, y nos aproximamos al resultado no relativista $v_x' = v_x - u$. El extremo opuesto se da cuando $v_x = c$, en cuyo caso encontramos que

$$v_x' = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c(1 - u/c)}{1 - u/c} = c$$

Esto indica que cualquier cosa que se desplace con una velocidad $v_x = c$ medida en S también tiene una velocidad $v_x' = c$ medida en S', no obstante el movimiento relativo de los dos marcos. Así, la ecuación (37.22) es congruente con el postulado de Einstein de que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos de referencia inerciales.

El principio de relatividad nos dice que no existe una distinción fundamental entre los dos marcos S y S'. Por lo tanto, la expresión de v_x en términos de v_x' debe tener la misma forma que la ecuación (37.22), con v_x convertida en v_x' y viceversa, y el signo de u invertido. Si llevamos a cabo estas operaciones con la ecuación (37.22) encontramos que

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/c^2} \qquad \text{(transformación de velocidades de Lorentz)} \qquad (37.23)$$

Esto también se obtiene algebraicamente despejando v_x de la ecuación (37.22). Las ecuaciones (37.22) y (37.23) son *transformaciones de velocidades de Lorentz* para el movimiento unidimensional.

CUIDADO **Use las coordenadas correctas de los marcos de referencia** Tenga presente que las ecuaciones de transformaciones de Lorentz dadas por las ecuaciones (37.21), (37.22) y (37.23) suponen que el marco S' se desplaza en la dirección x positiva con velocidad u con respecto al marco S. Siempre establezca su sistema de coordenadas de modo que se apegue a esta convención.

Cuando u es menor que c, las transformaciones de velocidades de Lorentz nos demuestran que un cuerpo que se desplaza con rapidez menor que c en un marco de

referencia siempre tiene una rapidez menor que *c en cualquier otro* marco de referencia. Ésta es una de las razones por las que se concluye que ningún cuerpo material puede viajar con una rapidez igual o mayor que la de la luz en el vacío, con respecto a *cualquier* marco de referencia inercial. La generalización relativista de la energía y la cantidad de movimiento, que examinaremos más adelante, ofrecen un respaldo adicional a esta hipótesis.

Estrategia para resolver problemas 37.3 Transformaciones de Lorentz

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La transformación de *coordenadas* de Lorentz nos indica cómo relacionar las coordenadas de espacio-tiempo de un suceso en un marco de referencia inercial con las coordenadas de espacio-tiempo del mismo suceso en un segundo marco inercial. La transformación de *velocidades* de Lorentz relaciona la velocidad de un objeto en un marco inercial con su velocidad en un segundo marco inercial.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Establezca cuál es la incógnita.
2. Defina los dos marcos inerciales S y S'. Recuerde que S' se desplaza con respecto a S con velocidad constante u en la dirección $+x$.
3. Si se necesitan las ecuaciones de transformación de coordenadas, haga una lista de coordenadas de espacio-tiempo en los dos marcos, como x_1, x_1', t_1, t_1', y así sucesivamente. Identifique minuciosamente cuáles de ellas conoce y cuáles no.
4. En los problemas de transformación de velocidades, identifique claramente las velocidades u (la velocidad relativa en los dos marcos de referencia), v_x (la velocidad del objeto con respecto a S) y v_x' (la velocidad del objeto con respecto a S').

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. En un problema de transformación de coordenadas, despeje de las ecuaciones (37.21) las coordenadas de espacio-tiempo del suceso medidas en S' en términos de los valores correspondientes en S. (Si necesita despejar las coordenadas de espacio-tiempo en S en términos de los valores correspondientes en S', puede convertir fácilmente las expresiones de las ecuaciones (37.21): sustituya todas las cantidades con prima por cantidades sin prima, y viceversa, y sustituya u por $-u$.)
2. En un problema de transformación de velocidades, despeje la incógnita de la ecuación (37.22) o de la ecuación (37.23), según sea adecuado.

EVALUAR *la respuesta:* No se desanime si algunos de sus resultados parecen no tener sentido o si no concuerdan con el "sentido común". Toma tiempo adquirir intuición acerca de la relatividad; la experiencia se la brindará. (Un resultado que definitivamente sería erróneo es una rapidez mayor que c.)

Ejemplo 37.7 ¿Se recibió antes de ser enviado?

Ganadora de una carrera interestelar, Magda cruza la meta en el espacio al mando de su nave espacial con una rapidez de $0.600c$ con respecto a esa línea. Un mensaje de "hurra" es enviado desde el extremo posterior de su nave (suceso 2) en el instante (en su marco de referencia) en que el extremo frontal de la nave cruza la meta (suceso 1). La longitud de la nave medida por Magda es de 300 m. Sergio está en la meta y se halla en reposo con respecto a ella. Según las mediciones de Sergio, ¿cuándo y dónde ocurren los sucesos 1 y 2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo interviene la transformación de coordenadas de Lorentz.

PLANTEAR: Nuestra deducción de esta transformación supone que los orígenes de los marcos S y S' coinciden en $t = 0 = t'$. Por lo tanto, para simplificar fijamos el origen de S en la meta y el origen de S' en el extremo frontal de la nave espacial, para que, según las mediciones de Sergio y Magda, el suceso 1 ocurra en $x = 0 = x'$ y $t = 0 = t'$.

En S' Magda determinó que su nave tiene 300 m de largo, por lo que ordena enviar el "hurra" desde 300 m detrás del frente de su nave en el instante en que, según sus mediciones, el frente cruza la meta. Es decir, según sus mediciones el suceso 2 ocurre en $x' = -300$ m y $t' = 0$.

Las incógnitas son la coordenada x y el tiempo t del suceso 2, medidos por Sergio en S.

EJECUTAR: Para despejar del modo más fácil las incógnitas, modificamos la primera y la última de las ecuaciones (37.21) para obtener x y t en función de x' y t'. Para ello, aplicamos el principio de relatividad del mismo modo como obtuvimos la ecuación (37.23) a partir de la ecuación (37.22). Eliminamos las primas de x' y t', agregamos primas a x y t, y sustituimos cada u por $-u$. Los resultados son

$$x = \gamma(x' + ut') \qquad \text{y} \qquad t = \gamma(t' + ux'/c^2)$$

De acuerdo con la ecuación (37.7), $\gamma = 1.25$ cuando $u = 0.600c = 1.80 \times 10^8$ m/s. Sustituimos además $x' = -300$ m, $t' = 0$, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s y $u = 1.80 \times 10^8$ m/s en la ecuación de x y t para hallar $x = -375$ m en $t = -7.50 \times 10^{-7}$ s $= -0.750$ μs en el suceso 2.

EVALUAR: Magda afirma que los sucesos son simultáneos, pero Sergio no está de acuerdo. De hecho, éste afirma que el "hurra" fue enviado *antes* de que Magda cruzara la meta. Esto no significa que el efecto antecediera la causa. Lo más rápidamente que Magda puede enviar una señal a lo largo de su nave es de 300 m/$(3.00 \times 10^8$ m/s) $= 1.00$ μs. Magda no puede enviar una señal desde el frente, en el instante en que cruza la meta, capaz de provocar la emisión de un "hurra" desde el extremo trasero en el mismo instante. Tendría que enviar esa señal desde el frente con al menos 1.00 μs de anticipación, para lo cual tendría que prever ligeramente su suceso.

Note que la relatividad *es* congruente. Las mediciones de Sergio en su marco le indican que la nave de Magda mide $l_0/\gamma = 300$ m/1.25 $=$ 240 m de largo y el extremo trasero se halla en $x = -375$ m en $t = -0.750$ μs $= -7.50 \times 10^{-7}$ s cuando se envía el "hurra". En ese instante, por lo tanto, Sergio encuentra que el frente de la nave de 240 m de largo está a una distancia de $(375 - 240)$ m $= 135$ m de la meta. Sin embargo, dado que $(1.80 \times 10^8$ m/s$)(7.50 \times 10^{-7}$ s$) = 135$ m, el frente cruza la meta en $t = 0$.

Ejemplo 37.8 Velocidades relativas

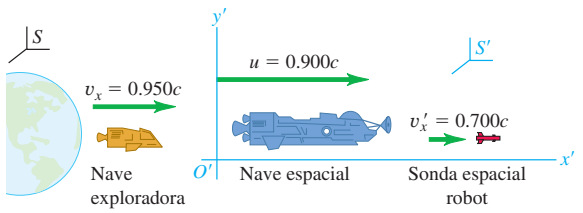
a) Una nave espacial que se aleja de la Tierra con una rapidez de $0.900c$ dispara una sonda espacial robot en la dirección de su movimiento, con una rapidez de $0.700c$ con respecto a la nave. ¿Cuál es la velocidad de la sonda con respecto a la Tierra? *b*) Una nave exploradora intenta dar alcance a la nave espacial viajando a $0.950c$ con respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de la nave exploradora con respecto a la nave espacial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la transformación de velocidades de Lorentz.

PLANTEAR: Sea S el marco de referencia de la Tierra, y S', el marco de referencia de la nave espacial (figura 37.16). La velocidad relativa de los dos marcos es $u = 0.700c$. La incógnita en el inciso *a*) es la velocidad de la sonda con respecto a S; en el inciso *b*), la incógnita es la velocidad de la nave exploradora con respecto a S'.

37.16 Nave espacial, sonda espacial robot y nave exploradora.



EJECUTAR: *a*) Conocemos la velocidad de la sonda con respecto a la nave espacial: $v'_x = 0.700c$. Aplicamos la ecuación (37.23) para hallar su velocidad v_x con respecto a la Tierra:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0.700c + 0.900c}{1 + (0.900c)(0.700c)/c^2} = 0.982c$$

b) Conocemos la velocidad de la nave exploradora con respecto a la Tierra: $v_x = 0.950c$. Aplicamos la ecuación (37.22) para hallar su velocidad v_x' con respecto a la nave espacial:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{0.950c - 0.900c}{1 - (0.900c)(0.950c)/c^2} = 0.345c$$

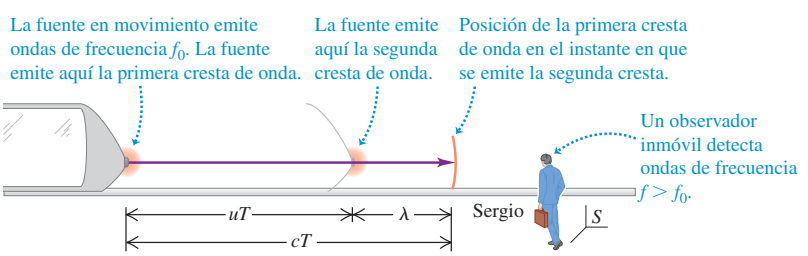
EVALUAR: Resulta instructivo comparar nuestros resultados con los que habríamos obtenido al utilizar la fórmula de la transformación galileana de velocidades [ecuación (37.2)]. En el inciso *a*) habríamos encontrado que la velocidad de la sonda con respecto a la Tierra es $v_x = v'_x + u = 0.700c + 0.900c = 1.600c$. Este valor es mayor que la rapidez de la luz, por lo que debe ser incorrecto. En el inciso *b*) habríamos hallado que la velocidad de la nave exploradora con respecto a la nave espacial es $v'_x = v_x - u = 0.950c - 0.900c = 0.050c$; el valor correcto desde la perspectiva relativista, $v'_x = 0.345c$, es casi siete veces mayor que el valor galileano incorrecto.

Evalúe su comprensión de la sección 37.5 *a*) En el marco S los sucesos P_1 y P_2 ocurren en las mismas coordenadas x, y y z, pero el suceso P_1 ocurre antes que el suceso P_2. En el marco S', ¿qué suceso ocurre primero? *b*) En el marco S los sucesos P_3 y P_4 ocurren en el mismo tiempo t y en las mismas coordenadas y y z, pero el suceso P_3 ocurre en una coordenada x menos positiva (es decir, menor) que el suceso P_4. En el marco S', ¿qué suceso ocurre primero?

*37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas

Otra importante consecuencia de la cinemática relativista es el efecto Doppler en ondas electromagnéticas. En nuestro análisis previo del efecto Doppler (sección 16.8) citamos, sin probarla, la fórmula [ecuación (16.30)] del desplazamiento de la frecuencia que provoca el movimiento de una fuente de ondas electromagnéticas con respecto al observador. Ahora podemos deducir ese resultado.

El problema es el siguiente. Una fuente de luz se desplaza con rapidez constante u hacia Sergio, quien se halla inmóvil en un marco inercial (figura 37.17). Medida en su marco en reposo, la fuente emite ondas luminosas de frecuencia f_0 y periodo $T_0 = 1/f_0$. ¿Cuál es la frecuencia f de estas ondas como las recibe Sergio?



37.17 Efecto Doppler en la luz. Una fuente de luz que se desplaza con rapidez u con respecto a Sergio emite una cresta de onda, luego recorre una distancia uT hacia un observador y emite la cresta siguiente. En el marco de referencia S de Sergio, la segunda cresta se halla a una distancia λ atrás de la primera.

Sea T el intervalo de tiempo entre la *emisión* de crestas de onda sucesivas observado en el marco de referencia de Sergio. Advierta que *no* se trata del intervalo entre la *llegada* de crestas sucesivas a la posición que ocupa Sergio, porque las crestas se emiten en diferentes puntos del marco de Sergio. Al medir sólo la frecuencia f que recibe, Sergio no tiene en cuenta la diferencia de tiempo de tránsito de las crestas sucesivas. Por consiguiente, la frecuencia que recibe *no* es $1/T$. ¿Cuál es la ecuación de f?

Durante un tiempo T las crestas que van por delante de la fuente recorren una distancia cT, y la fuente se desplaza una distancia más corta uT en la misma dirección. Por lo tanto, la distancia λ entre crestas sucesivas, esto es, la longitud de onda, es $\lambda = (c - u)T$, medida en el marco de Sergio. La frecuencia que éste mide es c/λ. Por consiguiente,

$$f = \frac{c}{(c - u)T} \tag{37.24}$$

Hasta aquí hemos seguido un modelo similar al del efecto Doppler correspondiente al sonido de una fuente en movimiento (véase la sección 16.8). En ese análisis el paso siguiente consistió en equiparar T con el tiempo T_0 entre emisiones de crestas de onda sucesivas por la fuente. Sin embargo, debido a la dilatación del tiempo, desde el punto de vista relativista *no* es correcto equiparar T con T_0. El tiempo T_0 se mide en el marco en reposo de la fuente, por lo que es un tiempo propio. Según la ecuación (37.6), la relación entre T_0 y T es

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{cT_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

o bien, puesto que $T_0 = 1/f_0$,

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{cT_0} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0$$

Recuerde que $1/T$ no es igual a f. Debemos sustituir esta expresión de $1/T$ en la ecuación (37.24) para determinar f.

$$f = \frac{c}{c - u} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0$$

Puesto que $c^2 - u^2 = (c - u)(c + u)$, la expresión anterior da

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}} f_0 \qquad \text{(efecto Doppler, ondas electromagnéticas, fuente que se aproxima al observador)} \tag{37.25}$$

Esto demuestra que, cuando la fuente se desplaza *hacia* el observador, la frecuencia observada f es *mayor* que la frecuencia emitida f_0. La diferencia $f - f_0 = \Delta f$ se conoce como el desplazamiento de frecuencia de Doppler. Cuando u/c es mucho menor que 1, el desplazamiento fraccionario $\Delta f/f$ también es pequeño y aproximadamente igual a u/c:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{u}{c}$$

Cuando la fuente se *aleja* del observador, se cambia el signo de u en la ecuación (37.25) para obtener

$$f = \sqrt{\frac{c - u}{c + u}} f_0 \qquad \text{(efecto Doppler, ondas electromagnéticas, fuente que se aleja del observador)} \tag{37.26}$$

Esto concuerda con la ecuación (16.30), ya citada, con cambios menores de notación.

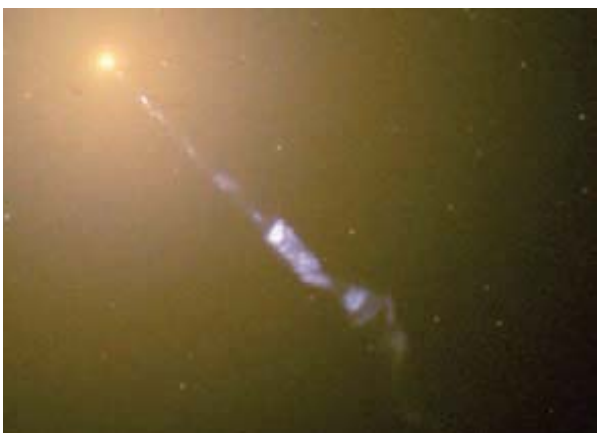
En el caso de la luz, a diferencia del sonido, no existe distinción alguna entre el movimiento de la fuente y el movimiento del observador; sólo importa la velocidad *relativa* de los dos. En los últimos cuatro párrafos de la sección 16.8 se analizan varias aplicaciones prácticas del efecto Doppler con luz y otras radiaciones electromagnéticas; sugerimos repasar esos párrafos ahora mismo. La figura 37.18 muestra una aplicación común.

37.18 Este cañón manual de radar emite un haz de radio de frecuencia f_0, el cual, en el marco de referencia de un automóvil que se aproxima, tiene una frecuencia f más alta dada por la ecuación (37.25). El haz reflejado también tiene una frecuencia f en el marco del auto, pero tiene una frecuencia f' aún más alta en el marco del policía. El cañón de radar calcula la rapidez del auto comparando las frecuencias del haz emitido y del haz doblemente reflejado y con desplazamiento de Doppler. (Compare con el ejemplo 16.19 de la sección 16.8.)

Ejemplo 37.9 Material proveniente de un agujero negro

Algunas galaxias tienen en su centro agujeros negros de enorme masa (véase la sección 12.8). El material que gira en remolino en torno a un agujero negro se calienta, se ioniza y genera intensos campos magnéticos. Las fuerzas magnéticas resultantes encaminan parte del material hacia chorros de alta velocidad que se proyectan hacia fuera de la galaxia y al espacio intergaláctico (figura 37.19). La luz azul que se observa en el chorro de la figura 37.19 tiene una frecuencia de 6.66×10^{14} Hz, pero en el marco de referencia del material proyectado la luz tiene una frecuencia de 5.55×10^{13} Hz (en la región infrarroja del espectro electromagnético). ¿Con qué rapidez se desplaza el material del chorro hacia nosotros?

37.19 Esta imagen muestra un chorro en rápido movimiento de 5000 años luz de largo que emana del centro de la galaxia M87. La luz del chorro es emitida por electrones que se mueven en espiral con gran rapidez en torno a líneas de campo magnético (véase la figura 27.16).



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se relaciona con el efecto Doppler para ondas electromagnéticas.

PLANTEAR: La frecuencia que observamos es $f = 6.66 \times 10^{14}$ Hz, y la frecuencia en el marco de la fuente es $f_0 = 5.55 \times 10^{13}$ Hz. Puesto que $f > f_0$, la fuente se aproxima hacia nosotros y, por lo tanto, para hallar la variable que se busca (u) debemos emplear la ecuación (37.25).

EJECUTAR: Debemos despejar u de la ecuación (37.25). Esto requiere un poco de álgebra; dejamos como ejercicio demostrar que el resultado es

$$u = \frac{(f/f_0)^2 - 1}{(f/f_0) + 1}c$$

Tenemos que $f/f_0 = (6.66 \times 10^{14}\ \text{Hz})/(5.55 \times 10^{13}\ \text{Hz}) = 12.0$; por lo tanto,

$$u = \frac{(12.0)^2 - 1}{(12.0)^2 + 1}c = 0.986c$$

EVALUAR: Dado que el desplazamiento de la frecuencia es muy considerable, habría sido erróneo emplear la expresión aproximada $\Delta f/f = u/c$. De haberlo intentado, habríamos hallado que $u = c\,\Delta f/f_0 = c(6.66 \times 10^{14}\ \text{Hz} - 5.55 \times 10^{13}\ \text{Hz})/(5.55 \times 10^{13}\ \text{Hz}) = 11.0c$. Este resultado no puede ser correcto, porque el material del chorro no puede viajar con más rapidez que la luz.

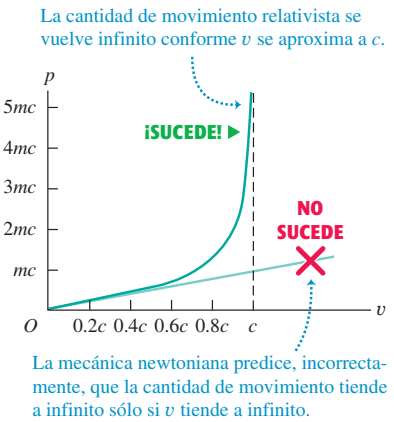
37.7 Cantidad de movimiento relativista

Las leyes de Newton del movimiento tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. Cuando empleamos transformaciones para cambiar de un marco inercial a otro, las leyes deben ser *invariables* (es decir, no cambiantes). Pero acabamos de aprender que el principio de relatividad nos obliga a sustituir las transformaciones galileanas por las transformaciones de Lorentz, de carácter más general. Como veremos, esto demanda generalizaciones correspondientes en las leyes del movimiento y en las definiciones de cantidad de movimiento y energía.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento afirma que *cuando dos cuerpos interactúan, la cantidad de movimiento total es constante,* siempre y cuando la fuerza externa neta que actúa sobre los cuerpos en un marco de referencia inercial sea cero (por ejemplo, si forman un sistema aislado en el que sólo interactúan uno con otro). Si la conservación de la cantidad de movimiento es una ley física válida, debe ser válida en *todos* los marcos de referencia inerciales. Ahora bien, el problema es el siguiente. Suponga que observamos una colisión en un sistema inercial de coordenadas S y encontramos que se conserva la cantidad de movimiento. A continuación aplicamos la transformación de Lorentz para obtener las velocidades en un segundo sistema inercial S'. Encontramos que si se aplica la definición newtoniana de cantidad de movimiento ($\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$), ¡la cantidad de movimiento *no* se conserva en el segundo sistema! Si estamos convencidos de que el principio de relatividad y la transformación de Lorentz son correctos, la única forma de salvar la conservación de la cantidad de movimiento es generalizar la *definición* de cantidad de movimiento.

No deduciremos la generalización relativista correcta de la cantidad de movimiento, pero el resultado es el siguiente. Suponga que la masa medida de una partícula resulta ser m cuando está en reposo con respecto a nosotros: a menudo llamamos a m **masa**

37.20 Gráfica de la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula de masa en reposo m en función de la rapidez v. También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos sólo cuando la rapidez es mucho menor que c.



en reposo. Utilizaremos el término *partícula material* para designar una partícula cuya masa en reposo es diferente de cero. Cuando una de estas partículas tiene una velocidad $\vec{v}$, su **cantidad de movimiento relativista** $\vec{p}$ es

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{(cantidad de movimiento relativista)} \tag{37.27}$$

Cuando la rapidez v de la partícula es mucho menor que c, esto es aproximadamente igual a la expresión newtoniana $\vec{p} = m\vec{v}$, sin embargo, en general, la magnitud de la cantidad de movimiento es mayor que mv (figura 37.20). De hecho, conforme v tiende a c, la cantidad de movimiento tiende a infinito.

Relatividad, segunda ley de Newton y masa relativista

¿Qué hay de la generalización relativista de la segunda ley de Newton? En la mecánica newtoniana la forma más general de la segunda ley es

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{37.28}$$

Es decir, la fuerza total $\vec{F}$ sobre una partícula es igual a la tasa de cambio de su cantidad de movimiento con respecto al tiempo. Los experimentos muestran que este resultado conserva su validez en la mecánica relativista, siempre y cuando se utilice la cantidad de movimiento relativista dada por la ecuación (37.27). Es decir, la generalización correcta de la segunda ley de Newton desde la perspectiva relativista es

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{37.29}$$

Puesto que la cantidad de movimiento ya no es directamente proporcional a la velocidad, la tasa de cambio de la cantidad de movimiento ha dejado de ser directamente proporcional a la aceleración. En consecuencia, *una fuerza constante no produce una aceleración constante.* Por ejemplo, cuando la fuerza neta y la velocidad están dirigidas a lo largo del eje x, la ecuación (37.29) da

$$F = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}a \qquad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ a lo largo de la misma línea}) \tag{37.30}$$

donde a es la aceleración, también a lo largo del eje x. Al despejar la aceleración a de la ecuación (37.30) se obtiene

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

Vemos que, a medida que la rapidez de una partícula aumenta, la aceleración provocada por una fuerza dada *disminuye* constantemente. Conforme la rapidez tiende a c, la aceleración tiende a cero, sin importar cuán intensa sea la fuerza que se aplica. Por lo tanto, es imposible acelerar una partícula con una masa en reposo diferente de cero a una rapidez igual o mayor que c. De nuevo vemos que la rapidez de la luz en el vacío representa un último límite de rapidez.

A veces se interpreta la ecuación (37.27) de la cantidad de movimiento relativista en el sentido de que una partícula que se desplaza con rapidez experimenta un aumento de masa. Si la masa a velocidad nula (la masa en reposo) se denota con m, entonces la "masa relativista" m_{rel} es

$$m_{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De hecho, cuando se considera el movimiento de un sistema de partículas (como las moléculas en rápido movimiento de un gas ideal en un recipiente inmóvil), la masa total en reposo del sistema es la suma de las masas relativistas de las partículas, no la suma de sus masas en reposo.

Sin embargo, si se aplica a ciegas, el concepto de masa relativista presenta escollos. Como indica la ecuación (37.29), la generalización relativista de la segunda ley de Newton *no* es $\vec{F} = m_{\text{rel}}\vec{a}$, y en la sección 37.8 demostraremos que la energía ciné-

tica relativista de una partícula *no* es $K = \frac{1}{2}m_{\text{rel}}v^2$. El uso de la masa relativista tiene partidarios y detractores, algunos de ellos muy enérgicos en sus opiniones. En la mayoría de los casos tendremos que tratar con partículas individuales, por lo que haremos a un lado la controversia y utilizaremos la ecuación (37.27) como la definición generalizada de cantidad de movimiento con m como una constante de cada partícula, independiente de su estado de movimiento.

Utilizaremos la abreviatura

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Empleamos esta abreviatura en la sección 37.3 con u en vez de v, la rapidez relativa de dos sistemas de coordenadas. En el caso que nos ocupa, v es la rapidez de una partícula en un sistema de coordenadas determinado, es decir, la rapidez del *marco en reposo* de la partícula con respecto a ese sistema. En términos de γ, las ecuaciones (37.27) y (37.30) se transforman en

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma m\vec{\boldsymbol{v}} \qquad \text{(cantidad de movimiento relativista)} \tag{37.31}$$

$$F = \gamma^3 ma \qquad (\vec{\boldsymbol{F}} \text{ y } \vec{\boldsymbol{v}} \text{ a lo largo de la misma línea}) \tag{37.32}$$

En los aceleradores lineales (que se utilizan tanto en medicina como en física nuclear y de partículas elementales; véase la figura 37.11), la fuerza neta $\vec{\boldsymbol{F}}$ y la velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$ de la partícula acelerada están dirigidas a lo largo de la misma recta. Pero durante la mayor parte de la trayectoria en casi todos los aceleradores *circulares* la partícula tiene un movimiento circular uniforme con rapidez constante v. En este caso la fuerza total y la velocidad son perpendiculares; por lo tanto, la fuerza no puede realizar trabajo sobre la partícula y la energía cinética y la rapidez permanecen constantes. En consecuencia, el denominador de la ecuación (37.29) es constante, y se obtiene lo siguiente:

$$F = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}a = \gamma ma \qquad (\vec{\boldsymbol{F}} \text{ y } \vec{\boldsymbol{v}} \text{ perpendiculares}) \tag{37.33}$$

Recuerde (sección 3.4) que si la partícula se mueve en círculo, la fuerza neta y la aceleración están dirigidas hacia adentro a lo largo del radio r, y $a = v^2/r$.

¿Qué ocurre en el caso general en el que $\vec{\boldsymbol{F}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ no están a lo largo de una misma recta ni tampoco son perpendiculares? En tal caso podemos resolver la fuerza total $\vec{\boldsymbol{F}}$ en cualquier instante en sus componentes paralela y perpendicular a $\vec{\boldsymbol{v}}$. La aceleración resultante tendrá componentes correspondientes obtenidas de las ecuaciones (37.32) y (37.33). Puesto que los factores γ^3 y γ son diferentes, las componentes de la aceleración no serán proporcionales a las componentes de la fuerza neta. Es decir, *a menos que la fuerza neta sobre una partícula relativista esté a lo largo de la misma recta que la velocidad de la partícula, o bien, sea perpendicular a ella, los vectores de fuerza total y de aceleración no son paralelos.*

Ejemplo 37.10 Dinámica relativista de un electrón

Un electrón (masa en reposo $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg; carga $= -1.60 \times 10^{-19}$ C) se desplaza en sentido opuesto a un campo eléctrico de magnitud $E = 5.00 \times 10^5$ N/C. Todas las demás fuerzas son insignificantes en comparación con la fuerza del campo eléctrico. *a*) Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento y de la aceleración en los instantes cuando $v = 0.010c$, $0.90c$ y $0.99c$. *b*) Determine las aceleraciones correspondientes si una fuerza de la misma magnitud es perpendicular a la velocidad.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Además de las expresiones de esta sección referentes a la cantidad de movimiento y la aceleración relativistas, necesitamos la relación entre fuerza eléctrica y campo eléctrico del capítulo 21.

PLANTEAR: En el inciso *a*) se aplica la ecuación (37.31) para determinar la magnitud de la cantidad de movimiento, y la ecuación (37.32) para calcular la magnitud de la aceleración debida a una fuerza a lo largo de la dirección de la velocidad. En el inciso *b*) la fuerza es perpendicular a la velocidad; por lo tanto, se aplica la ecuación (37.33) para determinar la magnitud de la aceleración.

EJECUTAR: *a*) Para determinar la magnitud de la cantidad de movimiento y la magnitud de la aceleración, necesitamos los valores de $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ correspondientes a cada uno de los tres valores de rapidez. Encontramos que $\gamma = 1.00$, 2.29 y 7.09. Los valores de la magnitud p de la cantidad de movimiento son

$$\begin{aligned} p_1 &= \gamma_1 m v_1 \\ &= (1.00)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.010)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s}) \\ &= 2.7 \times 10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \text{ a } v_1 = 0.010c \\ p_2 &= (2.29)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.90)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s}) \\ &= 5.6 \times 10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \text{ a } v_2 = 0.90c \end{aligned}$$

continúa

$$p_3 = (7.09)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.99)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})$$
$$= 1.9 \times 10^{-21}\,\text{kg}\cdot\text{m/s a } v_3 = 0.99c$$

De acuerdo con el capítulo 21, la magnitud de la fuerza sobre el electrón es

$$F = |q|E = (1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})(5.00 \times 10^5\,\text{N/C})$$
$$= 8.00 \times 10^{-14}\,\text{N}$$

Según la ecuación (37.32), $a = F/\gamma^3 m$. Cuando $v = 0.010c$ y $\gamma = 1.00$,

$$a_1 = \frac{8.00 \times 10^{-14}\,\text{N}}{(1.00)^3(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})} = 8.8 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2$$

Las aceleraciones a los dos valores más altos de rapidez son más pequeñas por factores de γ^3:

$$a_2 = 7.3 \times 10^{15}\,\text{m/s}^2 \qquad a_3 = 2.5 \times 10^{14}\,\text{m/s}^2$$

Estas últimas dos aceleraciones representan sólo el 8.3% y el 0.28%, respectivamente, de los valores que predice la mecánica no relativista.

b) De acuerdo con la ecuación (37.33), $a = F/\gamma m$ si $\vec{F}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Cuando $v = 0.010c$ y $\gamma = 1.00$,

$$a_1 = \frac{8.00 \times 10^{-14}\,\text{N}}{(1.00)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})} = 8.8 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2$$

Las aceleraciones a los dos valores más altos de rapidez son más pequeñas por un factor de γ:

$$a_2 = 3.8 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2 \qquad a_3 = 1.2 \times 10^{16}\,\text{m/s}^2$$

Estas aceleraciones son mayores que las correspondientes del inciso *a*) por factores de γ^2.

EVALUAR: Nuestros resultados del inciso *a*) indican que, cuando la rapidez es mayor, los valores relativistas de cantidad de movimiento difieren cada vez más con respecto a los valores no relativistas calculados con base en $p = mv$. Advierta que la cantidad de movimiento a $0.99c$ es más de tres veces mayor que a $0.90c$ por el aumento del factor γ.

Nuestros resultados también indican que la aceleración declina con gran rapidez conforme v se aproxima a c. En el Stanford Linear Accelerator Center (Centro del Acelerador Lineal de Stanford), se utiliza una fuerza eléctrica prácticamente constante para acelerar electrones a una rapidez apenas ligeramente menor que c. Si la aceleración fuera constante como predice la mecánica newtoniana, se alcanzaría esta rapidez luego de que los electrones hubieran recorrido tan sólo 1.5 cm. De hecho, en virtud de la disminución de la aceleración con la rapidez, se necesita una longitud de trayectoria de 3 km.

Evalúe su comprensión de la sección 37.7 De acuerdo con la mecánica relativista, cuando se duplica la rapidez de una partícula, la magnitud de su cantidad de movimiento aumenta en i) un factor de 2; ii) un factor mayor de 2; iii) un factor entre 1 y 2 que depende de la masa de la partícula.

37.8 Trabajo y energía relativistas

Cuando formulamos la relación entre trabajo y energía cinética en el capítulo 6, aplicamos las leyes de Newton del movimiento. Para generalizar estas leyes conforme al principio de relatividad, necesitamos una generalización correspondiente de la ecuación de la energía cinética.

Energía cinética relativista

Aplicamos el teorema de trabajo y energía, comenzando por la definición de trabajo. Cuando la fuerza neta y el desplazamiento tienen la misma dirección, el trabajo efectuado por esa fuerza es $W = \int F\,dx$. En seguida sustituimos la expresión correspondiente a F de la ecuación (37.30), la versión relativista aplicable de la segunda ley de Newton. Al desplazar una partícula de masa en reposo m del punto x_1 al punto x_2,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma\,dx}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \tag{37.34}$$

Para deducir la expresión generalizada de la energía cinética K en función de la rapidez v, sería conveniente convertir ésta en una integral con respecto a v. Antes, sin embargo, recordemos que la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total realizado sobre ella al llevarla del reposo a la rapidez v: $K = W$. Por lo tanto, fijamos la rapidez en cero en el punto x_1 y en v en el punto x_2. Para no confundir la variable de integración con la rapidez final, cambiamos v por v_x en la ecuación (37.34). Es decir, v_x es la componente x variable de la velocidad de la partícula cuando la fuerza neta la acelera del reposo a una rapidez v. Asimismo, entendemos que dx y dv_x son los cambios infinitesimales de x y v_x, respectivamente, en el intervalo de tiempo dt. Puesto que $v_x = dx/dt$ y $a = dv_x/dt$, podemos reescribir $a\,dx$ de la ecuación (37.34) como

$$a\,dx = \frac{dv_x}{dt}\,dx = dx\frac{dv_x}{dt} = \frac{dx}{dt}\,dv_x = v_x dv_x$$

Al hacer estas sustituciones obtenemos lo siguiente:

$$K = W = \int_0^v \frac{mv_x dv_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} \tag{37.35}$$

Podemos evaluar esta integral mediante un simple cambio de variable; el resultado final es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \qquad \text{(energía cinética relativista)} \tag{37.36}$$

Conforme v tiende a c, la energía cinética tiende a ser infinita. Si la ecuación (37.36) es correcta, también debe tender a la expresión newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$ cuando v es mucho más pequeña que c (véase la figura 37.21). Para verificar esto, expandimos el radical mediante el teorema del binomio en la forma

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n(n - 1)x^2/2 + \cdots$$

En nuestro caso, $n = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$, y obtenemos

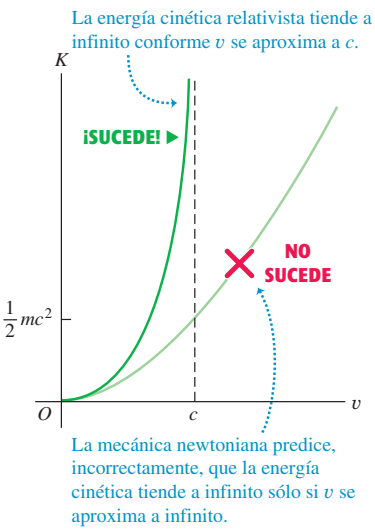
$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

Combinando esto con $K = (\gamma - 1)mc^2$, encontramos que

$$\begin{aligned} K &= \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots - 1\right)mc^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \cdots \end{aligned} \tag{37.37}$$

Cuando v es mucho menor que c, todos los términos de la serie en la ecuación (37.37), salvo el primero, son insignificantemente pequeños, y obtenemos la expresión newtoniana $\frac{1}{2}mv^2$.

37.21 Gráfica de la energía cinética de una partícula de masa en reposo m en función de la rapidez v. También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos sólo cuando la rapidez es mucho menor que c.



Energía en reposo y $E = mc^2$

La ecuación (37.36) de la energía cinética de una partícula en movimiento incluye un término de energía, $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que depende del movimiento y un segundo término de energía mc^2 que es independiente del movimiento. Al parecer, la energía cinética de una partícula es la diferencia entre cierta **energía total** E y una energía mc^2 que tiene incluso cuando está en reposo. Por consiguiente, podemos reformular la ecuación (37.36) como

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \qquad \text{(energía total de una partícula)} \tag{37.38}$$

En el caso de una partícula en reposo ($K = 0$), vemos que $E = mc^2$. La energía mc^2 asociada con la masa en reposo m, y no con el movimiento, se conoce como la **energía en reposo** de la partícula.

De hecho, tenemos pruebas experimentales directas de que la energía en reposo existe realmente. El ejemplo más simple es la desintegración de un *pión* neutro. Se trata de una partícula subatómica de masa en reposo m_π; cuando se desintegra, desaparece y en su lugar aparece radiación electromagnética. Si un pión neutro no tiene energía cinética antes de desintegrarse, la energía total de la radiación una vez que se ha desintegrado resulta ser igual a exactamente $m_\pi c^2$. En muchas otras transformaciones de partículas fundamentales, la suma de las masas en reposo de las partículas cambia. En todos los casos hay un cambio energético correspondiente, el cual concuerda con la supuesta energía en reposo mc^2 asociada con una masa en reposo m.

Históricamente, los principios de conservación de la masa y de la energía se descubrieron de modo muy independiente. La teoría de la relatividad muestra que se trata en realidad de dos casos especiales de un solo principio de conservación más amplio, el *principio de conservación de la masa y la energía.* En ciertos fenómenos físicos, ni

la suma de las masas en reposo de las partículas ni la energía total distinta de la energía en reposo se conservan por separado, pero hay un principio de conservación más general: en un sistema aislado, cuando la suma de las masas en reposo cambia, siempre hay un cambio equivalente a $1/c^2$ veces la energía total distinta de la energía en reposo. Este cambio es de la misma magnitud que el cambio de la suma de las masas en reposo, aunque de signo opuesto.

Esta ley más general de conservación de la masa y la energía es el principio fundamental en el que se basa la generación de energía por medio de reacciones nucleares. Cuando un núcleo de uranio sufre fisión en un reactor nuclear, la suma de las masas en reposo de los fragmentos resultantes es *menor que* la masa en reposo del núcleo original. Se libera una cantidad de energía equivalente al producto de la disminución de masa por c^2. La mayor parte de esta energía se puede utilizar para producir vapor de agua y con él mover turbinas para generar energía eléctrica (figura 37.22).

37.22 Aunque la sala de control de una central nucleoeléctrica es muy compleja, el principio físico en el que se basa el funcionamiento de la central es sencillo: parte de la energía en reposo de los núcleos atómicos que se convierte en energía térmica, con la cual se produce vapor de agua para impulsar generadores eléctricos.

También podemos relacionar directamente la energía total E de una partícula (energía cinética más energía en reposo) con su cantidad de movimiento combinando la ecuación (37.27) de la cantidad de movimiento relativista y la ecuación (37.38) de la energía total para eliminar la velocidad de la partícula. El procedimiento más simple consiste en reformular estas ecuaciones como sigue:

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{p}{mc}\right)^2 = \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

Restando la segunda de éstas de la primera y reorganizando los términos hallamos que

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \qquad \text{(energía total, energía en reposo y cantidad de movimiento)} \qquad (37.39)$$

Vemos una vez más que, en el caso de una partícula en reposo ($p = 0$), $E = mc^2$.

La ecuación (37.39) también sugiere que una partícula puede tener energía y cantidad de movimiento incluso cuando carece de masa en reposo. En tal caso, $m = 0$ y

$$E = pc \qquad \text{(cero masa en reposo)} \qquad (37.40)$$

De hecho, existen partículas con masa en reposo nula. Estas partículas siempre viajan a la rapidez de la luz en el vacío. Un ejemplo es el *fotón,* el cuanto de radiación electromagnética (que se explicará en el capítulo 38). Los fotones son emitidos y absorbidos durante cambios de estado de un sistema atómico o nuclear, cuando la energía y la cantidad de movimiento del sistema cambian.

Ejemplo 37.11 Electrones con mucha energía

a) Determine la energía en reposo de un electrón ($m = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, $q = -e = -1.602 \times 10^{-19}$ C) en joules y en electrón volts. *b*) Calcule la rapidez de un electrón que ha sido acelerado por un campo eléctrico, a partir del reposo, a través de un aumento de potencial de 20.0 kV (representativo de los cinescopios de televisión) o de 5.00 MV (una máquina de rayos x de alto voltaje).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se basa en las ideas de la energía en reposo, la energía cinética relativista y (del capítulo 23) la energía potencial eléctrica.

PLANTEAR: Se utiliza la relación $E = mc^2$ para determinar la energía en reposo, y la ecuación (37.38) para calcular la rapidez que da la energía total indicada.

EJECUTAR: *a*) La energía en reposo es

$$mc^2 = (9.109 \times 10^{-31}\,\text{kg})(2.998 \times 10^8\,\text{m/s})^2 = 8.187 \times 10^{-14}\,\text{J}$$

De acuerdo con la definición del electrón volt de la sección 23.2, y 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J. Con base en esto se encuentra que

$$mc^2 = (8.187 \times 10^{-14}\,\text{J})\frac{1\,\text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\,\text{J}} = 5.11 \times 10^5\,\text{eV} = 0.511\,\text{MeV}$$

b) En cálculos como éste, suele ser conveniente trabajar con la cantidad γ definida a partir de la ecuación (37.7) modificada:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Despejando v de esta ecuación se obtiene

$$v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2}$$

La energía total E del electrón acelerado es su energía en reposo mc^2 y la energía cinética eV_{ba} que gana en virtud del trabajo realizado sobre

él por el campo eléctrico al desplazarlo del punto a al punto b:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + eV_{ba} \quad \text{o bien}$$

$$\gamma = 1 + \frac{eV_{ba}}{mc^2}$$

Un electrón acelerado a través de un aumento de potencial de $V_{ba} = 20.0$ kV gana una cantidad de energía de 20.0 keV; por lo tanto, con respecto a este electrón tenemos que

$$\gamma = 1 + \frac{20.0 \times 10^3\,\text{eV}}{0.511 \times 10^6\,\text{eV}} \quad \text{o bien}$$

$$= 1.039$$

y

$$v = c\sqrt{1 - (1/1.039)^2} = 0.272c$$

$$= 8.15 \times 10^7\,\text{m/s}$$

Al repetir el cálculo con $V_{ba} = 5.00$ MV, encontramos que $eV_{ba}/mc^2 = 9.78$, $\gamma = 10.78$ y $v = 0.996c$.

EVALUAR: Estos resultados tienen sentido. con $V_{ba} = 20.0$ kV, la energía cinética adicional de 20.0 keV es menos del 4% de la energía en reposo de 0.511 MeV, y la rapidez final es aproximadamente una cuarta parte de la rapidez de la luz. Con $V_{ba} = 5.00$ MV, la energía cinética adicional de 5.00 MeV es mucho mayor que la energía en reposo, y la rapidez se aproxima a c.

CUIDADO **Tres energías del electrón** El electrón que se aceleró a partir del reposo a través de un aumento de potencial de 5.00 MV tenía una energía cinética de 5.00 MeV. Por convención, a un electrón como éste le llamamos "electrón de 5.00 MeV". Un electrón de 5.00 MeV tiene una energía en reposo de 0.511 MeV (como todos los electrones), una energía cinética de 5.00 MeV y una energía total de 5.51 MeV. Tenga cuidado de no confundir estas energías.

Ejemplo 37.12 Choque relativista

Dos protones (cada uno con $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se desplazan inicialmente con la misma rapidez en sentidos opuestos, y siguen existiendo después de un choque frontal que produce además un pión neutro de masa $m = 2.40 \times 10^{-28}$ kg (figura 37.23). Si los protones y el pión están en reposo después de la colisión, determine la rapidez inicial de los protones. La energía se conserva durante el choque.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se basa en la idea de la energía total relativista, la cual se conserva en el choque.

PLANTEAR: Podemos igualar la energía total (desconocida) de los dos protones antes del choque con la energía en reposo combinada de los dos protones y el pión después de la colisión. Luego despejamos la rapidez de cada protón de la ecuación (37.38).

EJECUTAR: La energía total de cada protón antes del choque es γMc^2. Por la conservación de la energía,

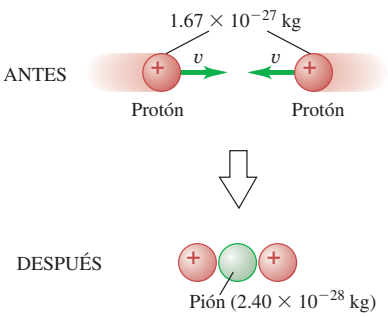
$$2(\gamma Mc^2) = 2(Mc^2) + mc^2$$

$$\gamma = 1 + \frac{m}{2M} = 1 + \frac{2.40 \times 10^{-28}\,\text{kg}}{2(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})} = 1.072$$

Por lo tanto,

$$v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2} = 0.360c$$

37.23 En este choque la energía cinética de los dos protones se transforma en la energía en reposo de una nueva partícula, un pión.



EVALUAR: La energía cinética inicial de cada protón es $(\gamma - 1)\,Mc^2 = 0.072Mc^2$. La energía en reposo de un protón es de 938 MeV; por lo tanto, la energía cinética es (0.072)(938 MeV) = 67.5 MeV. (Se trata de "protones de 67.5 MeV".) Usted puede verificar que la energía en reposo del pión es el doble de esta cantidad, esto es, 135 MeV. Toda la energía cinética "perdida" en esta colisión totalmente inelástica se transforma en la energía en reposo del pión.

Evalúe su comprensión de la sección 37.8 Se acelera un protón a partir del reposo mediante una fuerza constante que siempre apunta en la dirección del movimiento de la partícula. En comparación con la cantidad de energía cinética que gana el protón durante el primer metro de su trayecto, ¿cuánta energía cinética gana el protón durante un metro de trayecto mientras se desplaza al 99% de la rapidez de la luz? i) La misma cantidad; ii) una mayor cantidad; iii) una menor cantidad.

37.9 Mecánica newtoniana y relatividad

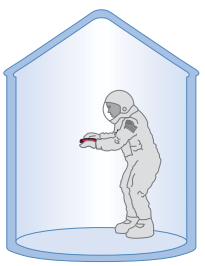
Los cambios radicales que exige el principio de relatividad llegan hasta las raíces mismas de la mecánica newtoniana, incluyendo los conceptos de longitud y tiempo, las ecuaciones del movimiento y los principios de conservación. Así pues, podría parecer

que hemos destruido los cimientos sobre los que se funda la mecánica newtoniana. En cierto sentido esto es verdad; no obstante, la formulación newtoniana sigue siendo exacta siempre que la rapidez sea pequeña en comparación con la rapidez de la luz en el vacío. En tales casos, la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y las modificaciones de las leyes del movimiento son tan minúsculas que resulta imposible observarlas. De hecho, cada uno de los principios de la mecánica newtoniana sobrevive como un caso especial de la formulación relativista, de carácter más general.

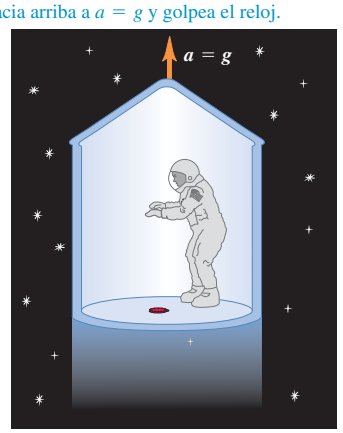
Las leyes de la mecánica newtoniana no son *erróneas;* están *incompletas.* Son un caso límite de la mecánica relativista. Son *aproximadamente* correctas cuando la rapidez es pequeña en comparación con c, y se consideran exactamente correctas en el límite cuando toda rapidez tiende a cero. Así, vemos que la relatividad no destruye totalmente las leyes de la mecánica newtoniana, sino que las *generaliza.* Las leyes de Newton descansan sobre una base muy sólida de pruebas experimentales, y sería muy extraño que se propusiera una nueva teoría que fuera incongruente con estas pruebas. Esto es un fenómeno que se repite comúnmente en el desarrollo de la teoría física. Siempre que una teoría nueva entra en conflicto parcial con una teoría establecida con anterioridad, la nueva teoría debe hacer las mismas predicciones que la antigua en los campos donde la teoría antigua está respaldada por pruebas experimentales. Toda teoría física nueva debe pasar con éxito esta prueba, conocida como el **principio de correspondencia**.

37.24 Sin información acerca del exterior de la nave, el astronauta es incapaz de distinguir la situación b) de la situación c).

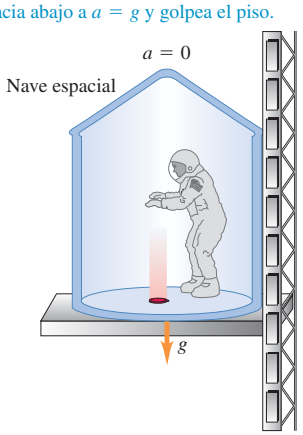
a) Un astronauta deja caer su reloj en la nave espacial.



b) En el espacio sin gravedad el piso se acelera hacia arriba a $a = g$ y golpea el reloj.



c) En la superficie terrestre el reloj se acelera hacia abajo a $a = g$ y golpea el piso.



Teoría general de la relatividad

En este punto podríamos preguntamos si la teoría especial de la relatividad es la última palabra en materia de mecánica o si son posibles o necesarias generalizaciones *adicionales.* Por ejemplo, los marcos inerciales han ocupado una posición privilegiada en nuestro análisis. ¿Es posible ampliar el principio de relatividad para abarcar también los marcos no inerciales?

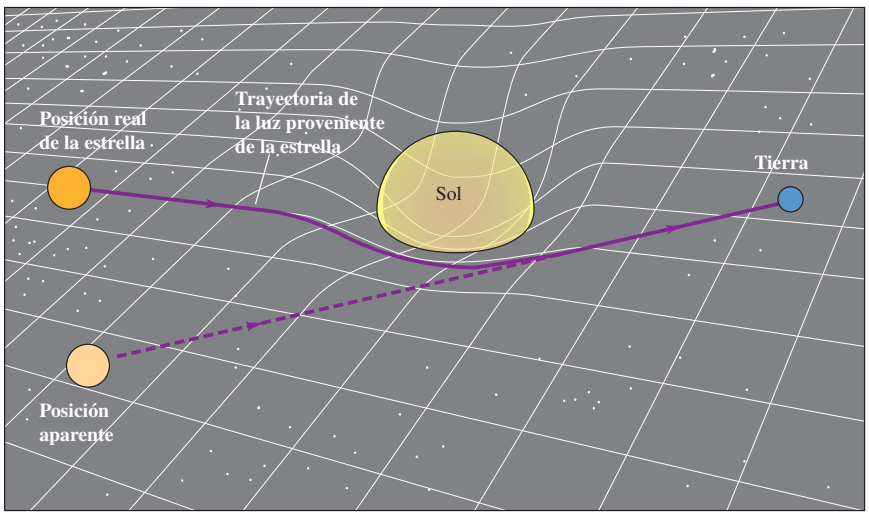
He aquí un ejemplo que ilustra algunas de las implicaciones de esta pregunta. Una estudiante decide lanzarse por las cataratas del Niágara encerrada en una gran caja de madera. Durante su caída libre, la estudiante puede flotar en el aire en el interior de la caja. No cae al piso porque tanto ella como la caja están en caída libre con una aceleración hacia abajo de 9.8 m/s^2. Pero otra interpretación, desde el punto de vista de la estudiante, es que no cae al piso porque su interacción gravitatoria con la Tierra se ha suspendido de repente. En tanto permanezca en la caja y en caída libre, la estudiante no puede saber si efectivamente se halla en caída libre o si la interacción gravitatoria ha desaparecido.

Un problema semejante se presenta en una estación espacial en órbita alrededor de la Tierra. Los objetos que se encuentran en la estación espacial *parecen* ingrávidos, pero sin mirar afuera de la estación no hay forma de saber si la gravedad se ha desactivado o si la estación y todo su contenido se están acelerando hacia el centro de la Tierra. La figura 37.24 ilustra un argumento análogo con respecto a una nave espacial que no se halla en caída libre, pero que pudiera estar acelerándose con respecto a un marco inercial o encontrarse en reposo en la superficie terrestre.

Estas observaciones constituyen la base de la **teoría general de la relatividad** de Einstein. Si no podemos distinguir experimentalmente entre un campo gravitacional uniforme en un lugar en particular y un marco de referencia uniformemente acelerado, entonces no puede haber una distinción real entre los dos. Prosiguiendo con este concepto, podemos tratar de representar *cualquier* campo gravitacional en términos de características especiales del sistema de coordenadas. Resulta que esto exige revisiones aún más radicales de nuestros conceptos de espacio y tiempo que la teoría especial de la relatividad. En la teoría general de la relatividad, las propiedades geométricas del espacio se ven afectadas por la presencia de materia (figura 37.25).

La teoría general de la relatividad ha pasado con éxito varias pruebas experimentales, entre ellas tres que propuso el mismo Einstein. Una prueba tiene que ver con la comprensión de la rotación de los ejes de la órbita elíptica del planeta Mercurio, conocida como *precesión del perihelio.* (El perihelio es el punto de máxima aproximación al Sol.) Una segunda prueba se refiere a la aparente flexión de los rayos luminosos procedentes de estrellas distantes cuando pasan cerca del Sol. La tercera prueba es el

37.25 Representación bidimensional del espacio curvo. Imaginamos que el espacio (un plano) es deformado como se muestra por un objeto de gran masa (el Sol). La luz proveniente de una estrella distante (línea continua) sigue la superficie deformada en su camino hacia la Tierra. La línea punteada indica la dirección de la que *parece* provenir la luz. Se ha exagerado considerablemente el efecto; en el caso del Sol, la desviación máxima es de sólo 0.00048°.



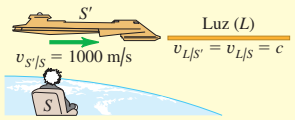
desplazamiento gravitacional al rojo, el aumento de longitud de onda de la luz que se emite desde una fuente de masa muy grande. Es difícil poner a prueba ciertos detalles de la teoría general, pero esta teoría ha desempeñado un papel fundamental en las investigaciones de la formación y evolución de las estrellas, los agujeros negros y la evolución del universo.

La teoría general de la relatividad tal vez parezca un conocimiento un tanto exótico con escasa aplicación práctica. De hecho, esta teoría desempeña un papel esencial en el sistema de posicionamiento global (GPS, por las siglas de *global positioning system*), que hace posible determinar la posición de un objeto en la superficie terrestre dentro de un margen de unos cuantos metros utilizando un receptor manual (figura 37.26). El corazón del sistema GPS es un conjunto de más de una docena de satélites que siguen órbitas muy precisas. Cada satélite emite señales de radio cronometradas con sumo cuidado, y un receptor GPS detecta simultáneamente las señales provenientes de varios satélites. El receptor calcula entonces la diferencia de tiempo entre el momento en que se emitió la señal y el momento en que ésta se recibió, y utiliza esa información para calcular la posición del receptor. Para asegurar el adecuado cronometraje de las señales, es necesario incluir correcciones posibles gracias a la teoría especial de la relatividad (porque los satélites se desplazan en relación con el receptor en Tierra), así como a la teoría general (porque los satélites están más elevados con respecto al campo gravitacional de la Tierra que el receptor). Las correcciones debidas a la relatividad son pequeñas —menores que una parte en 10^9—, pero son cruciales para la gran precisión del sistema GPS.

37.26 Un receptor GPS utiliza señales de radio provenientes de satélites GPS en órbita para determinar su posición. Para tomar en cuenta los efectos de la relatividad, el receptor debe sintonizar una frecuencia ligeramente más alta (10.23 MHz) que la frecuencia emitida por los satélites (10.22999999543 MHz).

CAPÍTULO 37 RESUMEN

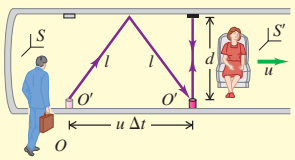
Invariabilidad de las leyes físicas, simultaneidad: Todas las leyes fundamentales de la física tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. La rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales y es independiente del movimiento de la fuente. La simultaneidad no es un concepto absoluto; los sucesos que son simultáneos en un marco de referencia no lo son necesariamente en un segundo marco en movimiento con respecto al primero.



Dilatación del tiempo: Si dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial en un marco de referencia en particular, el intervalo de tiempo Δt_0 entre los sucesos, medido en ese marco, se denomina intervalo de tiempo propio. Si este marco se desplaza con velocidad constante u con respecto a un segundo marco, el intervalo de tiempo Δt entre los sucesos observados en el segundo marco es más largo que Δt_0. Este efecto se llama dilatación del tiempo. (Véanse los ejemplos del 37.1 al 37.3.)

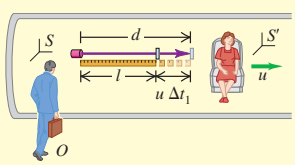
$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\,\Delta t_0 \qquad (37.6),\ (37.8)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (37.7)$$



Contracción de longitud: Si dos puntos se hallan en reposo en un marco de referencia en particular, la distancia l_0 entre los puntos medida en ese marco es una longitud propia. Si este marco se desplaza con velocidad constante u con respecto a un segundo marco, y si las distancias se miden paralelamente al movimiento, la distancia l entre los puntos medida en el segundo marco es más corta que l_0. Este efecto se llama contracción de la longitud. (Véanse los ejemplos del 37.4 al 37.6.)

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{l_0}{\gamma} \qquad (37.16)$$



Transformaciones de Lorentz: La transformación de coordenadas de Lorentz relaciona las coordenadas y el tiempo de un suceso en un marco inercial S con las coordenadas y el tiempo del mismo suceso observado en un segundo marco inercial S' que se desplaza con velocidad u con respecto al primero. Con respecto a un movimiento unidimensional, las velocidades v_x en S y v'_x en S' de una partícula están relacionadas de acuerdo con la transformación de velocidades de Lorentz. (Véanse los ejemplos 37.7 y 37.8.)

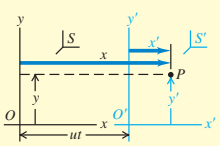
$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2) \qquad (37.21)$$

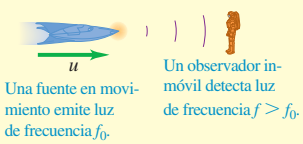
$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \qquad (37.22)$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \qquad (37.23)$$



El efecto Doppler de las ondas electromagnéticas: El efecto Doppler es el desplazamiento de la frecuencia de la luz proveniente de una fuente, debida al movimiento relativo de la fuente y el observador. La ecuación (37.25) proporciona la frecuencia recibida f en términos de la frecuencia emitida f_0. (Véase el ejemplo 37.9.)

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}}\,f_0 \qquad (37.25)$$



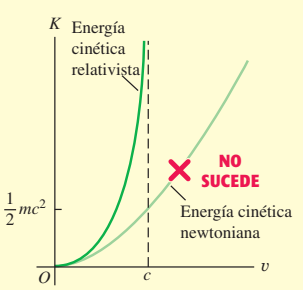
Cantidad de movimiento relativista y energía: Con respecto a una partícula de masa en reposo m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, la cantidad de movimiento relativista $\vec{p}$ viene dada por la ecuación (37.27) o (37.31), y la energía cinética relativista K, por la ecuación (37.36). La energía total E es la suma de la energía cinética y la energía en reposo mc^2. La energía total también se puede expresar en términos de la magnitud de la cantidad de movimiento p y la masa en reposo m. (Véanse los ejemplos del 37.10 al 37.12.)

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v} \qquad (37.27),\ (37.31)$$

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \qquad (37.36)$$

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \qquad (37.38)$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \qquad (37.39)$$



La mecánica newtoniana y las teorías especial y general de la relatividad: La teoría especial de la relatividad es una generalización de la mecánica newtoniana. Todos los principios de la mecánica newtoniana están presentes como casos límite cuando toda rapidez es pequeña en comparación con c. Una generalización adicional para incluir los marcos de referencia no inerciales y su relación con los campos gravitacionales desemboca en la teoría general de la relatividad.

Términos clave

teoría especial de la relatividad, *1268*
principio de relatividad, *1269*
transformación galileana de coordenadas, *1271*
simultaneidad, *1272*
suceso, *1272*
dilatación del tiempo, *1275*
tiempo propio, *1276*
paradoja de los gemelos, *1278*
longitud propia, *1280*
contracción de la longitud, *1280*
transformaciones de Lorentz, *1283*
espacio-tiempo, *1284*
coordenadas de espacio-tiempo, *1284*
masa en reposo, *1289*
cantidad de movimiento relativista, *1290*
energía total, *1293*
energía en reposo, *1293*
principio de correspondencia, *1296*
teoría general de la relatividad, *1296*

Respuesta a la pregunta de inicio del capítulo ?

No. Mientras que la rapidez de la luz c es el "límite de rapidez" último para cualquier partícula, *no* existe un límite superior de la energía cinética de una partícula (véase la figura 37.21). A medida que la rapidez se aproxima a c, un incremento pequeño de rapidez corresponde a un gran aumento de energía cinética.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

37.1 Respuestas: *a*) i) *b*) no Usted también mide un frente de onda esférico que se expande con la misma rapidez c en todas direcciones. Esto es consecuencia del segundo postulado de Einstein. El frente de onda que usted mide *no* está centrado en la posición actual de la nave espacial, sino en el punto P donde se hallaba la nave en el instante en que emitió la pulsación luminosa. Por ejemplo, suponga que la nave se desplazaba con una rapidez de $c/2$. Cuando su reloj indica que ha transcurrido un tiempo t a partir de la emisión de la pulsación luminosa, sus mediciones indican que el frente de onda es una esfera de radio ct centrada en P, y que la nave se halla a una distancia de $ct/2$ con respecto a P.

37.2 Respuesta: iii) En el marco de referencia de Magda, los dos sucesos (el reloj de Buenos Aires marca el mediodía y el reloj de Montevideo marca el mediodía) no son simultáneos. La figura 37.5 muestra que el suceso hacia el frente del vagón de monorriel ocurre primero. Dado que el vagón de monorriel viaja hacia Montevideo, ese reloj marcó el mediodía antes que el de Buenos Aires. Por lo tanto, según Magda, es después del mediodía en Montevideo.

37.3 Respuestas: *a*) ii), *b*) ii) El enunciado de que los cronómetros en movimiento marchan con lentitud se refiere a cualquier cronómetro que se mueve en relación con un observador. María y su cronómetro se mueven en relación con Samuel, de manera que Samuel mide que el cronómetro de María marcha con lentitud y que marca unos cuantos segundos menos que su propio cronómetro. Samuel y su cronómetro se mueven en relación con María, así que ella también mide que el cronómetro de Samuel marcha con lentitud. La medición de cada uno de los observadores es correcta para su propio marco de referencia. *Ambos* observadores concluyen que un cronómetro en movimiento marcha con lentitud. Esto es congruente con el principio de la relatividad (véase la sección 37.1), que establece que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

37.4 Respuestas: ii), i) y iii) (empate), iv) Usted mide que la longitud en reposo del metro de madera inmóvil y la longitud contraída de la nave espacial son ambos de 1 metro. La longitud en reposo de la nave espacial es mayor que la longitud contraída que usted mide, así que debe ser mayor que 1 metro. Un observador minúsculo a bordo de la nave espacial mediría una longitud contraída del metro de madera menor de 1 metro. Advierta que en el marco de referencia de usted, la nariz y la parte posterior de la nave espacial pueden alinearse simultáneamente con los dos extremos del metro de madera, ya que en su marco de referencia tienen la misma longitud de 1 metro. En el marco de referencia de la nave espacial estas dos alineaciones no pueden ocurrir de manera simultánea porque el metro de madera es más corto que la nave espacial. La sección 37.2 nos dice que esto no debe sorprendernos; dos sucesos que son simultáneos a los ojos de un observador no pueden ser simultáneos para un segundo observador que se mueve en relación con el primero.

37.5 Respuestas: *a*) P_1, *b*) P_4 *a*) La última de las ecuaciones (37.21) nos indica las veces que se presentan los dos sucesos en S': $t_1' = \gamma(t_1 - ux_1/c^2)$ y $t_2' = \gamma(t_2 - ux_2/c^2)$. En el marco S los dos sucesos ocurren en la misma coordenada x, así que $x_1 = x_2$, y el suceso P_1 ocurre antes que el suceso P_2, de manera que $t_1 < t_2$. Por lo tanto, podemos ver que $t_1' < t_2'$ y que el suceso P_1 también ocurre antes que P_2 en el marco S'. Esto indica que si el suceso P_1 ocurre antes que P_2 en un marco de referencia S donde los dos sucesos ocurren en la misma posición, entonces P_1 ocurre antes que P_2 en cualquier otro marco de referencia que se mueva en relación con S. *b*) En el marco S los dos sucesos ocurren en diferentes coordenadas x, de tal manera que $x_3 < x_4$, y los sucesos P_3 y P_4 ocurren al mismo tiempo, por lo que $t_3 = t_4$. Por lo tanto, podemos ver que $t_3' = \gamma(t_3 - ux_3/c^2)$ es mayor que $t_4' = \gamma(t_4 - ux_4/c^2)$, así que el suceso P_4 ocurre antes que P_3 en el marco S'. Esto nos dice que aun cuando los dos sucesos son simultáneos en el marco S, no necesitan ser simultáneos en un marco que se mueva en relación con S.

37.7 Respuesta: ii) La ecuación (37.27) nos dice que la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula con masa m y rapidez v es $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Si v aumenta en un factor de 2, el numerador mv se incrementa en un factor de 2 y el denominador $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ disminuye. Por lo tanto, p aumenta en un factor mayor que 2. (Advierta que para duplicar la rapidez, el valor inicial de la rapidez debe ser menor que $c/2$. Eso se debe a que la rapidez de la luz es el límite último de rapidez.)

37.8 Respuesta: i) Conforme el protón se desplaza una distancia s, la fuerza constante de magnitud F realiza trabajo $W = Fs$ y aumenta la energía cinética en una cantidad $\Delta K = W = Fs$. Esto es cierto sin importar cuál sea la rapidez del protón antes de desplazarse esa distancia. Por consiguiente, la fuerza constante aumenta la energía cinética del protón en la misma cantidad durante el primer metro de trayecto que durante cualquier metro subsiguiente del trayecto. (Es verdad que conforme el protón se acerca al límite último de c, el aumento en la *rapidez* del protón es cada vez menor con cada metro subsiguiente del trayecto. Sin embargo, no es eso lo que se pregunta.)

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

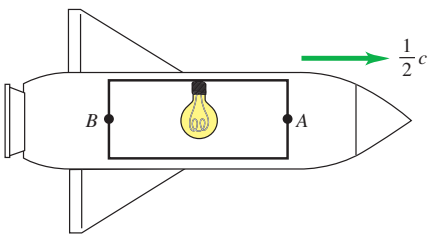
Preguntas para análisis

P37.1. Usted se encuentra sobre una plataforma de ferrocarril observando el paso de un tren de alta velocidad. Se enciende una luz en el interior de uno de los vagones del tren, y poco después se apaga. *a*) ¿Quién puede medir el intervalo de tiempo propio de la duración de la luz: usted o un pasajero a bordo del tren? *b*) ¿Quién puede medir la longitud propia del vagón: usted o un pasajero a bordo del tren? *c*) ¿Quién puede medir la longitud propia de un letrero fijo en un poste de la plataforma de ferrocarril: usted o un pasajero a bordo del tren? En cada caso, explique su respuesta.

P37.2. Si la simultaneidad no es un concepto absoluto, ¿significa esto que debemos desechar el concepto de causalidad? Para que el suceso *A* sea la *causa* del suceso *B, A* debe ocurrir primero. ¿Es posible que en ciertos marcos *A* parezca ser la causa de *B,* y en otros *B* parezca ser la causa de *A?* Explique su respuesta.

P37.3. Un cohete se desplaza hacia la derecha a la mitad de la rapidez de la luz en relación con la Tierra. Una bombilla de luz en el centro de una cabina en el interior del cohete se enciende de repente. Sea la luz que incide con el extremo anterior de la cabina el suceso *A* y la luz que incide con el extremo posterior de la cabina el suceso *B* (figura 37.27). ¿Cuál suceso ocurre primero, el *A* o el *B*, o acaso son simultáneos desde el punto de vista de *a*) un astronauta a bordo del cohete y *b*) una persona en reposo en la Tierra?

Figura **37.27** Pregunta P37.3.



P37.4. ¿Qué sería diferente en la vida diaria si la rapidez de la luz fuese de 10 m/s en vez de 3.00×10^8 m/s?

P37.5. La vida media en Estados Unidos es de alrededor de 70 años. ¿Significa esto que es imposible que una persona promedio viaje a una distancia mayor de 70 años luz de la Tierra? (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.) Explique su respuesta.

P37.6. Usted sostiene una bandeja con forma elíptica. ¿Cómo tendría que moverse usted para que la bandeja pareciera redonda a los ojos de otro observador?

P37.7. Dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial en un marco de referencia inercial determinado y son simultáneos en ese marco. ¿Es posible que no sean simultáneos en un marco inercial diferente? Explique su respuesta.

P37.8. Un tren de gran velocidad pasa por la plataforma ferroviaria. Luis es un pasajero del tren, Adán está de pie en la plataforma del tren, y David va en bicicleta hacia la plataforma en el mismo sentido que viaja el tren. Compare la longitud de un vagón del tren desde la perspectiva de Luis, Adán y David.

P37.9. La teoría de la relatividad fija un límite superior a la rapidez que una partícula puede tener. ¿Existen también límites a la energía y a la cantidad de movimiento de una partícula? Explique su respuesta.

P37.10. Un estudiante afirma que una partícula material siempre debe tener una rapidez menor que la de la luz, en tanto que una partícula sin masa siempre debe desplazarse exactamente a la misma rapidez de la luz. ¿Es esto correcto? Si es así, ¿cómo es que las partículas sin masa, como los fotones y los neutrinos, adquieren esa rapidez? ¿Pueden partir del reposo y acelerarse? Explique su respuesta.

P37.11. La rapidez de la luz con respecto al agua inmóvil es de 2.25×10^8 m/s. Si el agua fluye cerca de nosotros, la rapidez de la luz que medimos depende de la rapidez del agua. ¿Violan estos hechos el segundo postulado de Einstein? Explique su respuesta.

P37.12. Cuando una fuente de luz monocromática se desplaza hacia un observador, su longitud de onda parece ser más corta que el valor medido cuando la fuente está en reposo. ¿Contradice esto la hipótesis de que la rapidez de la luz es la misma para todos los observadores? Explique su respuesta.

P37.13. En principio, ¿tiene más masa un gas caliente que el mismo gas cuando está frío? Explique su respuesta. En la práctica, ¿sería mensurable este efecto? Explique su respuesta.

P37.14. En su opinión, ¿por qué precedió por tantos años la formulación de la mecánica newtoniana a la mecánica relativista, más refinada?

Ejercicios

Sección 37.2 Relatividad de la simultaneidad

37.1. Suponga que los dos rayos que se ilustran en la figura 37.5a son simultáneos para un observador a bordo del tren. Demuestre que *no* son simultáneos para un observador que está en el suelo. De acuerdo con las mediciones de este último observador, ¿cuál de los rayos cae primero?

Sección 37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo

37.2. El muón positivo (μ^+), una partícula inestable, existe en promedio durante 2.20×10^{-6} s (medidos en su propio marco de referencia) antes de desintegrarse. *a*) Si un muón positivo se desplaza con una rapidez de $0.900c$ con respecto al laboratorio, ¿qué vida media se mide en el laboratorio? *b*) ¿Qué distancia media, medida en el laboratorio, recorre la partícula antes de desintegrarse?

37.3. ¿A qué rapidez debe viajar un cohete en relación con la Tierra de manera que el tiempo en el cohete "disminuya" a la mitad de su tasa medida por los observadores en Tierra? ¿Los aviones a propulsión actuales se acercan a esa rapidez?

37.4. Una nave espacial pasa volando cerca de Marte con una rapidez de $0.985c$ con respecto a la superficie del planeta. Cuando la nave está directamente arriba, una luz muy brillante de señales se enciende y luego se apaga en la superficie marciana. De acuerdo con la medición de un observador en Marte, la luz de señales estuvo encendida durante 75.0 μs. *a*) ¿El observador en Marte o el piloto de la nave espacial podrán medir el tiempo propio? *b*) ¿Cuál es la duración de la pulsación luminosa medida por el piloto de la nave espacial?

37.5. El pión negativo (π^-) es una partícula inestable con una vida media de 2.60×10^{-8} s (medida en el marco en reposo del pión). *a*) Si se obliga al pión a viajar con gran rapidez con respecto a un laboratorio, su vida media medida en el laboratorio es de 4.20×10^{-7} s. Calcule la rapidez del pión expresada como fracción de c. *b*) ¿Qué distancia, medida en el laboratorio, recorre el pión durante su vida media?

37.6. Mientras usted dirige su vehículo espacial de servicio con rapidez constante hacia la Luna, un piloto de carreras pasa a su lado en su nave espacial de carreras con una rapidez constante de $0.800c$ con respecto a usted. En el instante en que la nave espacial de carreras pasa ante usted, ambos ponen en marcha los cronómetros en cero. *a*) En el instante en que usted mide que la nave espacial de carreras ha recorrido 1.20×10^8 m luego de pasar al lado de usted, ¿qué tiempo lee el piloto de carreras en su cronómetro? *b*) Cuando el piloto de carreras lee en su cronómetro el valor calculado en el inciso *a*), ¿qué distancia lo separa de usted, según las mediciones de él? *c*) En el instante en que el piloto

de carreras lee en su cronómetro el valor calculado en el inciso *a*), ¿qué tiempo lee usted en el suyo?

37.7. Una nave espacial se aleja volando de la Tierra con una rapidez de 4.80×10^6 m/s con respecto a la Tierra y luego regresa con la misma rapidez. La nave transporta un reloj atómico que ha sido sincronizado cuidadosamente con un reloj idéntico que permanece en reposo en la Tierra. La nave regresa a su punto de partida 365 días (1 año) después, de acuerdo con el reloj que permaneció en la Tierra. ¿Cuál es la diferencia, medida en horas, entre los tiempos transcurridos en los dos relojes? ¿Cuál de los relojes, el que está en la nave o el que permaneció en la Tierra, registra el menor tiempo transcurrido?

37.8. Una nave espacial extraterrestre vuela en lo alto a gran distancia mientras usted se halla en el patio de su casa. Usted ve que su reflector se enciende durante 0.190 s. Según la medición del primer oficial de la nave espacial, el reflector permanece encendido durante 12.0 ms. *a*) ¿Cuál de estos dos tiempos medidos es el tiempo propio? *b*) ¿Cuál es la rapidez de la nave con respecto a la Tierra, expresada como fracción de la rapidez *c* de la luz?

Sección 37.4 Relatividad de la longitud

37.9. Una nave espacial de la Federación Comercial pasa volando cerca del planeta Fulgurante con una rapidez de $0.600c$. Un científico que se encuentra en Fulgurante mide la longitud de la nave en movimiento y encuentra que es de 74.0 m. La nave aterriza poco después en Fulgurante, y el mismo científico mide la longitud de la nave ahora inmóvil. ¿Qué valor obtiene?

37.10. Un metro de madera pasa al lado de usted con gran rapidez. Su movimiento con respecto a usted es paralelo a su eje longitudinal. Si sus mediciones le indican que la longitud del metro en movimiento es de 1.00 ft (1 ft = 0.3048 m), por ejemplo, comparándolo con una regla de 1 ft que se encuentra en reposo con respecto a usted, ¿con qué rapidez se desplaza el metro con respecto a usted?

37.11. ¿Por qué somos bombardeados por los muones? Los muones son partículas subatómicas inestables que se desintegran para convertirse en electrones con una vida media de 2.2 μs. Se producen cuando los rayos cósmicos bombardean la atmósfera superior aproximadamente a 10 km por arriba de la superficie de la Tierra y viajan con una rapidez muy cercana a la de la luz. El problema que nos interesa es por qué vemos algunos de ellos en la superficie terrestre. *a*) ¿Cuál es la distancia máxima que un muón puede viajar durante su vida de 2.2 μs? *b*) De acuerdo con su respuesta en el inciso *a*), parecería que los muones nunca tocan tierra, pero la vida de 2.2 μs se mide en el marco del muón, y los muones viajan muy rápido. A una rapidez de $0.999c$, ¿cuál es la vida media de un muón medida por un observador en reposo sobre la Tierra? ¿Qué distancia viajaría el muón en ese tiempo? ¿Explica este resultado por qué encontramos muones en los rayos cósmicos? *c*) Desde el punto de vista del muón, su vida sigue siendo de sólo 2.2 μs, de manera que ¿cómo logra llegar al suelo? ¿Cuál es el grosor de la atmósfera de 10 km a través de la cual debe viajar el muón, medida desde la perspectiva de este último? ¿Queda claro ahora cómo el muón logra llegar a tierra?

37.12. Un rayo cósmico crea una partícula inestable en las capas altas de la atmósfera. La partícula viaja en línea recta hacia la superficie terrestre con una rapidez de $0.99540c$ con respecto a la Tierra. Las mediciones de un científico que se halla en reposo en la superficie terrestre le indican que la partícula se creó a una altura de 45.0 km. *a*) Medido por el científico, ¿cuánto tiempo tarda la partícula en recorrer los 45.0 km que la separan de la superficie terrestre? *b*) Con base en la fórmula de contracción de la longitud, calcule la distancia del punto donde se creó la partícula a la superficie terrestre medida en el marco de la partícula. *c*) En el marco de la partícula, ¿cuánto tiempo tarda ésta en viajar del punto donde se creó a la superficie terrestre? Calcule este tiempo por medio de la fórmula de dilatación del tiempo y también a partir de la distancia calculada en el inciso *b*). ¿Concuerdan los dos resultados?

37.13. Medida por un observador que está en la Tierra, una pista terrestre para naves espaciales tiene una longitud de 3600 m. *a*) ¿Cuál es la longitud de la pista medida por el piloto de una nave espacial que pasa volando cerca de ella con una rapidez de 4.00×10^7 m/s con respecto a la Tierra? *b*) Un observador que se halla en la Tierra mide el intervalo de tiempo entre el momento en que la nave espacial está directamente arriba de un extremo de la pista y el momento en que está directamente arriba del otro extremo. ¿Qué resultado obtiene? *c*) El piloto de la nave espacial mide el tiempo que le toma viajar de un extremo de la pista al otro. ¿Qué valor obtiene?

Sección 37.5 Transformaciones de Lorentz

37.14. A partir de la ecuación (37.21), obtenga x y t en términos de x' y t', y demuestre que la transformación resultante tiene la misma forma que la original, salvo por un cambio de signo de u.

37.15. Una observadora en el marco S' se aleja hacia la derecha (dirección $+x$) con una rapidez $u = 0.600c$ de una observadora inmóvil en el marco S. La observadora que está en S' mide la rapidez v' de una partícula que se aleja de ella hacia la derecha. Según la medición de la observadora en S, ¿cuál es la rapidez v de la partícula si *a*) $v' = 0.400c$, *b*) $v' = 0.900c$, *c*) $v' = 0.990c$?

37.16. La piloto espacial Magda pasa velozmente cerca de Sergio con una rapidez constante de $0.800c$ con respecto a él. Magda y Sergio ponen en marcha sendos cronómetros en cero cuando el frente de la nave de Magda está directamente arriba de Sergio. Cuando su cronómetro indica 5.00 s, Magda enciende una luz brillante bajo la parte delantera de su nave. *a*) Con base en la transformación de coordenadas de Lorentz deducidas en el ejercicio 37.14 y en el ejemplo 37.7, calcule x y t medidos por Sergio con respecto al suceso de encender la luz. *b*) Aplique la fórmula de dilatación del tiempo [ecuación (37.6)] para calcular el intervalo de tiempo entre los dos sucesos (el frente de la nave pasando en lo alto y el encendido de la luz) medido por Sergio. Compare con el valor de t calculado en el inciso *a*). *c*) Multiplique el intervalo de tiempo por la rapidez de Magda, ambos medidos por Sergio, para calcular la distancia que ella ha recorrido cuando se enciende la luz, medida por Sergio. Compare con el valor de x calculado en el inciso *a*).

37.17. Una nave espacial de caza del planeta Tatuino intenta dar alcance a un crucero de la Federación Comercial. Según las mediciones de un observador que se halla en Tatuino, el crucero se aleja del planeta con una rapidez de $0.600c$. La nave de caza viaja con una rapidez de $0.800c$ con respecto a Tatuino, en la misma dirección que el crucero. *a*) Para que la nave de caza dé alcance al crucero, ¿la rapidez del crucero con respecto a la nave de caza debe ser positiva o negativa? *b*) ¿Cuál es la rapidez del crucero con respecto a la nave de caza?

37.18. La ecuación 37.23 da la transformación sólo para la componente x de la velocidad de un objeto. Suponga que el objeto considerado en la deducción también se desplaza en la dirección y/y'. Determine la expresión para u_y en términos de las componentes de u', v y c, que representa la transformación para la componente y de la velocidad. (*Sugerencia:* aplique las transformaciones de Lorentz y las relaciones como $v_x = dx/dt$, $v'_x = dx'/dt'$, y así sucesivamente, a las componentes y.)

37.19. Dos partículas creadas en un acelerador de alta energía se desplazan en sentidos opuestos. La rapidez de una de las partículas, medida en el laboratorio, es de $0.650c$, y la rapidez de cada partícula con respecto a la otra es de $0.950c$. ¿Cuál es la rapidez de la segunda partícula, medida en el laboratorio?

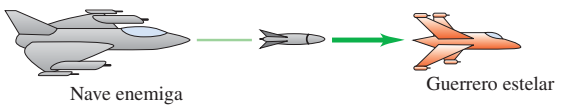
37.20. Dos partículas en un experimento con un acelerador de alta energía se aproximan de frente una a la otra, cada una con una rapidez de $0.9520c$ medida en el laboratorio. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de una partícula en relación con la otra?

37.21. Dos partículas en un experimento con un acelerador de alta energía se aproximan de frente una a la otra con una rapidez relativa de $0.890c$. Ambas partículas viajan con la misma rapidez medida en el laboratorio. ¿Cuál es la rapidez de cada partícula, medida en el laboratorio?

37.22. Una nave espacial enemiga se aproxima hacia su guerrero estelar con una rapidez, medida desde su marco, de $0.400c$. La nave enemiga dispara un proyectil hacia usted con una rapidez de $0.700c$

con respecto a la nave enemiga (véase la figura 37.28). *a*) ¿Cuál es la rapidez del proyectil con respecto a usted? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. *b*) Si sus mediciones le indican que la nave enemiga estaba a 8.00×10^6 km de usted cuando disparó el proyectil, ¿cuánto tiempo, medido en su marco, tardará el proyectil en darle alcance?

Figura **37.28** Ejercicio 37.22.



37.23. Una nave espacial imperial, que se desplaza con gran rapidez con respecto al planeta Arrakis, dispara un cohete hacia el planeta con una rapidez de $0.920c$ con respecto a la nave. Según las mediciones de un observador situado en Arrakis, el cohete se aproxima con una rapidez de $0.360c$. ¿Cuál es la rapidez de la nave con respecto a Arrakis? Indique si la nave espacial se acerca o se aleja de Arrakis.

*Sección 37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas

***37.24.** Rescriba la ecuación 37.25 para determinar la velocidad relativa u entre la fuente electromagnética y un observador en términos de la razón entre la frecuencia observada y la frecuencia de la fuente de luz. ¿Qué velocidad relativa u producirá *a*) una disminución del 5.0% en la frecuencia y *b*) un incremento en un factor de 5 de la luz observada?

***37.25. Dígaselo al juez.** *a*) ¿Con qué rapidez debe usted aproximarse a un semáforo en rojo ($\lambda = 675$ nm) para que éste aparezca amarillo ($\lambda = 575$ nm)? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. *b*) Si usted utilizara esto como excusa para no recibir una infracción por pasarse un semáforo en rojo, ¿qué multa le impondrían por exceso de velocidad? Suponga que la multa es de un dólar por cada kilómetro por hora en exceso del límite señalado de 90 km/h.

***37.26.** Demuestre que cuando la fuente de ondas electromagnéticas se aleja de nosotros a $0.600c$, la frecuencia que medimos es la mitad del valor medido en el marco en reposo de la fuente.

Sección 37.7 Cantidad de movimiento relativista

37.27. *a*) Una partícula de masa m se desplaza a lo largo de una línea recta bajo la acción de una fuerza F dirigida a lo largo de la misma recta. Evalúe la derivada de la ecuación (37.29) para demostrar que la aceleración $a = dv/dt$ de la partícula está dada por $a = (F/m)(1 - v^2/c^2)^{3/2}$. *b*) Evalúe la derivada de la ecuación (37.29) para hallar la expresión de la magnitud de la aceleración en términos de F, m y v/c si la fuerza es perpendicular a la velocidad.

37.28. ¿Cuándo deberíamos usar la relatividad? Como hemos visto, los cálculos relativistas a menudo implican la cantidad γ. Cuando γ es apreciablemente mayor que 1, debemos usar las fórmulas relativistas en vez de las newtonianas. ¿Para qué rapidez v (en términos de c) el valor de γ es *a*) 1.0% mayor que 1; *b*) 10% mayor que 1; *c*) 100% mayor que 1?

37.29. *a*) ¿A qué rapidez es la cantidad de movimiento de una partícula el doble del resultado que se obtiene de la expresión no relativista mv? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. *b*) Se aplica una fuerza a una partícula a lo largo de su dirección de movimiento. ¿A qué rapidez es la fuerza necesaria para producir una aceleración dada el doble de la fuerza que se requiere para producir la misma aceleración cuando la partícula está en reposo? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz.

37.30. Béisbol relativista. Calcule la magnitud de la fuerza que se necesita para impartir a una pelota de béisbol de 0.145 kg una aceleración $a = 1.00$ m/s^2 en la dirección de la velocidad inicial de la pelota cuando la magnitud de esta velocidad es de *a*) 10.0 m/s; *b*) $0.900c$; *c*) $0.990c$. *d*) Repita los incisos *a*), *b*) y *c*) con la fuerza y la aceleración perpendiculares a la velocidad.

Sección 37.8 Trabajo y energía relativistas

37.31. ¿Cuál es la rapidez de una partícula cuya energía cinética es igual a *a*) su energía en reposo, *b*) cinco veces su energía en reposo?

37.32. Aniquilación. En una aniquilación de protón/antiprotón, un protón y un antiprotón (un protón con carga negativa) chocan y desaparecen, con emisión de radiación electromagnética. Si cada partícula tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg y ambas se hallan en reposo un momento antes de la aniquilación, halle la energía total de la radiación. Exprese sus respuestas en joules y en electrón volts.

37.33. Un protón (masa en reposo $= 1.67 \times 10^{-27}$ kg) tiene una energía total 4.00 veces mayor que su energía en reposo. ¿Cuál es *a*) la energía cinética del protón; *b*) la magnitud de la cantidad de movimiento del protón; *c*) la rapidez del protón?

37.34. *a*) ¿Cuánto trabajo es necesario realizar sobre una partícula de masa m para acelerarla *a*) del reposo a una rapidez de $0.090c$, *b*) de una rapidez de $0.900c$ a una de $0.990c$? (Exprese sus respuestas en términos de mc^2.) *c*) ¿Cómo son comparativamente sus respuestas a los incisos *a*) y *b*)?

37.35. *a*) ¿En qué porcentaje aumenta su masa en reposo cuando usted sube 30 m hasta el nivel más alto de un edificio de 10 pisos? ¿Está usted consciente de este incremento? *b*) ¿En cuántos gramos cambia la masa de un resorte de 12.0 g con una constante de fuerza de 200 N/cm cuando se comprime 6.0 cm? ¿Aumenta o disminuye la masa? ¿Advertiría usted el cambio de masa si estuviera sosteniendo el resorte en sus manos? Explique su respuesta.

37.36. Una persona de 60.0 kg está de pie y en reposo en un suelo horizontal. ¿Con qué rapidez tendría que correr para *a*) duplicar su energía total, *b*) aumentar su energía total en un factor de 10?

37.37. Un reactor antimateria. Cuando una partícula se encuentra con su antipartícula, ambas se aniquilan y su masa se convierte en energía lumínica. Estados Unidos usa aproximadamente 1.0×10^{19} J de energía por año. *a*) Si toda esa energía proviniera de un reactor antimateria del futuro, ¿cuánta masa de combustible de materia y antimateria se consumiría cada año? *b*) Si ese combustible tuviera la densidad del hierro (7.86 g/cm^3) y estuviera apilado en bloques para formar una pila cúbica, ¿de qué altura sería ésta? (Antes de que se entusiasme, le informamos que los reactores antimateria están aún *muy lejos* en el futuro, si es que acaso son factibles.)

37.38. Una partícula ψ ("psi") tiene una masa de 5.52×10^{-27} kg. Calcule la energía en reposo de la ψ en MeV.

37.39. Cierta partícula tiene una masa en reposo de 6.64×10^{-27} kg y una cantidad de movimiento de 2.10×10^{-18} kg · m/s. *a*) ¿Cuál es la energía total (energía cinética + energía en reposo) de la partícula? *b*) ¿Cuál es la energía cinética de la partícula? *c*) ¿Cuál es la razón entre la energía cinética y la energía en reposo de la partícula?

37.40. A partir de la ecuación (37.39), demuestre que en el límite clásico ($pc \ll mc^2$) la energía tiende a la energía cinética clásica $\frac{1}{2}mv^2$ más la energía de la masa en reposo mc^2.

37.41. Calcule la energía cinética de un protón (masa $= 1.67 \times 10^{-27}$ kg) a partir de las expresiones tanto no relativista como relativista, y calcule la razón de los dos resultados (relativista entre no relativista) cuando la rapidez es de *a*) 8.00×10^7 m/s; *b*) 2.85×10^8 m/s.

37.42. ¿Cuál es la energía cinética de un protón que se desplaza a *a*) $0.100c$, *b*) $0.500c$, *c*) $0.900c$? ¿Cuánto trabajo se debe realizar sobre un protón para *d*) aumentar su rapidez de $0.100c$ a $0.500c$ y *e*) aumentar

su rapidez de 0.500c a 0.900c? *f*) ¿Cómo se comparan los dos últimos resultados obtenidos en el límite no relativista?

37.43. *a*) ¿A través de qué diferencia de potencial es necesario acelerar un electrón, a partir del reposo, para alcanzar una rapidez de 0.980c? *b*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón a esta rapidez? Exprese su respuesta en joules y en electrón volts.

37.44. Creación de una partícula. Dos protones (cada uno con masa en reposo $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se desplazan inicialmente con la misma rapidez en sentidos opuestos. Los protones continúan existiendo después de una colisión que también produce una partícula η^0 (véase el capítulo 44). La masa en reposo de la η^0 es $m = 9.75 \times 10^{-28}$ kg. *a*) Si los dos protones y la η^0 se encuentran en reposo después del choque, halle la rapidez inicial de los protones, expresada como fracción de la rapidez de la luz. *b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón? Exprese su respuesta en MeV *c*) ¿Cuál es la energía en reposo de la η^0, expresada en MeV? *d*) Analice la relación entre las respuestas a los incisos *b*) y *c*).

37.45. Calcule la rapidez de una partícula cuya energía cinética relativista es un 50% mayor que el valor newtoniano para la misma rapidez.

37.46. Energía de fusión. En un reactor de fusión nuclear hipotético, dos núcleos de deuterio se combinan o "fusionan" para formar un núcleo de helio. La masa de un núcleo de deuterio, expresada en unidades de masa atómica (u), es de 2.0136 u; la de un núcleo de helio es de 4.0015 u (1 u = $1.6605402 \times 10^{-27}$ kg). *a*) ¿Cuánta energía se libera cuando 1.0 kg de deuterio experimenta fusión? *b*) El consumo anual de energía eléctrica en Estados Unidos es del orden de 1.0×10^{19} J. ¿Cuánto deuterio debe reaccionar para producir esta cantidad de energía?

37.47. El Sol produce energía mediante reacciones de fusión nuclear, en las cuales se convierte materia en energía. Midiendo la cantidad de energía que recibimos del Sol, sabemos que éste produce energía a razón de 3.8×10^{26} W. *a*) ¿Cuántos kilogramos de materia pierde el Sol cada segundo? Aproximadamente, ¿a cuántas toneladas de materia equivale esto? *b*) A este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará el Sol en consumir toda su masa?

37.48. Una partícula de polvo de 0.100 μg se acelera a partir del reposo hasta alcanzar una rapidez de 0.900c mediante una fuerza constante de 1.00×10^6 N. *a*) Si se emplea la forma no relativista de la segunda ley de Newton ($\sum F = ma$), ¿qué distancia viaja el objeto para alcanzar esa rapidez final? *b*) Utilizando el tratamiento relativista correcto de la sección 37.8, ¿qué distancia viaja el objeto para alcanzar su rapidez final? *c*) ¿Cuál distancia es mayor? ¿Por qué?

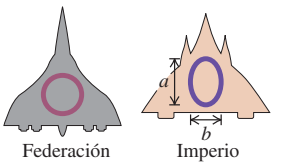
Problemas

37.49. Después de ser producido en un choque entre partículas elementales, un pión positivo (π^+) debe recorrer un tubo de 1.20 km de largo para llegar a un área experimental. Una partícula π^+ tiene una vida media (medida en su marco en reposo) de 2.60×10^{-8} s; el π^+ que estamos considerando tiene esta vida. *a*) ¿Con qué rapidez debe viajar el π^+ para no desintegrarse antes de alcanzar el final del tubo? (Puesto que u se aproxima mucho a c, escriba $u = (1 - \Delta)c$ y dé su respuesta en términos de 0 en vez de u.) *b*) El π^+ tiene una energía en reposo de 139.6 MeV. ¿Cuál es la energía total del π^+ a la rapidez calculada en el inciso *a*)?

37.50. Un cubo de metal con lados de longitud a se halla en reposo en un marco S con una arista paralela al eje de las x. Por consiguiente, en S el volumen del cubo es a^3. El marco S' se desplaza a lo largo del eje de las x con rapidez u. Medido por un observador en el marco S', ¿cuál es el volumen del cubo metálico?

37.51. Las naves estelares de la Federación Solar están marcadas con el símbolo de la federación, un círculo, en tanto que las naves estelares del Imperio Denebiano están marcadas con el símbolo del imperio, una elipse cuyo eje mayor es 1.40 veces más grande que su eje menor ($a = 1.40b$ en la figura 37.29). ¿Con qué rapidez, con respecto a un observador, debe viajar una nave de la Federación para que sus marcas se confundan con las de una nave del Imperio?

Figura **37.29** Problema 37.51.



37.52. Se envía una sonda espacial a las proximidades de la estrella Capella, que está a 42.2 años luz de la Tierra. (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.) La sonda viaja con una rapidez de 0.9910c. Una astronauta recluta a bordo tiene 19 años cuando la sonda parte de la Tierra. ¿Cuál es su edad biológica cuando la sonda llega a Capella?

37.53. Se dice que una partícula es *extremadamente relativista* cuando su energía cinética es mucho mayor que su energía en reposo. *a*) ¿Cuál es la rapidez de una partícula (expresada como fracción de c) cuando su energía total es de 10 veces su energía en reposo? *b*) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los dos lados izquierdo y derecho de la ecuación (37.39) si se desprecia el término $(mc^2)^2$ correspondiente a una partícula con la rapidez calculada en el inciso *a*)?

37.54. Dilatación del tiempo cotidiano. Dos relojes atómicos se sincronizan con sumo cuidado. Uno permanece en Nueva York, y el otro se coloca a bordo de un avión que viaja con una rapidez media de 250 m/s y luego regresa a Nueva York. Cuando el avión regresa, el tiempo transcurrido en el reloj que se quedó en tierra fue de 4.00 h. ¿En cuánto difieren las lecturas de los dos relojes y cuál de ellos registrará el menor tiempo transcurrido? (*Sugerencia:* como $u \ll c$, puede simplificar $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ mediante expansión binomial.)

37.55. El Supercolisionador Hadron (LHC). Físicos e ingenieros de todo el mundo se han reunido para construir el acelerador más grande del mundo, el Supercolisionador Hadron (LHC) en el laboratorio CERN de Ginebra, Suiza. La máquina acelerará protones a energías cinéticas de 7 TeV en un anillo subterráneo de 27 km de circunferencia. (Para obtener información más reciente sobre el LHC, visite www.cern.ch.) *a*) ¿Qué rapidez v alcanzarán los protones en el LHC? (Como v es muy cercana a c, escriba $v = (1 - \Delta)c$ y dé su respuesta en términos de Δ.) *b*) Calcule la masa relativista, m_{rel}, de los protones acelerados en términos de su masa en reposo.

37.56. Se detona una bomba nuclear que contiene 8.00 kg de plutonio. La suma de las masas en reposo de los productos de la explosión es menor que la masa en reposo original en una parte en 10^4. *a*) ¿Cuánta energía libera la explosión? *b*) Si la explosión tiene lugar en 4.00 μs, ¿cuál es la potencia media que genera la bomba? *c*) ¿Qué masa de agua podría elevar a una altura de 1.00 km la energía liberada?

37.57. Radiación de Čerenkov. El físico ruso P. A. Čerenkov descubrió que una partícula con carga que viaja en un sólido con rapidez mayor que la de la luz en ese material emite radiación electromagnética. (Esto es análogo al estruendo sónico que produce un avión cuando avanza con rapidez mayor que la del sonido en el aire; véase la sección 16.9. Čerenkov compartió el Premio Nobel de 1958 por este descubrimiento.) ¿Cuál es la energía cinética mínima (en electrón volts) que un electrón debe tener cuando viaja en el interior de un bloque de vidrio blanco ("crown", $n = 1.52$) para crear esta radiación de Čerenkov?

37.58. Un átomo con masa m emite un fotón con energía E; el átomo retrocede en sentido opuesto. *a*) Suponiendo que el movimiento del átomo puede tratarse de manera no relativista, calcule la rapidez de retroceso del átomo. *b*) A partir del resultado en el inciso *a*), demuestre que la rapidez de retroceso es mucho menor que c siempre que E es mucho menor que la energía en reposo mc^2 del átomo.

37.59. En un experimento dos protones son disparados directamente uno hacia el otro; cada uno se desplaza a la mitad de la rapidez de la luz con respecto al laboratorio. *a*) ¿Qué rapidez registra cada protón del otro protón? *b*) ¿Cuál sería la respuesta al inciso *a*) si sólo usáramos la mecánica newtoniana no relativista? *c*) ¿Cuál será la energía cinética de cada protón medida por i) un observador en reposo en el laboratorio y ii) un observador que viajara junto con uno de los protones? *d*) ¿Cuáles serían las respuestas al inciso *c*) si sólo usáramos la mecánica newtoniana no relativista?

37.60. En el caso de los protones del problema 37.59, suponga que su rapidez es tal que cada uno registra una rapidez de la mitad de la rapidez de la luz desde la perspectiva del otro protón. *a*) ¿Cuál es la medición de la rapidez de estos protones que hace un observador en el laboratorio? *b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón medida por i) un observador en el laboratorio y ii) el otro protón?

37.61. El marco S' tiene una componente x de velocidad u con respecto al marco S, y en $t = t' = 0$ los dos marcos coinciden (véase la figura 37.3). En el origen de S' se emite una pulsación luminosa con un frente de onda esférico en el tiempo $t' = 0$. Su distancia x' con respecto al origen al cabo de un tiempo t' está dada por la ecuación $x'^2 = c^2t'^2$. Aplicando la transformación de coordenadas de Lorentz, transforme esta ecuación en una ecuación en x y t, y demuestre que el resultado es $x^2 = c^2t^2$, es decir, el movimiento se ve exactamente igual en el marco de referencia S que en S'; en ambos marcos se observa un frente de onda esférico.

37.62. En ciertos procesos de desintegración radiactivos beta, la partícula beta (un electrón) abandona el núcleo atómico con una rapidez del 99.95% de la rapidez de la luz en relación con el núcleo en desintegración. Si ese núcleo se desplaza al 75.00% de la rapidez de la luz, calcule la rapidez del electrón emitido con respecto al marco de referencia del laboratorio si el electrón se emite *a*) en el mismo sentido que se desplaza el núcleo y *b*) en sentido opuesto a la velocidad del núcleo. *c*) En cada caso de los incisos *a*) y *b*), calcule la energía cinética del electrón medida en i) el marco del laboratorio y ii) el marco de referencia del núcleo en desintegración.

37.63. De acuerdo con la mecánica newtoniana, una partícula de masa m acelerada a partir del reposo por una fuerza constante continuará acelerándose indefinidamente. Es decir, cuando $t \to \infty$, $v \to \infty$. Demuestre que, de acuerdo con la mecánica relativista, la rapidez de la partícula tiende a c cuando $t \to \infty$. [*Nota:* una integral útil es $\int(1 - x^2)^{-3/2}\,dx = x/\sqrt{1 - x^2}$.]

37.64. En un marco de referencia S se observa que dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial, el segundo 1.80 s después que el primero. En un segundo marco S' en movimiento con respecto a S, se observa que el segundo suceso ocurre 2.35 s después que el primero. ¿Cuál es la diferencia entre las posiciones de los dos sucesos medidas en S'?

37.65. Dos sucesos observados en un marco de referencia S tienen posiciones y tiempos dados por (x_1, t_1) y (x_2, t_2), respectivamente. *a*) El marco S' se desplaza a lo largo del eje de las x con la rapidez suficiente para que los dos sucesos ocurran en la misma posición en S'. Demuestre que en S' el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre los dos sucesos está dado por

$$\Delta t' = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. A partir de ahí, demuestre que si $\Delta x > c\,\Delta t$, no existe *ningún* marco S' en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto. El intervalo $\Delta t'$ se conoce a veces como el *intervalo de tiempo propio* de los sucesos. ¿Es adecuado este término? *b*) Demuestre que si $\Delta x > c\,\Delta t$, existe un marco de referencia S' diferente donde los dos sucesos ocurren *simultáneamente*. Halle la distancia entre los dos sucesos en S'; exprese su respuesta en términos de Δx, Δt y c. Esta distancia se designa a veces como una *longitud propia*. ¿Es adecuado este término? *c*) En un marco de referencia S' se observa que dos sucesos ocurren simultáneamente en puntos separados por una distancia de 2.50 m. En un segundo marco S que se desplaza con respecto a S' a lo largo de la recta que une los dos puntos de S', los dos sucesos parecen ocurrir a una distancia de 5.00 m uno del otro. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los dos sucesos, medido en S? [*Sugerencia:* aplique el resultado obtenido en el inciso *b*).]

37.66. Alberto en el País de las Maravillas. Einstein y Lorentz, dos entusiastas tenistas, juegan un juego rápido en una cancha donde se hallan a 20.0 m uno del otro. Por ser jugadores muy diestros, juegan sin red. La pelota de tenis tiene una masa de 0.0580 kg. Ignore la gravedad y suponga que la pelota viaja paralela al piso cuando va de un jugador a otro. A menos que se especifique otra cosa, los dos jugadores realizan todas las mediciones. *a*) Lorenz pone en juego la pelota a 80.0 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota? *b*) Einstein la devuelve con mucha energía a 1.80×10^8 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota? *c*) Mientras Einstein devuelve la pelota en el inciso *a*), un conejo blanco corre a un costado de la cancha en dirección de Einstein a Lorentz. La rapidez del conejo es de 2.20×10^8 m/s con respecto a los dos hombres. ¿Cuál es la rapidez del conejo con respecto a la pelota? *d*) ¿Cuál es para el conejo la distancia entre Einstein y Lorentz? *e*) ¿Cuánto tiempo tarda el conejo en correr 20.0 m, según los jugadores? *f*) El conejo blanco lleva un reloj de bolsillo, y lo utiliza para medir el tiempo (desde su punto de vista) que tarda en recorrer la distancia entre Einstein y Lorentz. ¿Cuánto tiempo mide?

***37.67.** Una de las longitudes de onda de la luz que emiten los átomos de hidrógeno en condiciones normales de laboratorio es $\lambda = 656.3$ nm, en la parte roja del espectro electromagnético. En la luz emitida desde una galaxia distante se observa que esta misma línea espectral presenta un desplazamiento de Doppler a $\lambda = 953.4$ nm, en la parte infrarroja del espectro. ¿Con qué rapidez se desplazan los átomos emisores con respecto a nuestro planeta? ¿Se aproximan a la Tierra o se alejan de ella?

***37.68. Medición de la rapidez por radar.** Un entrenador de béisbol utiliza un dispositivo de radar para medir la rapidez de una pelota de béisbol que ha sido lanzada y se aproxima. Este dispositivo envía ondas electromagnéticas de frecuencia f_0, y luego mide el desplazamiento de frecuencia Δf de las ondas que se reflejan en la pelota en movimiento. Si el desplazamiento fraccionario de frecuencia que produce una pelota es $\Delta f/f_0 = 2.86 \times 10^{-7}$, ¿cuál es la rapidez de la pelota en km/h? (*Sugerencia:* pregúntese si las ondas experimentan un desplazamiento de Doppler una segunda vez cuando se reflejan en la pelota.)

37.69. ¿Viaje espacial? Viajar a las estrellas requiere cientos o miles de años, incluso a la rapidez de la luz. Algunos han sugerido que podemos sortear esta dificultad acelerando el cohete (y a sus astronautas) a una rapidez muy alta de manera que envejezcan menos debido a la dilatación del tiempo. El inconveniente de esto es que se necesita una gran cantidad de energía para lograrlo. Suponga que usted quiere ir a la enorme gigante roja Betelgeuse, que está a unos 500 años luz de distancia. (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año.) Usted planea viajar a rapidez constante en un cohete de 1000 kg (un poco más de una tonelada), el cual, en realidad, es demasiado pequeño para este propósito. En cada uno de los siguientes casos, calcule el tiempo que se requeriría para hacer el viaje de acuerdo con las mediciones de quienes se quedan en la Tierra y de los astronautas a bordo del cohete, la energía necesaria en joules y la energía necesaria como un porcentaje del consumo anual de energía de Estados Unidos (que es de 1.0×10^{19} J). Para comparar, ordene sus resultados en una tabla que muestre v_{cohete}, t_{Tierra}, t_{cohete}, E (en J) y E (como porcentaje del consumo de energía de

Estados Unidos). La rapidez del cohete es *a*) 0.50*c*; *b*) 0.99*c*; *c*) 0.9999*c*. Con base en sus resultados, ¿es probable que algún gobierno invierta pronto en un viaje de tan elevada velocidad?

***37.70.** Una nave espacial que se desplaza con rapidez constante u con respecto a nosotros transmite una señal de radio a una frecuencia constante f_0. Conforme la nave espacial se aproxima a nosotros, recibimos una frecuencia más alta f; una vez que ha pasado, recibimos una frecuencia más baja. *a*) Cuando la nave espacial pasa cerca de nosotros, de manera que un instante no se acerca ni se aleja de nosotros, demuestre que la frecuencia que recibimos no es f_0, y deduzca una expresión de la frecuencia que recibimos. ¿La frecuencia que recibimos es mayor o menor que f_0? (*Sugerencia:* en este caso, las crestas de onda sucesivas se desplazan la misma distancia hasta el observador y, por lo tanto, tienen el mismo tiempo de tránsito. En consecuencia, f es igual a 1/T. Utilice la fórmula de dilatación del tiempo para relacionar los periodos en los marcos estacionario y en movimiento.) *b*) Una nave espacial emite ondas electromagnéticas de frecuencia $f_0 = 345$ MHz medida en un marco que se desplaza a la par que la nave. La nave espacial se desplaza con una rapidez constante de $0.758c$ con respecto a nosotros. ¿Qué frecuencia f recibimos cuando la nave se aproxima a nosotros? ¿Y cuando se aleja? En cada caso, ¿cuál es el desplazamiento de frecuencia $f - f_0$? *c*) Con base en el resultado del inciso *a*), calcule la frecuencia f y el desplazamiento de frecuencia $f - f_0$ que recibimos en el instante en que la nave pasa cerca de nosotros. ¿Cómo es el desplazamiento de frecuencia calculado aquí en comparación con los calculados en el inciso *b*)?

***37.71. Paradoja de la pértiga y el granero.** Suponga que un corredor *muy* rápido ($v = 0.600c$) que sostiene una pértiga horizontal larga corre a través de un granero abierto por ambos extremos. La longitud de la pértiga (en su marco en reposo) es de 6.00 m y la longitud del granero (en *su* marco en reposo) es de 5.00 m. En el marco de referencia del granero, la pértiga sufre contracción de longitud y cabe completa adentro del granero a un mismo tiempo. Sin embargo, en el marco de referencia del corredor, el *granero* sufre contracción de longitud, ¡y la pértiga completa *nunca* puede estar adentro del granero en ningún momento! Explique cómo se resuelve esta paradoja.

37.72. El físico francés Armand Fizeau fue el primero en medir la rapidez de la luz con exactitud. Además, encontró experimentalmente que la rapidez (con respecto al marco del laboratorio) de la luz que se propaga en un tanque de agua que también se desplaza con rapidez V con respecto al marco del laboratorio es

$$v = \frac{c}{n} + kV$$

donde $n = 1.333$ es el índice de refracción del agua. Fizeau llamó a k el coeficiente de arrastre y obtuvo un valor experimental de $k = 0.44$. ¿Qué valor de k calculó usted a partir de transformaciones relativistas?

Problemas de desafío

37.73. Transformación de Lorentz para la aceleración. Siguiendo un método análogo al que se utilizó en el texto para hallar la fórmula de transformación de Lorentz para la velocidad, podemos hallar la transformación de Lorentz para la *aceleración.* El marco S' tiene una componente x constante de la velocidad u con respecto al marco S. Un objeto se desplaza con respecto al marco S a lo largo del eje de las x con velocidad instantánea v_x y aceleración instantánea a_x. *a*) Demuestre que su aceleración instantánea en el marco S' es

$$a'_x = a_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-3}$$

[*Sugerencia:* exprese la aceleración en S' como $a'_x = dv'_x/dt'$. Después utilice la ecuación (37.21) para expresar dt' en términos de dt y dx, y la ecuación (37.22) para expresar dv'_x en términos de u y dv_x. La velocidad del objeto en S es $v_x = dx/dt$.] *b*) Demuestre que la aceleración en el marco S se puede expresar como

$$a_x = a'_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)^{-3}$$

donde $v'_x = dx'/dt'$ es la velocidad del objeto en el marco S'.

37.74. Una versión realista de la paradoja de los gemelos. Un cohete parte de la Tierra el 1 de enero de 2100. Stella, una de dos gemelas nacidas en el año 2075, dirige el cohete (marco de referencia S'); la otra gemela, Terra, se queda en la Tierra (marco de referencia S). El cohete tiene una aceleración de magnitud constante g en su propio marco de referencia (con esto la piloto se siente a gusto, pues simula la gravedad terrestre). La trayectoria del cohete es una línea recta en la dirección $+x$ en el marco S. *a*) Con base en los resultados del problema de desafío 37.73, demuestre que, en el marco terrestre S de Terra, la aceleración del cohete es

$$\frac{du}{dt} = g\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

donde u es la velocidad instantánea del cohete en el marco S. *b*) Escriba el resultado del inciso *a*) de la forma $dt = f(u)\,du$, donde $f(u)$ es una función de u, e integre ambos lados. (*Sugerencia:* utilice la integral del problema 37.63.) Demuestre que, en el marco de Terra, el tiempo en que Stella alcanza una velocidad v_{1x} es

$$t_1 = \frac{v_{1x}}{g\sqrt{1 - v_{1x}^2/c^2}}$$

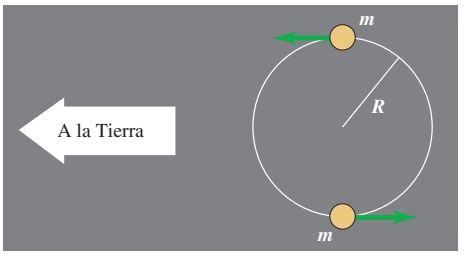
c) Con base en la fórmula de dilatación del tiempo, relacione dt y dt' (intervalos infinitesimales de tiempo medidos en los marcos S y S', respectivamente). Combine este resultado con el del inciso *a*) e integre como en el inciso *b*) para demostrar lo siguiente: cuando Stella alcanza una velocidad v_{1x} con respecto a Terra, el tiempo t'_1 que ha transcurrido en el marco S' es

$$t'_1 = \frac{c}{g}\operatorname{arctanh}\left(\frac{v_{1x}}{c}\right)$$

En esta fórmula arctanh es la tangente hiperbólica inversa. (*Sugerencia:* utilice la integral dada en el problema de desafío 5.124.) *d*) Combine los resultados de los incisos *b*) y *c*) para hallar t_1 en términos de t'_1, g y c solamente. *e*) Stella acelera en línea recta durante cinco años (según su reloj), reduce su velocidad al mismo ritmo durante cinco años, da la vuelta en redondo, acelera cinco años, disminuye su velocidad durante cinco años más, y aterriza de regreso en la Tierra. Según el reloj de Stella, la fecha es el 1 de enero de 2120. ¿Cuál es la fecha de acuerdo con el reloj de Terra?

***37.75. Cómo medir la masa de las estrellas.** Muchas de las estrellas del firmamento son en realidad *estrellas binarias,* en las cuales dos estrellas giran en órbita alrededor de su centro de masa común. Si la rapidez orbital de las estrellas es lo bastante grande, es posible detectar el movimiento de las estrellas por los desplazamientos de Doppler de la luz que emiten. Las estrellas que se ajustan a esta descripción se conocen como *estrellas binarias espectroscópicas.* La figura 37.30 (siguiente página) ilustra el caso más sencillo de estrella binaria espectroscópica: dos estrellas idénticas, cada una de masa m, giran en órbita alrededor de su centro de masa en un círculo de radio R. El plano de las órbitas de las estrellas está de canto con respecto a la línea visual de un observador situado en la Tierra. *a*) La luz que emite el hidrógeno gaseoso caliente en un laboratorio terrestre tiene una frecuencia de 4.568110×10^{14} Hz. En la luz que recibe de las estrellas un telescopio terrestre, se observa que la frecuencia de la luz del hidrógeno varía

Figura **37.30** Problema de desafío 37.75.



entre 4.567710×10^{14} Hz y 4.568910×10^{14} Hz. Determine si el sistema estelar binario en conjunto se acerca o se aleja de la Tierra, la rapidez de este movimiento, y la rapidez orbital de las estrellas. (*Sugerencia:* los valores de rapidez en cuestión son mucho menores que c; por lo tanto, se puede emplear el resultado aproximado $\Delta f/f = u/c$ que se dio en la sección 37.6.) *b*) La luz proveniente de cada estrella del sistema binario fluctúa de su frecuencia máxima a su frecuencia mínima y viceversa en 11.0 días. Determine el radio orbital R y la masa m de cada estrella. Exprese su respuesta de m en kilogramos y como múltiplo de la masa del Sol (1.99×10^{30} kg). Compare el valor de R con la distancia de la Tierra al Sol: 1.50×10^{11} m. (Esta técnica se utiliza efectivamente en astronomía para calcular la masa de las estrellas. En la práctica, el problema es más complicado porque, por lo regular, las dos estrellas de un sistema binario no son idénticas; comúnmente las órbitas no son circulares, y el plano de las órbitas está inclinado con respecto a la línea de visión desde la Tierra.)

37.76. Relatividad y la ecuación de onda. *a*) Considere la transformación galileana a lo largo de la dirección x: $x' = x - vt$ y $t' = t$. En el marco S la ecuación de onda de las ondas electromagnéticas en un vacío es

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

donde E representa el campo eléctrico en la onda. Demuestre que al utilizar la transformación galileana la ecuación de onda en el marco S' resulta ser

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial t'^2} = 0$$

Esto tiene una forma diferente que la ecuación de onda en S. Por lo tanto, la transformación galileana *viola* el primer postulado de la relatividad, según el cual todas las leyes físicas tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. (*Sugerencia:* exprese las derivadas $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial t$ en términos de $\partial/\partial x'$ y $\partial/\partial t'$ aplicando la regla de la cadena.) *b*) Repita el análisis del inciso *a*), pero utilice las transformaciones de coordenadas de Lorentz [ecuaciones (37.21)] y demuestre que en el marco S' la ecuación de onda tiene la misma forma que en el marco S:

$$\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial t'^2} = 0$$

Explique por qué esto demuestra que la rapidez de la luz en el vacío es c en los dos marcos S y S'.

37.77. Producción de kaones. En la física de alta energía se crean partículas nuevas mediante colisiones de partículas proyectil en rápido movimiento con partículas estacionarias. Parte de la energía cinética de la partícula incidente se utiliza para crear la masa de la partícula nueva. Una colisión de protón/protón puede dar por resultado la creación de un kaón negativo (K^-) y un kaón positivo (K^+):

$$p + p \rightarrow p + p + K^- + K^+$$

a) Calcule la energía cinética mínima del protón incidente que permite llevar a cabo esta reacción si el segundo protón (que sirve de blanco) está inicialmente en reposo. La energía en reposo de un kaón es de 493.7 MeV, y la energía en reposo de un protón es de 938.3 MeV. (*Sugerencia:* en este caso es conveniente trabajar en el marco en el que la cantidad de movimiento total es cero. Véase el problema 8.100, pero advierta que aquí se debe utilizar la transformación de Lorentz para relacionar las velocidades en el marco del laboratorio con las velocidades en el marco de cantidad de movimiento total cero.) *b*) ¿Cómo es esta energía cinética mínima calculada en comparación con la energía de la masa en reposo total de los kaones creados? *c*) Suponga que ahora los dos protones están en movimiento, con velocidades de igual magnitud y sentidos opuestos. Calcule la energía cinética combinada mínima de los dos protones que permite llevar a cabo la reacción. ¿Cómo es esta energía cinética mínima calculada en comparación con la energía de la masa en reposo total de los kaones creados? (Este ejemplo muestra que, cuando se utilizan haces de partículas en colisión en vez de un blanco inmóvil, las necesidades de energía para producir partículas nuevas se reducen considerablemente.)

FOTONES, ELECTRONES Y ÁTOMOS

38

? Aunque la nube de gas luminoso de la Nebulosa de la Laguna está a más de 5000 años luz de distancia, podemos afirmar que contiene hidrógeno, principalmente, debido a su color rojo. Esta luz roja tiene una longitud de onda de 656.3 nm, que es emitida por el hidrógeno, y ningún elemento más. ¿Qué sucede dentro de un átomo de hidrógeno para que se emita luz con dicha longitud de onda?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- De qué manera los experimentos que implican espectros de líneas, el efecto fotoeléctrico y los rayos x llevan a una reinterpretación radical de la naturaleza de la luz.
- Cómo la explicación del fotón de la luz por parte de Einstein expresa el efecto fotoeléctrico.
- Cómo el espectro de luz emitido por hidrógeno atómico revela la existencia de niveles de energía atómica.
- De qué manera los físicos descubrieron el núcleo atómico.
- Cómo el modelo de Bohr de las órbitas del electrón explicó los espectros de los átomos de hidrógeno y de hidrogenoides.
- Los principios del funcionamiento de un láser.
- Cómo los experimentos con rayos x ayudaron a confirmar la explicación del fotón de la luz.
- Cómo la explicación del fotón describe el espectro de luz emitido por un objeto opaco y caliente.
- Cómo podemos reconciliar los aspectos corpusculares y ondulatorios de la luz.

En el capítulo 32 vimos cómo Maxwell, Hertz y otros establecieron con certeza que la luz es una onda electromagnética. La interferencia, difracción y polarización, que describimos en los capítulos 35 y 36, también demuestran esta *naturaleza ondulatoria* de la luz.

Sin embargo, cuando examinamos con más atención la emisión, absorción y dispersión de la radiación electromagnética, descubrimos un aspecto totalmente distinto de la luz. Vemos que la energía de una onda electromagnética está *cuantizada*: se emite y absorbe en forma de paquetes semejantes a partículas de energía definida, llamados *fotones* o *cuantos*. La energía de un solo fotón es proporcional a la frecuencia de la radiación.

También la energía interna de los átomos está cuantizada. Para una determinada clase de átomo individual, la energía no puede tener un valor cualquiera; sólo son posibles valores discretos, llamados *niveles de energía*.

Las ideas básicas de fotones y de niveles de energía nos ahorran un buen camino hacia la comprensión de una gran variedad de observaciones que de otra forma serían enigmáticas. Entre ellas están los conjuntos únicos de longitudes de onda que emiten y absorben los elementos en estado gaseoso, la emisión de electrones desde una superficie iluminada, el funcionamiento de los láseres y la producción y dispersión de los rayos x. Nuestros estudios de fotones y de niveles de energía nos llevarán al umbral de la *mecánica cuántica*, que implica tener algunos cambios radicales en nuestras ideas sobre la naturaleza de la radiación electromagnética y de la materia misma.

38.1 Emisión y absorción de la luz

¿Cómo se produce la luz? En el capítulo 32 vimos la forma en que Heinrich Hertz produjo ondas electromagnéticas al usar las oscilaciones en un circuito resonante *L-C* parecido a los que estudiamos en el capítulo 30. Usó frecuencias del orden de 10^8 Hz, pero la luz visible tiene frecuencias del orden de 10^{15} Hz, es decir, mucho mayores

que cualquier frecuencia que pueda alcanzarse con los circuitos electrónicos convencionales. Al final del siglo XIX, algunos físicos especulaban que las ondas en este intervalo de frecuencias podrían ser producidas por cargas eléctricas oscilantes dentro de átomos individuales. Sin embargo, sus hipótesis no explicaban algunos resultados experimentales clave. Entre los grandes desafíos que enfrentaban los físicos en 1900 estaban cómo explicar los *espectros de líneas*, el *efecto fotoeléctrico* y la naturaleza de los rayos x. Más adelante explicaremos uno por uno tales fenómenos.

Espectros de líneas

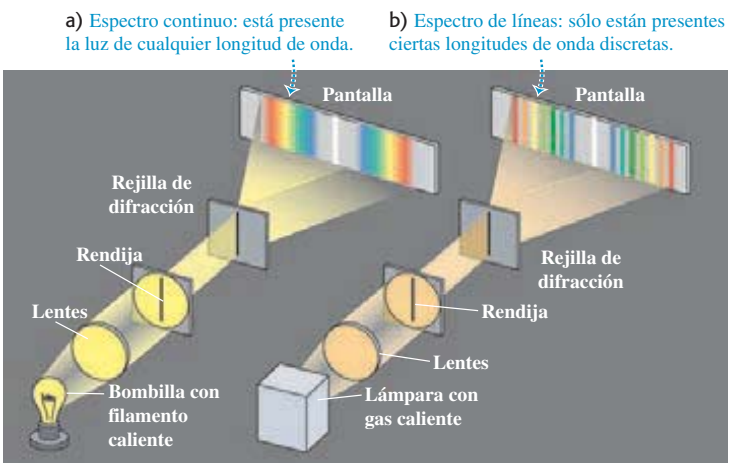
Podemos usar un prisma o una rejilla de difracción para separar las diversas longitudes de onda de un rayo de luz, y formar un espectro. Si la fuente luminosa es un sólido caliente (como el filamento de una lámpara) o un líquido, el espectro es *continuo*; hay en él luz de todas las longitudes de onda (figura 38.1a). Pero si la fuente es un gas que conduce una descarga eléctrica (como en un letrero de neón), o una sal volátil calentada en una llama (como cuando se arroja sal de mesa a una fogata de campamento), sólo aparecen algunos colores en forma de líneas paralelas nítidas y aisladas (figura 38.1b). (Cada "línea" es una imagen de la rendija del espectrógrafo, desviada un ángulo que depende de la longitud de onda de la luz que forma esa imagen; véase la sección 36.5.) Un espectro de esta clase se llama **espectro de líneas**. Cada línea corresponde a una longitud de onda y frecuencia definida.

A principios del siglo XIX se descubrió que cada elemento en estado gaseoso tiene un conjunto único de longitudes de onda en su espectro de líneas. El espectro del hidrógeno contiene siempre cierto conjunto de longitudes de onda; el sodio produce un conjunto distinto, el hierro otro más, etcétera. Los científicos encuentran invaluable el uso de los espectros para identificar elementos y compuestos (véase la fotografía que inicia este capítulo). Por ejemplo, los astrónomos han detectado los espectros de más de 100 moléculas distintas en el espacio interestelar, incluyendo algunas que no existen naturalmente en la Tierra. El espectro característico de un átomo se creyó relacionado con su estructura interna, pero los intentos para comprender esa relación sólo con base en la mecánica y la electrodinámica *clásicas*, es decir, la física resumida en las tres leyes de Newton y las cuatro ecuaciones de Maxwell, resultaron infructuosos.

Efecto fotoeléctrico

Activ ONLINE Physics
17.3 Efecto fotoeléctrico

También existían algunos enigmas relacionados con la *absorción* de la luz. En 1887 durante sus experimentos con ondas electromagnéticas, Hertz descubrió el *efecto fotoeléctrico*. Cuando la luz chocaba con una superficie metálica, algunos electrones cercanos a la superficie absorbían energía suficiente para superar la atracción de los



38.1 a) Espectro continuo producido por el filamento de una lámpara incandescente. b) Espectro de líneas, emitido por una lámpara que contiene un gas caliente.

iones positivos en el metal, y escapaban al espacio circundante. Una investigación detallada de este efecto reveló algunas propiedades intrigantes que no se podían comprender con base en la física clásica. Describiremos esas propiedades en la sección siguiente.

Rayos x

Otros problemas sin resolver acerca de la emisión y absorción de la radiación se centraban en la producción y la dispersión de los *rayos x*, descubiertos en 1895. Esos rayos se producían en tubos de descarga eléctrica con alto voltaje, pero nadie comprendía cómo ni por qué se producían o qué determinaba sus longitudes de onda (que son mucho más cortas que las de la luz visible). Peor aún, cuando los rayos x chocaban contra la materia, a veces los rayos dispersados tenían mayores longitudes de onda que el rayo original. ¡Es como si un rayo de luz azul llegara a un espejo y se reflejara con color rojo!

Fotones y niveles de energía

Todos estos fenómenos (así como otros más) apuntaban, por fuerza, a la conclusión de que la óptica clásica, a pesar de su éxito para explicar las lentes, los espejos, la interferencia y la polarización, tenía sus limitaciones. Hoy comprendemos que todos esos fenómenos se deben a la naturaleza *cuántica* de la radiación. La radiación electromagnética, junto con su naturaleza *ondulatoria*, tiene propiedades que se asemejan a las de las *partículas*. En especial, la energía de una onda electromagnética siempre se emite y se absorbe en forma de paquetes llamados *fotones* o *cuantos*, cuya energía es proporcional a la frecuencia de la radiación.

Los dos temas que se analizan a través de este capítulo son la cuantización de la radiación electromagnética y la existencia de niveles discretos de energía en los átomos. En el resto de este capítulo mostraremos cómo estos dos conceptos contribuyen a la comprensión de los fenómenos mencionados arriba. Todavía no estamos listos para una teoría detallada de la estructura atómica; eso sucederá en los capítulos 40 y 41. Pero examinaremos el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, que es un intento para predecir los niveles atómicos de energía, con base en la estructura atómica.

38.2 El efecto fotoeléctrico

El **efecto fotoeléctrico** es la emisión de electrones cuando la luz choca contra una superficie. Este efecto tiene muchas aplicaciones prácticas (figura 38.2). Para escapar de una superficie, el electrón debe absorber energía suficiente de la radiación incidente para superar la atracción de los iones positivos del material de la superficie. Esta atracción produce una barrera de energía potencial, que confina a los electrones al interior del material. Imagine que esta barrera se parece a una orilla redondeada que separa el asfalto vehicular de una acera elevada. La orilla mantendrá en el asfalto un balón de fútbol soccer que ruede lentamente. Pero si se patea el balón con suficiente fuerza, puede rodar subiendo por la orilla, y el trabajo efectuado contra la atracción gravitacional (la ganancia de energía potencial gravitacional) es igual a su pérdida de energía cinética.

Frecuencia de umbral y potencial de frenado

El efecto fotoeléctrico fue observado por primera vez en 1887, por Heinrich Hertz, quien observó que una descarga saltaba con más facilidad entre dos esferas cargadas eléctricamente, cuando sus superficies se iluminaban con la luz de otra fuente luminosa. La luz que incide sobre las superficies facilita de alguna manera el escape de lo que hoy sabemos que son electrones. Esta idea en sí no era revolucionaria. Ya se conocía la existencia de la barrera superficial de energía potencial. Thomas Edison descubrió en 1883 la *emisión termoiónica*, en la que la energía de escape se suministra

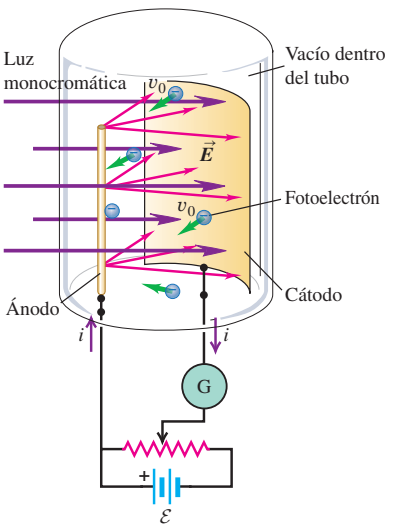
38.2 a) Un visor nocturno usa el efecto fotoeléctrico. Los fotones que entran al instrumento chocan contra una placa y emiten electrones que atraviesan un disco delgado, donde hay millones de canales diminutos. La corriente por cada canal se amplifica electrónicamente y se dirige hacia una pantalla, que resplandece al llegarle los electrones. b) La imagen que se forma en la pantalla es una combinación de esos millones de manchas luminosas, y es miles de veces más brillante de lo que ve el ojo al natural.

a)

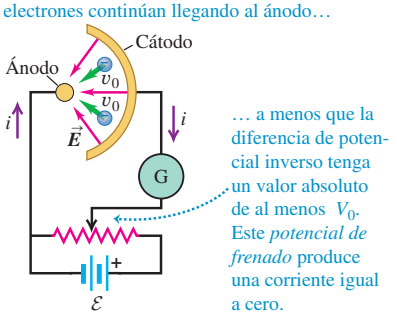
b)

38.3 Demostración del efecto fotoeléctrico.

a) La luz hace que el cátodo emita electrones que son impulsados por el campo eléctrico hacia el ánodo.



b) Vista superior, con el campo $\vec{E}$ finvertido
Aun cuando se invierta la dirección del campo $\vec{E}$ de manera que la fuerza del campo eléctrico apunte siempre alejándose del ánodo, algunos electrones continúan llegando al ánodo…

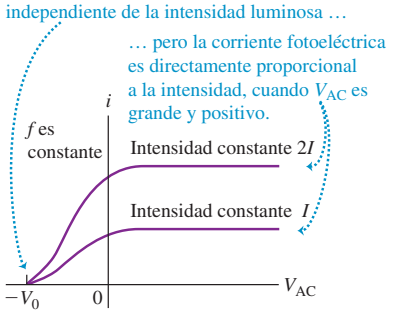


… a menos que la diferencia de potencial inverso tenga un valor absoluto de al menos V_0. Este *potencial de frenado* produce una corriente igual a cero.

38.4 Corriente fotoeléctrica i para una frecuencia constante f de luz, en función del potencial V_{AC} del ánodo con respecto al cátodo.

El potencial de frenado V_0 es independiente de la intensidad luminosa …

… pero la corriente fotoeléctrica es directamente proporcional a la intensidad, cuando V_{AC} es grande y positivo.



calentando el material a una temperatura muy alta, liberando electrones mediante un proceso análogo a la ebullición de un líquido. La cantidad *mínima* de energía que debe ganar un electrón para escapar de determinada superficie se llama **función trabajo** para esa superficie, y se representa con ϕ. Sin embargo, las superficies que utilizó Hertz no estaban a las altas temperaturas necesarias para la emisión termoiónica.

El efecto fotoeléctrico fue investigado con detalle por los físicos alemanes Wilhelm Hallwachs y Philipp Lenard, durante los años 1886 a 1900; sus resultados fueron muy inesperados. Describiremos su trabajo en términos de un fototubo más moderno (figura 38.3). Dos electrodos conductores, el ánodo y el cátodo, están dentro de un tubo de vidrio al vacío. La batería de la figura 38.3a, u otra fuente de diferencia de potencial, forma un campo eléctrico cuya dirección es de ánodo a cátodo. La luz (representada por las flechas magenta) que llega a la superficie del cátodo crea una corriente en el circuito externo; la corriente se mide con el galvanómetro (G). Hallwachs y Lenard estudiaron la forma en que esta *fotocorriente* varía en función del voltaje, la frecuencia y la intensidad de la luz.

Después del descubrimiento del electrón en 1897, se aclaró que la luz causa la emisión de electrones del cátodo. Debido a su carga negativa $-e$, los *fotoelectrones* emitidos son impulsados por el campo eléctrico hacia el ánodo. Para reducir al mínimo los choques de los electrones con las moléculas de gas se necesita un alto vacío, a presiones residuales de 0.01 Pa (10^{-7} atm) o menores.

Hallwachs y Lenard encontraron que cuando sobre el cátodo incidía luz monocromática, *no* se emitían fotoelectrones, a menos que la frecuencia de la luz fuera mayor que cierto valor mínimo llamado **frecuencia de umbral**. Esta frecuencia mínima depende del material del cátodo. Para la mayoría de los metales, la frecuencia de umbral está en el ultravioleta (que corresponde a longitudes de onda λ entre 200 y 300 nm); pero para los óxidos de potasio y cesio, está en el espectro visible (λ entre 400 y 700 nm).

Cuando la frecuencia f es *mayor* que la frecuencia de umbral, algunos electrones son emitidos del cátodo, con velocidades iniciales considerables. Eso se puede mostrar invirtiendo la polaridad de la batería (figura 38.3b), de modo que la fuerza del campo eléctrico sobre los electrones los regrese hacia el cátodo. Si la magnitud del campo no es muy grande, los electrones emitidos con energía máxima seguirán llegando al ánodo, y todavía producirán una corriente. Podemos determinar la energía cinética *máxima* de los electrones emitidos, haciendo que el potencial del ánodo, relativo al del cátodo, V_{AC}, sea justo lo suficientemente negativo para que se detenga la corriente. Eso sucede cuando $V_{AC} = -V_0$, donde V_0 es el llamado **potencial de frenado** (o **potencial de paro**). Conforme un electrón se mueve del cátodo al ánodo, el potencial disminuye en V_0 y se efectúa un trabajo negativo $-eV_0$ sobre el electrón (que tiene carga negativa); el electrón con más energía sale del cátodo con una energía cinética $K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2$, y tiene energía cinética cero en el ánodo. Si se aplica el teorema trabajo-energía, se obtiene

$$W_{tot} = -eV_0 = \Delta K = 0 - K_{máx}$$
$$K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = eV_0 \qquad \text{(energía cinética máxima de los fotoelectrones)} \qquad (38.1)$$

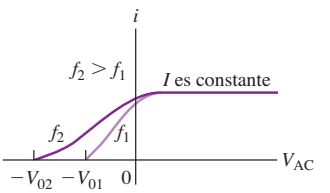
Así, al medir el potencial de frenado V_0 se puede determinar la energía cinética máxima con la que los electrones salen del cátodo. (No se toma en cuenta efecto alguno debido a diferencias en los materiales del cátodo y el ánodo.)

La figura 38.4 muestra gráficas de fotocorriente en función de la diferencia de potencial V_{AC} para luz de frecuencia constante y dos intensidades distintas. Cuando V_{AC} es suficientemente grande y positivo, las curvas se nivelan, lo cual demuestra que *todos* los electrones emitidos llegan al ánodo. Se muestra la diferencia de potencial inverso, $-V_0$, necesaria para reducir la corriente a cero.

Si aumenta la intensidad de la luz, manteniendo igual su frecuencia, la corriente se nivela en un valor mayor, lo que demuestra que se emiten más electrones por unidad de tiempo. Sin embargo, se encuentra que el potencial de frenado V_0 es igual.

La figura 38.5 muestra la corriente en función de la diferencia de potencial, para dos frecuencias distintas. Se ve que cuando la frecuencia de la luz monocromática incidente se eleva, aumenta el potencial de frenado V_0. De hecho, se ve que V_0 es una función lineal de la frecuencia f.

38.5 Corriente fotoeléctrica i para dos frecuencias distintas de luz, f_1 y f_2, en función del potencial V_{AC} del ánodo con respecto al cátodo.



El potencial de frenado V_0 (y, en consecuencia, la energía cinética máxima de los fotoelectrones) aumenta en forma lineal con la frecuencia: ya que $f_2 > f_1, V_{02} > V_{01}$.

Explicación de Einstein acerca del fotón

Es difícil comprender esos resultados con base en la física clásica. Cuando aumenta la intensidad (que es energía promedio por unidad de área por unidad de tiempo), los electrones deberían aumentar más su energía e incrementar el potencial de frenado V_0. Pero se encontró que V_0 *no* dependía de la intensidad. Asimismo, la física clásica no nos explica por qué hay frecuencia de umbral. En la sección 32.4 vimos que la intensidad de una onda electromagnética como la luz no depende de la frecuencia, así que un electrón debería adquirir la energía de escape que necesita a partir de la luz de cualquier frecuencia. En consecuencia no debería haber una frecuencia de umbral f_0. Por último, se esperaría que pasara un tiempo para que un electrón reuniera la energía necesaria para escapar, cuando la luz fuera demasiado débil. No obstante, también con experimentos se demuestra que se emiten electrones tan pronto como llega a la superficie *cualquier* cantidad de luz con $f \geq f_0$.

En 1905 Albert Einstein desarrolló el análisis correcto del efecto fotoeléctrico. Al basarse en una hipótesis de Max Planck, sugerida cinco años antes (que describiremos en la sección 38.8), Einstein postuló que un rayo de luz consiste en pequeños paquetes de energía llamados **fotones** o *cuantos.* La energía E de un fotón es igual a una constante h por su frecuencia f. De acuerdo con $f = c/\lambda$ para las ondas electromagnéticas en el vacío, se obtiene

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{(energía de un fotón)} \tag{38.2}$$

donde h es una constante universal llamada **constante de Planck**. El valor numérico de esta constante, con la exactitud con que se conoce en la actualidad, es

$$h = 6.6260693(11) \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

Un fotón que llega a la superficie es absorbido por un electrón. Esta transferencia de energía es un proceso de todo o nada, a diferencia de la transferencia continua de energía de la teoría clásica; el electrón obtiene toda la energía del fotón o no obtiene nada. Si esta energía es mayor que la función trabajo ϕ, el electrón puede escapar de la superficie. Cuando es mayor la intensidad a determinada frecuencia equivale a una cantidad proporcionalmente mayor de fotones que se absorben por segundo y, en consecuencia, resulta una cantidad proporcionalmente mayor de electrones emitidos por segundo y la corriente es proporcionalmente mayor como en la figura 38.4.

Recuerde que ϕ es la energía *mínima* necesaria para quitar un electrón de la superficie. Einstein aplicó la conservación de la energía para determinar que la energía cinética *máxima* $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$ para un electrón emitido es la energía hf adquirida por un fotón menos la función trabajo ϕ:

$$K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = hf - \phi \tag{38.3}$$

Al sustituir $K_{\text{máx}} = eV_0$ en la ecuación (38.1), obtenemos

$$eV_0 = hf - \phi \qquad \text{(efecto fotoeléctrico)} \tag{38.4}$$

Podemos medir el potencial de frenado V_0 para cada uno de varios valores de frecuencia f, con un material de cátodo dado. Una gráfica de V_0 en función de f es una recta, con lo que se verifica la ecuación (38.4); a partir de esa gráfica se pueden

determinar tanto la función trabajo ϕ del material como el valor de la cantidad h/e. (Lo haremos en forma gráfica en el ejemplo 38.3.) Después de que Robert Millikan midió la carga del electrón $-e$, en 1909, se pudo determinar también la constante de Planck, por estas mediciones.

Las energías y las funciones trabajo de los electrones se suelen expresar en electrón volts (eV), definidos en la sección 23.2. Con cuatro cifras significativas,

$$1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

y con esta exactitud, la constante de Planck es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$$

Tabla 38.1 Funciones trabajo de varios elementos

Elemento	Función trabajo (eV)
Aluminio	4.3
Carbono	5.0
Cobre	4.7
Oro	5.1
Níquel	5.1
Silicio	4.8
Plata	4.3
Sodio	2.7

La tabla 38.1 contiene una lista de algunas funciones-trabajo de los elementos. Esos valores son aproximados, porque son muy sensibles a impurezas en la superficie. Cuanto mayor sea la función trabajo, mayor será la frecuencia mínima necesaria para emitir fotoelectrones.

Cantidad de movimiento del fotón

Hemos descrito a los fotones casi siempre en el contexto de la luz. Sin embargo, el concepto de la cuantización se aplica a *todas* las regiones del espectro electromagnético, incluyendo las ondas de radio, los rayos x, etcétera. Un fotón de radiación electromagnética, de frecuencia f y longitud de onda λ tiene una energía E expresada por la ecuación (38.2). Además, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, toda partícula con energía también debe tener cantidad de movimiento, aun cuando no tenga masa en reposo. Los fotones tienen cero masa en reposo. Como vimos en la ecuación (37.40), un fotón de energía E tiene cantidad de movimiento de magnitud p, definida por $E = pc$. Así, la longitud de onda λ de un fotón y la magnitud de su cantidad de movimiento p se relacionan en forma sencilla por

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(cantidad de movimiento de un fotón)} \qquad (38.5)$$

La dirección del movimiento del fotón es sencillamente la dirección en la que se mueve la onda electromagnética.

Estrategia para resolver problemas 38.1 Fotones

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes*: La energía y la cantidad de movimiento de un fotón individual son proporcionales a la frecuencia, e inversamente proporcionales a la longitud de onda. Esos conceptos, junto con la idea del potencial de frenado en el efecto fotoeléctrico, permiten resolver casi cualquier problema donde intervienen los fotones.

PLANTEAR *el problema:* Decida cuál es la incógnita. Podría ser la longitud de onda λ del fotón, su frecuencia f, su energía E o su cantidad de movimiento p. Si el problema implica el efecto fotoeléctrico, la incógnita podría ser la energía cinética máxima $K_{\text{máx}}$ de los fotoelectrones, el potencial de frenado V_0, o la función trabajo ϕ.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use las ecuaciones (38.2) y (38.5) para relacionar la energía y la cantidad de movimiento de un fotón, con su longitud de onda y su frecuencia. Si en el problema interviene el efecto fotoeléctrico, use las ecuaciones (38.1), (38.3) y (38.4) para relacionar la frecuencia del fotón, el potencial de frenado, la función trabajo y la energía cinética máxima del fotoelectrón.
2. El electrón volt es una unidad importante y cómoda. La usamos en el capítulo 37 y la usaremos todavía más en éste y en los tres capítulos que siguen. Un electrón volt (eV) es la cantidad de energía cinética que gana un electrón cuando se mueve libremente a través de un aumento de potencial de un volt: $1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$. Si la energía del fotón E se da en electrón volts, use $h = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$; si E está en joules, use $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$.

EVALUAR *su respuesta:* En problemas donde intervienen fotones, los números están entre rangos tan extraños que quizás el sentido común no le ayude a identificar si su cálculo tiene un gran error. Es útil recordar que un fotón de luz visible, con $\lambda = 600$ nm y $f = 5 \times 10^{14}$ Hz tiene una energía E aproximada de 2 eV, más o menos $3 \times 10^{-19}\ \text{J}$.

Ejemplo 38.1 Fotones de radio de FM

La estación radiofónica WQED de Pittsburgh emite a 89.3 MHz con una potencia irradiada de 43.0 kW. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento de cada fotón? *b*) ¿Cuántos fotones emite la WQED cada segundo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica las ideas de *a*) cantidad de movimiento del fotón y *b*) energía del fotón.

PLANTEAR: Se nos da la frecuencia de la radiación, por lo que podemos usar en forma directa la ecuación (38.5) para calcular la magnitud de la cantidad de movimiento de cada fotón, en el inciso *a*). En la parte *b*), observe que "potencia irradiada" quiere decir la energía emitida por segundo, y que la ecuación (38.2) da como resultado la energía por fotón. Se pueden combinar las anteriores para calcular el número de fotones emitidos por segundo.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (38.5), la magnitud de la cantidad de movimiento de cada fotón es

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(89.3 \times 10^{6}\ \text{Hz})}{3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}}$$
$$= 1.97 \times 10^{-34}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

(Recuerde que $1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ y que $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$.)

b) Según la ecuación (38.2), la energía de cada fotón es

$$E = pc = (1.97 \times 10^{-34}\ \text{kg} \cdot \text{m/s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})$$
$$= 5.92 \times 10^{-26}\ \text{J}$$

La estación emite 43.0×10^3 joules cada segundo, por lo que la razón con que se emiten los fotones es

$$\frac{43.0 \times 10^{3}\ \text{J/s}}{5.92 \times 10^{-26}\ \text{J/fotón}} = 7.26 \times 10^{29}\ \text{fotones/s}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *a*) es muy pequeño, más o menos de la magnitud de la cantidad de movimiento que tendría un electrón si se arrastrara con una rapidez de un metro por hora. La energía E del fotón, calculada en el inciso *b*), también es muy baja, igual a 3.69×10^{-7} eV. Un fotón de luz visible tiene más o menos 10^7 veces más energía. Esto tiene sentido: la energía de un fotón es proporcional a su frecuencia, y las frecuencias de la luz visible son aproximadamente 10^7 veces mayores que las que se usan en la radio de FM. (También puede comprobar el valor de la energía del fotón, aplicando $E = hf$.)

Nuestro resultado del inciso *b*) muestra que un número inmenso de fotones sale de la estación cada segundo, y cada uno tiene una cantidad infinitesimal de energía. Por consiguiente, no se nota lo discreto de los fotones, y parece que la energía irradiada es un flujo continuo.

Ejemplo 38.2 Un experimento de efecto fotoeléctrico

Al realizar un experimento de efecto fotoeléctrico con luz de cierta frecuencia, usted encuentra que se requiere una diferencia de potencial inverso de 1.25 V para reducir la corriente a cero. Calcule *a*) la energía cinética máxima, *b*) la rapidez máxima de los fotoelectrones emitidos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre la energía cinética máxima $K_{\text{máx}}$ de un electrón en el efecto fotoeléctrico y el potencial de frenado asociado V_0.

PLANTEAR: El valor de 1.25 V es el potencial de frenado V_0. Se puede determinar la energía cinética máxima del fotoelectrón $K_{\text{máx}}$ con la ecuación (38.1); una vez con su valor, podemos determinar la rapidez máxima del fotoelectrón.

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (38.1),

$$K_{\text{máx}} = eV_0 = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.25\ \text{V}) = 2.00 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Recuerde que 1 V = 1 J/C. En términos de electrón volts,

$$K_{\text{máx}} = eV_0 = e(1.25\ \text{V}) = 1.25\ \text{eV}$$

ya que el electrón volt (eV) es la magnitud de la carga del electrón e por un volt (1 V).

b) A partir de $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}{}^2$ se obtiene

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{máx}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(2.00 \times 10^{-19}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}}$$
$$= 6.63 \times 10^{5}\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El valor de $V_{\text{máx}}$ es más o menos $\frac{1}{500}$ de c, la rapidez de la luz, por lo que se justifica el uso de la ecuación no relativista de la energía cinética. Una justificación equivalente es que la energía cinética de 1.25 eV del electrón es mucho menor que su energía en *reposo* $mc^2 = 0.511$ MeV.

Ejemplo 38.3 Determinación experimental de ϕ y h

Para cierto material de cátodo en un experimento de efecto fotoeléctrico, usted mide un potencial de frenado de 1.0 V para luz de 600 nm de longitud de onda; 2.0 V para 400 nm y 3.0 V para 300 nm. Determine la función trabajo de este material y el valor de la constante de Planck.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre el potencial de frenado V_0, la frecuencia f y la función trabajo ϕ en el efecto fotoeléctrico.

PLANTEAR: De acuerdo con la ecuación (38.4), una gráfica del potencial de frenado V_0 en función de la frecuencia f debería ser una recta. Esa gráfica queda totalmente determinada con su pendiente y el valor con el que cruza el eje vertical; los usaremos para determinar los valores de las incógnitas ϕ y h.

EJECUTAR: Replanteamos la ecuación (38.4) como sigue:

$$V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

continúa

De esta manera, vemos que la pendiente de la recta es h/e y que la ordenada al origen (correspondiente a $f = 0$) está en $-\phi/e$. Las frecuencias, obtenidas con $f = c/\lambda$ y $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, son 0.50×10^{15} Hz, 0.75×10^{15} Hz, y 1.0×10^{15} Hz, respectivamente. En la figura 38.6 se muestra la gráfica. A partir de ella vemos que

$$-\frac{\phi}{e} = \text{ordenada al origen} = -1.0\ \text{V}$$

$$\phi = 1.0\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

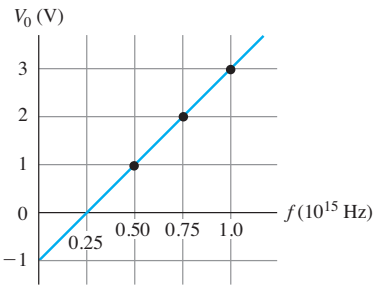
y

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} = \frac{3.0\ \text{V} - (-1.0\ \text{V})}{1.00 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1} - 0} = 4.0 \times 10^{-15}\ \text{J} \cdot \text{s/C}$$

$$h = \text{pendiente} \times e = (4.0 \times 10^{-15}\ \text{J} \cdot \text{s/C})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})$$
$$= 6.4 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

EVALUAR: Este valor experimental difiere un 3% del valor aceptado. El pequeño valor de ϕ indica que la superficie del cátodo no sólo está formada por uno de los elementos de la tabla 38.1.

38.6 Potencial de frenado como función de la frecuencia. Para un material del cátodo diferente que tenga una función trabajo distinta, la línea se desplazaría hacia arriba o hacia abajo, pero tendría la misma pendiente igual a h/e dentro del error experimental.



Evalúe su comprensión de la sección 38.2 Las películas de silicio se vuelven mejores conductores eléctricos cuando se iluminan con fotones de 1.14 eV o más de energía; a este efecto se le llama *fotoconductividad*. ¿Cuál de las siguientes longitudes de onda de la radiación electromagnética causa la fotoconductividad en las películas de silicio? i) luz ultravioleta con $\lambda = 300$ nm; ii) luz roja con longitud de onda $\lambda = 600$ nm; iii) luz infrarroja con $\lambda = 1200$ nm.

38.3 Espectros atómicos de líneas y niveles de energía

Activ Online Physics
18.2 Espectroscopia

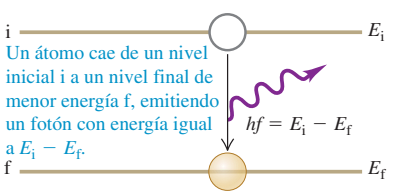
El origen de los *espectros de líneas*, mencionados en la sección 38.1, puede comprenderse en términos generales con base en dos ideas fundamentales. Una es el concepto del fotón, y la otra es el concepto de *niveles de energía* de los átomos. El físico danés Niels Bohr combinó esas dos ideas en 1913.

Emisión de fotones mediante átomos

La hipótesis de Bohr representó un rompimiento brusco con las ideas del siglo XIX. Su razonamiento fue como sigue. El espectro de líneas de un elemento es causado por la emisión de fotones con energías específicas, desde los átomos de ese elemento. Durante la emisión de un fotón, la energía interna del átomo cambia una cantidad igual a la energía del fotón. Por consiguiente, dijo Bohr, cada átomo debe ser capaz de existir sólo con ciertos valores específicos de energía interna. Cada átomo tiene un conjunto de **niveles de energía** posibles. Un átomo puede tener una cantidad de energía interna igual a cualquiera de esos niveles, pero *no puede* tener una energía *intermedia* entre dos niveles. Todos los átomos aislados de determinado elemento tienen el mismo conjunto de niveles de energía, pero los átomos de distintos elementos tienen diferentes conjuntos. En los tubos de descarga eléctrica, los átomos se elevan, o se *excitan*, a mayores niveles de energía, principalmente por choques inelásticos con electrones.

Según Bohr, un átomo puede hacer una *transición* de un nivel de energía a uno de menor energía, al emitir un fotón cuya energía es igual a la *diferencia* de energía entre los niveles inicial y final (figura 38.7). Si E_i es la energía inicial del átomo antes de esa transición, E_f es su nivel final de energía después de la transición y, si la energía del fotón es $hf = hc/\lambda$, entonces, de acuerdo con la conservación de la energía:

38.7 Un átomo que emite un fotón.



$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \qquad \text{(energía del fotón emitido)} \qquad (38.6)$$

Por ejemplo, cuando un átomo de kriptón emite un fotón de luz naranja con una longitud de onda $\lambda = 606$ nm, su energía correspondiente es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{606 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= 3.28 \times 10^{-19}\ \text{J} = 2.05\ \text{eV}$$

Este fotón se emite durante una transición como la de la figura 38.7, entre dos niveles del átomo, cuyas energías difieren en 2.05 eV.

El espectro del hidrógeno

Para 1913 se había estudiado el espectro del hidrógeno, el átomo más simple y menos masivo, en forma extensa. En un tubo de descarga eléctrica, el hidrógeno atómico emite la serie de líneas que muestra la figura 38.8. La línea visible con la máxima longitud de onda, o frecuencia mínima, está en el rojo, y se llama H_α; la siguiente línea, en el azul-verde, se llama H_β, y así sucesivamente. En 1885 el profesor suizo Johann Balmer (1825-1898) encontró (mediante ensayo y error) una fórmula para calcular las longitudes de onda de tales líneas, que ahora se conoce como la *serie de Balmer*. La fórmula de Balmer se puede escribir como sigue:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{38.7}$$

donde λ es la longitud de onda, R es una constante llamada **constante de Rydberg** (elegida para que la ecuación (38.7) se ajuste a las longitudes de onda medidas), y n puede tener los valores enteros 3, 4, 5, ... Si λ está en metros, el valor numérico de R es

$$R = 1.097 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1}$$

Si $n = 3$ en la ecuación (38.7), obtenemos la longitud de onda de la línea H_α:

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \qquad \text{o bien} \qquad \lambda = 656.3\ \text{nm}$$

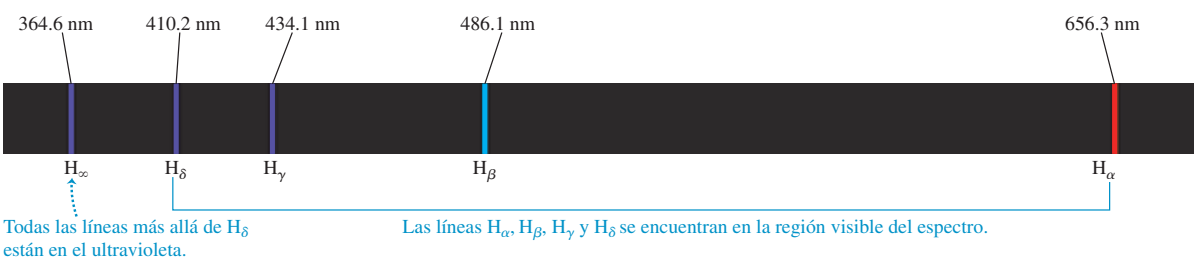
Para $n = 4$ obtenemos la longitud de onda de la línea H_β, y así sucesivamente. Para $n = \infty$, se obtiene la longitud de onda *mínima* en la serie, $\lambda = 364.6$ nm.

La fórmula de Balmer tiene una relación muy directa con la hipótesis de Bohr acerca de los niveles de energía. Aplicando la relación $E = hc/\lambda$ podemos determinar las *energías de los fotones* que corresponden a las longitudes de onda de la serie de Balmer. Al multiplicar la ecuación (38.7) por hc, vemos que

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{hcR}{2^2} - \frac{hcR}{n^2} \tag{38.8}$$

Las ecuaciones (38.6) y (38.8) para la energía de los fotones concuerdan en forma muy sencilla, si identificamos $-hcR/n^2$ como la energía inicial E_i del átomo, y $-hcR/2^2$ como su energía final E_f, en una transición en la que se emite un fotón de energía $E_i - E_f$. Las energías de los niveles son negativas, porque se escogió la energía potencial cero cuando el electrón y el núcleo están a una distancia infinita. La serie de

38.8 La serie de Balmer de líneas espectrales para el hidrógeno atómico.



Balmer (y otras más) parecen indicar que el átomo de hidrógeno tiene una serie de niveles de energía, a las que llamaremos E_n, expresadas por

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, 4, \ldots) \qquad \text{(niveles de energía del átomo de hidrógeno)} \tag{38.9}$$

Cada longitud de onda de la serie de Balmer corresponde a una transición de un nivel con $n = 3$, o mayor al nivel con $n = 2$.

El valor numérico del producto hcR es

$$\begin{aligned} hcR &= (6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})(1.097 \times 10^{7}\ \text{m}^{-1}) \\ &= 2.179 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13.60\ \text{eV} \end{aligned}$$

Así, las magnitudes de los niveles de energía determinados con la ecuación (38.9) son -13.60 eV, -3.40 eV, -1.51 eV, -0.85 eV, y así sucesivamente.

Se han descubierto otras series espectrales del hidrógeno que se llaman, en honor de sus descubridores: serie de Lyman, de Paschen, de Brackett y de Pfund. Sus longitudes de onda pueden representarse con fórmulas parecidas a la de Balmer:

$$\textit{Serie de Lyman}: \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

$$\textit{Serie de Paschen}: \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 4, 5, 6, \ldots)$$

$$\textit{Serie de Brackett}: \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 5, 6, 7, \ldots)$$

$$\textit{Serie de Pfund}: \quad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 6, 7, 8, \ldots)$$

La serie de Lyman está en el ultravioleta, y las de Paschen, Brackett y Pfund están en el infrarrojo. Vemos que la serie de Balmer se ajusta al esquema entre las series de Lyman y de Paschen.

Entonces, pueden comprenderse *todas* las líneas espectrales del hidrógeno con base en el modelo de Bohr de transiciones de uno a otro niveles de energía (y sus órbitas correspondientes para los electrones), y los niveles de energía indicados por la ecuación (38.9) con $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para la serie de Lyman, el nivel final siempre es $n = 1$; para la de Paschen es $n = 3$, etcétera. La relación de las diversas series espectrales con los niveles de energía y con las órbitas electrónicas se ve en la figura 38.9. Tomadas en conjunto, esas series espectrales son un fuerte respaldo a la idea de Bohr, sobre los niveles de energía de los átomos.

CUIDADO **Producción de un espectro de líneas** *No* todas las líneas de un espectro, como el espectro del hidrógeno de la figura 38.8, son producidas por un sólo átomo. La muestra de hidrógeno gaseoso que produjo el espectro de la figura 38.8 contenía un gran número de átomos; éstos fueron excitados en un tubo de descarga eléctrica hacia diversos niveles de energía. El espectro del gas muestra la luz emitida por todas las transiciones diferentes que sucedieron en distintos átomos de la muestra. ▮

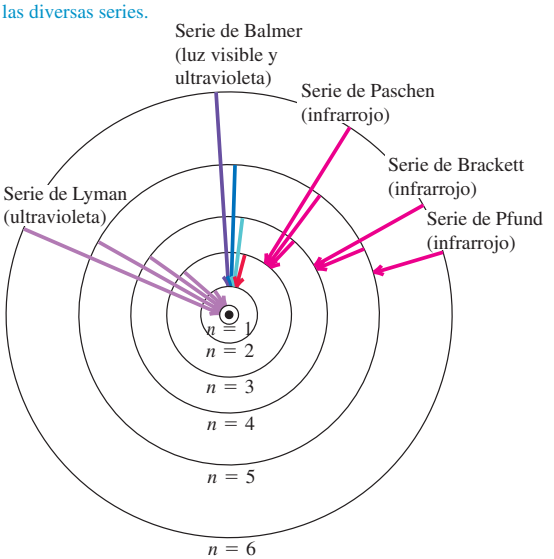
Todavía no hemos descrito forma alguna para *predecir* cuáles deben ser los niveles de energía de determinado átomo. Tampoco hemos indicado cómo deducir la ecuación (38.9) a partir de una teoría fundamental, ni a relacionar R, la constante de Rydberg, con otras constantes fundamentales. Después regresaremos a estos problemas.

El experimento de Franck-Hertz

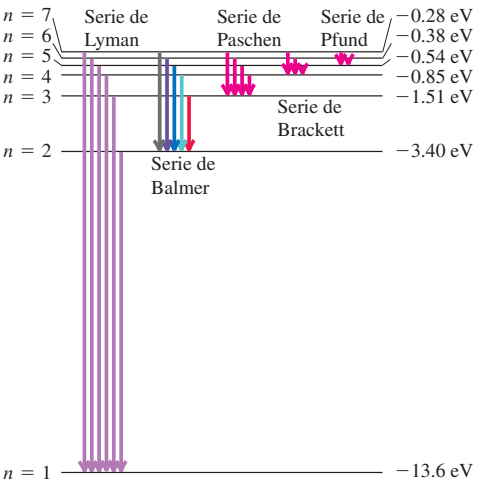
En 1914 James Franck y Gustav Hertz encontraron evidencia experimental todavía más directa sobre la existencia de niveles de energía en átomos. Franck y Hertz estudiaron el movimiento de electrones a través de vapor de mercurio, bajo la acción de

38.9 Dos maneras de representar los niveles de energía del átomo de hidrógeno y las transiciones entre ellos.

a) Órbitas "permitidas" de un electrón para el modelo de un átomo de hidrógeno, según Bohr (no está a escala). Las flechas indican las transiciones causantes de algunas de las líneas de las diversas series.



b) Diagrama de niveles de energía para el hidrógeno; muestra algunas transiciones correspondientes a las diversas series.



un campo eléctrico. Encontraron que cuando la energía cinética de los electrones era 4.9 eV o mayor, el vapor emitía luz ultravioleta con 0.25 μm. Suponga que los átomos de mercurio tienen un nivel de energía de 4.9 eV arriba del nivel de energía mínimo. Un átomo puede elevarse a este nivel por choque contra un electrón; después regresa al nivel mínimo de energía, emitiendo un fotón. De acuerdo con la ecuación (38.2), la longitud de onda del fotón debería ser

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{4.9\ \text{eV}}$$
$$= 2.5 \times 10^{-7}\ \text{m} = 0.25\ \mu\text{m}$$

Esto es igual a la longitud de onda medida, y se confirma la existencia de este nivel de energía en el átomo de mercurio. Con experimentos similares con otros átomos se obtiene la misma clase de evidencia para los niveles de energía en átomos.

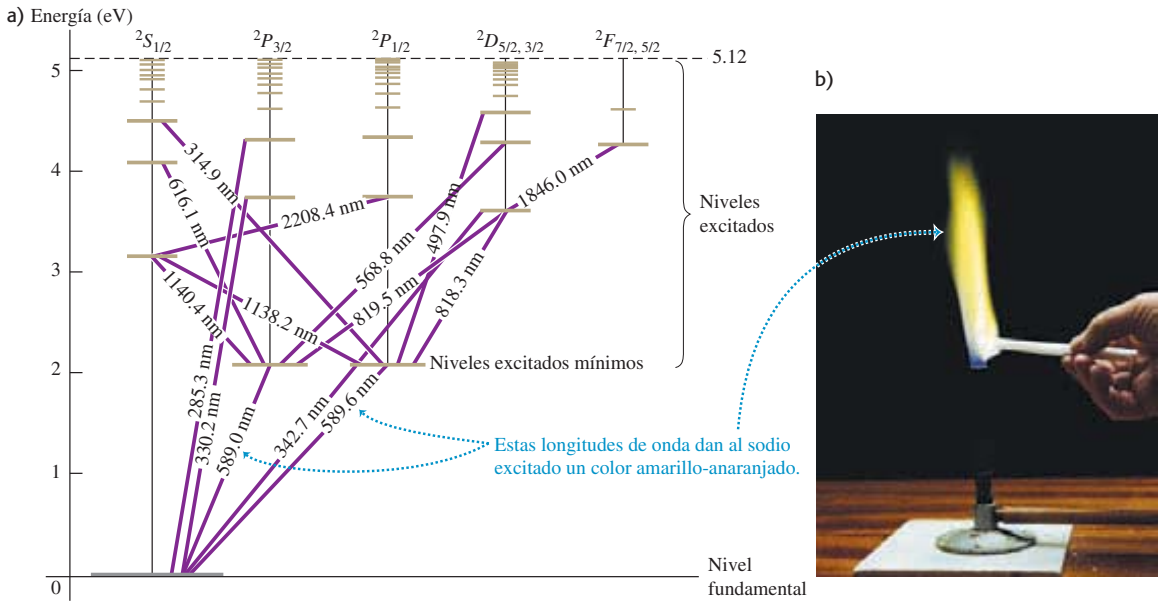
Niveles de energía

Sólo pocos átomos y iones (como el hidrógeno, el helio simplemente ionizado y el litio doblemente ionizado) tienen espectros, cuyas longitudes de onda pueden representarse con una fórmula sencilla, como la de Balmer. No obstante, *siempre* es posible analizar los espectros más complicados de otros elementos en términos de transiciones entre diversos niveles de energía, y deducir los valores numéricos de esos niveles a partir de las longitudes de onda medidas de su espectro.

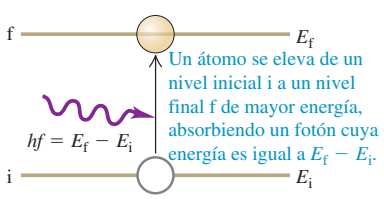
Cada átomo tiene un nivel mínimo de energía, que incluye al estado de energía interna *mínima* que puede tener el átomo. A éste se le llama *nivel de estado fundamental*, o **nivel fundamental**, y todos los niveles más altos se llaman **niveles excitados**. Un fotón que corresponde a determinada línea del espectro se emite cuando un átomo hace una transición de un estado de un nivel excitado, a otro con un nivel menos excitado, o al nivel fundamental.

Algunos niveles de energía para el sodio aparecen en la figura 38.10a (siguiente página). El lector habrá notado la luz emitida por las lámparas de vapor de sodio en las calles, de color amarillo-anaranjado. Los átomos de sodio emiten esta luz característica, de longitudes de onda 589.0 y 589.6 nm, cuando hacen transiciones entre los dos niveles muy cercanos, llamados *niveles excitados mínimos* al nivel fundamental. Una prueba

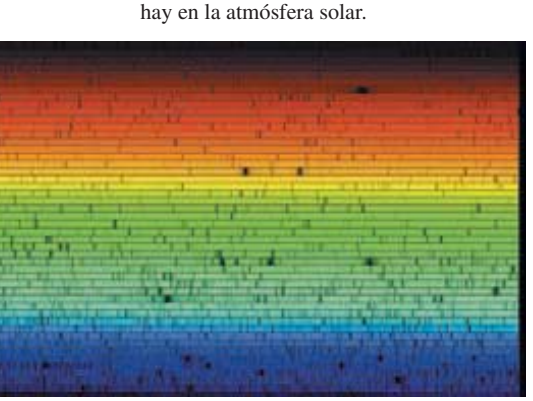
38.10 a) Niveles de energía del átomo de sodio, en relación con el nivel fundamental. Los números en las líneas que unen los niveles son longitudes de onda. Los encabezados de columna, como $^2S_{1/2}$, representan algunos estados cuánticos del electrón de valencia (que se describirán en el capítulo 41). b) Cuando se coloca un compuesto de sodio en la flama, se excitan los átomos de sodio en los niveles mínimos de excitación. Cuando regresan al nivel fundamental, los átomos emiten fotones de luz amarillo-anaranjada con longitudes de onda de 589.0 y 589.6 nm.



38.11 Un átomo que absorbe un fotón. (Compare con la figura 38.7.)



38.12 Espectro de absorción del Sol. (Usted debería leer el espectro de izquierda a derecha en cada franja y luego hacia abajo desde una franja a la siguiente, como las palabras de un párrafo impreso.) La atmósfera solar es relativamente fría y absorbe fotones, en forma selectiva, de la superficie incandescente del Sol, produciendo así líneas de absorción oscuras que indican qué clases de átomos hay en la atmósfera solar.



estándar para detectar la presencia de compuestos de sodio consiste en buscar luz de color amarillo anaranjado, a partir de una muestra colocada en una flama (figura 38.10b).

Absorción de un fotón

Un átomo de sodio en el nivel fundamental también puede *absorber* un fotón de 589.0 o 589.6 nm de longitud de onda. Para demostrar este proceso se hace pasar un haz de luz de una lámpara de vapor de sodio, por un bulbo que contenga vapor de sodio. Los átomos en el vapor absorben los fotones de 589.0 y 589.6 nm del rayo, y llegan a sus niveles excitados mínimos; después de poco tiempo, regresan al nivel fundamental y emiten fotones en todas direcciones, haciendo que el vapor de sodio brille con la luz amarilla característica. El tiempo promedio que pasan en un nivel excitado se llama *vida* o *duración* del nivel y es, aproximadamente, 1.6×10^{-8} s.

En forma más general, un fotón *emitido* cuando un átomo hace una transición de un nivel excitado a uno menor, también puede ser *absorbido* por un átomo similar que inicialmente esté en el nivel inferior (figura 38.11). Si hacemos pasar luz blanca (de espectro continuo) a través de un gas y vemos la luz *transmitida* con un espectrómetro, se encuentran una serie de líneas negras que corresponden a las longitudes de onda que se han absorbido, como se ve en la figura 38.12. A éste se le llama **espectro de absorción**.

Un fenómeno relacionado es la *fluorescencia.* Un átomo absorbe un fotón (a menudo en la región ultravioleta) y llega a un nivel excitado; después regresa al nivel fundamental en etapas, emitiendo dos o más fotones de menor energía y mayor longitud de onda. Por ejemplo, la descarga eléctrica en un tubo fluorescente hace que el vapor de mercurio en el tubo emita radiación ultravioleta. Esta radiación es absorbida por los átomos del recubrimiento del interior del tubo. Los átomos del recubrimiento reemiten luz en la parte visible del espectro de mayor longitud de onda. Las lámparas fluorescentes son más eficientes que las incandescentes, en cuanto a la conversión de energía eléctrica en luz visible, ya que no gastan tanta energía en producir fotones (invisibles) infrarrojos.

La hipótesis de Bohr estableció la relación de longitudes de onda y niveles de energía, pero no proporcionaba principios generales para *predecir* los niveles de energía de determinado átomo. Bohr presentó un análisis parcial para el átomo de hidrógeno;

lo describiremos en la sección 38.5. Una idea más general de la estructura atómica y de los niveles de energía se basa en los conceptos de la *mecánica cuántica*, que presentaremos en los capítulos 39 y 40. La mecánica cuántica ofrece todos los principios necesarios para calcular niveles de energía, partiendo de una teoría fundamental. Por desgracia, para átomos con muchos electrones, tales cálculos son tan complicados que sólo pueden hacerse en forma aproximada.

Ejemplo 38.4 Espectros de emisión y absorción

Un átomo hipotético tiene tres niveles de energía: el fundamental, y los de 1.00 eV y 3.00 eV arriba del nivel fundamental. *a*) Calcule las frecuencias y las longitudes de onda de las líneas espectrales que puede emitir este átomo cuando se excita. *b*) ¿Qué longitudes de onda puede absorber este átomo, si al principio está en su nivel fundamental?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usamos la idea de que la energía se conserva cuando se emite o se absorbe un fotón.

PLANTEAR: En cada transición, la energía del fotón es igual a la diferencia entre las energías del nivel más alto y el más bajo que intervienen en la transición.

EJECUTAR: *a*) La figura 38.13a muestra un diagrama de niveles de energía. Las energías posibles de los fotones que corresponden a las transiciones indicadas son 1.00 eV, 2.00 eV y 3.00 eV. Para 1.00 eV tenemos que, de acuerdo con la ecuación (38.2),

$$f = \frac{E}{h} = \frac{1.00\ \text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}} = 2.42 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

Para 2.00 eV y 3.00 eV, $f = 4.84 \times 10^{14}$ Hz y 7.25×10^{14} Hz, respectivamente. Podemos calcular las longitudes de onda con $\lambda = c/f$. Para 1.00 eV,

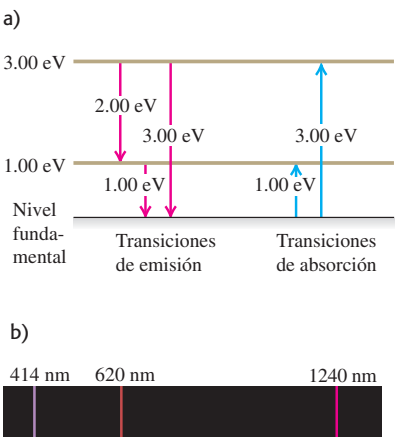
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}}{2.42 \times 10^{14}\ \text{Hz}} = 1.24 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1240\ \text{nm}$$

en la región infrarroja del espectro. Para 2.00 y 3.00 eV, las longitudes de onda son 620 nm (rojo) y 414 nm (violeta), respectivamente (figura 38.13b).

b) Cuando el átomo se encuentra en el nivel fundamental, sólo absorbe un fotón de 1.00 eV o de 3.00 eV; no puede absorber uno de 2.00 eV porque no hay nivel de energía que esté 2.00 eV sobre el nivel fundamental. Como ya calculamos, las longitudes de onda de los fotones de 1.00 eV y 3.00 eV son 1240 nm y 414 nm, respectivamente. Al pasar luz de un sólido caliente a través de un gas frío, esos átomos causarán un espectro continuo con líneas oscuras de absorción a 1240 nm y 414 nm.

EVALUAR: Advierta que si un gas con estos átomos estuviera a una temperatura suficientemente alta, las colisiones excitarían cierto número de átomos y pasarían al nivel de energía de 1.00 eV. Esos átomos excitados *sí pueden* absorber fotones de 2.00 eV, y en el espectro aparecería una línea de absorción en 620 nm. Así, el espectro observado para determinada sustancia depende de sus niveles de energía y también de su temperatura.

38.13 a) Diagrama de niveles de energía que muestra las transiciones posibles para emisión desde niveles excitados, y para absorción desde el nivel fundamental. b) Espectro de emisión de este átomo hipotético.



Evalúe su comprensión de la sección 38.3 ¿Sería posible excitar el átomo hipotético del ejemplo 38.4 desde el nivel fundamental hasta el de 1.00 eV con un fotón de 1.50 eV?

38.4 El átomo nuclear

Antes de avanzar más en la relación de niveles de energía de un átomo con su estructura interna, necesitamos tener una mejor idea sobre a qué se parece el interior de un átomo. Sabemos que los átomos son mucho menores que las longitudes de onda de la luz visible, por lo que no hay esperanza de *ver* realmente un átomo con esa luz. Pero aun así podemos describir cómo están distribuidas la masa y la carga eléctrica en el átomo.

En 1910 las cosas estaban así: J. J. Thomson había descubierto el electrón y medido su relación de carga a masa (e/m) en 1897, y en 1909, Millikan había terminado sus primeras mediciones de la carga del electrón, $-e$. Éstos y otros experimentos indicaban que casi toda la masa de un átomo debería estar asociada con la carga *positiva* y no

con los electrones. También se sabía que el tamaño general de los átomos era del orden de 10^{-10} m, y que todos los átomos, excepto el hidrógeno, contenían más de un electrón. Lo que *no* se sabía era cómo se distribuían la masa y la carga dentro del átomo. Thomson había propuesto un modelo donde el átomo consistía en una esfera con carga positiva, del orden de 10^{-10} m de diámetro, con los electrones incrustados en ella como las pasas en una gelatina más o menos esférica.

Exploración de Rutherford del átomo

38.14 Nacido en Nueva Zelanda, Ernest Rutherford (1871-1937) hizo su vida profesional en Inglaterra y en Canadá. Antes de efectuar los experimentos que establecieron la existencia de núcleos atómicos, compartió el Premio Nobel de Química de 1908 con Frederick Soddy, por demostrar que la radiactividad se debe a la desintegración de átomos.

Activ ONLINE Physics

19.1 Dispersión de partículas

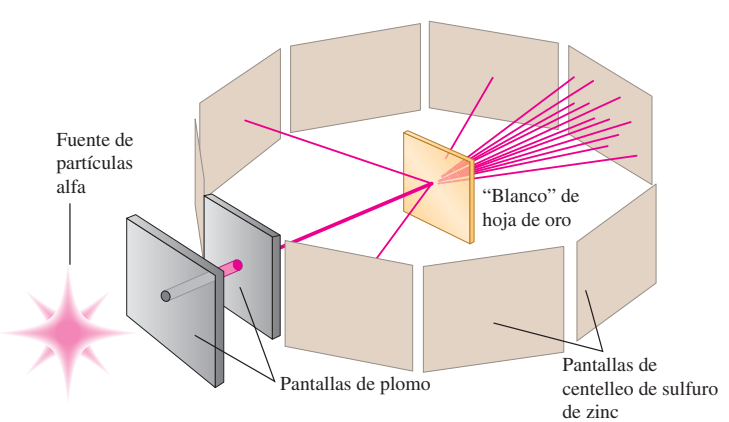
Los primeros experimentos cuyo objeto era sondear la estructura interior del átomo fueron los **experimentos de dispersión de Rutherford**, realizados entre 1910 y 1911 por Ernest Rutherford (figura 38.14) y dos de sus alumnos: Hans Geiger y Ernest Marsden, en la Universidad de Manchester, Inglaterra. Esos experimentos consistían en lanzar partículas cargadas hacia hojas delgadas de los elementos en estudio, y observar las desviaciones de las partículas. Los aceleradores de partículas que en la actualidad son de uso común en los laboratorios todavía no se habían inventado, y los proyectiles de Rutherford eran *partículas alfa* emitidas por elementos radiactivos naturales. Las partículas alfa son idénticas a los núcleos de los átomos de helio: dos protones y dos neutrones enlazados entre sí. Son expulsados de núcleos inestables con rapideces de unos 10^7 m/s, y pueden viajar varios centímetros en el aire, o más o menos 0.1 mm a través de materia sólida, antes de detenerse por los choques.

La figura 38.15 muestra un esquema del dispositivo experimental de Rutherford. Una sustancia radiactiva, en el lado izquierdo, emite partículas alfa. Con pantallas gruesas de plomo se detienen todas las partículas, excepto las de un haz angosto definido por agujeros pequeños. A continuación, el haz atraviesa un blanco formado por una hoja delgada de oro, plata o cobre (un "blanco"), y llega a pantallas recubiertas con sulfuro de zinc: se trata de un principio parecido al de la pantalla de un televisor. Siempre que la pantalla es golpeada por una partícula alfa, se puede ver en ella un destello, o *centelleo* momentáneo. Rutherford y sus alumnos contaron las cantidades de partículas desviadas en varios ángulos.

Imagine que los átomos del material "blanco" están empacados, como canicas en una caja. Una partícula alfa puede atravesar una hoja delgada metálica, por lo que en realidad esa partícula debe ser capaz de atravesar los interiores de los átomos. La carga eléctrica *total* del átomo es cero, por lo que en su exterior actúa poca fuerza sobre la partícula alfa. Dentro del átomo están las fuerzas eléctricas causadas por los electrones y por la carga positiva. Pero la masa de una partícula alfa es más o menos 7300 veces mayor que la de un electrón. Los cálculos de cantidad de movimiento indican que una partícula alfa puede ser desviada sólo una cantidad pequeña por su interacción con los electrones, que son mucho más ligeros. Es como arrojar una piedra a través de un enjambre de mosquitos: los mosquitos no desvían mucho a la piedra. Sólo las interacciones con la carga *positiva,* que contiene casi toda la masa del átomo, pueden desviar en forma apreciable a la partícula alfa.

En el modelo de Thomson, la carga positiva y los electrones negativos están distribuidos por todo el átomo. Por consiguiente, el campo eléctrico dentro del átomo debería

38.15 Dispersión de partículas alfa por una hoja metálica delgada. La fuente de partículas alfa es un elemento radiactivo, como el radio. Las dos pantallas de plomo con agujeros pequeños forman un haz angosto de partículas alfa, que son dispersadas por la hoja de oro. Las direcciones de las partículas alfa se determinan por los destellos en las pantallas de centelleo.



ser bastante pequeño, y la fuerza eléctrica de una partícula alfa que entre al átomo debería ser muy débil. La desviación máxima que cabría esperar es, entonces, sólo de algunos grados (figura 38.16a).

Los resultados fueron muy diferentes y totalmente inesperados. Algunas partículas alfa fueron dispersadas casi 180°, esto es, casi directo hacia atrás (figura 38.16b). Después escribiría Rutherford:

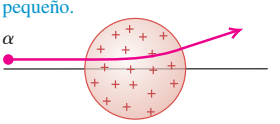
> Fue casi el evento más increíble que me sucedió en la vida. Casi tan increíble como si usted hubiera disparado un cañón de 15 pulgadas contra un trozo de pañuelo desechable, rebotara y le pegara a usted.

Suponga que la carga positiva, en vez de distribuirse en una esfera de dimensiones atómicas (del orden de 10^{-10} m), se encuentra concentrada en un espacio mucho *menor*. Entonces, funcionaría como una carga puntual, en distancias mucho menores. El campo eléctrico máximo que repele la partícula alfa sería mucho mayor, y sería posible tener la sorprendente dispersión en grandes ángulos. Rutherford llamó **núcleo** a esta concentración de carga positiva. De nuevo calculó las cantidades de partículas que esperaba se dispersaran en varios ángulos. Dentro de la exactitud de sus experimentos, los resultados calculados y medidos coincidieron hasta distancias de 10^{-14} m. En consecuencia, sus experimentos demostraron que el átomo sí tiene un núcleo: una estructura muy pequeña y muy densa, no mayor de 10^{-14} m de diámetro. El núcleo sólo ocupa aproximadamente la 10^{-12} parte del volumen total del átomo, o menos, pero contiene *toda* la carga positiva y, al menos, el 99.95% de la masa total del átomo.

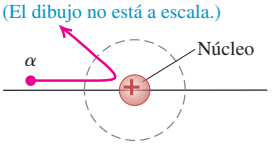
La figura 38.17 muestra una simulación por computadora de la dispersión de partículas alfa de 5.0 MeV en un núcleo de oro de 7.0×10^{-15} m (el valor real) y de un núcleo con un radio hipotético de diez veces el anterior. En el segundo caso *no* hay dispersión en ángulos grandes. La presencia de dispersión en ángulos grandes, en los experimentos de Rutherford, atestiguó el tamaño tan pequeño del núcleo.

38.16 a) El modelo de Thomson del átomo fue descartado por los experimentos de Rutherford sobre dispersión. b) Para explicar sus resultados experimentales, Rutherford desarrolló un modelo nuclear del átomo.

a) El modelo del átomo según Thomson: una partícula alfa sólo es dispersada en un ángulo pequeño.



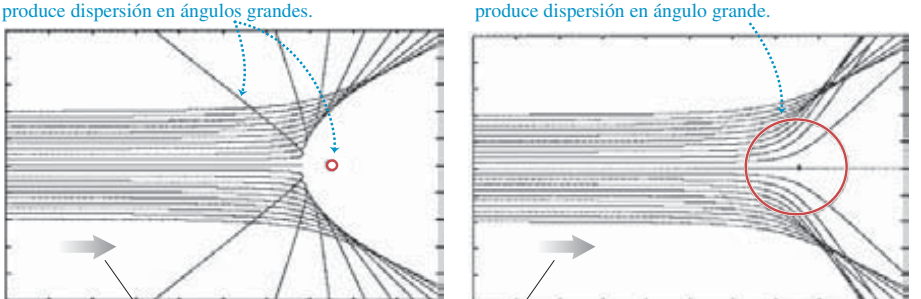
b) Modelo del átomo según Rutherford: una partícula alfa puede ser dispersada por el núcleo compacto y con carga positiva. (El dibujo no está a escala.)



38.17 Simulación por computadora de la dispersión de partículas alfa de 5.0 MeV, por un núcleo de oro. Cada curva indica una trayectoria posible de la partícula alfa. a) Las curvas de dispersión concuerdan con los datos experimentales de Rutherford, si se considera un radio de 7.0×10^{-15} m para un núcleo de oro. b) Un modelo con un radio mucho mayor no se ajusta a los datos.

a) Un núcleo de oro, con 7.0×10^{-15} m de radio produce dispersión en ángulos grandes.

b) Un núcleo con un radio diez veces el anterior *no* produce dispersión en ángulo grande.



Ejemplo 38.5 Un experimento de Rutherford

Una partícula alfa se apunta directamente hacia un núcleo de oro. Esa partícula tiene dos protones, y su carga es de $2e = 2(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})$, mientras que un núcleo de oro tiene 79 protones y una carga de $79e = 79(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})$. ¿Qué energía cinética mínima debe tener la partícula alfa para acercarse a menos de 5.0×10^{-14} m del centro del núcleo de oro? Suponga que el núcleo de oro, que tiene más o menos 50 veces la masa en reposo de una partícula alfa, permanece en reposo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Conforme la partícula alfa se aproxima al núcleo de oro, frena debido a la fuerza de repulsión eléctrica que actúa sobre ella. Ésta es una fuerza conservadora, así que se conserva la energía mecánica total (energía cinética de la partícula alfa más energía potencial eléctrica del sistema).

continúa

PLANTEAR: Se considera el punto 1 (la posición inicial de la partícula alfa) muy alejado del núcleo de oro; y el punto 2, a una distancia de 5.0×10^{-14} m del centro del núcleo de oro. La incógnita es la energía cinética de la partícula alfa en el punto 1, que le permita llegar al punto 2. Para determinarla, usaremos la ley de la conservación de la energía, y la ecuación (23.9) para la energía potencial eléctrica, $U = qq_0/4\pi\epsilon_0 r$.

EJECUTAR: La energía cinética en el punto 1 es K_1 (la incógnita) y la energía cinética en el punto 2 (donde la partícula alfa llega momentáneamente al reposo) es $K_2 = 0$. En el punto 1, la partícula alfa y el núcleo de oro están tan distantes, que se puede considerar que su separación r es infinita, por lo que la energía potencial eléctrica, de la ecuación (23.9), es $U_1 = 0$. En el punto 2, el potencial es

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \\ &= (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2)(79)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{5.0 \times 10^{-14}\ \text{m}} \\ &= 7.3 \times 10^{-13}\ \text{J} = 4.6 \times 10^6\ \text{eV} = 4.6\ \text{MeV} \end{aligned}$$

Para que la energía se conserve, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, y, entonces, $K_1 = K_2 + U_2 - U_1 = 0 + 4.6\ \text{MeV} - 0 = 4.6\ \text{MeV}$. Así, para llegar a 5.0×10^{-14} m del núcleo, la partícula alfa debe tener 4.6 MeV cuando esté muy lejos de él; para acercarse más, se necesitará todavía más energía cinética. De hecho, las partículas alfa emitidas por elementos radiactivos naturales tienen energías normales en el intervalo de 4 a 6 MeV. Por ejemplo, el isótopo común del radio, ^{226}Ra, emite una partícula alfa con 4.78 MeV de energía.

EVALUAR: ¿Fue válido suponer que el núcleo de oro permanece en reposo? Para descubrirlo, observe que cuando se detiene momentáneamente la partícula alfa, toda su cantidad de movimiento inicial se transfiere al núcleo de oro. Una partícula alfa tiene masa $m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27}$ kg; si su energía cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ es 7.3×10^{-13} J, se puede demostrar que su rapidez inicial es $v_1 = 1.5 \times 10^7$ m/s, y su cantidad de movimiento inicial es $p_1 = m_\alpha v_1 = 9.8 \times 10^{-20}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$. Un núcleo de oro (cuya masa es $m_{\text{Au}} = 3.27 \times 10^{-25}$ kg), con esta cantidad de movimiento tiene una rapidez mucho menor, $v_{\text{Au}} = 3.0 \times 10^5$ m/s, y una energía cinética $K_{\text{Au}} = \frac{1}{2}m_{\text{Au}}v_{\text{Au}}^2 = 1.5 \times 10^{-14}$ J = 0.092 MeV. La *energía cinética de retroceso* del núcleo de oro es una fracción pequeña de la energía total en este caso, por lo que se justifica ignorarla.

Evalúe su comprensión de la sección 38.4 Suponga que repitiera el experimento de dispersión de Rutherford, con una hoja delgada de hidrógeno sólido, en vez de la hoja de oro. (El hidrógeno es sólido a temperaturas menores que 14.0 K.) ¿Esperaría observar una dispersión de partículas alfa en ángulos grandes?

38.5 El modelo de Bohr

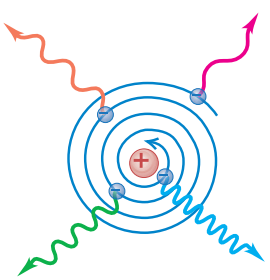
Al mismo tiempo (1913) que Bohr establecía la relación entre las longitudes de onda espectrales y los niveles de energía, propuso un modelo del átomo de hidrógeno. Desarrolló sus ideas mientras trabajaba en el laboratorio de Rutherford. Con este modelo, que ahora se llama **modelo de Bohr**, pudo *calcular* los niveles de energía del hidrógeno, y obtener su concordancia con los valores determinados a partir de los espectros.

Activ ONLINE Physics
18.1 El modelo de Bohr

El descubrimiento de Rutherford, del núcleo atómico, originó una duda importante. ¿Qué mantenía a los electrones con carga negativa a distancias relativamente grandes ($\sim 10^{-10}$ m) del núcleo tan pequeño ($\sim 10^{-14}$ m) con carga positiva, a pesar de su atracción electrostática? Rutherford sugirió que quizá los electrones *giraban* en órbitas en torno al núcleo, justo como los planetas giran alrededor del Sol.

Pero, de acuerdo con la teoría electromagnética clásica, toda carga que acelera (ya sea oscilante o giratoria) irradia ondas electromagnéticas. La figura 32.2 (sección 32.1) muestra un ejemplo de radiación debida a una carga puntual oscilante. Por tanto, la energía de un electrón en órbita debería disminuir en forma continua, su órbita debería contraerse cada vez más, y rápidamente describiría una espiral hacia el núcleo (figura 38.18). Todavía peor, de acuerdo con la teoría clásica, la *frecuencia* de las ondas electromagnéticas emitidas debería ser igual a la frecuencia de revolución. A medida que los electrones irradiaban energía, sus rapideces angulares cambiarían en forma continua, y emitirían un espectro *continuo* (una mezcla de todas las frecuencias) y no los espectros *de líneas* que se observan en realidad.

38.18 La física clásica predice que un electrón en órbita irradia continuamente ondas electromagnéticas y describe una espiral hacia el núcleo. Ya que la velocidad angular del electrón varía en función de su radio, la física clásica predice que la frecuencia de la radiación emitida debería cambiar en forma continua.



Órbitas estables

Para resolver este problema, Bohr hizo una propuesta revolucionaria. Postuló que un electrón en un átomo puede moverse en torno al núcleo en ciertas *órbitas estables,* circulares, *sin* emitir radiación, al contrario de las predicciones de la teoría electromagnética clásica. De acuerdo con Bohr hay una energía definida asociada con cada órbita estable, y un átomo sólo irradia energía cuando hace una transición de una de

esas órbitas a otra. La energía se irradia en forma de un fotón, con energía y frecuencia determinadas por la ecuación (38.6), $hf = E_i - E_f$.

Como resultado de un argumento bastante complicado, que relacionaba la frecuencia angular de la luz emitida con las rapideces angulares del electrón en niveles de energía muy excitados, Bohr encontró que la magnitud de la cantidad de movimiento angular del electrón está *cuantizada*, que esa magnitud debe ser, para el electrón, un múltiplo entero de $h/2\pi$. (Advierta que como $1\ \text{J} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$, las unidades SI de la constante de Planck h, son $\text{J} \cdot \text{s}$, igual que las unidades SI de la cantidad de movimiento angular, que se suelen escribir $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.) De acuerdo con la sección 10.5, ecuación (10.28), la magnitud de la cantidad de movimiento angular es $L = mvr$ para una partícula con masa m, que se mueve con rapidez v en un círculo de radio r (por lo tanto, con $\phi = 90°$). Así, el argumento de Bohr llevó a

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Cada valor de n corresponde a un valor permitido del radio de la órbita, que en adelante representaremos con r_n, y una rapidez v_n correspondiente. El valor de n para cada órbita se llama **número cuántico principal** de la órbita. Con esta notación, la ecuación anterior se transforma en

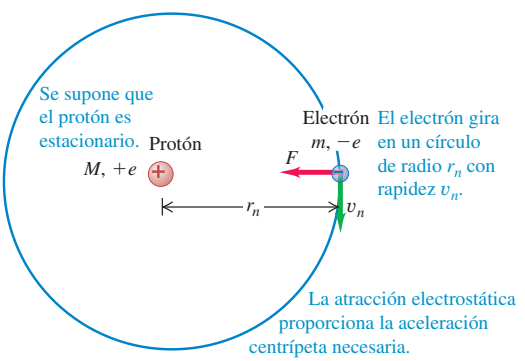
$$L_n = mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad \text{(cuantización de la cantidad de movimiento angular)} \qquad (38.10)$$

Ahora examinemos un modelo del átomo de hidrógeno (figura 38.19) que tiene espíritu newtoniano, pero que incorpora esta hipótesis de cuantización. Este átomo consiste en un solo electrón con masa m y carga $-e$, que gira en torno a un solo protón de carga $+e$. El protón tiene casi 2000 veces la masa del electrón, por lo que supondremos que el protón no se mueve. En la sección 5.4 aprendimos que cuando una partícula con masa m se mueve en una órbita circular de radio r_n con rapidez v_n, su aceleración es v_n^2/r_n. dirigida radialmente hacia adentro. De acuerdo con la segunda ley de Newton, se necesita una fuerza neta radialmente hacia adentro, de magnitud $F = mv_n^2/r_n$ para causar esa aceleración. En la sección 12.4 describimos la forma en la que la atracción gravitacional produce esa fuerza en las órbitas de satélites. En el hidrógeno, la fuerza F la proporciona la atracción eléctrica entre el protón (positivo) y el electrón (negativo). De acuerdo con la ley de Coulomb (ecuación 21.2),

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}$$

así, la segunda ley de Newton establece que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} = \frac{mv_n^2}{r_n} \qquad (38.11)$$



38.19 Modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno.

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (38.10) y (38.11) para obtener r_n y v_n:

$$r_n = \epsilon_0 \frac{n^2 h^2}{\pi m e^2} \qquad \text{(radios de las órbitas en el modelo de Bohr)} \tag{38.12}$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^2}{2nh} \qquad \text{(rapideces orbitales en el modelo de Bohr)} \tag{38.13}$$

La ecuación (38.12) muestra que el radio de la órbita r_n es proporcional a n^2; el radio de la órbita más pequeña corresponde a $n = 1$. Representaremos con a_0 a este radio mínimo, que se conoce como *radio de Bohr*:

$$a_0 = \epsilon_0 \frac{h^2}{\pi m e^2} \tag{38.14}$$

Entonces, la ecuación (38.12) puede escribirse como:

$$r_n = n^2 a_0 \tag{38.15}$$

Las órbitas permitidas tienen radios a_0, $4a_0$, $9a_0$, y así sucesivamente.

Los valores numéricos de las cantidades en el lado derecho de la ecuación (38.14) aparecen en el Apéndice F. Al usar esos valores vemos que el radio a_0 de la órbita más pequeña de Bohr es

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})^2}{(3.142)(9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2} \\ &= 5.29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Este resultado, de un diámetro aproximado del átomo de más o menos $10^{-10} = 0.1$ nm, es consistente con las dimensiones atómicas estimadas con otros métodos.

Se puede usar la ecuación (38.13) para calcular la *rapidez* orbital del electrón. Dejaremos este cálculo como ejercicio para el lector (véase el ejercicio 38.27); el resultado es para el estado $n = 1$, $v_1 = 2.19 \times 10^6$ m/s. Ésta es la máxima velocidad posible del electrón en el átomo de hidrógeno, y es menos del 1% de la rapidez de la luz, mostrando que las consideraciones relativistas no tienen importancia.

Niveles de energía del hidrógeno en el modelo de Bohr

Podemos utilizar las ecuaciones (38.13) y (38.12) para calcular las energías cinética y potencial, K_n y U_n, cuando el electrón está en la órbita de número cuántico n:

$$K_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 n^2 h^2} \tag{38.16}$$

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{m e^4}{4 n^2 h^2} \tag{38.17}$$

La energía total E_n es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_n = K_n + U_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 n^2 h^2} \tag{38.18}$$

La energía potencial tiene signo negativo, porque se considera que es cero cuando el electrón está a una distancia infinita del núcleo. Sólo nos interesan *diferencias* de energía, por lo que no importa cuál sea la posición de referencia.

Las órbitas y los niveles de energía se muestran en la figura 38.9 (sección 38.3). Los niveles de energía posibles en el átomo se identifican con los valores del número cuántico n. Para cada valor de n hay valores correspondientes del radio r_n, la rapidez v_n, la cantidad de movimiento angular $L_n = nh/2\pi$ y la energía total E_n. La energía del átomo es mínima cuando $n = 1$ y E_n tiene su valor más negativo. Éste es el *nivel fundamental* del átomo; es el nivel que tiene la órbita más pequeña, de radio a_0. Para $n = 2, 3, \ldots$, el valor absoluto de E_n es menor y la energía es cada vez mayor (menos

negativa). El radio de la órbita aumenta en función de n^2, como se ve en las ecuaciones (38.12) y (38.15), mientras que la rapidez disminuye en función de $1/n$, como en la ecuación (38.13).

Al comparar la ecuación (38.18) de E_n, con la ecuación (38.9), deducida midiendo el espectro del hidrógeno, podemos ver que sólo concuerdan si los coeficientes son iguales:

$$hcR = \frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{8h^2} \qquad \text{o bien} \qquad R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \tag{38.19}$$

En consecuencia, esta ecuación nos indica cómo *calcular* el valor de la constante de Rydberg a partir de las constantes físicas fundamentales m, c, e, h y ϵ_0; todas ellas pueden determinarse en forma bastante independiente de la teoría de Bohr. Al sustituir los valores numéricos de esas cantidades, se obtiene el valor $R = 1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Con cuatro cifras significativas, éste es el valor determinado a partir de las mediciones de longitudes de onda. Esta concordancia proporciona una confirmación muy fuerte y directa de la teoría de Bohr. El lector debería sustituir los valores numéricos en la ecuación (38.19) y calcular el valor de R, para confirmar estas afirmaciones.

La *energía de ionización* del átomo de hidrógeno es la necesaria para retirar el electrón por completo. La ionización corresponde a una transición del nivel fundamental ($n = 1$) a un radio de órbita infinitamente grande ($n = \infty$), por lo que es igual a $-E_1$. Al sustituir las constantes del Apéndice F en la ecuación (38.18), obtenemos una energía de ionización de 13.606 eV. Esta energía también puede medirse en forma directa, y el resultado es 13.60 eV. Estos dos valores concuerdan con el 0.1%.

Ejemplo 38.6 Exploración del modelo de Bohr

Determine las energías cinética, potencial y total del átomo de hidrógeno en el primer nivel de excitación, y determine la longitud de onda del fotón emitido en la transición del primer nivel de excitación al nivel fundamental.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa las ideas del modelo de Bohr estudiadas en esta sección.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (38.16), (38.17) y (38.18) para calcular las energías del átomo. Para determinar la longitud de onda del fotón λ, usaremos la ecuación (38.6), que relaciona la energía y la longitud de onda de un fotón emitido, con las energías inicial y final del átomo.

EJECUTAR: Podríamos evaluar las ecuaciones (38.16), (38.17) y (38.18) para el n-ésimo nivel, sustituyendo los valores de m, e, ϵ_0 y h. Pero podemos simplificar el cálculo al comparar con la ecuación (38.19), que muestra la constante que aparece en las ecuaciones (38.14), (38.15) y (38.16) es igual a hcR, y en forma experimental es igual a 13.60 eV:

$$\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = hcR = 13.60\ \text{eV}$$

Con esta ecuación, se pueden replantear las ecuaciones (38.16), (38.17) y (38.18) como sigue:

$$K_n = \frac{13.60\ \text{eV}}{n^2} \qquad U_n = \frac{-27.20\ \text{eV}}{n^2} \qquad E_n = \frac{-13.60\ \text{eV}}{n^2}$$

El primer nivel de excitación es de $n = 2$, que tiene $K_2 = 3.40$ eV, $U_2 = -6.80$ eV y $E_2 = -3.40$ eV.

El nivel fundamental es el de $n = 1$, para el cual la energía es $E_1 = -13.60$ eV. La energía del fotón emitido es $E_2 - E_1 = -3.40\text{eV} - (-13.60\ \text{eV}) = 10.20$ eV. Esta energía del fotón es igual a hc/λ, por lo que

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{10.20\ \text{eV}}$$
$$= 1.22 \times 10^{-7}\ \text{m} = 122\ \text{nm}$$

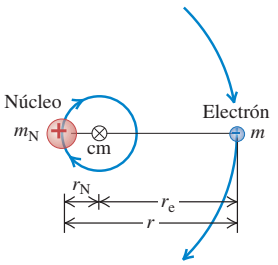
Ésta es la longitud de onda de la línea "Lyman alfa", la de longitud de onda máxima en la serie del Lyman, de líneas ultravioleta del espectro del hidrógeno (véase la figura 38.9).

EVALUAR: Nuestros resultados demuestran que la energía mecánica total es negativa, y es igual a la mitad de la energía potencial. En forma notable, vimos la misma relación de energías en las órbitas de satélites, en la sección 12.4. La razón de la similitud entre los dos casos es que tanto la fuerza electrostática como la fuerza gravitatoria son inversamente proporcionales a $1/r^2$.

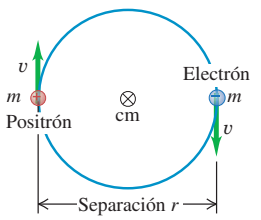
Movimiento nuclear y la masa reducida de un átomo

Los valores de la constante de Rydberg, R, y la energía de ionización del hidrógeno, calculadas con el análisis de Bohr, concuerdan dentro de menos del 0.1% con los valores medidos. La concordancia sería todavía mejor si no hubiéramos supuesto que el

38.20 El núcleo y el electrón giran en torno a su centro de masa común. Por claridad, se exageró la distancia r_N; para el hidrógeno ordinario, en realidad es igual a $r_e/1836.2$.



38.21 Aplicación del modelo de Bohr al positronio. El electrón y el positrón giran en torno a su centro de masa común, el cual se encuentra en el punto medio entre ellos, porque su masa es igual. Su separación es dos veces el radio de la órbita de cada uno.



núcleo (un protón) está en reposo. Más bien, lo que sucede es que el protón y el electrón giran en órbitas circulares en torno a su *centro de masa* común (véase la sección 8.5), como se observa en la figura 38.20. Sucede que este movimiento puede considerarse en forma muy sencilla, usando en las ecuaciones de Bohr no la masa del electrón en reposo m, sino una cantidad llamada **masa reducida**, m_r, del sistema. Para un sistema formado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2, la masa reducida se define como

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{38.20}$$

Para el hidrógeno ordinario, m_1 es igual a m, y m_2 es igual a la masa del protón, $m_p = 1836.2m$. Así, el sistema protón-electrón del hidrógeno ordinario tiene una masa reducida de

$$m_r = \frac{m(1836.2m)}{m + 1836.2m} = 0.99946m$$

Cuando se usa este valor en vez de la masa del electrón m en las ecuaciones de Bohr, los valores calculados concuerdan muy bien con los valores medidos.

En un átomo de deuterio, llamado también *hidrógeno pesado*, el núcleo no es un solo protón, sino un protón y un neutrón enlazados para formar un cuerpo compuesto llamado *deuterón*. Sucede que la masa reducida del átomo de deuterio es $0.99973m$. Las ecuaciones (38.6) y (38.18), con m sustituida por m_r, indican que todas las energías y las frecuencias son proporcionales a m_r, mientras que todas las longitudes de onda son inversamente proporcionales a m_r. Así, las longitudes de onda del espectro del deuterio deberían ser las del hidrógeno divididas entre $(0.99973m)/(0.99946m) = 1.00027$. Éste es un efecto pequeño, pero está muy dentro de la precisión de los espectrómetros modernos. Este desplazamiento pequeño de longitud de onda condujo al científico estadounidense Harold Urey a descubrir el deuterio en 1932, un logro que le valió el Premio Nobel de Química en 1934.

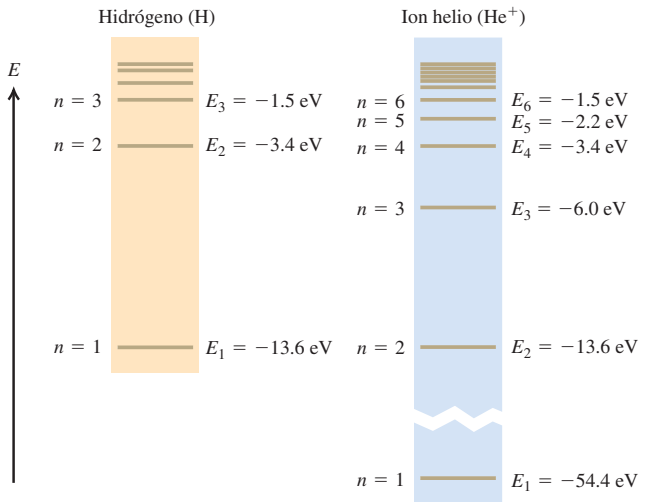
El concepto de masa reducida tiene otras aplicaciones. Un *positrón* tiene la misma masa en reposo que un electrón, pero una carga $+e$. Un "átomo" de positronio (figura 38.21) consiste en un electrón y un positrón, cada uno de masa m, y orbitan en torno a su centro de masa común. Esta estructura sólo dura aproximadamente 10^{-6} s antes de que ambas partículas se aniquilen entre sí y desaparezcan; no obstante, este tiempo basta para estudiar el espectro del positronio. La masa reducida es $m/2$, por lo que los niveles de energía y las frecuencias de los fotones tienen exactamente la mitad de los valores del modelo simple de Bohr, con una masa de protón infinita. La existencia de los átomos de positronio fue confirmada por la observación de las líneas de su espectro.

Átomos hidrogenoides

Se puede ampliar el modelo de Bohr a otros átomos de un electrón como, por ejemplo, el helio simplemente ionizado (He^+), el litio doblemente ionizado (Li^{+2}), etcétera. A esos átomos se les llama *hidrogenoides*. En ellos, la carga nuclear no es e sino Ze, donde Z es el *número atómico*, igual a la cantidad de protones en el núcleo. El efecto de Z en el análisis anterior es remplazar Ze^2 donde quiera que aparezca e^2. En particular, los radios de las órbitas r_n que se obtienen con la ecuación (38.12) se vuelven menores por un factor de Z, y los niveles de energía E_n dados por la ecuación (38.18) se multiplican por Z^2. Invitamos al lector a comprobar estas afirmaciones. En estos casos, la corrección por masa reducida es todavía menor que 0.1%, porque los núcleos son más masivos que el único protón del hidrógeno ordinario. En la figura 38.22 se comparan los niveles de energía del H y del He^+, que tiene $Z = 2$.

Los átomos de los metales *alcalinos* tienen un electrón fuera de una región interna formada por el núcleo y los electrones internos, y esa región tiene una carga neta $+e$. Estos átomos se parecen al del hidrogenoide, en especial en los niveles excitados. Hasta los electrones atrapados y los huecos de electrones en los sólidos semiconductores se comportan en forma similar a los átomos de hidrógeno.

Aunque el modelo de Bohr predijo en forma correcta los niveles de energía del átomo de hidrógeno, produjo tantas dudas como las que resolvió. Combinó los ele-



38.22 Niveles de energía del H y del He^+. La ecuación de la energía (38.18) se multiplica por $Z^2 = 4$ para el He^+, por lo que la energía de un ion He^+ con determinada n casi es exactamente igual a cuatro veces la de un átomo de H con la misma n. (Hay pequeñas diferencias, del orden del 0.05%, porque las masas reducidas son ligeramente diferentes.)

mentos de la física clásica con postulados nuevos que eran inconsistentes con las ideas clásicas. El modelo no proporcionó una imagen de lo que sucede durante una transición de una a otra órbitas; en general, las rapideces angulares del movimiento del electrón no eran las frecuencias angulares de la radiación emitida, resultado contrario a la electrodinámica clásica. No tuvieron éxito los intentos de modelar átomos con dos o más electrones. Un electrón que se mueve en una de las órbitas circulares de Bohr forma un circuito de corriente, y debería producir un momento magnético. Sin embargo, un átomo de hidrógeno en su nivel fundamental *no* tiene momento magnético debido a su movimiento orbital. En los capítulos 39 y 40 veremos que incluso fue necesaria una salida todavía más radical, a partir de los conceptos clásicos, ante la comprensión de que la estructura atómica progresaría aún más.

Evalúe su comprensión de la sección 38.5 Considere las longitudes de onda del espectro de luz emitido por iones He^+ excitados. ¿Algunas de estas longitudes de onda son aproximadamente iguales a algunas de las longitudes de onda emitidas por átomos de H excitados?

38.6 El láser

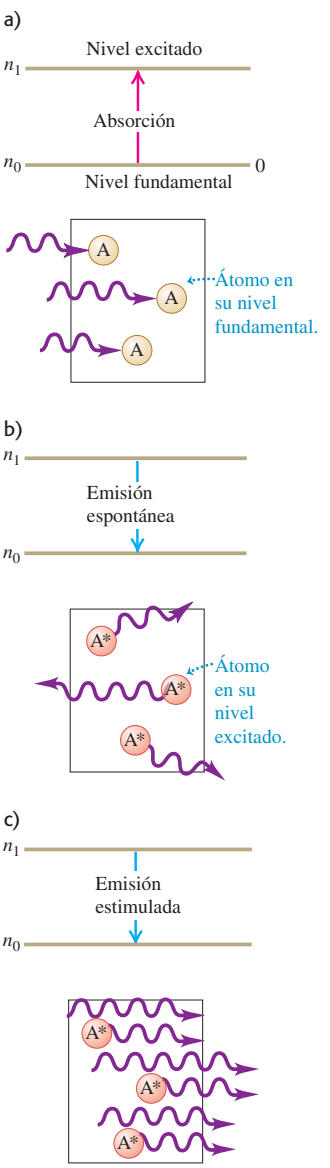
El **láser** es una fuente luminosa que produce un haz de luz altamente coherente y muy aproximadamente monocromática, debido a una emisión de muchos átomos en conjunto. El nombre láser es acrónimo de "light amplification by stimulated emission of radiation", que significa amplificación de luz por emisión estimulada de radiación. Los principios del funcionamiento del láser se explican con base en los fotones y los niveles de energía de los átomos. Durante esta descripción también presentaremos dos conceptos nuevos: *emisión estimulada* e *inversión de la población*.

Emisión estimulada y emisión espontánea

Si un átomo tiene un nivel excitado con energía E, arriba del nivel fundamental, cuando está en su nivel fundamental puede absorber un fotón con la frecuencia f definida por $E = hf$. Este proceso se ve en forma esquemática en la figura 38.23a, que representa un gas en un recipiente transparente. Hay tres átomos A, y cada uno absorbe un fotón pasando a un nivel excitado, en el que se representan por A*. Algún tiempo después, los átomos excitados regresan al nivel fundamental, emitiendo cada uno un fotón de la misma frecuencia que la que absorbieron originalmente. Este proceso se llama *emisión espontánea*; la dirección y la fase de los fotones emitidos son aleatorias (figura 38.23b).

En la **emisión estimulada** (figura 38.23c), cada fotón incidente se encuentra con un átomo excitado con anterioridad. Una especie de resonancia induce a cada átomo a

38.23 Tres procesos de interacción entre un átomo y ondas electromagnéticas. En el inciso a), A representa un átomo en su nivel fundamental; en los incisos b) y c), A* representa un átomo en un nivel excitado.



emitir un segundo fotón con la misma frecuencia, dirección, fase y polarización que el fotón incidente, el cual no cambia durante el proceso. Para cada átomo hay un fotón antes de una emisión estimulada, y dos fotones después; de ahí el nombre de *amplificación de luz*. Como los dos fotones tienen la misma fase, emergen juntos en forma de radiación *coherente*. El láser usa la emisión estimulada para producir un haz formado por grandes cantidades de fotones coherentes.

Para describir la emisión estimulada de átomos en niveles excitados se debe saber algo acerca de cuántos átomos hay en cada uno de los diversos niveles de energía. En primer lugar, necesitamos diferenciar entre los términos *nivel de energía* y *estado*. Un sistema puede tener más de una manera de alcanzar determinado nivel de energía; cada forma distinta es un **estado** diferente. Por ejemplo, hay dos formas de poner un resorte ideal no estirado en un determinado nivel de energía. Si recuerda que $U = \frac{1}{2}kx^2$, verá que es posible comprimir el resorte en $x = -b$, o bien se puede estirar en $x = +b$ para llegar a la misma $U = \frac{1}{2}kb^2$. El modelo de Bohr sólo tenía un estado en cada nivel de energía, pero en la sección 41.4 veremos que el hidrógeno en realidad tiene dos estados en su nivel fundamental de -13.60 eV, ocho estados en su primer nivel excitado de -3.40 eV, y así sucesivamente.

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la sección 18.5) determina la cantidad de átomos en un determinado estado, en un gas. Esta función indica que cuando el gas está en equilibrio térmico a una temperatura absoluta T, la cantidad n_i de átomos en un estado con energía E_i es igual a $Ae^{-E_i/kT}$, donde k es la constante de Boltzmann, y A otra constante determinada por la cantidad total de átomos en el gas. (En la sección 18.5, E era la energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$ de una molécula de gas; aquí estamos hablando de la energía interna de un átomo.) Como el exponente es negativo, hay menos átomos en estados de mayor energía, como era de esperarse. Si E_g es una energía de estado fundamental, y E_{ex} es la de un estado excitado, la relación de las cantidades de átomos en los dos estados es

$$\frac{n_{ex}}{n_g} = \frac{Ae^{-E_{ex}/kT}}{Ae^{-E_g/kT}} = e^{-(E_{ex}-E_g)/kT} \tag{38.21}$$

Por ejemplo, supongamos que $E_{ex} - E_g = 2.0 \text{ eV} = 3.2 \times 10^{-19} \text{ J}$, la energía de un fotón de luz visible de 620 nm. Cuando $T = 3000$ K (la temperatura del filamento de una bombilla eléctrica incandescente),

$$\frac{E_{ex} - E_g}{kT} = \frac{3.2 \times 10^{-19} \text{ J}}{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(3000 \text{ K})} = 7.73$$

y

$$e^{-(E_{ex}-E_g)/kT} = e^{-7.73} = 0.00044$$

Esto es, la fracción de átomos en un estado de 2.0 eV sobre un estado fundamental es extremadamente pequeña, aun a esa temperatura tan alta. El argumento es que en cualquier temperatura razonable no hay átomos suficientes en los estados excitados para que suceda una cantidad apreciable de emisión estimulada de esos estados. En vez de ello, es mucho más probable que haya absorción.

Aumento de la emisión estimulada: Inversiones de población

Podríamos tratar de aumentar la cantidad de átomos en estados excitados, mandando a través del recipiente un haz de radiación de frecuencia $f = E/h$, correspondiente a la diferencia de energía $E = E_{ex} - E_g$. Algunos de los átomos absorben fotones de energía E y se elevan al estado excitado, y aumenta en forma momentánea la razón entre poblaciones n_{ex}/n_g. Pero como n_g es originalmente mucho mayor que n_{ex}, se necesitaría un rayo de luz de intensidad enorme para aumentar a n_{ex}, en forma momentánea, a un valor comparable con n_g. La tasa a la que se *absorbe* la energía del haz en los n_g átomos en estado fundamental supera con mucho la tasa a la que se agrega energía al haz por la emisión estimulada a partir de los n_{ex} átomos excitados, relativamente raros.

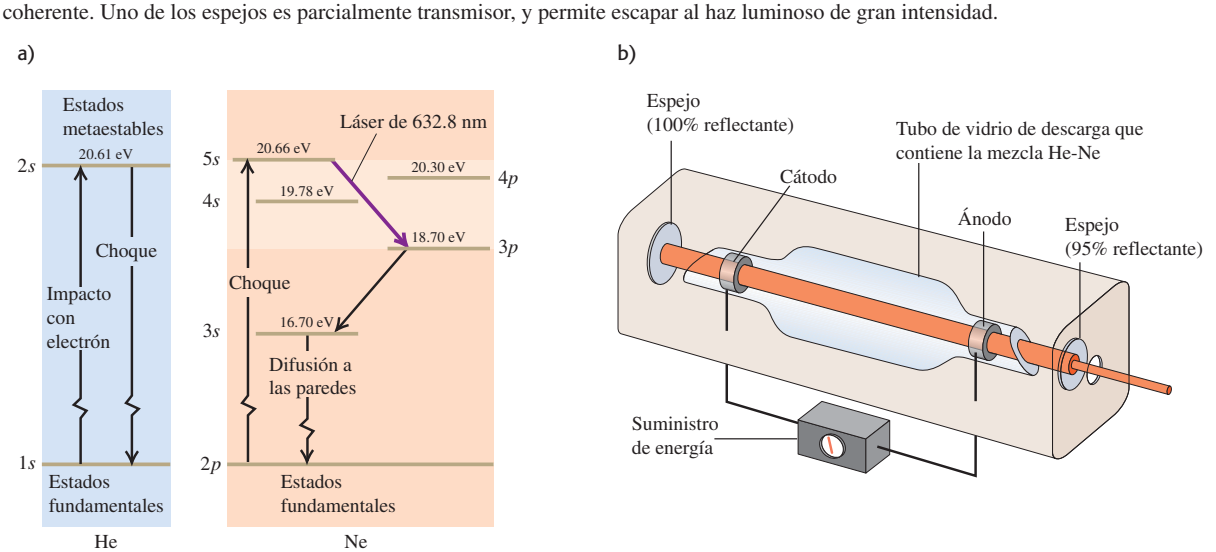
Se necesita crear un estado de desequilibrio en el que la cantidad de átomos en un estado de mayor energía sea mayor que la que hay en un estado de menor energía. A ese caso se le llama **inversión de población**. Entonces, la tasa de radiación de energía por emisión estimulada puede *ser mayor* que la tasa de absorción, y el sistema trabaja como una *fuente* neta de radiación con energía E de sus fotones. Además, como los fotones son el resultado de la emisión estimulada, todos ellos tienen la misma frecuencia, fase, polarización y dirección de propagación. En consecuencia, la radiación que resulta es mucho más coherente que la luz de fuentes ordinarias, en la que no están coordinadas las emisiones de los átomos individuales. Esta emisión coherente es exactamente lo que sucede en un láser.

La inversión de población necesaria se puede lograr de varias formas. Un ejemplo familiar es el del láser de helio-neón, común y poco costoso que hay en muchos laboratorios de nivel licenciatura. Una mezcla de helio y neón, comúnmente a presiones del orden de 10^2 Pa (10^{-3} atm), se sella en un recipiente de vidrio con dos electrodos. Cuando se aplica un voltaje suficientemente alto, se produce una descarga eléctrica. Los choques entre los átomos ionizados y los electrones que llevan la corriente de descarga excitan a los átomos hasta varios niveles de energía.

La figura 38.24a muestra un diagrama de niveles de energía para el sistema. Las designaciones de los diversos niveles de energía, como ls, 3p y 5s, se refieren a estados de los electrones en esos niveles. (En el capítulo 41 describiremos esta notación; no necesitamos un conocimiento detallado de la naturaleza de los estados para comprender la acción del láser.) A causa de las restricciones que impone la conservación del momento angular, el átomo de helio con un electrón excitado a un estado 2s no puede regresar a un estado fundamental (1s) emitiendo un fotón de 20.61 eV, como era de esperarse. Ese estado, en el que es imposible la emisión de un solo fotón, tiene una vida excepcionalmente larga, y se llama **estado metaestable**. Los átomos de helio "se apilan" en estados 2s metaestables, formando una inversión de población con respecto a los estados fundamentales.

Sin embargo, los átomos excitados de helio *sí pueden* perder energía mediante choques con intercambio de energía, con átomos de neón que inicialmente están en estado fundamental. Un átomo de helio, excitado en un estado 2s a 20.61 eV arriba de sus estados fundamentales, y con poca energía cinética adicional, puede chocar con un átomo de neón en un estado fundamental y excitarlo a un estado 5s de 20.66 eV; el átomo de *helio* regresa a su estado fundamental. Éste es el mecanismo necesario para que haya inversión de población en el neón, con más átomos de neón por cada estado 5s que por cada estado 3p.

38.24 a) Diagrama de niveles de energía para un láser de helio-neón. b) Funcionamiento del láser helio-neón. La luz emitida por los electrones que regresan a niveles de energía inferiores se refleja entre los espejos, por lo que continúa estimulando la emisión de más luz coherente. Uno de los espejos es parcialmente transmisor, y permite escapar al haz luminoso de gran intensidad.



Entonces, las emisiones estimuladas durante transiciones de un estado 5*s* a un estado 3*p* causan la emisión de luz muy coherente a 632.8 nm, como se ve en la figura 38.24a. En la práctica, el haz se envía de ida y vuelta muchas veces a través del gas, mediante un par de espejos paralelos (figura 38.24b), para estimular la emisión de tantos átomos excitados como sea posible. Uno de los espejos es parcialmente transparente, y una parte del haz emerge como haz hacia el exterior. El resultado neto de todos esos procesos es un rayo de luz que puede ser bastante intenso, sus rayos luminosos son paralelos, es muy monocromático y es espacialmente *coherente* en todos los puntos en una determinada sección transversal.

En otras clases de láseres se usan distintos procesos para alcanzar la inversión de población necesaria. En un láser semiconductor, la inversión se obtiene impulsando electrones y huecos a una unión *p-n* (que se describirá en la sección 42.7) con un campo eléctrico constante. En un tipo de láser *químico,* una reacción química forma moléculas en estados excitados metaestables. En un láser dinámico de dióxido de carbono gaseoso, la inversión de población se debe a la expansión rápida del gas. Un *máser* (acrónimo de *microwave amplification by stimulated emission of radiation,* amplificación de microondas por emisión estimulada de radiación) funciona con base en inversiones de población en moléculas y utiliza niveles de energía cercanos. La radiación emitida correspondiente está en el intervalo de las microondas. La acción del máser llega a presentarse en la naturaleza, en las nubes de gas interestelar.

Los láseres tienen una gran variedad de aplicaciones prácticas. Un rayo láser de gran intensidad puede perforar un agujero diminuto en un diamante para hacer un troquel y extrudir (es decir, dar forma a) alambres de diámetro muy pequeño. Con frecuencia, los topógrafos usan láseres, en especial en casos que requieren gran precisión, como la perforación de un túnel largo a partir de sus dos extremos; el haz láser tiene rayos paralelos que pueden recorrer grandes distancias sin dispersarse.

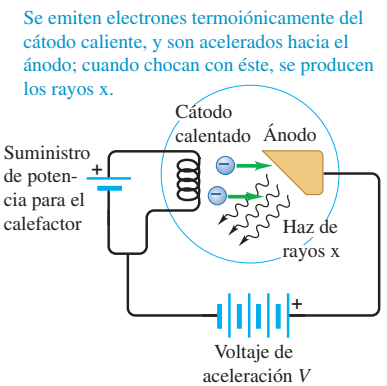
En medicina los láseres tienen diversas aplicaciones. Un láser con un haz intenso y muy angosto se emplea en el tratamiento del desprendimiento de retina; una ráfaga corta de radiación daña una pequeña área de la retina y el tejido cicatrizal que resulta "suelda" la retina nuevamente a la membrana de donde se despegó (véase la figura 33.2). Los rayos láser se usan en cirugía; los vasos sanguíneos que corta el rayo tienden a sellarse a sí mismos y facilitan el control de la hemorragia. También se usan láseres para destrucciones selectivas de tejidos, como en la remoción de tumores.

Evalúe su comprensión de la sección 38.6 Una lámpara ordinaria de neón (como las de los letreros luminosos) emite luz roja con la misma longitud de onda de 632.8 nm que el láser de helio-neón. La luz emitida por una lámpara de luz neón es i) una emisión espontánea; ii) una emisión estimulada; iii) tanto una emisión espontánea como una emisión estimulada.

38.7 Producción y dispersión de rayos x

La producción y la dispersión de rayos x son ejemplos adicionales de la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética. Los rayos x se producen cuando los electrones que se mueven rápidamente, y que fueron acelerados a través de una diferencia de potencial del orden de 10^3 a 10^6 V, chocan con un metal. Wilhelm Röntgen (1845-1923) los produjo por primera vez en 1895, usando un dispositivo similar, en principio, al arreglo que se representa en la figura 38.25. Los electrones se expulsan del cátodo calentado por emisión termoiónica, y son acelerados hacia el ánodo (el objetivo) mediante una gran diferencia de potencial V_{AC}. El bulbo se evacua (presión residual 10^{-7} atm o menor), para que los electrones puedan ir del cátodo al ánodo sin chocar con moléculas de aire. Cuando V_{AC} es de algunos miles de volts o más, la superficie del ánodo emite una radiación muy penetrante.

38.25 Aparato usado para producir rayos x, parecido al que utilizó Röntgen en 1895.



Fotones de rayos x

Debido a que se emiten por medio de cargas aceleradas, es lógico que los rayos x sean ondas electromagnéticas. Al igual que la luz, los rayos x están gobernados por relaciones cuánticas en su interacción con la materia. Entonces podemos hablar de fotones o cuantos de rayos x, y la energía de un fotón de rayo x se relaciona con su frecuencia

y su longitud de onda en la misma forma que los fotones de luz, $E = hf = hc/\lambda$. Las longitudes de onda características de los rayos x son de 0.001 a 1 nm (10^{-12} a 10^{-9} m). Estas longitudes de onda pueden medirse con gran precisión mediante técnicas de difracción en cristales, que describimos en la sección 36.6.

La emisión de rayos x es lo inverso del efecto fotoeléctrico. En la emisión fotoeléctrica, hay una transformación de la energía de un fotón en energía cinética de un electrón; en la producción de rayos x hay una transformación de la energía cinética de un electrón en la energía de un fotón. Las relaciones de energía son parecidas. En la producción de rayos x a menudo se ignora la función trabajo del material que sirve de blanco, al igual que la energía cinética de los electrones "evaporados", ya que esas energías son muy pequeñas con respecto a las demás que se manejan.

En la emisión de los rayos x intervienen dos procesos distintos. En el primero, algunos electrones son frenados o detenidos por el blanco (el material golpeado por los electrones), y parte o toda su energía cinética se convierte en forma directa en un espectro continuo de fotones, incluyendo los rayos x. A este proceso se le llama *bremsstrahlung* (palabra alemana que significa "radiación de frenado"). La física clásica es totalmente incapaz de explicar por qué los rayos x que se emiten en el proceso de *bremsstrahlung* tienen una frecuencia máxima $f_{\text{máx}}$ y una longitud de onda correspondiente mínima, $\lambda_{\text{mín}}$, y mucho menos puede predecir sus valores. Con los conceptos cuánticos, en cambio, es algo sencillo. Un electrón tiene la carga $-e$, y gana energía cinética eV_{AC} al acelerarse a través de un aumento de potencial V_{AC}. El fotón más energético (el de máxima frecuencia y longitud de onda más corta) se produce cuando toda su energía cinética se emplea en producir el fotón; esto es,

$$eV_{\text{AC}} = hf_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}} \qquad \text{(límites de } \textit{bremsstrahlung}\text{)} \tag{38.22}$$

Observe que la frecuencia máxima y la longitud de onda mínima en el proceso de *bremsstrahlung no* dependen del material del blanco.

El segundo proceso causa picos en el espectro de rayos x en frecuencias y longitudes de onda características que *sí* dependen del material del blanco. Otros electrones, si tienen la energía cinética suficiente, pueden transferirla en parte o en forma total a átomos individuales en el blanco. Esos átomos quedan en niveles excitados; cuando decaen y regresan a sus niveles fundamentales, pueden emitir fotones de rayos x. Como cada elemento tiene un conjunto único de niveles de energía en sus átomos, también cada uno tiene un espectro de rayos x característico. Los niveles de energía correspondientes a los rayos x son de carácter muy distinto de los correspondientes a espectros visibles; implican huecos en las configuraciones electrónicas internas de átomos complejos. Las diferencias de energía entre esos niveles pueden ser de cientos o miles de electrón volts, no de unos cuantos, como es característico en los espectros ópticos. En la sección 41.5 regresaremos a los niveles de energía y a los espectros asociados con los rayos x.

Ejemplo 38.7 Producción de rayos x

Los electrones son acelerados en un tubo de rayos x mediante una diferencia de potencial de 10.0 kV. Si un electrón produce un fotón al chocar con el blanco (o ánodo), ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos x resultantes? Conteste tanto en unidades del SI como en electrón volts.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para producir un fotón de rayo x con longitud de onda mínima y, por consiguiente, con energía máxima, toda la energía cinética de un electrón debe transformarse y producir un solo fotón de rayo x.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (38.22) para determinar la longitud de onda en este caso.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (38.22) y usando unidades del SI tenemos:

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV_{\text{AC}}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(1.602 \times 10^{-19}\,\text{C})(10.0 \times 10^{3}\,\text{V})}$$
$$= 1.24 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.124\,\text{nm}$$

En electrón volts, se tiene que

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV_{\text{AC}}} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{e(10.0 \times 10^{3}\,\text{V})}$$
$$= 1.24 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.124\,\text{nm}$$

continúa

Observe que la "e" en las unidades eV se cancela con la "*e*" de la magnitud de la carga del electrón, porque el electrón volt (eV) es la magnitud de la carga del electrón *e* por un volt (1 V).

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, recordemos, del ejemplo 38.6 (sección 38.5), que un fotón de 10.2 eV de energía tiene una longitud de onda de 122 nm. En este ejemplo, la energía del electrón y, en consecuencia, la energía del fotón de rayo x es 10.0×10^3 eV = 10 keV (unas 10^3 veces mayor que en el ejemplo 38.6), y la longitud de onda es aproximadamente 10^{-3} veces menor que en el ejemplo 38.6. Esto tiene sentido, porque la longitud de onda y la energía del fotón son inversamente proporcionales.

Dispersión de Compton

Activ ONLINE Physics
17.4 Dispersión de Compton

Un fenómeno llamado **dispersión de Compton**, que explicó por primera vez el físico estadounidense Arthur H. Compton, ofrece una confirmación adicional directa de la naturaleza cuántica de los rayos x. Cuando esos rayos chocan con la materia, algo de su radiación se *dispersa,* de la misma forma que la luz visible que incide sobre una superficie áspera sufre una reflexión difusa. Compton y otros científicos descubrieron que parte de esa radiación dispersada tiene menor frecuencia (mayor longitud de onda) que la radiación incidente, y que el cambio de longitud de onda depende del ángulo en el que se dispersa la radiación. En forma específica, la radiación dispersada sale formando un ángulo ϕ con la radiación incidente (figura 38.26), y si λ y λ' son las longitudes de onda de la radiación incidente y de la dispersada, respectivamente, se ve que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \qquad \text{(dispersión de Compton)} \qquad (38.23)$$

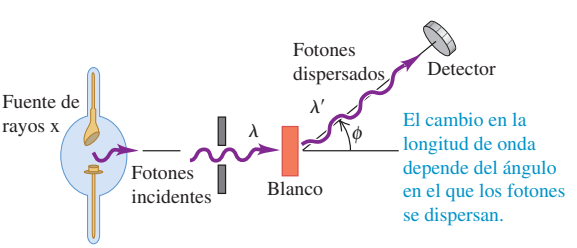
donde m es la masa en reposo del electrón. Las unidades de la cantidad h/mc que aparece en la ecuación (38.23) son de longitud. Su valor numérico es

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})} = 2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

Con la teoría electromagnética clásica no se puede explicar la dispersión de Compton, la cual pronostica que la onda dispersada tiene la misma longitud de onda que la onda incidente. Sin embargo, la teoría cuántica ofrece una explicación notablemente clara. Imaginemos el proceso de dispersión como una colisión de dos *partículas,* el fotón incidente y un electrón que inicialmente está en reposo, como en la figura 38.27a. El fotón incidente desaparece y cede parte de su energía y su cantidad de movimiento al electrón, el cual retrocede como resultado de este impacto. El resto se transforma en un fotón nuevo, dispersado, que en consecuencia tiene menos energía, menor frecuencia y mayor longitud de onda que el incidente (figura 38.27b).

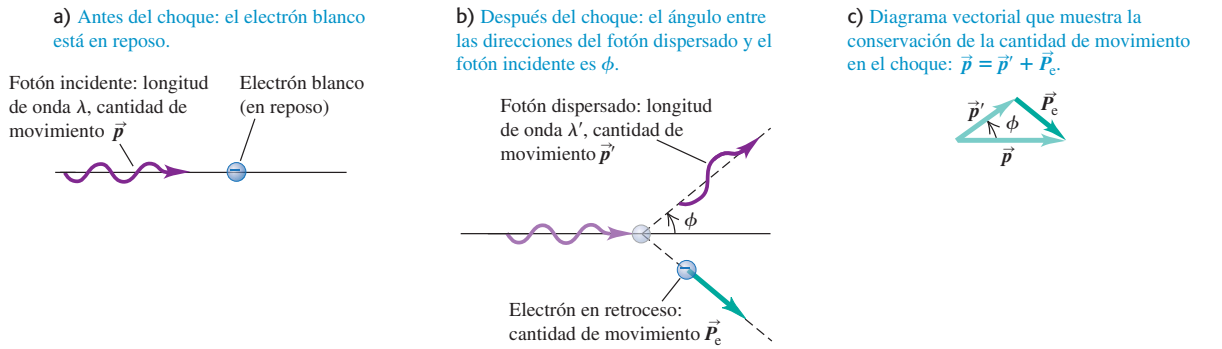
La ecuación (38.23) se puede deducir a partir de los principios de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. A continuación describiremos esta deducción, y lo invitamos a completar sus detalles (véase el ejercicio 38.41). La energía de retroceso del electrón puede estar en el intervalo relativista, por lo que se deben usar las ecuaciones relativistas de energía y cantidad de movimiento, las ecuaciones (37.39) y (37.40). El fotón incidente tiene una cantidad de movimiento $\vec{\boldsymbol{p}}$, con magnitud p y energía pc. El fotón dispersado tiene una cantidad de movimiento $\vec{\boldsymbol{p}}'$, de magnitud p' y energía $p'c$. El electrón está en reposo al principio, y su cantidad de movimiento inicial es cero, y su energía inicial es su energía en reposo, mc^2. La cantidad de movimiento final del electrón es $\vec{\boldsymbol{P}}_e$, de magnitud P_e, y la energía final del electrón es $E_e^2 = (mc^2)^2 + (P_e c)^2$. Así, la conservación de la energía determina la relación

$$pc + mc^2 = p'c + E_e$$



38.26 Un experimento del efecto Compton.

38.27 Esquema de la dispersión de Compton.



Al reacomodar queda

$$(pc - p'c + mc^2)^2 = E_e^2 = (mc^2)^2 + (P_e c)^2 \tag{38.24}$$

De esta ecuación podemos eliminar la cantidad de movimiento del electrón, $\vec{P}_e$, usando la conservación de cantidad de movimiento (figura 38.27c):

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}_e \quad \text{o} \quad \vec{P}_e = \vec{p} - \vec{p}' \tag{38.25}$$

Sacando el producto escalar de cada lado de la ecuación (38.25) por sí mismo, o usando la ley de los cosenos en el diagrama vectorial de la figura 38.27c, obtenemos

$$P_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\phi \tag{38.26}$$

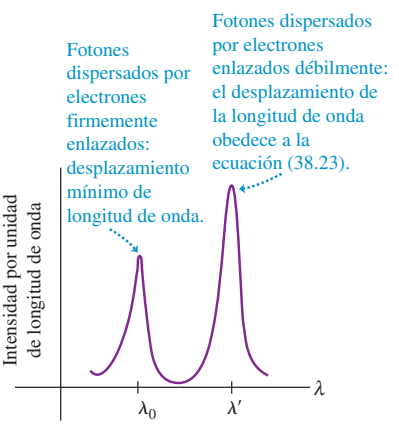
Ahora sustituimos esta ecuación de P_e^2 en la ecuación (38.24), y multiplicamos el lado izquierdo. Dividimos entre un factor común c^2; varios términos se anulan, y cuando la ecuación que resulta se divide entre (pp'), el resultado es

$$\frac{mc}{p'} - \frac{mc}{p} = 1 - \cos\phi \tag{38.27}$$

Por último, se sustituye $p' = h/\lambda'$ y $p = h/\lambda$, y después multiplicamos por h/mc para obtener la ecuación (38.23).

Cuando se miden las longitudes de onda de los rayos x dispersados en cierto ángulo, la curva de intensidad por unidad de longitud de onda en función de la longitud de onda tiene dos máximos (figura 38.28). El pico de mayor longitud de onda representa la dispersión de Compton. El de menor longitud de onda, identificado con λ_0, está en la longitud de onda de los rayos x incidentes, y corresponde a la dispersión de ellos por electrones firmemente enlazados. En esos procesos de dispersión debe retroceder todo el átomo, por lo que la m de la ecuación (38.23) es la masa de todo el átomo, y no la de un solo electrón. Los desplazamientos de longitud de onda que resultan son despreciables.

38.28 Intensidad en función de longitud de onda, para fotones dispersados en un ángulo de 135°, en un experimento de dispersión de Compton.



Ejemplo 38.8 Dispersión de Compton

Utilice los fotones de rayos x del ejemplo 38.7 (con $\lambda = 0.124$ nm) en un experimento de dispersión de Compton. *a*) ¿En qué ángulo la longitud de onda de los rayos x dispersados es 1.0% mayor que la de los incidentes? *b*) ¿En qué ángulo es 0.050% mayor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se basa en la relación entre el ángulo de dispersión y el desplazamiento de longitud de onda en el efecto Compton.

PLANTEAR: En cada caso, nuestra variable buscada es el ángulo ϕ que se ve en la figura 38.27b. La despejaremos con la ecuación (38.23).

EJECUTAR: *a*) En la ecuación (38.23) deseamos que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ sea el 1.0% de 0.124 nm. Esto es, $\Delta\lambda = 0.00124\ \text{nm} = 1.24 \times 10^{-12}\ \text{m}$. Usando el valor $h/mc = 2.426 \times 10^{-12}$ m, vemos que

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

$$\cos\phi = 1 - \frac{\Delta\lambda}{h/mc} = 1 - \frac{1.24 \times 10^{-12}\ \text{m}}{2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}} = 0.4889$$

$$\phi = 60.7°$$

continúa

b) Para que $\Delta\lambda$ sea el 0.050% de 0.124 nm, es decir, 6.2×10^{-14} m,

$$\cos\phi = 1 - \frac{6.2 \times 10^{-14}\ \text{m}}{2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}} = 0.9744$$

$$\phi = 13.0°$$

EVALUAR: Al comparar nuestros resultados de los incisos *a*) y *b*) vemos que los ángulos menores dan desplazamientos menores de longitud de onda. Así, en una colisión rasante, la pérdida de energía del fotón y la energía de retroceso del electrón son menores cuando el ángulo de dispersión es mayor. Esto es justo lo que se espera de un choque elástico, ya sea entre un fotón y un electrón, o entre dos bolas de billar.

Aplicaciones de los rayos x

Los rayos x tienen muchas aplicaciones prácticas en medicina y en la industria. Como los fotones de rayos x tienen una energía tan alta, son capaces de penetrar varios centímetros de materia sólida, por lo que se pueden usar para visualizar los interiores de materiales que son opacos a la luz ordinaria, como huesos rotos o defectos en el acero estructural. El objeto por visualizar se coloca entre una fuente de rayos x y una hoja grande de película fotográfica. El oscurecimiento de la película es proporcional a la exposición a la radiación. Una grieta o una burbuja de aire permiten mayor transmisión y se manifiesta como una zona oscura. Los huesos aparecen más claros que los tejidos blandos que los rodean, porque contienen mayores proporciones de elementos con menor número atómico (y mayor absorción); en los tejidos blandos predominan los elementos ligeros, como carbono, hidrógeno y oxígeno.

38.29 Este radiólogo maneja un aparato de tomografía computarizada (se ve por la ventana, arriba) desde un cubículo separado, para evitar exposiciones frecuentes a los rayos x.

Una técnica de rayos x empleada con frecuencia, que se ha mejorado notablemente, es la *tomografía computarizada;* al instrumento con que se obtiene se le llama *escáner CT* (por las siglas de *computed tomography*). La fuente de rayos x produce un haz delgado, en forma de abanico, que se detecta en el lado opuesto del sujeto mediante una serie de varios cientos de detectores alineados. Cada detector mide la absorción a lo largo de una línea delgada que atraviesa al sujeto. Todo el aparato gira en torno al sujeto, en el plano del haz, durante algunos segundos. Las tasas variables de conteo de fotones, en los detectores, se registran en forma digital; una computadora procesa esa información y reconstruye una imagen de absorción dentro de todo un corte transversal del sujeto (figura 38.29). Con las imágenes de CT se pueden determinar diferencias hasta del 1%, así como detectar tumores y otras anomalías que son demasiado pequeñas para verlas con las técnicas anteriores de radiología.

Los rayos x provocan daños a los tejidos vivos. Cuando se absorben fotones de rayos x en los tejidos, su energía rompe enlaces moleculares y forma radicales libres muy reactivos (como H y OH neutros), que a la vez pueden perturbar la estructura molecular de las proteínas, y en especial del material genético. Las células jóvenes y las que crecen con rapidez son especialmente susceptibles; por esa razón, los rayos x son útiles en la destrucción selectiva de células cancerosas. Sin embargo, a la inversa, una célula puede ser dañada por la radiación, pero puede sobrevivir, continuar dividiéndose y producir generaciones de células defectuosas; por ello, los rayos x pueden *causar* cáncer.

Aun cuando el organismo no muestre daños aparentes, su exposición excesiva a la radiación puede causar cambios en el sistema reproductor, los cuales afectarán a la descendencia. Es esencial tener una evaluación cuidadosa del balance entre los riesgos y los beneficios de la exposición a la radiación, en cada caso individual.

Evalúe su comprensión de la sección 38.7 Si usted usara fotones de luz visible en el experimento de la figura 38.26, ¿los fotones sufrirían un desplazamiento de longitud de onda al dispersarse? Si así fuere, el ojo humano ¿podría detectar el desplazamiento?

38.8 Espectros continuos

Los espectros de línea son emitidos por materia en estado gaseoso, cuando los átomos están tan alejados entre sí que su interacción es despreciable, y cada uno se comporta como un sistema aislado. La materia caliente en estados condensados (sólido o líquido) emite casi siempre radiación con una distribución *continua* de longitudes de onda, y no un espectro de líneas. Una superficie ideal que absorbe todas las longitudes de onda de la radiación electromagnética que le llegan también es el mejor emisor posible de

radiación electromagnética de cualquier longitud de onda. Esa superficie ideal se llama *cuerpo negro,* y el espectro continuo de radiación que emite se llama **radiación de cuerpo negro**. Para 1900, ya se había estudiado esa radiación en forma extensa, y se habían determinado varias de sus características.

Primero, la intensidad total I (la tasa media de radiación de energía por unidad de superficie, o potencia media por área) emitida de la superficie de un radiador ideal es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta (figura 38.30). Ya estudiamos esta relación en la sección 17.7, cuando explicamos los mecanismos de transferencia de calor. Esta intensidad total I emitida a la temperatura absoluta T sigue la **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$I = \sigma T^4 \qquad \text{(ley de Stefan-Boltzmann para un cuerpo negro)} \qquad (38.28)$$

donde σ es una constante física fundamental, llamada *constante de Stefan-Boltzmann.* En unidades del SI,

$$\sigma = 5.670400(40) \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

En segundo lugar, la intensidad no se distribuye de manera uniforme en todas las longitudes de onda. Su distribución puede medirse y describirse con la intensidad por intervalo de longitud de onda, $I(\lambda)$, llamada *emitancia espectral.* Así, $I(\lambda)d\lambda$ es la intensidad correspondiente a las longitudes de onda del intervalo que va de λ a $\lambda + d\lambda$. La intensidad *total* I, definida por la ecuación (38.28), es la *integral* de la función de distribución $I(\lambda)$ sobre todas las longitudes de onda, y es igual al área bajo la curva de $I(\lambda)$ en función de λ:

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda \qquad (38.29)$$

CUIDADO **Emitancia espectral contra intensidad** Aunque usamos el símbolo $I(\lambda)$ para representar la emitancia espectral, tenga en cuenta que la emitancia espectral no es lo mismo que la intensidad I. La intensidad es potencia por unidad de área, y sus unidades son W/m^2; la emitancia espectral es potencia por unidad de área por unidad de longitud de onda, y sus unidades son W/m^3.

En la figura 38.31 se muestran emitancias espectrales $I(\lambda)$ medidas a tres temperaturas distintas. Cada una tiene una longitud de onda máxima λ_m, a la cual la intensidad emitida por intervalo de longitud de onda es máxima. Los experimentos demuestran que λ_m es inversamente proporcional a T, de tal manera que su producto es constante. Este resultado se conoce como **ley de desplazamiento de Wien**. El valor experimental de la constante es $2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$:

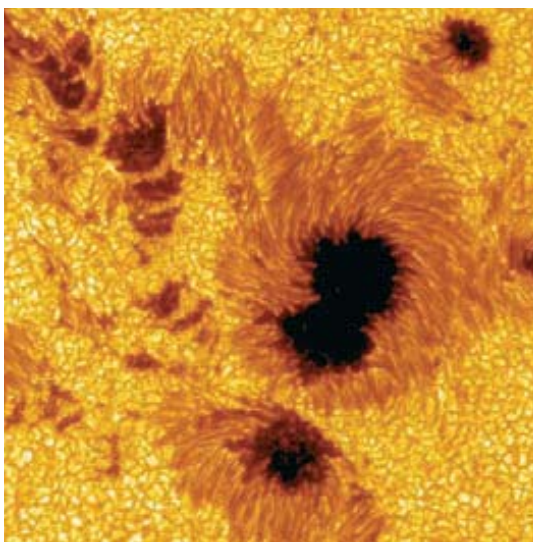
$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \qquad \text{(ley de desplazamiento de Wien)} \qquad (38.30)$$

Cuando la temperatura aumenta, el máximo de $I(\lambda)$ se vuelve más alto y se desplaza a longitudes de onda menores. Un cuerpo que brilla amarillo está más caliente y más brillante que uno que brilla rojo; la luz amarilla tiene menores longitudes de onda que la luz roja. Por último, los experimentos demuestran que la *forma* de la curva de distribución es igual para todas las temperaturas; se puede hacer que una curva de una temperatura se ajuste a otra temperatura, sólo cambiando las escalas de la gráfica.

Rayleigh y la "catástrofe ultravioleta"

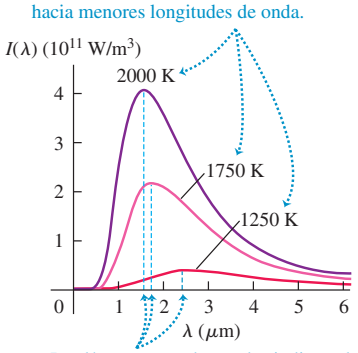
Durante la última década del siglo XIX se hicieron muchos intentos para *deducir* estos resultados empíricos a partir de principios básicos. En uno de los intentos, el físico inglés Lord Rayleigh consideró el caso de la luz encerrada en una caja rectangular con lados interiores perfectamente reflectantes. Esa caja tiene una serie de *modos normales* posibles para las ondas electromagnéticas, como describimos en la sección 32.5. Parecía razonable suponer que la distribución de la energía entre los diversos modos

38.30 Este acercamiento a la superficie del Sol muestra dos manchas solares, oscuras. Su temperatura aproximada es de 4000 K, mientras que el material solar que las rodea está a $T = 5800$ K. De acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, la intensidad de determinada zona de la mancha solar sólo es $(4000\ \text{K}/5800\ \text{K})^4 = 0.23$ tan grande como la del material que la rodea; ésta es la causa de que las manchas parezcan oscuras.



38.31 Emitancia espectral $I(\lambda)$ de radiación de un cuerpo negro en tres temperaturas distintas.

Al aumentar la temperatura, el máximo de la curva de emitancia espectral se vuelve más pronunciado y se desplaza hacia menores longitudes de onda.



Las líneas punteadas azules indican el valor de λ_m en la ecuación (38.30) para cada temperatura.

estuviera determinada por el principio de equipartición (véase la sección 18.4), que se había usado con éxito en el análisis de las capacidades caloríficas. Un pequeño orificio en la caja se comporta como un radiador ideal de cuerpo negro.

Incluyendo las energías de campos eléctricos y magnéticos, Rayleigh supuso que la energía total de cada modo normal es igual a kT. Entonces, al calcular la *cantidad* de modos normales correspondientes a un intervalo de longitud de onda $d\lambda$, Rayleigh logró predecir la distribución de longitudes de onda en la radiación del interior de la caja. Por último, pudo calcular la distribución de intensidad $I(\lambda)$ de la radiación que sale de un orificio pequeño en la caja. Su resultado fue bastante sencillo:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \tag{38.31}$$

A longitudes de onda grandes, esta fórmula concuerda bastante bien con los resultados experimentales que muestra la figura 38.31, pero hay un grave desacuerdo a pequeñas longitudes de onda. La curva experimental tiende a cero cuando λ es pequeña, pero la curva de Rayleigh se va en dirección contraria y tiende a infinito en función de $1/\lambda^4$, resultado que se llamó, en tiempos de Rayleigh, la "catástrofe del ultravioleta". Y algo todavía peor: la integral de la ecuación (38.31) sobre todas las λ es infinita, lo que indica una intensidad *total* irradiada infinitamente grande. Es claro que algo anda mal.

Planck y la hipótesis cuántica

Por último, en 1900, el físico alemán Max Planck logró deducir una función, que hoy se llama ley **de radiación de Planck**, que concordaba muy bien con las curvas experimentales de distribución de intensidad. En su deducción planteó una hipótesis, que en su tiempo parecía descabellada. Supuso que los osciladores electromagnéticos (los electrones) en las paredes de la caja de Rayleigh, que vibran a la frecuencia f, sólo podían tener ciertos valores de energía, iguales a nhf, donde $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ y sucedió que h fue la constante que hoy lleva el nombre de Planck. Esos osciladores estaban en equilibrio con las ondas electromagnéticas en la caja. Su hipótesis produjo niveles cuantizados de energía, y estaba en aguda oposición con la consideración de Rayleigh de que cada modo normal podría tener cualquier cantidad de energía.

Planck no se sentía contento con su *hipótesis cuántica;* la consideraba como un truco de cálculo, más que un principio fundamental. En su carta a un amigo, la llamó "acto de desesperación" al que se había visto obligado porque "había que encontrar una explicación teórica a toda costa". Pero cinco años después, Einstein identificó el cambio de energía hf entre niveles, como la energía de un fotón, para explicar el efecto fotoeléctrico (véase la sección 38.2), y rápidamente se acumularon más pruebas. Para 1915, había poca duda de la validez del concepto cuántico y de la existencia de fotones. Al describir los espectros atómicos *antes* que los espectros continuos, nos apartamos del orden histórico de las cosas. El crédito de la invención del concepto de cuantización se debe a Planck, aun cuando al principio no creía en él.

No narraremos los detalles de la deducción de la distribución de la intensidad por parte de Planck. Sólo presentaremos el resultado:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} \qquad \text{(ley de radiación de Planck)} \tag{38.32}$$

donde h es la constante de Planck, c es la rapidez de la luz, k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura *absoluta* y λ es la longitud de onda. Resulta que esta función concuerda bien con las curvas experimentales de intensidad, como las de la figura 38.31.

La ley de radiación de Planck también incluye como consecuencias la ley de desplazamiento de Wien y la ley de Stefan-Boltzmann. Para deducir la ley de Wien, se obtiene la derivada de la ecuación (38.32) y se iguala a cero, para determinar el valor

de λ, en el que $I(\lambda)$ es máximo. Dejaremos estos detalles como problema (véase el ejercicio 38.47). El resultado es

$$\lambda_m = \frac{hc}{4.965kT} \tag{38.33}$$

Para llegar a él, se debe resolver la ecuación

$$5 - x = 5e^{-x} \tag{38.34}$$

La raíz de esta ecuación, que se obtiene por prueba y error o por métodos más complicados, es 4.965, con cuatro cifras significativas. Usted debería evaluar la constante $hc/4.965k$ y demostrar que concuerda con el valor experimental de $2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$ de la ecuación (38.30).

Podemos obtener la ley de Stefan-Boltzmann del cuerpo negro integrando la ecuación (38.32) sobre toda λ, para determinar la intensidad *total* irradiada (véase el problema 38.77). Ésta no es una integral sencilla; el resultado es

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4 \tag{38.35}$$

que concuerda con la ecuación (38.28). Este resultado indica también que la constante σ en esa ley puede expresarse como una combinación de otras constantes fundamentales:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \tag{38.36}$$

El lector debe sustituir los valores de *k, c y h* del Apéndice F, y comprobar que se obtiene la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$.

La forma general de la ecuación (38.33) es la que cabe esperar de acuerdo con la teoría cinética. Si las energías de los fotones son normalmente del orden de *kT,* como sugiere el teorema de la equipartición, entonces, para un fotón típico es de esperar que

$$E \approx kT \approx \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad \lambda \approx \frac{hc}{kT} \tag{38.37}$$

En realidad, un fotón con la longitud de onda definida por la ecuación (38.33) tiene una energía $E = 4.965kT$.

La ley de radiación de Planck, ecuación (38.32), parece tan distinta de la nada exitosa ecuación de Rayleigh, ecuación (38.31), que parecería improbable que concordaran en valores grandes de λ. Pero cuando λ es grande, el exponente del denominador de la ecuación (38.32) es muy pequeño. Entonces se puede usar la aproximación $e^x \approx 1 + x$ (para $x \ll 1$). El lector debe verificar que al hacer lo anterior, el resultado tiende a la ecuación (38.31), indicando que las dos ecuaciones sí concuerdan en el límite cuando λ es muy grande. También se nota que la ecuación de Rayleigh no contiene a *h*. A longitudes de onda muy grandes y energías de fotón correspondientes muy bajas, los efectos cuánticos dejan de tener importancia.

Ejemplo 38.9 Luz de Sol

La superficie del Sol tiene una temperatura aproximada de 5800 K. Con buena aproximación, se puede considerar que es un cuerpo negro. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda λ_m de intensidad máxima? *b*) ¿Cuál es la potencia total irradiada por unidad de área?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la ley del desplazamiento de Wien (que relaciona la temperatura *T* de un cuerpo negro y su longitud de onda de intensidad máxima λ_m) y la ley de Stefan-Boltzmann (que relaciona la temperatura de un cuerpo negro con la potencia irradiada por área *I*).

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (38.30) para determinar λ_m y la ecuación (38.28) para calcular *I*.

EJECUTAR: *a*) Según la ecuación (38.30),

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{T} = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{5800\ \text{K}}$$
$$= 0.500 \times 10^{-6}\ \text{m} = 500\ \text{nm}$$

continúa

b) De acuerdo con la ecuación (38.28),

$$I = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4})(5800\ \mathrm{K})^4$$
$$= 6.42 \times 10^7\ \mathrm{W/m^2} = 64.2\ \mathrm{MW/m^2}$$

EVALUAR: La longitud de onda determinada en el inciso *b*) está cerca de la mitad del espectro visible. No es un resultado sorprendente: el ojo humano evolucionó para aprovechar al máximo la luz natural.

El valor enorme de I, determinado en el inciso *b*), es la intensidad en la *superficie* del Sol. Cuando la potencia irradiada llega a la Tierra, esa intensidad baja aproximadamente a 1.4 $\mathrm{kW/m^2}$, porque la potencia se reparte en la superficie de una esfera cuyo radio es igual al de la órbita de la Tierra.

Ejemplo 38.10 Una "rebanada" de luz solar

Determine la potencia por unidad de área que irradia la superficie del Sol en el intervalo de longitudes de onda de 600.0 a 605.0 nm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este asunto tiene que ver con la potencia que emite un cuerpo negro en un estrecho intervalo de longitudes de onda y, por consiguiente, tiene que ver con la emitancia espectral (distribución de intensidad) $I(\lambda)$.

PLANTEAR: Para llegar a un resultado exacto, debemos integrar la ecuación (38.32) entre los límites de 600.0 y 605.0 nm, y así determinar el área bajo la curva de $I(\lambda)$ entre esos límites. Esa integral no se puede evaluar en términos de funciones familiares, por lo que *aproximaremos* el área mediante la altura de la curva en la longitud de onda mediana $\lambda = 602.5$ nm, multiplicada por el ancho del intervalo ($\Delta\lambda = 5.0$ nm).

EJECUTAR: Para obtener la altura de la curva $I(\lambda)$ en $\lambda = 602.5\ \mathrm{nm} = 6.025 \times 10^{-7}$ m, primero se evalúa la cantidad $hc/\lambda kT$ para este valor de λ y con $T = 5800$ K (la temperatura de la superficie solar, véase el ejemplo 38.9). A continuación sustituimos el resultado en la ecuación (38.32):

$$\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^8\ \mathrm{m/s})}{(6.025 \times 10^{-7}\ \mathrm{m})(1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})(5800\ \mathrm{K})}$$
$$= 4.116$$

$$I(\lambda) = \frac{2\pi(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2}{(6.025 \times 10^{-7}\ \mathrm{m})^5(e^{4.116} - 1)}$$
$$= 7.81 \times 10^{13}\ \mathrm{W/m^3}$$

La intensidad en el intervalo de 5.0 nm entre 600.0 y 605.0 nm es aproximadamente,

$$I(\lambda)\Delta\lambda = (7.81 \times 10^{13}\ \mathrm{W/m^3})(5.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})$$
$$= 3.9 \times 10^5\ \mathrm{W/m^2} = 0.39\ \mathrm{MW/m^2}$$

EVALUAR: En este resultado y en inciso *b*) del ejemplo 38.9 (donde determinamos la potencia irradiada por unidad de área en *todas* las longitudes de onda) vemos que más o menos el 0.6% de la potencia irradiada del Sol está entre las longitudes de onda de 600.0 a 605.0 nm. Si hubiéramos determinado que en este intervalo se irradia más potencia que la calculada en el ejemplo 38.9 ¡algo andaría muy mal en nuestros cálculos!

Evalúe su comprensión de la sección 38.8 *a*) Un cuerpo negro a 2000 K ¿emite rayos x? *b*) ¿Emite ondas de radio?

38.9 Dualidad onda-partícula

Hemos estudiado muchos ejemplos del comportamiento de la luz y de otras radiaciones electromagnéticas. Algunos ejemplos, incluyendo los efectos de interferencia y de difracción descritos en los capítulos 35 y 36, demuestran en forma concluyente la naturaleza *ondulatoria* de la luz. Otros, que son el tema de este capítulo, apuntan con igual fuerza a la naturaleza *corpuscular* de la luz. A primera vista, parece que estos dos aspectos están en oposición directa. ¿Cómo es que la luz puede ser al mismo tiempo una onda y una partícula?

Podemos encontrar la respuesta a este conflicto aparente entre onda y partícula en el **principio de complementariedad**, que enunció Niels Bohr en 1928. Las descripciones ondulatoria y corpuscular son complementarias. Esto es, se necesitan ambas descripciones para completar nuestro modelo de la naturaleza, pero nunca necesitaremos usar ambas al mismo tiempo para describir una parte única de un suceso.

Difracción e interferencia en la imagen del fotón

Comencemos por considerar de nuevo el patrón de difracción que produce una sola rendija, que analizamos en las secciones 36.2 y 36.3. En vez de registrar el patrón en una película fotográfica, usaremos un detector llamado *fotomultiplicador,* que puede

detectar realmente los fotones individuales. Si usamos el dispositivo de la figura 38.32, se pone el multiplicador en diversas posiciones durante intervalos iguales de tiempo, se cuentan los fotones en cada posición y se hace la gráfica de la distribución de intensidades.

Se encuentra que, en promedio, la distribución de los fotones concuerda con nuestras predicciones de la sección 36.3. En los puntos correspondientes a los máximos de la figura se cuentan muchos fotones, y en los puntos mínimos casi no aparece ninguno, y así sucesivamente. La gráfica del conteo en diversos puntos nos muestra el mismo patrón de difracción que se predijo con la ecuación (36.7).

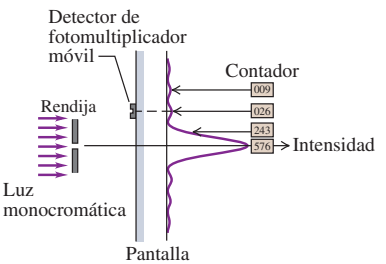
Ahora supongamos que se reduce la intensidad hasta el punto en el que sólo pasen por la rendija unos cuantos fotones por segundo. Con sólo unos cuantos fotones no cabe esperar que se obtenga la curva uniforme de difracción que se determinó con grandes cantidades. De hecho, no hay forma de predecir con exactitud dónde irá cada fotón individual. Para reconciliar los aspectos ondulatorio y corpuscular de este patrón, debemos considerar que éste es una distribución *estadística* que indica cuántos fotones, en promedio, van a diversos lugares, es decir, la *probabilidad* de que un fotón individual vaya a dar a cada uno de varios lugares. Pero no podemos predecir con exactitud dónde irá un fotón individual.

Ahora examinemos en forma breve una interpretación cuántica de un patrón de interferencia óptica con *dos rendijas,* el cual estudiamos en la sección 35.2. De nuevo podemos trazar la figura con un fotomultiplicador y un contador. Se reduce la intensidad luminosa hasta un valor de unos cuantos fotones por segundo (figura 38.33). Una vez más, no podemos predecir exactamente a dónde irá un fotón individual, ya que el patrón de interferencia es una *distribución estadística.*

¿Cómo se aplica el principio de complementariedad a estos experimentos de difracción e interferencia? La descripción ondulatoria, y no la descripción corpuscular, explican los patrones con una y con dos rendijas. Pero la descripción corpuscular, y no la ondulatoria, explica por qué el fotomultiplicador mide el patrón como si estuviera formado por paquetes discretos de energía. Las dos descripciones completan la explicación de los resultados.

En estos experimentos, la luz pasa por una o varias rendijas, y los fotones se detectan en varias posiciones en la pantalla. Supongamos que se pregunta lo siguiente: "Acabamos de detectar un fotón en cierta posición; cuando pasó por la rendija ¿cómo sabía qué camino tomar?" El problema con esta pregunta es que se plantea en términos de una descripción *corpuscular.* La naturaleza ondulatoria de la luz, y no la corpuscular, determina la distribución de los fotones. El hecho de plantear esta pregunta es tratar de imponer la descripción como partícula (el fotón se dirige de alguna manera al camino que debe tomar) en un fenómeno ondulatorio (la formación del patrón).

38.32 Patrón de difracción con una sola rendija, observado con un fotomultiplicador móvil. La curva muestra la distribución de intensidades que predice la imagen ondulatoria. La distribución de fotones se indica con las cantidades contadas en diversas posiciones.



38.33 En estas imágenes se registran las posiciones donde los fotones individuales llegan a la pantalla, en un experimento de interferencia con dos rendijas. A medida que llegan más y más fotones a la pantalla, aparece una figura de interferencia reconocible.

Imagen después de que 21 fotones llegaron a la pantalla.

Imagen después de que 1000 fotones llegaron a la pantalla.

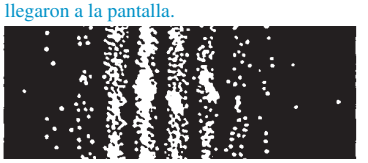
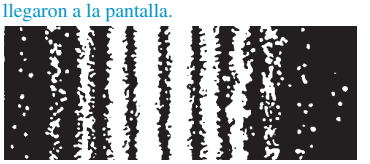


Imagen después de que 10,000 fotones llegaron a la pantalla.



Electrodinámica cuántica

Por experimentación sabemos que al mandar ondas electromagnéticas a través de rendijas se producen patrones de interferencia, y que esos patrones están formados por fotones individuales. Pero si no conociéramos los resultados experimentales, ¿cómo podríamos predecir cuándo aplicar la descripción ondulatoria y cuándo aplicar la descripción corpuscular? Necesitamos una teoría que incluya ambas descripciones y además pronostique y explique las dos clases de comportamiento. Esa teoría detallada se llama *electrodinámica cuántica.* En ella, se amplía el concepto de niveles de energía de un sistema atómico a los campos electromagnéticos. De la misma manera que un átomo sólo existe en ciertos estados de energía definidos, el campo electromagnético también tiene ciertos estados de energía bien definidos, que corresponden a la presencia de varias cantidades de fotones con energías, cantidades de movimiento y polarizaciones distintas. La electrodinámica cuántica floreció 50 años después de que la hipótesis cuántica de Planck, en 1900, marcó el nacimiento conceptual de la mecánica cuántica.

En los siguientes capítulos veremos que partículas como los electrones también tienen una "personalidad" dual, de onda y de partícula. Uno de los grandes logros de la mecánica cuántica ha sido el reconciliar estos aspectos aparentemente incompatibles del comportamiento de fotones, electrones y otros componentes de la materia.

CAPÍTULO 38 RESUMEN

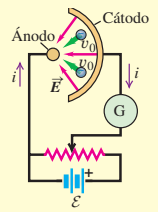
Fotones: La radiación electromagnética se comporta como ondas y como partículas. La energía en una onda electromagnética se transporta en unidades llamadas fotones. La energía E de un fotón es proporcional a la frecuencia f de la onda y es inversamente proporcional a la longitud de onda λ; además es proporcional a una cantidad h universal, llamada constante de Planck. La cantidad de movimiento de un fotón tiene la magnitud E/c. (Véase el ejemplo 38.1.)

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \tag{38.2}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{38.5}$$

El efecto fotoeléctrico: En el efecto fotoeléctrico, una superficie puede expulsar un electrón al absorber un fotón cuya energía hf es mayor o igual a la función trabajo ϕ del material. El potencial de frenado V_0 es el voltaje necesario para detener una corriente de electrones expulsados e impedir que lleguen al ánodo. (Véanse los ejemplos 38.2 y 38.3.)

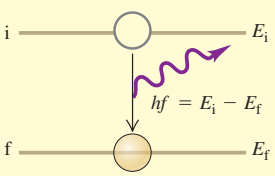
$$eV_0 = hf - \phi \tag{38.4}$$



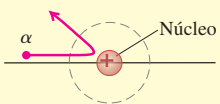
Espectros atómicos de líneas y niveles de energía: Cuando un átomo hace una transición de un nivel de energía E_i a uno inferior E_f, la energía del fotón emitido es igual a $E_i - E_f$. Los niveles de energía del átomo de hidrógeno se definen con la ecuación (38.9), donde R es la constante de Rydberg. Todas las series espectrales observadas del hidrógeno pueden explicarse en función de esos niveles. (Véase el ejemplo 38.4.)

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \tag{38.6}$$

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} = -\frac{13.60\ \text{eV}}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{38.9}$$



El átomo nuclear: Los experimentos de dispersión de Rutherford demuestran que en el centro de un átomo hay un núcleo denso, mucho menor que el tamaño general del átomo, pero que contiene toda la carga positiva y la mayor parte de la masa. (Véase el ejemplo 38.5.)

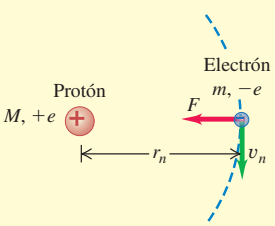


El modelo de Bohr: En el modelo de Bohr, del átomo de hidrógeno, los valores permitidos para la cantidad de movimiento angular son múltiplos enteros de $h/2\pi$. El multiplicador entero n se llama número cuántico principal del nivel. Los radios orbitales son proporcionales a n^2, y las velocidades orbitales son proporcionales a $1/n$. (Véase el ejemplo 38.6.)

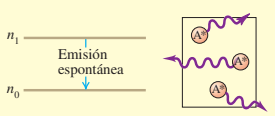
$$L_n = mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{38.10}$$

$$r_n = \epsilon_0 \frac{n^2 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a_0 = n^2 (5.29 \times 10^{-11}\ \text{m}) \tag{38.12}$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2}{2nh} = \frac{2.19 \times 10^6\ \text{m/s}}{n} \tag{38.13}$$



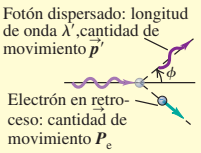
El láser: El láser funciona de acuerdo con el principio de emisión estimulada, en el que se emiten muchos fotones con longitud de onda y fase idénticas. El funcionamiento del láser requiere una condición de desequilibrio llamada inversión de población, en la que hay más átomos en un estado de mayor energía que los que hay en un estado de menor energía.



Producción y dispersión de rayos x: Los rayos x se producen por el impacto de un electrón con un blanco. Si los electrones se aceleran a través de un aumento de potencial V_{AC}, la frecuencia máxima y la longitud de onda mínima que producen se define con la ecuación (38.22). (Véase el ejemplo 38.7.) La dispersión Compton ocurre cuando los fotones de rayos x se dispersan al chocar con los electrones. Para los electrones libres (de masa m), las longitudes de onda de los fotones incidentes y dispersados se relacionan con el ángulo de dispersión ϕ del fotón mediante la ecuación (38.23). (Véase el ejemplo 38.8.)

$$eV_{AC} = hf_{máx} = \frac{hc}{\lambda_{mín}} \qquad (38.22)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \qquad (38.23)$$

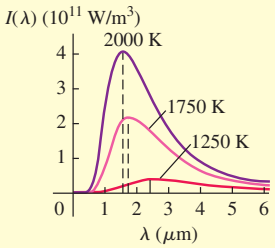


Radiación de un cuerpo negro: La intensidad total que irradia (potencia irradiada media por área) la superficie de un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta T. La cantidad $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 se conoce como constante de Stefan-Boltzmann. La longitud de onda λ_m a la que el cuerpo negro irradia con más intensidad es inversamente proporcional a T. La ley de radiación de Planck determina la emitancia espectral $I(\lambda)$ (intensidad por intervalo de longitud de onda en la radiación del cuerpo negro). (Véanse los ejemplos 38.9 y 38.10.)

$$I = \sigma T^4 \qquad (38.28)$$
(ley de Stefan-Boltzmann)

$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \qquad (38.30)$$
(ley de desplazamiento de Wien)

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)} \qquad (38.32)$$
(ley de radiación de Planck)



Términos clave

espectro de líneas, *1308*
efecto fotoeléctrico, *1309*
función trabajo, *1310*
frecuencia de umbral, *1310*
potencial de frenado, *1310*
fotón, *1311*
constante de Planck, *1311*
nivel de energía, *1314*
constante de Rydberg, *1315*
nivel fundamental, *1317*
nivel excitado, *1317*
espectro de absorción, *1318*
experimentos de dispersión de Rutherford, *1320*
núcleo, *1321*
modelo de Bohr, *1322*
número cuántico principal, *1323*
masa reducida, *1326*
láser, *1327*
emisión estimulada, *1327*
estado, *1328*
inversión de población, *1329*
estado metaestable, *1329*
dispersión de Compton, *1332*
radiación de cuerpo negro, *1335*
ley de Stefan-Boltzmann, *1335*
ley de desplazamiento de Wien, *1335*
ley de radiación de Planck, *1336*
principio de complementariedad, *1338*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Un fotón de 656.3 nm de longitud de onda (la línea H_α de la figura 38.8) es emitido cuando un electrón de un átomo de hidrógeno baja del nivel de energía $n = 3$ al nivel $n = 2$. La razón por la que observamos esto es que el hidrógeno gaseoso en la Nebulosa de la Laguna está muy excitado. (Si el gas no estuviera excitado, todos los átomos estarían en el nivel inferior de energía y no podrían emitir fotones.) El gas se excita con fotones ultravioleta de alta energía procedentes de las estrellas calientes y luminosas de la Nebulosa de la Laguna.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

38.2 Respuestas: i) y ii) De acuerdo con la ecuación (38.2), un fotón de energía $E = 1.14$ eV tiene una longitud de onda $\lambda = hc/E = (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}) \cdot (3.00 \times 10^8\ \text{m/s})/(1.14\ \text{eV}) = 1.09 \times 10^{-6}$ m $= 1090$ nm. Se encuentra en la región infrarroja del espectro. Como la longitud de onda es inversamente proporcional a la energía del fotón, la energía *mínima* de un fotón de 1.14 eV corresponde a la longitud de onda *máxima* que causa la fotoconductividad en el silicio. Entonces, la longitud de onda debe ser 1090 nm o menos.

38.3 Respuesta: no Para que el átomo absorba un fotón, la energía del fotón debe ser exactamente igual a la diferencia de energía entre los niveles inicial y final de energía del átomo (véase la figura 38.11).

38.4 Respuesta: no El núcleo de un átomo de hidrógeno es un protón (masa 1.67×10^{-27} kg) que sólo tiene aproximadamente la cuarta parte de la masa de una partícula alfa (6.64×10^{-27} kg). Como la partícula alfa es más masiva, no retrocederá, aun en un choque de frente contra un protón. Es como si una bola de bolos chocara con una de ping-pong en reposo (véase la figura 8.22b). Así, no habría dispersión en ángulo grande en este caso. En contraste, en el experimento de Rutherford, *sí* había dispersión en ángulo grande, porque un núcleo de oro es más masivo que una partícula alfa. En ese caso la analogía es la de una bola de ping-pong que choca con una bola de bolos en reposo (véase la figura 8.22a).

38.5 Respuesta: sí La figura 38.22 muestra que muchos de los niveles de energía del He^+ (aunque no todos) son iguales a los del H. Por consiguiente, los fotones emitidos durante las transiciones entre los pares correspondientes en el He^+ y el H tienen la misma energía E y la misma longitud de onda $\lambda = hc/E$. Por ejemplo, un átomo de H que baja del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$ emite un fotón de 10.20 eV de energía y de 122 nm de longitud de onda (véase el ejemplo 38.6); un ion He^+ emite un fotón de la misma energía y longitud de onda cuando baja del nivel $n = 4$ al nivel $n = 2$.

38.6 Respuesta: i) En un letrero de neón, se aplica una gran diferencia de potencial entre los extremos de un tubo de vidrio lleno de neón. Esto hace que se ionicen algunos de los átomos de neón y permiten el paso de una corriente de electrones por el gas. Algunos de los átomos de neón son golpeados por electrones en movimiento rápido y excitan

los átomos al nivel 5*s* que se ilustra en la figura 38.24a. Desde este nivel, los átomos pasan espontáneamente al nivel 3*p*, y en ese proceso emiten fotones de 632.8 nm. Los fotones se escapan fuera de los lados del tubo de vidrio. A este proceso se le llama emisión espontánea, como se muestra en la figura 38.23b. No se produce inversión de población, y los fotones no quedan atrapados por los espejos que se ven en la figura 38.24b, por lo que no hay emisión estimulada. Por todo lo anterior, no hay acción láser.

38.7 Respuestas: sí, no La ecuación (38.23) muestra que el desplazamiento de longitud de onda $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ sólo depende del ángulo de dispersión del fotón ϕ, y no de la longitud de onda del fotón incidente. Así, un fotón de luz visible, dispersado un ángulo ϕ, experimenta el mismo desplazamiento de longitud de onda que un fotón de rayos x. La ecuación (38.23) también muestra que este desplazamiento es del orden de $h/mc = 2.426 \times 10^{-12}$ m = 0.002426 nm. Éste es un pequeño porcentaje de la longitud de onda de los rayos x (véase el ejemplo 38.8), por lo que el efecto se nota en la dispersión de los rayos x. Sin embargo, h/mc es una fracción diminuta de la longitud de onda de la radiación visible (entre 400 y 700 nm). El ojo humano no puede distinguir diferencias tan minúsculas en longitud de onda (es decir, diferencias de color).

38.8 Respuestas: *a*) sí, *b*) sí La ley de radiación de Planck, ecuación (38.32), indica que un cuerpo negro ideal emite radiación en *todas* las longitudes de onda: la emitancia espectral $I(\lambda)$ es cero sólo cuando $\lambda = 0$, y en el límite $\lambda \to \infty$. Entonces, un cuerpo negro a 2000 K sí emite tanto rayos x como ondas de radio. Sin embargo, la figura 38.31 muestra que la emitancia espectral a esta temperatura es muy baja para longitudes de onda mucho menores que 1 μm (que incluyen a los rayos x) y para las mucho mayores que unos cuantos μm (que incluyen las ondas de radio). Por lo anterior, ese cuerpo negro emite muy poco en rayos x o en ondas de radio.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P38.1. ¿En qué situaciones los fotones se parecen a otras partículas, como los electrones? ¿En qué difieren? ¿Los fotones tienen masa? ¿Tienen carga eléctrica? ¿Se pueden acelerar? ¿Qué propiedades mecánicas tienen?

P38.2. Hay cierta probabilidad de que un solo electrón pueda absorber en forma simultánea a *dos* fotones idénticos de un láser de gran intensidad. ¿Cómo afectaría ese suceso la frecuencia de umbral y las ecuaciones de la sección 38.2? Explique su respuesta.

P38.3. De acuerdo con el modelo de fotón, la luz transporta su energía en paquetes llamados cuantos o fotones. ¿Por qué, entonces, no vemos una serie de destellos cuando vemos los objetos?

P38.4. ¿Espera que los efectos debidos a la naturaleza fotónica de la luz sean en general más importantes en el extremo del espectro electromagnético de las bajas frecuencias (ondas de radio) o en el de alta frecuencia (rayos x y rayos gamma)? ¿Por qué?

P38.5. Durante el efecto fotoeléctrico, la luz expulsa los electrones de los metales. ¿Por qué, entonces, los metales que tenemos en casa no pierden sus electrones cuando encendemos las luces?

P38.6. La mayor parte de las película fotográficas de blanco y negro (excepto algunas de aplicación especial) son menos sensibles a la luz roja que a la luz azul, y casi no tienen sensibilidad al infrarrojo. ¿Cómo se pueden explicar estas propiedades desde el punto de vista de los fotones?

P38.7. La piel humana es relativamente insensible a la luz visible, pero la radiación ultravioleta le puede causar quemaduras graves. ¿Tiene esto algo que ver con las energías de los fotones? Explique por qué.

P38.8. Explique por qué la figura 38.4 muestra que la mayor parte de los fotoelectrones tienen energías cinéticas menores que $hf - \phi$, y también explique por qué hay estas energías cinéticas menores.

P38.9. La figura 38.5 muestra que en un experimento de efecto fotoeléctrico, la fotocorriente i para valores positivos grandes de V_{AC} tiene el mismo valor, sin importar cuál sea la frecuencia f de la luz (siempre que f sea mayor que f_0, la frecuencia de umbral). Explique por qué.

P38.10. En un experimento que implica el efecto fotoeléctrico, si la intensidad de la luz incidente (con frecuencia más alta que la frecuencia de umbral) se reduce en un factor de 10 sin cambiar nada más, ¿cuál de los siguientes enunciados (si acaso alguno) es verdadero en relación con este proceso? *a*) Lo más probable es que el número de fotoelectrones se reduzca en un factor de 10. *b*) Lo más probable es que la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados se reduzca en un factor de 10. *c*) Lo más probable es que la rapidez máxima de los fotoelectrones expulsados se reduzca en un factor de 10. *d*) Lo más probable es que la rapidez máxima de los fotoelectrones expulsados se reduzca en un factor de $\sqrt{10}$. *e*) El tiempo para que el primer fotoelectrón sea expulsado aumentará en un factor de 10.

P38.11. Los materiales llamados *fósforos* que cubren el interior de una lámpara fluorescente convierten la luz ultravioleta (de la descarga de vapor de mercurio en el interior del tubo) en luz visible. ¿Podríamos hacer también un fósforo que convierta la luz visible en luz ultravioleta? Explique su respuesta.

P38.12. En un experimento fotoeléctrico, ¿cuál de los siguientes cambios aumentará la energía cinética máxima de los fotoelectrones? *a*) Usar luz de mayor intensidad; *b*) usar luz de mayor frecuencia; *c*) usar luz de mayor longitud de onda; *d*) usar una superficie metálica con mayor función trabajo. En cada caso, justifique su respuesta.

P38.13. Las galaxias tienden a ser fuertes emisores de fotones Lyman-α (de la transición de $n = 2$ a $n = 1$, en el hidrógeno atómico). Pero el medio intergaláctico, que es el gas muy enrarecido entre las galaxias, tiende a *absorber* los fotones Lyman-α. ¿Qué puede inferir, a partir de estas observaciones, acerca de la temperatura en estos dos ambientes? Explique su respuesta.

P38.14. Un átomo de litio doblemente ionizado (Li^{++}) es aquél al que se le quitaron dos de sus tres electrones. Los niveles de energía del ion restante, con un electrón, se relacionan en forma estrecha con los del átomo de hidrógeno. La carga nuclear del litio es $+3e$, y no sólo $+e$. ¿Cómo se relacionan los niveles de energía del Li^{++} con los del hidrógeno? ¿Cómo se relaciona el *radio* del ion en el nivel fundamental con el del átomo de hidrógeno? Explique.

P38.15. La emisión de un fotón por un átomo aislado es un proceso con retroceso, en el que se conserva la cantidad de movimiento. Así, la ecuación (38.6) debe incluir una energía cinética de retroceso K_r, para el átomo. ¿Por qué en esta ecuación esta energía es despreciable?

P38.16. ¿Cómo se podrían medir los niveles de energía de un átomo en forma directa, esto es, sin recurrir a los análisis espectrales?

P38.17. Los elementos en estado gaseoso emiten espectros de líneas con longitudes de onda bien definidas. Pero los cuerpos sólidos calientes emiten siempre un espectro continuo, esto es, un traslape continuo de longitudes de onda. ¿Puede explicar esta diferencia de comportamientos?

P38.18. Al calentar un cuerpo a una temperatura muy alta y volverse autoluminoso, el color aparente de la radiación emitida pasa del rojo al amarillo, y por último al azul, a medida que aumenta la temperatura. ¿Por qué se desplaza el color? ¿Qué otros cambios suceden en el carácter de la radiación?

P38.19. La longitud de onda de máxima intensidad de las estrellas enanas rojas, que tienen temperaturas en su superficie de alrededor de 3000 K, es aproximadamente de 1000 nm, lo que está más allá del espectro visible. ¿Por qué, entonces, somos capaces de ver estas estrellas, y por qué no se ven rojas?

P38.20. Un fotón de frecuencia f experimenta una dispersión de Compton con un electrón en reposo, y se dispersa un ángulo ϕ. La frecuencia del fotón dispersado es f'. ¿Cómo se relaciona f' con f? ¿Su respuesta depende de ϕ? Explique.

P38.21. ¿Puede haber dispersión de Compton con protones así como con electrones? Por ejemplo, suponga que se dirige un haz de rayos x hacia un objetivo de hidrógeno líquido. (Recuerde que el núcleo de hidrógeno consiste en un solo protón.) En comparación con la dispersión de Compton con electrones, ¿qué semejanzas y diferencias puede esperar? Explique.

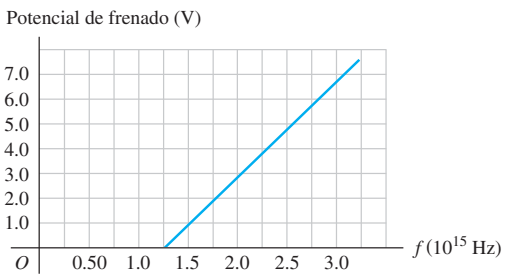
P38.22. ¿Por qué los ingenieros y los científicos deben protegerse contra los rayos x producidos en equipos de alto voltaje?

Ejercicios

Sección 38.2 El efecto fotoeléctrico

38.1. La gráfica de la figura 38.34 muestra el potencial de frenado como función de la frecuencia de la luz incidente sobre una superficie de metal. *a*) Determine la función trabajo de este metal. *b*) ¿Qué valor de la constante de Planck da esta gráfica? *c*) ¿Por qué la gráfica *no* se extiende por debajo del eje x? *d*) Si se empleara un metal diferente, ¿qué características de la gráfica esperaría que fueran iguales y cuáles diferentes?

Figura **38.34** Ejercicio 38.1.



38.2. Respuesta del ojo. El ojo humano es más sensible a la luz verde con longitud de onda de 505 nm. Los experimentos indican que cuando la gente permanece en una habitación oscura hasta que sus ojos se adaptan a la oscuridad, un *solo* fotón de luz verde activará las células receptoras de los bastones que hay en la retina. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de este fotón? *b*) ¿Cuánta energía (en joules y en electrón volts) llega a las células receptoras? *c*) Para apreciar la pequeña cantidad de energía que es esto, calcule la rapidez con que se movería una bacteria, cuya masa es de 9.5×10^{-12} g, si tuviera esta energía.

38.3. Un fotón de luz verde tiene una longitud de onda de 520 nm. Calcule la frecuencia, la magnitud de la cantidad de movimiento y la energía del fotón. Exprese la energía en joules y también en electrón volts.

38.4. Se usa un láser para soldar retinas desprendidas, el cual emite luz de una longitud de onda de 652 nm, en impulsos de 20.0 ms de duración. Durante cada impulso, la potencia media es de 0.600 W. *a*) ¿Cuánta energía, en joules, hay en cada impulso? ¿En electrón volts? *b*) ¿Cuál es la energía de un fotón, en joules? ¿En electrón volts? *c*) ¿Cuántos fotones hay en cada impulso?

38.5. Un núcleo excitado emite un fotón de rayo gamma, con 2.45 MeV de energía. *a*) ¿Cuál es la frecuencia del fotón? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón? *c*) ¿Cómo se compara la longitud de onda con un diámetro nuclear característico de 10^{-14} m?

38.6. La longitud de onda umbral de los fotoelectrones en una superficie de tungsteno es 272 nm. Calcule la energía cinética máxima de los electrones expulsados de esta superficie de tungsteno con radiación ultravioleta de 1.45×10^{15} Hz. Exprese la respuesta en electrón volts.

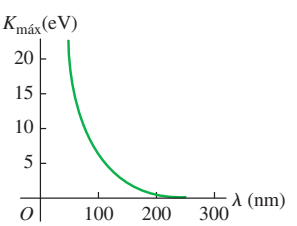
38.7. Una superficie de níquel limpia se expone a luz de 235 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos por esa superficie? Use la tabla 38.1.

38.8. ¿Cuál sería la función trabajo mínimo de un metal para que la luz visible (de 400 a 700 nm) expulsara fotoelectrones?

38.9. Una fuente luminosa de 75 W consume 75 W de potencia eléctrica. Suponga que toda la energía se transforma en luz emitida de 600 nm de longitud de onda. *a*) Calcule la frecuencia de la luz emitida. *b*) ¿Cuántos fotones por segundo emite la fuente? *c*) ¿Son iguales las respuestas de los incisos *a*) y *b*)? La frecuencia de la luz, ¿es la misma que la cantidad de fotones emitida por segundo? Explique.

38.10. En un experimento de efecto fotoeléctrico, la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados se mide para varias longitudes de onda de la luz incidente. La figura 38.35 presenta una gráfica de esta energía cinética máxima, $K_{máx}$, como función de la longitud de onda λ de la luz que incide sobre la superficie del metal. ¿Cuáles son *a*) la frecuencia de umbral y *b*) la función trabajo (en electrón volts) de este metal? *c*) Los datos de los experimentos como éste a menudo se grafican presentando $K_{máx}$ como función de $1/\lambda$. Elabore un dibujo cualitativo (es decir, sin números) de cómo se vería esta gráfica. Identifique la longitud de onda umbral (λ_0) en su dibujo. ¿Qué ventajas tiene graficar los datos de esta forma?

Figura **38.35** Ejercicio 38.10.



38.11. *a*) Un protón se mueve a una velocidad mucho menor que la de la luz. Su energía cinética es K_1, y su cantidad de movimiento es p_1. Si sube al doble la cantidad de movimiento del protón, para que $p_2 = 2p_1$, ¿cómo se relaciona su nueva energía cinética, K_2, con K_1? *b*) Un fotón de energía E_1 tiene una cantidad de movimiento p_1. Si otro fotón tiene una cantidad de movimiento p_2, que es el doble de p_1, ¿cómo se relaciona la energía cinética E_2 del segundo fotón con E_1?

38.12. La función trabajo para el efecto fotoeléctrico del potasio es 2.3 eV. Si al potasio llega luz de 250 nm de longitud de onda, calcule *a*) el potencial de frenado en volts, *b*) la energía cinética de los electrones que se emiten con más energía, en electrón volts, y *c*) la rapidez de esos electrones.

38.13. Cuando una luz ultravioleta de 254 nm de longitud de onda incide sobre una superficie de cobre limpia, el potencial de frenado necesario para detener la emisión de fotoelectrones es 0.181 V. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda umbral fotoeléctrica para esta superficie de cobre? *b*) ¿Cuál es la función trabajo de esta superficie y cómo se compara el valor que calculó con el que aparece en la tabla 38.1?

38.14. La cantidad de movimiento de un fotón es 8.24×10^{-28} kg · m/s de magnitud. a) ¿Cuál es la energía de este fotón? Exprese su respuesta en joules y en electrón volts. b) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra?

Sección 38.3 Espectros atómicos de líneas y niveles de energía

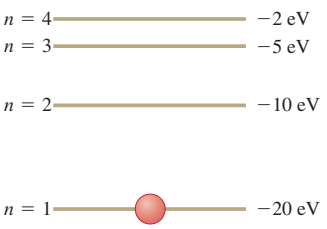
38.15. Use la fórmula de Balmer para calcular *a*) la longitud de onda, *b*) la frecuencia y *c*) la energía del fotón de la línea H_γ de la serie de Balmer del hidrógeno.

38.16. Calcule las longitudes de onda máxima y mínima de las series de Lyman y de Paschen para el hidrógeno. ¿En qué región del espectro electromagnético está cada serie?

38.17. *a*) Un átomo está inicialmente en un nivel de energía $E = -6.52$ eV, y absorbe un fotón de 860 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la energía interna del átomo después de absorber al fotón? *b*) Un átomo que inicialmente está en un nivel de energía con $E = -2.68$ eV emite un fotón de 420 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la energía interna del átomo después de emitir el fotón?

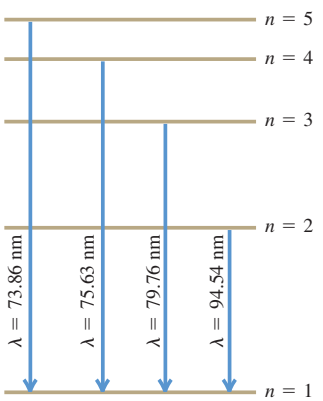
38.18. El esquema de niveles de energía para el searsio, un elemento hipotético de un electrón, se presenta en la figura 38.36. Se toma como cero la energía potencial de un electrón a una distancia infinita del núcleo. *a*) ¿Cuánta energía (en electrón volts) se necesita para ionizar a un electrón desde el nivel fundamental? *b*) Un fotón de 18 eV es absorbido por un átomo de searsio en su nivel fundamental. Cuando el átomo regresa a su nivel fundamental, ¿qué energías posibles pueden tener los fotones emitidos? Suponga que puede haber transiciones entre todos los pares de niveles. *c*) ¿Qué sucederá si un fotón de 8 eV de energía choca con un átomo de searsio en su estado fundamental? ¿Por qué? *d*) Los fotones emitidos en las transiciones $n = 3 \rightarrow n = 2$, y $n = 3 \rightarrow n = 1$ del searsio emiten fotoelectrones de un metal desconocido, pero el fotón emitido a partir de la transición $n = 4 \rightarrow n = 3$ no los emite. ¿Cuáles son los límites (valores máximo y mínimo posibles) de la función trabajo del metal?

Figura 38.36 Ejercicio 38.18.



38.19. En un conjunto de experimentos con un átomo hipotético de un electrón, se miden las longitudes de onda de los fotones emitidos a partir de la transición que culmina en el estado fundamental ($n = 1$), como se indica en el diagrama de niveles de energía de la figura 38.37.

Figura 38.37 Ejercicios 38.19.



También se observa que se requieren 17.50 eV para ionizar este átomo. *a*) ¿Cuál es la energía del átomo en cada uno de los niveles ($n = 1$, $n = 2$, etcétera) que se muestran en la figura? *b*) Si un electrón hiciera una transición del nivel $n = 4$ a $n = 2$, ¿cuál sería la longitud de onda de la luz emitida?

Sección 38.4 El átomo nuclear

38.20. Una partícula alfa de 4.78 MeV, procedente de una desintegración de ^{226}Ra, choca de frente con un núcleo de uranio. Ese núcleo tiene 92 protones. *a*) ¿Cuál es la distancia de acercamiento máximo de la partícula alfa al centro del núcleo? Suponga que el núcleo de uranio permanece en reposo y que la distancia de máximo acercamiento es mucho mayor que el radio del núcleo de uranio. *b*) ¿Cuál es la fuerza sobre la partícula alfa en el instante en el que está a la distancia de acercamiento máximo?

38.21. Un haz de partículas alfa incide sobre un blanco de plomo. Cierta partícula alfa choca "de frente" con un núcleo particular de plomo, y se detiene a 6.50×10^{-14} m del centro del núcleo (ese acercamiento máximo está muy por fuera del núcleo). Suponga que el núcleo de plomo, que tiene 82 protones, permanece en reposo. La masa de la partícula alfa es 6.64×10^{-27} kg. *a*) Calcule la energía potencial electrostática en el instante en el que se detiene la partícula alfa. Exprese su respuesta en joules y en MeV. *b*) ¿Qué energía cinética inicial (en joules y en MeV) tenía la partícula alfa? *c*) ¿Cuál fue la velocidad inicial de la partícula alfa?

Sección 38.5 El modelo Bohr

38.22. *a*) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular L del electrón de un átomo de hidrógeno, con respecto al origen en el núcleo, cuando el átomo se encuentra en su nivel de energía mínima? *b*) Repita el inciso *a*) para el nivel fundamental del He^+. Compárelo con la respuesta en el inciso *a*).

38.23. Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado con -1.51 eV de energía. En el modelo de Bohr, ¿cuál es la cantidad de movimiento angular del electrón en el átomo, con respecto a un eje en el núcleo?

38.24. Un átomo de hidrógeno está inicialmente en el nivel fundamental; absorbe un fotón y se excita al nivel $n = 4$. Determine la longitud de onda y la frecuencia del fotón.

38.25. Un átomo de berilio triplemente ionizado, Be^{3+} (un átomo de berilio al que se le quitan tres electrones), se comporta en forma muy parecida al átomo de hidrógeno, pero la carga nuclear es cuatro veces mayor. *a*) ¿Cuál es la energía de nivel fundamental del Be^{3+}? ¿Cómo se compara con la energía del nivel fundamental del átomo de hidrógeno? *b*) ¿Cuál es la energía de ionización del Be^{3+}? ¿Cómo se compara con la energía de ionización del átomo de hidrógeno? *c*) Para el átomo de hidrógeno, la longitud de onda del fotón emitido en la transición de $n = 2$ a $n = 1$ es 122 nm (véase el ejemplo 38.6). ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido, cuando un ion Be^{3+} sufre esta transición? *d*) Para un valor dado de n ¿cómo se compara el radio de una órbita del Be^{3+} con el correspondiente del hidrógeno?

38.26. Un átomo de hidrógeno sufre una transición del estado $n = 5$ al estado $n = 2$. *a*) ¿Cuáles son la energía y la longitud de onda del fotón que se emite? *b*) Si se conserva la cantidad de movimiento angular, y si se usa el modelo de Bohr para describir el átomo, ¿cuál debe ser el momento angular del fotón que se emite? (Como veremos en el capítulo 41, la descripción mecánico-cuántica moderna del átomo de hidrógeno lleva a un resultado diferente.)

38.27. *a*) Use el modelo de Bohr y calcule la rapidez del electrón en un átomo de hidrógeno que se encuentra en los niveles de energía $n = 1, 2$ y 3. *b*) Calcule el periodo orbital en cada uno de esos niveles. *c*) La vida promedio del primer nivel excitado de un átomo de hidrógeno es 1.0×10^{-8} s. En el modelo de Bohr, ¿cuántas órbitas describe un electrón en el nivel $n = 2$, antes de regresar al nivel fundamental?

38.28. *a*) Demuestre que, conforme n se vuelve muy grande, los niveles de energía del átomo de hidrógeno se acercan cada vez más en energía. *b*) ¿Los radios de estos niveles de energía también se acercan?

Sección 38.6 El láser

38.29. ¿Cuántos fotones por segundo emite un láser de CO_2 de 7.50 mW, cuya longitud de onda es 10.6 μm?

38.30. Cirugía PRK. La queratectomía fotorrefractiva (PRK) es un procedimiento quirúrgico basado en láser que corrige la miopía y la hipermetropía eliminando parte del cristalino del ojo para modificar su curvatura y, por lo tanto, su distancia focal. Este procedimiento puede remover capas de 0.25 μm de grosor mediante impulsos de 12.0 ns de duración de un haz láser con longitud de onda de 193 nm. Se pueden usar haces de baja intensidad porque cada fotón individual tiene suficiente energía para romper los enlaces covalentes del tejido. *a*) ¿En qué parte del espectro electromagnético se ubica esta luz? *b*) ¿Cuál es la energía de un solo fotón? *c*) Si se emplea un haz de 1.50 mW, ¿cuántos fotones llegan al cristalino en cada impulso?

38.31. Una gran cantidad de átomos de neón están en equilibrio térmico. ¿Cuál es la relación de la cantidad de átomos en un estado 5*s* con los que hay en un estado 3*p* *a*) a 300 K, *b*) a 600 K, *c*) a 1200 K? Las energías de esos estados se muestran en la figura 38.24a. *d*) En cualquiera de esas temperaturas, la rapidez con la que el neón gaseoso emite una radiación de 632.8 nm en forma espontánea es bastante pequeña. Explique por qué.

38.32. La figura 38.10 muestra los niveles de energía del átomo de sodio. Los dos niveles excitados más bajos aparecen en las columnas identificadas por $^2P_{3/2}$ y $^2P_{1/2}$. Calcule la razón entre la cantidad de átomos en estado $^2P_{3/2}$ y la cantidad en estado $^2P_{1/2}$ para sodio gaseoso en equilibrio térmico a 500 K. ¿En cuál estado hay más átomos?

Sección 38.7 Producción y dispersión de rayos x

38.33. Una diferencia de potencial de 4.00 kV acelera a unos protones, desde el reposo, y éstos chocan con un objetivo metálico. Si un protón produce un fotón en el impacto, ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos x que resultan? ¿Cómo se compara su respuesta con la longitud de onda mínima si se emplean electrones de 4.00 keV? ¿Por qué los tubos de rayos x usan electrones y no protones para producir los rayos x?

38.34. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial mínima entre el filamento y el blanco de un tubo de rayos x, si se deben producir rayos x de 0.150 nm de longitud de onda? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda mínima que se produce en un tubo de rayos x que funciona a 30.0 kV?

38.35. Rayos x en las pantallas de televisión. Los voltajes de aceleración en un cinescopio (un tubo de rayos catódicos, CRT) de televisión son aproximadamente de 25.0 kV. ¿Cuáles son *a*) la máxima frecuencia y *b*) la mínima longitud de onda (en nm) de los rayos x que produce una pantalla de televisión de este tipo? *c*) ¿Qué suposiciones necesitó hacer? (Los cinescopios de televisión contienen blindaje para absorber estos rayos x.)

38.36. Se producen rayos x en un tubo que trabaja a 18.0 kV. Después de salir del tubo, los rayos x con la longitud de onda mínima producida llegan a un blanco y se dispersan por efecto Compton en un ángulo de 45.0°. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda del rayo x original? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos x dispersados? *c*) ¿Cuál es la energía de los rayos x dispersados (en electrón volts)?

38.37. Unos rayos x con longitud de onda inicial de 0.0665 nm sufren dispersión de Compton. ¿Cuál es la máxima longitud de onda que se encuentra en los rayos x dispersados? ¿A qué ángulo de dispersión se observa esa longitud de onda?

38.38. Un haz de rayos x de 0.0500 nm de longitud de onda tiene dispersión de Compton por los electrones de una muestra. ¿A qué ángulo, con respecto al haz incidente, hay que buscar para encontrar rayos x con longitud de onda de *a*) 0.0542 nm, *b*) 0.0521 nm y *c*) 0.0500 nm?

38.39. Si un fotón con longitud de onda de 0.04250 nm choca con un electrón libre y se dispersa a un ángulo de 35.0° con respecto a su dirección original, calcule *a*) el cambio en la longitud de onda de este fotón; *b*) la longitud de onda de la luz dispersada; *c*) el cambio en la energía del fotón (¿se trata de una pérdida o de una ganancia?); *d*) la energía ganada por el electrón.

38.40. Un fotón se dispersa hacia atrás ($\theta = 180°$) desde un protón libre, que inicialmente está en reposo. ¿Cuál debe ser la longitud de onda del fotón incidente para sufrir un cambio de longitud de onda del 10.0%, como resultado de la dispersión?

38.41. Complete la deducción de la fórmula de dispersión de Compton, ecuación (38.23), de acuerdo con el desarrollo de las ecuaciones (38.24) a (38.27).

Sección 38.8 Espectros continuos

38.42. Determine λ_m, la longitud de onda del máximo de la distribución de Planck, y la frecuencia f correspondiente, a las siguientes temperaturas Kelvin: *a*) 3.00 K, *b*) 300 K y *c*) 3000 K.

38.43. Una bombilla eléctrica incandescente de 100 W tiene un filamento cilíndrico de tungsteno de 30.0 cm de longitud, 0.40 mm de diámetro, y su emisividad es 0.26. a) ¿Cuál es la temperatura del filamento? *b*) ¿Para qué longitud de onda es máxima la emitancia espectral de la bombilla? Las bombillas incandescentes no son fuentes eficientes de luz visible. Explique por qué.

38.44. La longitud de onda visible más corta es 400 nm, aproximadamente. ¿Cuál es la temperatura de un radiador ideal, cuya emitancia espectral es máxima en esa longitud de onda?

38.45. Se ha detectado radiación procedente del espacio, que es característica de un radiador ideal a $T = 2.728$ K. (Esta radiación es una reliquia del *Big Bang* del principio del Universo.) Para esa temperatura, ¿en qué longitud de onda es máxima la distribución de Planck? ¿En qué parte del espectro electromagnético está esa longitud de onda?

38.46. Dos estrellas, que se comportan como cuerpos negros ideales, irradian la misma energía total por segundo. La más fría tiene una temperatura T en su superficie y un diámetro que es 3.0 veces el diámetro de la estrella más caliente. *a*) ¿Cuál es la temperatura de la estrella más caliente en términos de T? *b*) ¿Cuál es la razón entre la longitud de onda de máxima intensidad de la estrella caliente y la longitud de onda de máxima intensidad de la estrella fría?

38.47. *a*) Demuestre que el máximo de la distribución de Planck, ecuación (38.32), se presenta a una longitud de onda λ_m, definida por $\lambda_m = hc/4.965kT$ (ecuación 38.33). Como explicamos en el libro, 4.965 es la raíz de la ecuación (38.34). *b*) Evalúe las constantes en la ecuación deducida en el inciso *a*), para demostrar que $\lambda_m T$ tiene el valor numérico que aparece en la ley de desplazamiento de Wien, ecuación (38.30).

38.48. Sirio B. La estrella más brillante en el firmamento es Sirio. En realidad es un sistema binario, es decir, está constituido por dos estrellas, la menor de las cuales (Sirio B) es una enana blanca. El análisis espectral de Sirio B indica que la temperatura en su superficie es de 24,000 K y que irradia energía a razón de 1.0×10^{25} W. Suponga que se comporta como un cuerpo negro ideal. *a*) ¿Cuál es la intensidad total irradiada por Sirio B? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de máxima intensidad? ¿Es visible esta longitud de onda para los humanos? *c*) ¿Cuál es el radio de Sirio B? Exprese su respuesta en kilómetros y como una fracción del radio del Sol. *d*) ¿Cuál estrella irradia más energía *total* por segundo, la caliente Sirio B o el (relativamente) frío Sol que tiene una temperatura en la superficie de 5800 K? Para descubrirlo, calcule la razón entre la potencia total que irradia el Sol y la potencia que irradia Sirio B.

38.49. Demuestre que para grandes valores de λ, la distribución de Planck, ecuación (38.32), concuerda con la distribución de Rayleigh, ecuación (38.31).

38.50. Supergigantes azules. Una estrella "supergigante azul" (como las que explotan dejando agujeros negros) tiene una temperatura de

30,000 K en la superficie, y una luminosidad visual 100,000 veces mayor que la de nuestro Sol. Nuestro Sol irradia a una razón de 3.86×10^{26} W. (La luminosidad visual es la potencia total irradiada a las longitudes de onda visibles.) *a*) Suponiendo que esta estrella se comporta como un cuerpo negro ideal, ¿cuál es la longitud de onda principal que irradia? ¿Es visible esa luz? Use su respuesta para explicar por qué son azules esas estrellas. *b*) Si suponemos que la potencia irradiada por la estrella también es 100,000 veces mayor que la de nuestro Sol, ¿cuál es el radio de esa estrella? Compare este tamaño con el de nuestro Sol, cuyo radio es de 6.96×10^5 km. *c*) ¿Es correcto decir que la luminosidad visual es proporcional a la potencia total irradiada? Explique su respuesta.

Problemas

38.51. Exposición de película fotográfica. El compuesto fotosensible de la mayor parte de las películas fotográficas es bromuro de plata, AgBr. Una película se "expone" cuando la energía luminosa absorbida disocia esta molécula en sus átomos. (El proceso real es más complejo, pero el resultado cuantitativo no es muy diferente.) La energía de disociación del AgBr es 1.00×10^5 J/mol. Para un fotón que apenas puede disociar una molécula de bromuro de plata, calcule *a*) la energía del fotón, en electrón volts. *b*) la longitud de onda del fotón y *c*) la frecuencia del fotón. *d*) ¿Cuál es la energía, en electrón volts, de un fotón con una frecuencia de 100 MHz? *e*) La luz de una luciérnaga puede exponer la película fotográfica, pero la radiación de una estación de FM que transmite 50,000 W a 100 MHz no. Explique por qué.

38.52. Un átomo de masa m emite un fotón de longitud de onda λ. *a*) ¿Cuál es la rapidez de retroceso del átomo? *b*) ¿Cuál es la energía cinética K del átomo en retroceso? *c*) Calcule la relación K/E, donde E es la energía del fotón emitido. Si esta relación es mucho menor que la unidad, se puede despreciar el retroceso del átomo en el proceso de emisión. ¿El retroceso del átomo es más importante para masas atómicas pequeñas o grandes? ¿Y para longitudes de onda largas o cortas? *d*) Calcule K (en electrón volts) y K/E para un átomo de hidrógeno (masa 1.67×10^{-27}kg) que emite un fotón ultravioleta de 10.2 eV de energía. En este proceso de emisión, ¿es el retroceso una consideración importante?

38.53. Cuando cierta superficie fotoeléctrica se ilumina con luz de distintas longitudes de onda, se observan los siguientes potenciales de frenado:

Longitud de onda (nm)	Potencial de frenado (V)
366	1.48
405	1.15
436	0.93
492	0.62
546	0.36
579	0.24

Elabore una gráfica del potencial de frenado en el eje vertical y la frecuencia luminosa en el eje horizontal. Determine *a*) la frecuencia de umbral, *b*) la longitud de onda umbral, *c*) la función de trabajo fotoeléctrico del material (en electrón volts), y *d*) el valor de la constante de Planck h (suponiendo que se conoce el valor de e).

38.54. *a*) Si la frecuencia media emitida por una bombilla eléctrica de 200 W es 5.00×10^{14} Hz, y el 10.0% de la potencia se emite como luz visible, aproximadamente, ¿cuántos fotones de luz visible se emiten por segundo? *b*) ¿A qué distancia correspondería esa cantidad a 1.00×10^{11} fotones de luz visible por centímetro cuadrado por segundo, si la luz se emite uniformemente en todas direcciones?

38.55. *a*) La longitud de onda de la luz que incide sobre una superficie metálica se reduce de λ_1 a λ_2. (Tanto λ_1 como λ_2 son menores que la longitud de onda umbral de la superficie.) Cuando la longitud de onda se reduce de esta forma, ¿cuál es el cambio en el potencial de frenado para fotoelectrones emitidos desde la superficie? *b*) Evalúe el cambio de potencial de frenado para $\lambda_1 = 295$ nm y $\lambda_2 = 265$ nm.

38.56. Un haz de luz de 2.50 W y con longitud de onda de 124 nm incide sobre una superficie de metal. Usted observa que la energía cinética máxima de los electrones expulsados es de 4.16 eV. Suponga que cada fotón en el haz expulsa un fotoelectrón. *a*) ¿Cuál es la función trabajo (en electrón volts) de este metal? *b*) ¿Cuántos fotoelectrones son expulsados cada segundo de este metal? *c*) Si la potencia del haz de luz, pero no su longitud de onda, se redujera a la mitad, ¿cuál sería la respuesta al inciso *b*)? *d*) Si la longitud de onda del haz, pero no su potencia, se redujera a la mitad, ¿cuál sería la respuesta al inciso *b*)?

38.57. Eliminación de lesiones vasculares. Un láser de colorante pulsado emite luz con longitud de onda de 585 nm en impulsos de 450 μs. Como esta longitud de onda es fuertemente absorbida por la hemoglobina de la sangre, el método es especialmente efectivo para eliminar diversos tipos de manchas provocadas por la sangre, como las manchas rojas de nacimiento. Para hacer una estimación razonable de la potencia que se requiere para esa cirugía con láser, podemos modelar la sangre con el mismo calor específico y el mismo calor de evaporación que el agua $(4190\ \text{J/kg} \cdot \text{K}, 2.256 \times 10^6\ \text{J/kg})$. Suponga que cada impulso debe eliminar 2.0 μg de sangre mediante evaporación, comenzando a 33 °C. *a*) ¿Cuánta energía debe entregar cada impulso a la mancha? *b*) ¿Cuál debe ser la potencia de salida de este láser? *c*) ¿Cuántos fotones debe entregar cada impulso a la mancha?

38.58. Las funciones de trabajo fotoeléctrico para muestras particulares de ciertos metales son las siguientes: cesio, 2.1 eV; cobre, 4.7 eV; potasio, 2.3 eV; y cinc, 4.3 eV. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda umbral para cada superficie metálica? *b*) ¿Cuál de estos metales *no* podría emitir fotoelectrones al irradiarse con luz visible (de 400 a 700 nm)?

38.59. El muón negativo tiene una carga igual a la de un electrón, pero su masa es 207 veces mayor. Un átomo hidrogenoide consiste en un protón y un muón. *a*) ¿Cuál es la masa reducida del átomo? *b*) ¿Cuál es la energía de nivel fundamental (en electrón volts)? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida en la transición del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$?

38.60. Un fotón incidente de rayos x se dispersa al chocar con un electrón libre que está inicialmente en reposo. El fotón se dispersa directo hacia atrás, en un ángulo de 180° con respecto a su dirección inicial. La longitud de onda del fotón dispersado es 0.0830 nm. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón incidente? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento del electrón después del choque? *c*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después del choque?

38.61. Un fotón incidente de rayos x, de 0.0900 nm de longitud de onda, se dispersa hacia atrás al chocar con un electrón libre que inicialmente está en reposo. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento del fotón dispersado? *b*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón, después de haber dispersado al fotón?

38.62. Órbitas de Bohr de un satélite. Un satélite de 20.0 kg circunda a la Tierra cada 2.00 h en una órbita de 8060 km de radio. *a*) Suponiendo que se aplica el resultado de Bohr de la cantidad de movimiento angular ($L = nh/2\pi$) a satélites igual que a un electrón en el átomo de hidrógeno, calcule el número cuántico n de la órbita del satélite. *b*) Demuestre, a partir del resultado de Bohr para la cantidad de movimiento angular y la ley de Newton de la gravitación, que el radio de una órbita de satélite terrestre es directamente proporcional al cuadrado del número cuántico, $r = kn^2$, donde k es la constante de proporcionalidad. *c*) Con el resultado del inciso *b*), determine la distancia entre la órbita del satélite en este problema y su siguiente órbita "permitida". (Calcule un valor numérico.) *d*) Comente la posibilidad de observar la separación de dos órbitas adyacentes. *e*) Las órbitas cuantizadas y clásicas, ¿corresponden a este satélite? ¿Cuál es el método "correcto" para calcular las órbitas?

38.63. *a*) ¿Cuál es la cantidad mínima de energía, en electrón volts, que se debe transmitir a un átomo de hidrógeno que al principio está en su nivel fundamental, para que pueda emitir la línea H_α de la serie de Balmer? *b*) ¿Cuántas posibilidades distintas de emisiones de líneas espectrales hay para este átomo cuando el electrón comienza en el nivel $n = 3$ y termina en el nivel fundamental? Calcule la longitud de onda del fotón emitido, en cada caso.

38.64. Una gran cantidad de átomos de hidrógeno está en equilibrio térmico. Sea n_2/n_1 la razón entre la cantidad de átomos en un estado excitado $n = 2$ y la cantidad de átomos en el estado fundamental $n = 1$. ¿A qué temperatura n_2/n_1 es igual a *a*) 10^{-12}; *b*) 10^{-8}; *c*) 10^{-4}? *d*) Como el Sol, otras estrellas tienen espectros continuos con líneas de absorción oscuras (véase la figura 38.12). La absorción se lleva a cabo en la atmósfera de la estrella; en todas las estrellas esa atmósfera está formada principalmente por hidrógeno. Explique por qué en las estrellas con bajas temperaturas atmosféricas, como el Sol (temperatura de atmósfera = 5800 K), las líneas de absorción de Balmer son relativamente débiles, pero son intensas en estrellas con mayores temperaturas atmosféricas.

38.65. Una muestra de átomos de hidrógeno se irradia con luz de 85.5 nm de longitud de onda, y se observan electrones que salen del gas. *a*) Si cada átomo de hidrógeno estuviera inicialmente en su nivel fundamental, ¿cuál sería la energía cinética máxima, en electrón volts, de esos fotoelectrones? *b*) Se detectan unos cuantos electrones con energías hasta de 10.2 eV mayores que la energía cinética máxima calculada en el inciso *b*). ¿Cómo puede suceder eso?

38.66. Se analiza luz procedente de un cuerpo negro esférico ideal, de 15.0 cm de diámetro, mediante una rejilla de difracción de 3850 líneas/cm. Cuando se hace pasar la luz a través de la rejilla, se observa que la longitud de onda de máxima intensidad forma una franja brillante de primer orden a $\pm 11.6°$ con respecto a la franja brillante central. *a*) ¿Cuál es la temperatura del cuerpo negro? *b*) ¿Cuánto tardará esta esfera en irradiar 12.0 MJ de energía?

38.67. La gigante roja Betelgeuse. La gigante roja Betelgeuse tiene una temperatura de 3000 K en su superficie y 600 veces el diámetro de nuestro Sol. (Si nuestro Sol tuviera esas dimensiones, ¡estaríamos dentro de él!) Suponga que Betelgeuse irradia como un cuerpo negro ideal. *a*) Si Betelgeuse irradiara toda esta energía en la longitud de onda de máxima intensidad, ¿cuántos fotones por segundo irradiaría? *b*) Determine la razón entre la potencia que irradia Betelgeuse y la potencia que irradia nuestro Sol (a 5800 K).

38.68. Un cuerpo negro esférico ideal de 24.0 cm de diámetro se mantiene a 225 °C mediante un calentador eléctrico interno y se sumerge en un tanque de agua muy grande, abierto por su cara superior; el agua se mantiene en ebullición mediante la energía irradiada por la esfera. Desprecie cualquier calor transferido por conducción y convección. Consulte la tabla 17.4 si es necesario. *a*) ¿A qué tasa, en g/s, se evapora el agua del tanque? *b*) Si un organismo termófilo conocedor de física que habita en el agua caliente observara este proceso, ¿cuál sería su medición de i) la longitud de onda de máxima intensidad y ii) la frecuencia de máxima intensidad de las ondas electromagnéticas emitidas por la esfera?

38.69. ¿Cuál debe ser la temperatura de un cuerpo negro ideal de manera que los fotones de la luz que irradia con la longitud de onda de máxima intensidad puedan excitar el electrón en el átomo de hidrógeno del modelo de Bohr de su estado fundamental al tercer estado de excitación?

38.70. Un tubo de rayos x funciona con un voltaje V y una corriente I. *a*) Si sólo la fracción p de la potencia eléctrica suministrada se convierte en rayos x, ¿con qué rapidez se transmite energía al blanco? *b*) Si el blanco tiene una masa m y capacidad calorífica específica c (en $J/kg \cdot K$), ¿con qué rapidez media aumentaría su temperatura si no hubiera pérdidas de calor? *c*) Evalúe los resultados de los incisos *a*) y *b*) para un tubo de rayos x que funciona a 18.0 kV y 60.0 mA, y convierte el 1.0% de la potencia eléctrica en rayos x. Suponga que el blanco de 0.250 kg es de plomo $(c = 130\ J/kg \cdot K)$. *d*) ¿Cuáles deben ser las propiedades físicas del material de un blanco en la práctica? ¿Cuáles serían algunos elementos adecuados para constituir el blanco?

38.71. Cuando un átomo emite un fotón, el átomo debe retroceder para conservar la cantidad de movimiento. Eso quiere decir que el fotón y el átomo que retrocede comparten la energía de transición. *a*) Calcule, para un átomo con masa m, la corrección $\Delta\lambda$ debida al retroceso de la longitud de onda de un fotón emitido. Sea λ la longitud de onda del fotón si no se tiene en cuenta el retroceso. (*Sugerencia:* la corrección es muy pequeña, como sugiere el problema 38.52, por lo que $|\Delta\lambda|/\lambda \ll 1$. Use esto para obtener una ecuación aproximada (si bien bastante exacta) de $\Delta\lambda$.) *b*) Evalúe la corrección para un átomo de hidrógeno en el que un electrón en el nivel n regresa al nivel fundamental. ¿Cómo depende el resultado de n?

38.72. *a*) Deduzca una ecuación para el desplazamiento total de longitud de onda de un fotón después de dos dispersiones de Compton sucesivas, con electrones en reposo. El fotón es dispersado un ángulo θ_1 en la primera dispersión y en θ_2 en la segunda. *b*) En general, ¿el desplazamiento total de longitud de onda producido por dos dispersiones sucesivas en ángulo $\theta/2$ es igual que para una sola dispersión en ángulo θ? Si no lo es, ¿hay valores específicos de θ distintos de $\theta = 0°$, para los que los desplazamientos totales son iguales? *c*) Utilice el resultado del inciso *a*) para calcular el desplazamiento total de longitud de onda producido por dos dispersiones sucesivas de Compton, de 30.0° cada una. Exprese su respuesta en función de h/mc. *d*) ¿Cuál es el desplazamiento de longitud de onda producido por una sola dispersión de Compton de 60.0°? Compárelo con la respuesta en el inciso *c*).

38.73. Las reacciones de fusión nuclear en el centro del Sol producen fotones de rayos gamma con energías del orden de 1 MeV (10^6 eV). En contraste, lo que vemos salir de la superficie del Sol son fotones de luz visible, con longitudes de onda del orden de 500 nm. Un modelo sencillo que explica esta diferencia de longitudes de onda es que un fotón sufre dispersión de Compton muchas veces, de hecho, más o menos 10^{26} veces —como sugieren los modelos del interior solar— al pasar del centro a la superficie del Sol. *a*) Estime el aumento de longitud de onda de un fotón en un suceso promedio de dispersión de Compton. *b*) Calcule el ángulo, en grados, en el que se dispersa el fotón en el suceso descrito en el inciso *a*). (*Sugerencia:* una aproximación útil es $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, válido para $\phi \ll 1$. Observe que en estas expresiones, ϕ está en radianes.) *c*) Se estima que un fotón tarda aproximadamente 10^6 años en viajar desde el interior hasta la superficie del Sol. Calcule la distancia media que puede recorrer la luz en el interior del Sol, sin ser dispersada. (Esta distancia equivale más o menos a la distancia a la que podría usted ver si estuviera dentro del Sol, y si pudiera sobrevivir a las temperaturas extremas que hay allí. Como indica su respuesta, el interior del Sol es *muy* opaco.)

38.74. Un fotón de rayos x es dispersado por un electrón libre (masa m) en reposo. La longitud de onda del fotón dispersado es λ', y la rapidez final del electrón golpeado es v. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda λ inicial del fotón? Exprese su respuesta en función de λ', v y m. (*Sugerencia:* use la ecuación relativista de la energía cinética del electrón). *b*) ¿En qué ángulo ϕ se dispersó el fotón? Exprese su respuesta en función de λ, λ' y m. *c*) Evalúe sus resultados de los incisos *a*) y *b*) para una longitud de onda de 5.10×10^{-3} nm para el fotón dispersado, y una rapidez final del electrón de 1.80×10^8 m/s. Exprese ϕ en grados.

38.75. Un fotón con longitud de onda de 0.1100 nm choca con un electrón libre que inicialmente está en reposo. Después del choque, su longitud de onda es de 0.1132 nm. *a*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después del choque? ¿Cuál es su rapidez? *b*) Si de repente se frena el electrón (por ejemplo, en un blanco sólido), se usa toda su energía cinética en la creación de un fotón. ¿Cuál es la longitud de onda de ese fotón?

38.76. *a*) Calcule el aumento máximo en la longitud de onda de un fotón que puede ocurrir en una dispersión de Compton. *b*) ¿Cuál es la energía, en electrón volts, del fotón de rayos x de energía mínima para el cual la dispersión de Compton podría causar que la longitud de onda original aumentara al doble?

38.77. *a*) Escriba la ley de distribución de Planck en función de la frecuencia *f,* y no de la longitud de onda λ, para obtener $I(f)$. *b*) Demuestre que

$$\int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} T^4$$

donde $I(\lambda)$ es la fórmula de distribución de Planck, de la ecuación (38.32). (*Sugerencia:* cambie la variable de integración de λ a *f*.) Necesitará usar la siguiente integral, ya tabulada:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^{\alpha x} - 1}\, dx = \frac{1}{240}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4$$

c) El resultado de *b*) es *I* y tiene la forma de la ley de Stefan-Boltzmann, $I = \sigma T^4$ (ecuación 38.28). Evalúe las constantes en *b*) para demostrar que σ tiene el valor que se menciona en la sección 38.8.

38.78. Un cuerpo negro ideal. Una cavidad grande con un agujero muy pequeño, mantenida a una temperatura *T*, es una buena aproximación a un radiador o cuerpo negro ideal. La radiación puede entrar o salir de la cavidad sólo a través del orificio. La cavidad es un absorbedor perfecto, porque cualquier radiación que incida en el agujero queda atrapada dentro de la cavidad. Una de esas cavidades está a 200 °C y tiene un agujero de 4.00 mm^2 de área. ¿Cuánto tiempo tarda la cavidad en irradiar 100 J de energía a través del agujero?

Problemas de desafío

38.79. *a*) Demuestre que en el modelo de Bohr, la frecuencia de revolución de un electrón en su órbita circular en torno a un núcleo estacionario de hidrógeno es $f = me^4/4\epsilon_0^2 n^3 h^3$. *b*) En física clásica, la frecuencia de revolución del electrón es igual a la frecuencia de la radiación que emite. Demuestre que cuando *n* es muy grande, la frecuencia de revolución sí es igual a la frecuencia irradiada, calculada con la ecuación (38.6), en una transición de $n_1 = n + 1$ a $n_2 = n$. (Esto ilustra el *principio de correspondencia* de Bohr, que se usa con frecuencia para comprobar cálculos cuánticos. Cuando *n* es pequeña, la física cuántica da resultados muy distintos a los de la física clásica. Cuando *n* es grande, los resultados no son importantes y los dos métodos "se corresponden". De hecho, cuando Bohr se ocupó por primera vez del problema del átomo de hidrógeno, trató de determinar *f* en función de *n,* de tal manera que correspondiera a los resultados clásicos con *n* grande.)

38.80. Un haz de luz monocromática de intensidad *I* incide en una superficie perfectamente absorbente perpendicular a él. Aplique el concepto de fotón para demostrar que la presión de radiación que ejerce la luz sobre la superficie es I/c.

38.81. Un fotón sufre una dispersión de Compton por un electrón *en movimiento.* Antes del choque, el fotón tiene una longitud de onda λ y se mueve en la dirección $+x$, y el electrón se mueve en dirección $-x$ con energía total *E* (incluyendo su energía mc^2 en reposo). El fotón y el electrón chocan de frente. Después del choque, ambos se mueven en dirección $-x$ (esto es, el fotón se dispersó 180°). *a*) Deduzca una ecuación de la longitud de onda λ' del fotón dispersado. Demuestre que si $E \gg mc^2$, donde *m* es la masa en reposo del electrón, el resultado se reduce a

$$\lambda' = \frac{hc}{E}\left(1 + \frac{m^2c^4\lambda}{4hcE}\right)$$

b) Un haz de radiación infrarroja de un láser de CO_2 ($\lambda = 10.6\ \mu m$) choca de frente con un haz de electrones, cada uno con una energía total $E = 10.0$ GeV (1 GeV = 10^9 eV). Calcule la longitud de onda λ' de los fotones dispersados, suponiendo que el ángulo de dispersión es de 180°. *c*) ¿Qué clase de fotones dispersados son éstos (infrarrojos, microondas, ultravioletas, etcétera)? ¿Puede imaginar una aplicación para este efecto?

39

LA NATURALEZA ONDULATORIA DE LAS PARTÍCULAS

? Esta imagen de una mosca de murciélago (*Streblidae*) fue obtenida con un haz de electrones, en vez de un haz de luz. ¿Qué propiedades de los electrones hacen que sean útiles para obtener imágenes con tanto detalle?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La propuesta de De Broglie de que los protones, los electrones y otras partículas se comportan como ondas.
- Cómo el experimento de difracción de electrones ofrece evidencia acerca de las ideas de De Broglie.
- Cómo el principio de la incertidumbre de Heisenberg impone limitaciones fundamentales sobre lo que puede medirse.
- Cómo los microscopios electrónicos pueden ofrecer mucho mayor aumento que los microscopios de luz visible.
- Sobre las funciones ondulatorias que describen el comportamiento de las partículas y la ecuación de Schrödinger que tales funciones deben satisfacer.

En los capítulos anteriores hemos visto un aspecto de la dualidad onda-partícula en la naturaleza: la luz y otras radiaciones electromagnéticas se comportan a veces como ondas, y a veces como partículas. La interferencia y la difracción demuestran el comportamiento ondulatorio, mientras que la emisión y absorción de fotones demuestran el comportamiento como partículas.

Una teoría completa también debería *predecir*, con bases teóricas, los niveles de energía de determinado átomo. En 1913 el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno fue un paso en tal dirección. Pero en él se combinaban principios clásicos con ideas nuevas que eran inconsistentes con la teoría clásica, lo cual originó tantas preguntas como las que contestó. Se necesitaban desviaciones más drásticas respecto de los conceptos clásicos.

Una buena desviación drástica es la *mecánica cuántica*, una teoría que comenzó a formarse en la década de 1920. Además de las ondas que a veces funcionan como partículas, la mecánica cuántica amplía el concepto de dualidad onda-partícula e incluye las partículas que a veces tienen comportamiento *ondulatorio.* En estos casos, se modela una partícula como una entidad repartida, en forma inherente, que no se puede describir como un punto con una posición y una velocidad perfectamente definidas.

En este capítulo exploraremos la naturaleza ondulatoria de la materia, y algunas de sus aplicaciones. También presentaremos la *ecuación de Schrödinger*, tan fundamental para la mecánica cuántica como las leyes de Newton para la mecánica, o las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo. En el capítulo 40 veremos cómo usar esta ecuación para determinar los niveles posibles de energía de un sistema mecánico cuántico.

La mecánica cuántica es la clave para comprender los átomos y las moléculas, con su estructura de espectros, comportamiento químico y muchas otras propiedades. Tiene el feliz efecto de restaurar la unidad y la simetría a la descripción tanto de partículas como de la radiación. Aprenderemos algo de mecánica cuántica y usaremos sus resultados en lo que resta de este libro.

39.1 Ondas de De Broglie

Un gran avance en la comprensión de la estructura atómica se inició en 1924, con una proposición por parte del príncipe Louis De Broglie, un físico y noble francés. Su razonamiento, interpretado libremente, fue algo como esto: la naturaleza ama la simetría. La luz tiene naturaleza dual, y en algunos casos se comporta como ondas y en otros como partículas. Si la naturaleza es simétrica, esa dualidad también debería ser válida para la materia. Los electrones y los protones, que nosotros solemos imaginar como *partículas*, en algunos casos se pueden comportar como *ondas*.

Si una partícula actúa como una onda, debería tener una longitud de onda y una frecuencia. De Broglie (figura 39.1) postuló que una partícula libre con masa en reposo m, que se mueva a rapidez v no relativista, debería tener una longitud de onda λ relacionada con su cantidad de movimiento $p = mv$ exactamente en la misma forma que un fotón, como expresa la ecuación (38.5): $\lambda = h/p$. Entonces, la **longitud de onda de De Broglie** para una partícula es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad \text{(longitud de onda de De Broglie para una partícula)} \qquad (39.1)$$

donde h es la constante de Planck. Si la rapidez de la partícula es una fracción apreciable de la rapidez de la luz c, se usa la ecuación (37.27) para remplazar mv en la ecuación (39.1) con $\gamma mv = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Según De Broglie, la frecuencia f también se relaciona con la energía de la partícula E en la misma forma que para un fotón, es decir,

$$E = hf \qquad (39.2)$$

Así, las relaciones entre longitud de onda y cantidad de movimiento, o frecuencia y energía, en la hipótesis de De Broglie, son exactamente las mismas para partículas que para fotones.

39.1 Louis-Victor De Broglie, séptimo duque de De Broglie (1892-1987), rompió con la tradición familiar al seguir una carrera en física, y no en la diplomacia. Su propuesta revolucionaria de que las partículas tienen características ondulatorias, por la que ganó el Premio Nobel de Física en 1929, fue publicada en su tesis doctoral.

CUIDADO **No todas las ecuaciones de fotones se aplican a partículas con masa** Se debe aplicar con cuidado la relación $E = hf$ a partículas con masa en reposo distinta de cero, como electrones y protones. A diferencia de un fotón, *no* viajan a la rapidez c, ¡por lo que ni la ecuación $f = c/\lambda$ ni $E = pc$ se aplican a ellas!

Para apreciar la enorme importancia de la proposición de De Broglie, debemos tener en cuenta que en esos tiempos no había prueba experimental directa de que las partículas tuvieran características ondulatorias. Una cuestión es sugerir una nueva hipótesis para explicar observaciones experimentales, y otra cosa muy distinta proponer un alejamiento tan radical de los conceptos establecidos sólo con bases teóricas. Sin embargo, era claro que se necesitaba una idea radical. La naturaleza dual de la radiación electromagnética había conducido a la adopción del concepto del fotón: también una idea radical. El éxito limitado en la comprensión de la estructura atómica indicaba que se necesitaba una revolución semejante en la mecánica de partículas.

La hipótesis de De Broglie fue el comienzo de esa revolución. En pocos años después de 1924 fue desarrollada por Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born y muchos otros para formar una teoría detallada llamada **mecánica cuántica**. Este desarrollo ya estaba muy adelantado antes de que se encontrara una prueba experimental directa de las propiedades ondulatorias de las partículas.

La mecánica cuántica implica revisiones totales de nuestros conceptos fundamentales de la descripción de la materia. Una partícula no es un punto geométrico, sino una entidad repartida en el espacio. La distribución espacial de una partícula se define con una función llamada **función de onda**, análoga a las funciones de onda que usamos para las ondas mecánicas en el capítulo 15 y para las ondas electromagnéticas en el capítulo 32. La función de onda de una partícula *libre* con energía definida tiene un patrón de onda recurrente con una longitud de onda y frecuencia definida. Los aspectos de onda y partícula no son inconsistentes; el *principio de complementariedad* que describimos en la sección 38.9 nos indica que necesitamos tanto el modelo de partícula como el modelo de onda, para tener una descripción completa de la naturaleza.

El modelo de Bohr y las ondas de De Broglie

En el modelo de Bohr representamos los niveles de energía del átomo de hidrógeno en función de órbitas electrónicas definidas, como se observa en la figura 38.9. Esto es una simplificación excesiva, y no se debería tomar al pie de la letra. Sin embargo, la idea más importante en la teoría de Bohr fue la existencia de niveles discretos de energía, y su relación con las frecuencias de los fotones emitidos. La nueva mecánica cuántica sigue asignando sólo ciertos estados permitidos de energía a un átomo, pero con una descripción más general del movimiento del electrón en términos de funciones de onda. En el átomo de hidrógeno, los niveles de energía que predice la mecánica cuántica son los mismos que los que indica la teoría de Bohr. En átomos más complicados, para los que no funciona la teoría de Bohr, la representación mecánico-cuántica está en excelente concordancia con las observaciones.

La hipótesis ondulatoria de De Broglie tiene una relación interesante con el modelo de Bohr. Se puede usar la ecuación (39.1) para obtener la condición cuántica de Bohr de que la cantidad de movimiento angular $L = mvr$ debe ser un múltiplo entero de la constante de Planck h. El método es similar a la determinación de las frecuencias de modo normal, de ondas estacionarias. Describimos este problema en las secciones 15.8 y 32.5; la idea fundamental fue satisfacer las **condiciones en la frontera** para las ondas. Por ejemplo, para ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, los extremos siempre son nodos, y habrá nodos adicionales a lo largo de la cuerda, para todos los modos, excepto el fundamental. Para que se satisfagan las condiciones en la frontera, la longitud total de la cuerda debe ser igual a un número *entero* de medias longitudes de onda.

Una onda estacionaria en una cuerda no transmite energía, y los electrones en las órbitas de Bohr no irradian energía. Así, imaginemos que un electrón es una onda estacionaria ajustada en torno a un círculo de una de las órbitas de Bohr. Para que la onda "salga a mano" y sea una consigo misma uniformemente, la circunferencia de este círculo debe incluir algún *número entero* de longitudes de onda, como indica la figura 39.2. Para una órbita con radio r y circunferencia $2\pi r$, se debe cumplir que $2\pi r = n\lambda$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ De acuerdo con la relación de De Broglie, ecuación (39.1), la longitud de onda λ de la partícula con masa en reposo m, que se mueve con la rapidez v no relativista, es $\lambda = h/mv$. Al combinar $2\pi r = n\lambda$ con $\lambda = h/mv$, se ve que $2\pi r = nh/mv$, es decir,

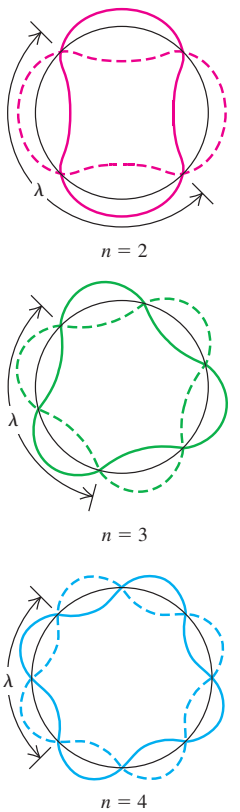
$$mvr = n\frac{h}{2\pi} \tag{39.3}$$

Se observa que la ecuación (39.3) es idéntica a la (38.10), el resultado de Bohr que establece que la magnitud de la cantidad de movimiento angular $L = mvr$ debe ser igual a un entero n por $h/2\pi$. Así, una imagen mecánico-ondulatoria conduce en forma natural a la cuantización de la cantidad de movimiento angular del electrón.

Admitimos que la idea de ajustar una onda estacionaria en torno a una órbita circular es una idea con mucha vaguedad. Pero el acuerdo de la ecuación (39.3) con el resultado de Bohr es muy notable para ser una coincidencia. Sugiere enfáticamente que las propiedades ondulatorias de los electrones sí tienen relación con la estructura atómica.

Después aprenderemos cómo se determinan las funciones de onda para sistemas específicos, resolviendo una ecuación de onda llamada ecuación de Schrödinger. Las condiciones en la frontera juegan un papel central en la determinación de las soluciones de esta ecuación y, por consiguiente, en la determinación de los niveles de energía, valores de la cantidad de movimiento angular y otras propiedades posibles.

39.2 Diagramas que muestran la idea de ajuste de una onda estacionaria en torno a una órbita circular. Para que la onda se una consigo misma uniformemente, la circunferencia de la órbita debe ser un número entero n de longitudes de onda. Se muestran los ejemplos para $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$.



Estrategias para resolver problemas 39.1 Partículas y ondas

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* A pesar de lo desconcertante que parezca, las partículas y la luz tienen propiedades ondulatorias y también propiedades corpusculares. La longitud de onda de una partícula es inversamente proporcional a la cantidad de movimiento, y la frecuencia es proporcional a la energía. Esos conceptos le ayudarán a resolver muchos problemas donde interviene el carácter ondulatorio de la materia.

PLANTEAR *el problema:* Como siempre, determinar la variable buscada, y decidir qué ecuaciones se usarán para calcularla.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use la ecuación (39.1) para relacionar la cantidad de movimiento p con la longitud de onda λ y utilice la ecuación (39.2) para relacionar la energía E con la frecuencia f.

continúa

2. La energía cinética no relativista se puede expresar en la forma $K = \frac{1}{2}mv^2$, o bien (ya que $p = mv$), como $K = p^2/2m$. A menudo esta última es útil en cálculos donde interviene la longitud de onda de De Broglie.
3. Tenga cuidado en usar unidades consistentes. Las longitudes, por ejemplo las longitudes de onda, siempre deben estar en metros, si se usan en forma consistente las demás cantidades en unidades del SI. Cuando se desee una longitud de onda en nanómetros o algunas otras unidades, no se olvide de convertirlas. Como en el capítulo 38, las energías se pueden expresar en joules o en electrón volts. Dependiendo de la elección, se pueden usar ya sea $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$ o $h = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}$.

EVALUAR *su respuesta:* Para comprobar los resultados numéricos es útil recordar algunos órdenes de magnitud característicos de cantidades en escala atómica:

Tamaño de un átomo: 10^{-10} m

Masa de un átomo: 10^{-26} kg

Masa de un electrón: 10^{-30} kg

Magnitud de la energía de un estado atómico: de 1 a 10 eV (10^{-19} a 10^{-18} J) (pero algunas energías de interacción son mucho menores).

Rapidez de un electrón, en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno: 10^6 m/s

Magnitud de la carga del electrón: 10^{-19} C

kT a temperatura ambiente: $\frac{1}{40}$ eV

Tal vez quiera agregar algo a esta lista. Estos valores aproximados también le ayudarán en el capítulo 43, donde trataremos con magnitudes características de la estructura *nuclear*, no de la estructura atómica; son distintas en factores de 10^4 a 10^6.

Ejemplo 39.1 Energía de un neutrón térmico

Determine la rapidez y la energía cinética de un neutrón ($m = 1.675 \times 10^{-27}$ kg) que tiene una longitud de onda de De Broglie $\lambda = 0.200$ nm, aproximadamente la distancia entre átomos en muchos cristales. Compare la energía con la energía cinética de traslación de una molécula de gas a temperatura ambiente ($T = 20\ °\text{C} = 293$ K).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza varias relaciones: entre la longitud de onda y la rapidez de una partícula, entre la rapidez de la partícula y la energía cinética, y entre la temperatura de un gas y la energía cinética promedio de una molécula gaseosa.

PLANTEAR: Las incógnitas son la rapidez v y la energía cinética K. Determinaremos v usando la ecuación (39.1), y después calculando la energía cinética con $K = \frac{1}{2}mv^2$. Para determinar la energía cinética promedio de una molécula a la temperatura T, usaremos el resultado de nuestra descripción de la teoría cinética en la sección 18.3.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (39.1),

$$v = \frac{h}{\lambda m} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{(0.200 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.675 \times 10^{-27}\ \text{kg})} = 1.98 \times 10^3\ \text{m/s}$$

La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1.675 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.98 \times 10^3\ \text{m/s})^2 = 3.28 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0204\ \text{eV}$$

La energía cinética de traslación promedio de una molécula de gas ideal se determina con la ecuación (18.16):

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{prom}} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K}) = 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0397\ \text{eV}$$

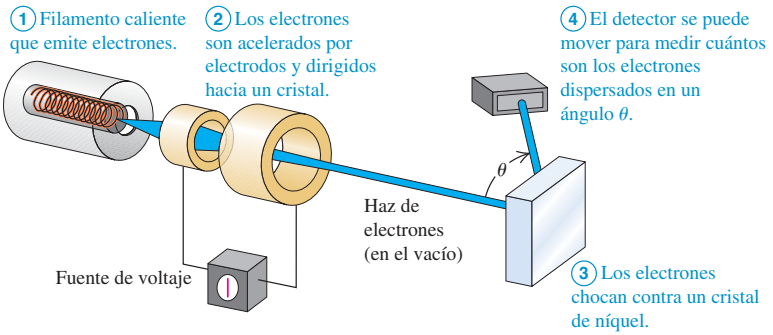
Las dos energías tienen magnitud comparable. De hecho, un neutrón con energía cinética entre estos límites se llama *neutrón térmico*. La difracción de neutrones térmicos, que describiremos en la siguiente sección, se usa para estudiar la estructura cristalina y molecular en la misma forma que la difracción de rayos x. La difracción de neutrones ha demostrado ser de utilidad especial en el estudio de moléculas orgánicas grandes.

EVALUAR: Advierta que la rapidez calculada del neutrón es mucho menor que la rapidez de la luz. Esto justifica el uso de la forma no relativista de la ecuación (39.1).

Evalúe su comprensión de la sección 39.1 Un protón tiene una masa un poco menor que la de un neutrón. En comparación con el neutrón del ejemplo 39.1, ¿un protón de la misma longitud de onda tiene i) más energía cinética, ii) menos energía cinética, iii) la misma energía cinética?

39.2 Difracción de electrones

La hipótesis ondulatoria de De Broglie, por radical que parezca, casi de inmediato recibió confirmación experimental. La primera prueba directa implicaba un experimento de difracción con electrones, similar al experimento de difracción con rayos x que describimos en la sección 36.6. En esos experimentos, los átomos de un cristal funcionan como rejilla de difracción tridimensional para los rayos x. Un haz de rayos x se refleja intensamente al chocar contra un cristal, formando un ángulo que produce interferencia constructiva entre las ondas dispersas por los diversos átomos en el cristal. Esos efectos de interferencia demuestran la naturaleza *ondulatoria* de los rayos x.



39.3 Aparato parecido al que usaron Davisson y Germer para descubrir la difracción de los electrones.

Observación de la naturaleza ondulatoria de los electrones

En 1927 Clinton Davisson y Lester Germer, trabajando en los Bell Telephone Laboratories, estudiaban la superficie de una pieza de níquel, dirigiendo a ella un haz de electrones y observando cuántos electrones rebotaban a distintos ángulos. La figura 39.3 muestra un arreglo experimental como el de ellos. La muestra era *policristalina*: como muchos otros metales, estaba formada por muchos cristales microscópicos unidos, con orientaciones aleatorias. Los investigadores esperaban que hasta la superficie más lisa posible se seguiría viendo áspera, según un electrón, y que el haz de electrones se reflejaría en forma difusa, con una distribución uniforme de intensidad, en función del ángulo θ.

Durante el experimento se produjo un accidente, y entró aire en la cámara de vacío, formándose una película de óxido en la superficie del metal. Para quitar esa película, Davisson y Germer calentaron la muestra en un horno de alta temperatura, casi hasta la fusión. Ellos no lo sabían, pero lo anterior causó la formación de grandes regiones monocristalinas, con planos cristalinos continuos en el ancho del haz de electrones.

Cuando se repitieron las observaciones, los resultados fueron muy distintos. Se formaron máximos en la intensidad del haz de electrones reflejado, en ángulos específicos (figura 39.4a), en contraste con la variación uniforme de intensidad en función del ángulo, que habían observado Davisson y Germer antes del accidente. Las posiciones angulares de los máximos dependían del voltaje V_{ba}, de aceleración que se usó para producir el haz de electrones. Davisson y Germer estaban familiarizados con la hipótesis de De Broglie, y notaron la semejanza de esta figura con la de difracción de rayos x. No era el efecto que estaban buscando, pero de inmediato reconocieron que el haz de electrones se estaba *difractando*. Habían descubierto una confirmación experimental muy directa de la hipótesis ondulatoria.

Davisson y Germer pudieron determinar las rapideces de los electrones a partir del voltaje de aceleración, y pudieron calcular la longitud de onda de De Broglie con la ecuación (39.1). Los electrones se dispersaban principalmente por los planos atómicos en la superficie del cristal. Los átomos de un plano superficial están ordenados en filas, y se puede determinar su distancia d usando técnicas de difracción de rayos x. Esas filas funcionan como una rejilla de difracción reflejante; los ángulos en que hay reflexión intensa son iguales que para una rejilla con distancia d de centro a centro de sus rendijas (figura 39.4b). De la ecuación (36.13), los ángulos de reflexión máxima son:

$$d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{39.4}$$

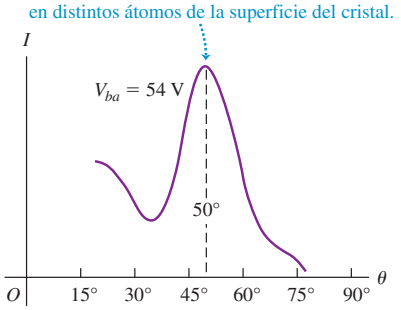
donde θ es el ángulo de la figura 39.3. Los ángulos determinados con esta ecuación, usando la longitud de onda de De Broglie, concordaron con los valores observados (figura 39.4a). Así, el descubrimiento accidental de la **difracción de electrones** fue la primera prueba directa que confirmaba la hipótesis de De Broglie.

La longitud de onda de De Broglie, de una partícula no relativista, es $\lambda = h/p = h/mv$. También se puede expresar λ en función de la energía cinética de la partícula. Por ejemplo, si se considera que un electrón libremente acelerado desde el reposo en

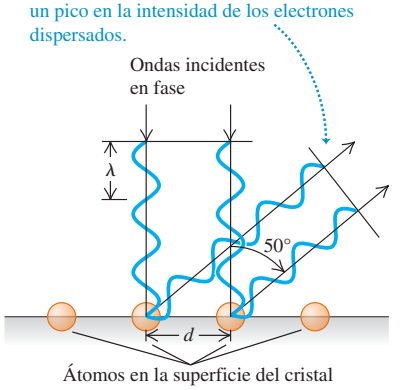
17.5 Interferencia de electrones

39.4 a) Gráfica de la intensidad del haz dispersado de electrones de la figura 39.3, en función del ángulo de dispersión θ. b) Interferencia constructiva de las ondas de electrones dispersadas por dos átomos adyacentes; se presenta cuando $d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$. En este caso, $\theta = 50°$ y $m = 1$.

a) Este pico en la intensidad de los electrones dispersados se debe a interferencia constructiva entre las ondas de electrones dispersadas en distintos átomos de la superficie del cristal.



b) Si las ondas dispersadas están en fase, hay un pico en la intensidad de los electrones dispersados.



el punto a hasta el punto b, pasando por un aumento de potencial $V_b - V_a = V_{ba}$, el trabajo efectuado eV_{ba} sobre el electrón es igual a su energía cinética K. Con $K = p^2/2m$ se tiene

$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2meV_{ba}}$$

y la longitud de onda de De Broglie del electrón es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} \quad \text{(longitud de onda de De Broglie para un electrón)} \qquad (39.5)$$

Ejemplo 39.2 Un experimento de difracción de electrones

En cierto experimento de difracción de electrones con un voltaje de aceleración de 54 V, se presenta un máximo de intensidad cuando el ángulo θ en la figura 39.3 es 50° (véase la figura 39.4a). La energía cinética inicial de los electrones es despreciable. Con difracción de rayos x se determinó que las filas de átomos tienen una separación $d = 2.15 \times 10^{-10}$ m $= 0.215$ nm. Calcule la longitud de onda del electrón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre voltaje de aceleración, longitud de onda del electrón, espacio entre átomos y ángulo de reflexión máxima para un experimento de difracción de electrones.

PLANTEAR: Se nos da el voltaje de aceleración V_{ba}, por lo que se puede determinar la longitud de onda λ con la ecuación (39.5). También se proporciona la distancia atómica d y el ángulo θ de un máximo de intensidad, por lo que también se puede determinar λ con la ecuación (39.4).

EJECUTAR: Con la ecuación (39.5), la longitud de onda del electrón es

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(54\ \text{V})}} = 1.7 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

También, con la ecuación (39.4), y suponiendo que $m = 1$,

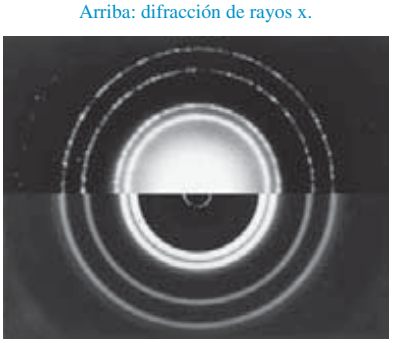
$$\lambda = d\,\text{sen}\,\theta = (2.15 \times 10^{-10}\ \text{m})\,\text{sen}\,50° = 1.7 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

EVALUAR: Los dos números coinciden dentro de la exactitud de los resultados experimentales, lo cual brinda una comprobación excelente de los cálculos. Advierta que esta longitud de onda del electrón es menor que la distancia entre los átomos.

Difracción de electrones y otras partículas

39.5 Difracción de rayos x y de electrones. La mitad superior de la foto muestra el patrón de difracción de rayos x de 71 pm, que atraviesan una hoja de aluminio. La mitad inferior, a una escala diferente, muestra la figura de difracción para electrones de 600 eV en el aluminio.

Arriba: difracción de rayos x.



Abajo: difracción de electrones.

En 1928, justo un año después del descubrimiento de Davisson-Germer, el físico inglés G. P. Thomson efectuó experimentos de difracción de electrones con una hoja metálica delgada, policristalina, como blanco. Debye y Sherrer habían usado una técnica semejante algunos años antes para estudiar la difracción de rayos x en muestras policristalinas. Debido a las orientaciones aleatorias de los cristales microscópicos individuales en esa hoja, el patrón de difracción consistió en máximos de intensidad en forma de anillos en torno a la dirección del haz incidente. De nuevo, los resultados de Thomson confirmaron la relación de De Broglie. La figura 39.5 muestra figuras de difracción de una hoja policristalina de aluminio, con difracción tanto de rayos x como de electrones. (G. P. Thomson fue hijo de J. J. Thomson, quien 31 años antes había efectuado el experimento definitivo para establecer la naturaleza *corpuscular* de los electrones.)

Pronto se hicieron más experimentos en muchos laboratorios. En Alemania, Estermann y Stern demostraron la difracción de partículas alfa. También se han hecho experimentos de difracción con diversos iones y neutrones de baja energía (véase el ejemplo 39.1). Así, la naturaleza ondulatoria de las partículas, tan extraña en 1924, se estableció firmemente en los siguientes años.

Evalúe su comprensión de la sección 39.2 El ejemplo 39.2 muestra que para que los electrones tengan una longitud de onda de 1.7×10^{-10} m, deben acelerarse desde el reposo hasta un voltaje de 54 V, para adquirir así una energía cinética de 54 eV. ¿Un fotón de la misma energía tiene también una longitud de onda de 1.7×10^{-10} m?

39.3 Probabilidad e incertidumbre

El descubrimiento de la naturaleza dual, ondulatoria-corpuscular, de la materia nos ha forzado a reevaluar el lenguaje cinemático que usamos para describir la posición y el movimiento de una partícula. En la mecánica newtoniana clásica, una partícula se concibe como un punto. Podemos describir su lugar y su estado de movimiento en cualquier instante con tres coordenadas espaciales y tres componentes de velocidad. Pero en general, esa descripción específica no es posible. Cuando bajamos a una escala suficientemente pequeña, hay limitaciones fundamentales de la precisión con la que se pueden determinar la posición y la velocidad de una partícula. Muchos aspectos del comportamiento de una partícula se establecen sólo en términos de *probabilidades*.

Activ ONLINE Physics
17.6 Principio de incertidumbre

Difracción por una rendija

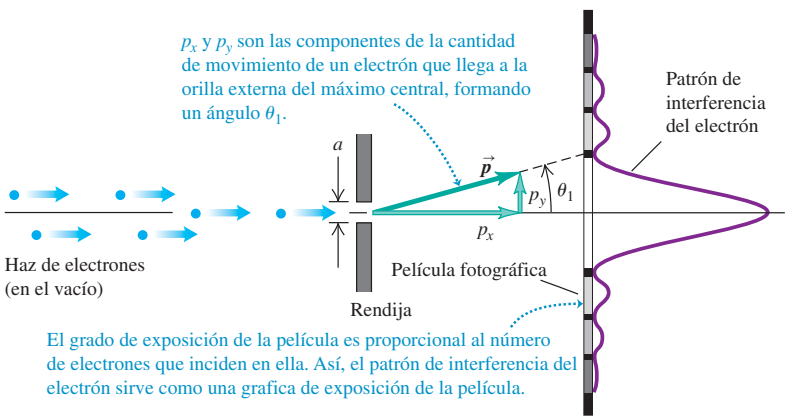
Para tratar de adquirir alguna idea de la naturaleza del problema, repasemos la difracción de la luz a través de una sola rendija, que se describe en la sección 36.2. Suponga que la longitud de onda λ es mucho menor que el ancho a de la rendija. Entonces, la mayoría (85%) de la luz, en la figura de difracción, se concentra en el máximo central, limitado a cada lado por el mínimo de intensidad. Usaremos θ_1 para representar el ángulo entre el máximo central y el primer mínimo. Al aplicar la ecuación (36.2) con $m = 1$ se observa que θ_1 se determina con $\operatorname{sen}\theta_1 = \lambda/a$. Como se supone que $\lambda \ll a$, entonces θ_1 es muy pequeño, sen θ_1 es casi igual a θ_1 (en radianes), y

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \tag{39.6}$$

Ahora volvemos a hacer el mismo experimento, pero con un haz de *electrones*, en vez de uno de luz monocromática (figura 39.6). Se debe hacer el experimento en el vacío (10^{-7} atm o menos) para que los electrones no reboten con las moléculas de aire. El haz de electrones se puede obtener con un aparato parecido, en principio, al cañón de electrones de un tubo de rayos catódicos. Se produce un haz de electrones angosto, que casi tienen la misma dirección y rapidez y, en consecuencia, la misma longitud de onda de De Broglie.

El resultado de este experimento, captado en película fotográfica o usando detectores más complejos, es una figura de difracción idéntica a la de la figura 39.6. Esta figura es una prueba directa adicional de la naturaleza *ondulatoria* de los electrones. Un 85% de los electrones llegan a la película dentro del máximo central; el resto llega a ella dentro de los máximos subsidiarios en ambos lados.

Si creemos que los electrones son ondas, no nos sorprenderá su comportamiento ondulatorio en este experimento. Pero si tratamos de interpretarlo en términos de *partículas*, caemos en problemas muy graves. Primero, no todos los electrones siguen la misma trayectoria, aunque todos ellos tengan el mismo estado inicial de movimiento.



39.6 Un experimento de difracción de electrones.

De hecho, no podemos predecir la trayectoria exacta de un electrón individual conociendo su estado inicial. Lo mejor que podemos hacer es decir que *la mayoría* de los electrones van a cierta región central, *menos* van a otras regiones, y así sucesivamente. Es decir, sólo podemos describir la *probabilidad* de que determinado electrón llegue a diversas partes de la película. Esta indeterminación fundamental no tiene contraparte en la mecánica newtoniana, donde siempre se puede predecir con precisión el movimiento de una partícula, conociendo la posición y el movimiento iniciales de ésta con la exactitud suficiente.

En segundo lugar hay *incertidumbres* fundamentales tanto en la posición como en la cantidad de movimiento de una partícula individual, y esas dos incertidumbres se relacionan en forma inseparable. Para aclarar este punto regresemos a la figura 39.6. Un electrón que llega a la película en la orilla externa del máximo central, formando el ángulo θ_1, debe tener una componente de cantidad de movimiento p_y en la dirección y, y también una componente p_x en la dirección x, a pesar de que al principio el haz se dirigió paralelo al eje x. Como indica la geometría del caso, las dos componentes se relacionan con $p_y/p_x = \tan\theta_1$. Ya que θ_1 es pequeño, podremos usar la aproximación $\tan\theta_1 = \theta_1$, y

$$p_y = p_x\theta_1 \tag{39.7}$$

Sustituyendo la ecuación (39.6), $\theta_1 = \lambda/a$, se obtiene

$$p_y = p_x\frac{\lambda}{a} \tag{39.8}$$

Para el 85% de los electrones que llegan a la película dentro del máximo central (esto es, en ángulos de $-\lambda/a$ y $+\lambda/a$), se ve que la componente y de la cantidad de movimiento se reparte dentro de los límites $-p_x\lambda/a$ a $+p_x\lambda/a$. Ahora imaginemos *todos* los electrones que pasan por la rendija y llegan a la película. De nuevo, pueden llegar arriba o abajo del centro del patrón, por lo que su componente p_y puede ser positiva o negativa. Sin embargo, la simetría del patrón de difracción indica que el valor promedio $(p_y)_{\text{prom}} = 0$. Habrá una *incertidumbre* Δp_y en la componente y de la cantidad de movimiento, cuyo valor es $p_x\lambda/a$, cuando menos. Esto es,

$$\Delta p_y \geq p_x\frac{\lambda}{a} \tag{39.9}$$

Cuanto menor sea el ancho a de la rendija, más ancha será la figura de difracción, y mayor será la incertidumbre de la componente y de la cantidad de movimiento p_y.

La longitud de onda del electrón λ se relaciona con la cantidad de movimiento $p_x = mv_x$, con la relación de de Broglie, ecuación (39.1), que se puede replantear como $\lambda = h/p_x$. Sustituyendo esta relación en la ecuación (39.9), y simplificando,

$$\begin{aligned}\Delta p_y &\geq p_x\frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a}\\ \Delta p_y a &\geq h\end{aligned} \tag{39.10}$$

¿Qué indica este resultado? El ancho a de la rendija representa una incertidumbre en la componente y de la *posición* de un electrón, al pasar por la rendija. No conocemos con exactitud *dónde* atraviesa cada partícula en la rendija. Entonces, hay incertidumbres tanto en la posición como en la componente y de la cantidad de movimiento, y las dos incertidumbres se relacionan con la ecuación (39.10). Se puede reducir la incertidumbre Δp_y en *cantidad de movimiento* sólo reduciendo el ancho del patrón de difracción. Para hacerlo, hay que aumentar el ancho a de la rendija, lo cual aumenta la incertidumbre en la *posición.* Al revés, cuando *disminuimos* la incertidumbre de posición estrechando la rendija, el patrón de difracción se ensancha y *aumenta* la correspondiente incertidumbre en la cantidad de movimiento.

Quizás usted proteste diciendo que eso no parece ser consistente con el sentido común, de que una partícula no tiene una posición y una cantidad de movimiento definidos. La respuesta es que lo que se llama *sentido común* se basa en una familiaridad

adquirida a través de la experiencia. Nuestra experiencia normal tiene muy poco contacto con el comportamiento microscópico de las partículas. A veces hay que aceptar conclusiones que violan nuestra intuición, cuando manejamos áreas muy alejadas de la experiencia cotidiana.

El principio de incertidumbre

En descripciones más generales de relaciones de incertidumbre, se suele describir la incertidumbre de una cantidad en función del concepto estadístico de *desviación estándar*, que es una medida de la extensión o dispersión de un conjunto de números con respecto a su valor promedio. Suponga que comenzamos a describir de este modo las incertidumbres [ni Δp_y ni a, en la ecuación (39.10), son desviación estándar]. Si una coordenada x tiene una incertidumbre Δx y si la componente respectiva de la cantidad de movimiento p_x tiene una incertidumbre Δp_x, se ha visto que las incertidumbres en la desviación estándar se relacionan, en general, con la desigualdad

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg, para posición y cantidad de movimiento)} \tag{39.11}$$

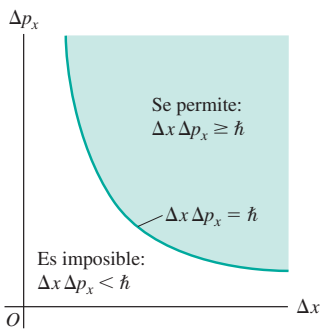
En esta expresión, la cantidad $\hbar$ (se dice "hache barra") es la constante de Planck dividida entre 2π:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457168(18) \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \tag{39.12}$$

Usaremos con frecuencia esta cantidad, para evitar escribir muchos factores 2π en las ecuaciones posteriores.

La ecuación (39.11) es una forma del **principio de incertidumbre de Heisenberg**, descubierto por el fisico alemán Werner Heisenberg (1901-1976). Establece que, en general, ni la posición ni la cantidad de movimiento de una partícula se pueden determinar con una precisión arbitrariamente grande, como indicaba la física clásica. En vez de ello, las incertidumbres en las dos cantidades juegan papeles complementarios, como ya hemos descrito. La figura 39.7 muestra la relación entre las dos incertidumbres.

39.7 El principio de incertidumbre de Heisenberg para componentes de posición y de cantidad de movimiento. Es imposible que el producto $\Delta x \Delta p_x$ sea menor que $\hbar = h/2\pi$.

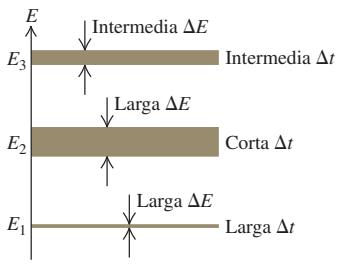


Uno queda tentado a suponer que podríamos tener más precisión usando detectores más complejos de posición y de cantidad de movimiento. Sucede que eso no es posible. Para detectar una partícula, el detector debe *interactuar* con ella, y esa interacción cambia irremediablemente el estado de movimiento de la partícula, e introduce incertidumbre acerca de su estado original. Por ejemplo, si tuviéramos que detectar fotones de menor longitud de onda rebotados en una partícula para ubicar mejor su posición, la mayor cantidad de movimiento h/λ de los fotones aumentaría el retroceso de la partícula, produciendo mayor incertidumbre en su cantidad de movimiento. Un análisis más detallado de esos experimentos hipotéticos demuestra que las incertidumbres que hemos descrito son fundamentales e intrínsecas. *No* se pueden evitar *ni siquiera en principio* mediante técnica experimental alguna, independientemente de lo complicada que sea.

No hay nada especial en el eje x. En un caso tridimensional, con coordenadas (x, y, z) hay una relación de incertidumbre para cada coordenada, y su correspondiente componente de cantidad de movimiento: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$ y $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$. Sin embargo, la incertidumbre en una coordenada *no* se relaciona con la de otra componente de la cantidad de movimiento. Por ejemplo, Δx no se relaciona en forma directa con Δp_y.

Para una partícula que se mueva en círculo con radio r, se puede sustituir x por r en la ecuación (39.11), y se obtiene $\Delta r \Delta p_r \geq \hbar$. En el modelo de Bohr, un electrón describe un círculo de radio r exacto, $\Delta r = 0$ y $\Delta p_r = 0$. Así, el modelo de Bohr transgrede el principio de incertidumbre de Heisenberg. En el capítulo 41 presentaremos una descripción más correcta de la estructura atómica; por suerte, sucede que las predicciones del modelo de energía según Bohr, *sí* son correctas.

39.8 Cuanto mayor sea la vida Δt de un estado, menor será su variación en energía (indicada por el ancho de los niveles de energía).



Incertidumbre en la energía

También hay un principio de incertidumbre para la *energía.* La energía de un sistema también tiene una incertidumbre inherente. La incertidumbre ΔE depende del *intervalo de tiempo* Δt durante el cual el sistema permanece en determinado estado. La relación es

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \qquad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg para energía e intervalo de tiempo)} \qquad (39.13)$$

Un sistema que permanece en un estado metaestable durante un tiempo muy largo (Δt grande) puede tener una energía muy bien definida (ΔE pequeña), pero si permanece en un estado sólo durante corto tiempo (Δt pequeño), la incertidumbre en la energía debe ser proporcionalmente mayor (ΔE grande). La figura 39.8 ilustra esta idea.

Ejemplo 39.3 Principio de incertidumbre: Cantidad de movimiento y posición

Un electrón está confinado en una región de 1.0×10^{-10} m de ancho. *a*) Estime la incertidumbre mínima en la componente x de la cantidad de movimiento del electrón. *b*) Si el electrón tiene cantidad de movimiento con una magnitud igual a la incertidumbre determinada en el inciso *a*), ¿cuál es su energía cinética? Exprese el resultado en joules y en electrón volts.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza el principio de incertidumbre de Heisenberg para una posición y cantidad de movimiento, así como la relación entre la cantidad de movimiento de una partícula y su energía cinética.

PLANTEAR: Sabemos que el electrón está *en algún lugar* de la región en la que se confina. Como no conocemos con exactitud dónde está, dentro de esa región, el ancho de la región es la incertidumbre de posición: $\Delta x = 1.0 \text{ m} \times 10^{-10}$ m. (El lector podría argumentar que en realidad la incertidumbre debería ser de la mitad del ancho de la región. Sin embargo, todo lo que se desea es una estimación, por lo que no nos ocuparemos de factores como 2.) A continuación se determinará la incertidumbre Δp_x en la cantidad de movimiento con la ecuación (39.11), y calcularemos la energía cinética con $K = p^2/2m$.

EJECUTAR: *a*) Para un valor dado de Δx, hay una incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento cuando el producto $\Delta x \Delta p_x$ en la ecuación (39.11) es igual a $\hbar$. Usando el valor de $\hbar$ de la ecuación (39.12),

$$(\Delta p_x)_{\text{mín}} = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{1.0 \times 10^{-10}\,\text{m}} = 1.1 \times 10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

b) Un electrón con una cantidad de movimiento de esta magnitud tiene la energía cinética

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1.1 \times 10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})} = 6.1 \times 10^{-19}\,\text{J} = 3.8\,\text{eV}$$

EVALUAR: La región tiene más o menos el mismo ancho que un átomo, y la energía tiene el mismo orden de magnitud que las energías electrónicas características de los átomos. Es un cálculo muy burdo, pero asegura que la energía tiene un orden de magnitud razonable.

En una clase de desintegración radiactiva llamada *decaimiento beta menos*, un núcleo emite un electrón. Aunque parece razonable suponer que el electrón estaba confinado dentro del núcleo antes de la desintegración, para eso se necesitaría que la posición del electrón se conociera con una incertidumbre $\Delta x = 10^{-14}$ m, más o menos. Pero así el electrón confinado tendría un valor de Δp_x que es 10^4 veces mayor que el electrón de este ejemplo, y una energía cinética tan grande que necesitaríamos usar ecuaciones relativistas para calcularla. Esta alta energía es una razón para creer que en los núcleos no hay electrones confinados. En el decaimiento beta menos, en realidad el electrón es *producido* dentro del núcleo, cuando un neutrón se convierte en un protón.

Ejemplo 39.4 Principio de incertidumbre: Energía y tiempo

Un átomo de sodio está en uno de los estados llamados "niveles excitados inferiores" en la figura 38.10 (sección 38.3). Permanece en ese estado durante un tiempo promedio de 1.6×10^{-8} s y hace una transición regresando al estado fundamental, con emisión de un fotón de 589.0 nm de longitud de onda, y 2.105 eV de energía. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado excitado? ¿Cuál es la dispersión de longitud de onda de la línea espectral correspondiente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza el principio de incertidumbre de Heisenberg para energía e intervalo de tiempo, así como la relación entre la energía y la longitud de onda del protón.

PLANTEAR: El tiempo promedio que pasa un átomo en este estado excitado es igual a Δt en la ecuación (39.13). Se determinará la incertidumbre en la energía sustituyendo el signo $\geq$ en la ecuación (39.13) por el signo igual, y se despejará ΔE.

EJECUTAR: De la ecuación (39.13),

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{1.6 \times 10^{-8}\,\text{s}} = 6.6 \times 10^{-27}\,\text{J} = 4.1 \times 10^{-8}\,\text{eV}$$

El átomo permanece un tiempo indefinidamente grande en el estado fundamental, por lo que ahí *no* hay incertidumbre fundamental. La incertidumbre fraccionaria en la energía del fotón es

$$\frac{4.1 \times 10^{-8}\,\text{eV}}{2.105\,\text{eV}} = 1.95 \times 10^{-8}$$

La dispersión correspondiente en la longitud de onda, o "ancho" de la línea espectral es, aproximadamente,

$$\Delta\lambda = (1.95 \times 10^{-8})(589.0\ \text{nm}) = 0.000011\ \text{nm}$$

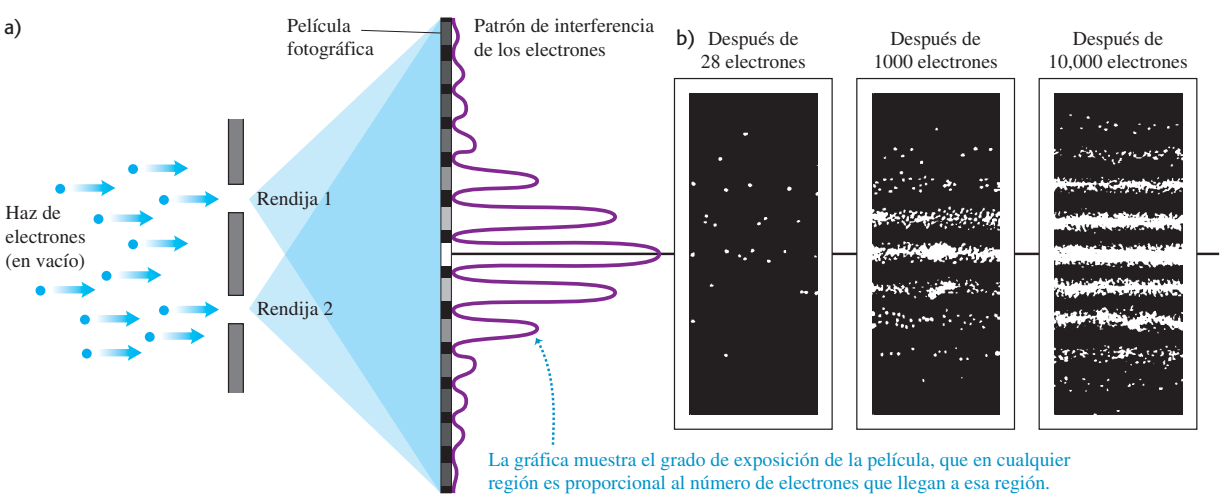
EVALUAR: La incertidumbre $\Delta\lambda$ irreducible que hemos calculado es el *ancho natural de la línea*, de esta línea espectral en particular. Aunque es muy pequeña, está dentro de los límites de resolución de los espectrómetros actuales. Frecuentemente, el ancho natural de la línea es mucho menor que el ancho de línea debido a otras causas, como el efecto Doppler y los choques entre átomos en movimiento rápido.

Interferencia con dos rendijas

Ahora hagamos un análisis breve de la interpretación cuántica de un patrón de interferencia óptica con *dos rendijas*. En las secciones 35.2 y 35.3 estudiamos con detalle esos patrones de interferencia, y en la sección 38.9 describimos su interpretación en función de la probabilidad de que los fotones lleguen a diversas regiones de la pantalla donde se forma el patrón.

En vista de nuestra descripción de las propiedades ondulatorias de los electrones, es natural preguntar qué sucede cuando efectuamos un experimento de interferencia de dos rendijas con electrones. La respuesta es: ¡exactamente lo mismo que vimos en la sección 38.9 con los fotones! De nuevo se puede usar una película fotográfica (figura 39.9) o detectores de electrones para rastrear el patrón de interferencia, tal como hicimos con los fotones. El principio de complementariedad, presentado en la sección 38.9, indica de nuevo que no podemos tratar de aplicar en forma simultánea el modelo ondulatorio y el modelo corpuscular, para describir una sola parte de este experimento. Por consiguiente, *no* podemos predecir con exactitud dónde llegará un electrón individual (una partícula) al patrón (un fenómeno ondulatorio). Ni siquiera podemos preguntar por cuál rendija pasó un electrón individual que formó el patrón de interferencia con dos rendijas. Si se determinan las rendijas por las que pasan los electrones, dispersando fotones en ellos, los electrones rebotarán y ya no se forma el patrón de interferencia con dos rendijas.

39.9 a) Formación de una imagen de interferencia por electrones incidentes en dos rendijas. b) después de 28, 1000 y 10,000 electrones.



Evalúe su comprensión de la sección 39.3 Ordene de mayor a menor las siguientes situaciones, de acuerdo con su incertidumbre en la cantidad de movimiento x. La masa del protón tiene 1836 veces la masa del electrón. i) un electrón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 2×10^{-15} m; ii) un electrón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 4×10^{-15} m; iii) un protón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 2×10^{-15} m; iv) un protón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 4×10^{-15} m.

39.4 El microscopio electrónico

El **microscopio electrónico** es un ejemplo importante e interesante del juego recíproco de propiedades ondulatorias y corpusculares de los electrones. Se puede usar un haz de electrones para formar una imagen de un objeto casi en la misma forma que un rayo de luz, el cual se puede desviar por reflexión o refracción, y la trayectoria de un electrón se puede desviar con un campo eléctrico o magnético. Los rayos de luz que divergen de un punto en un objeto se pueden hacer converger con una lente convergente o un espejo cóncavo, y los electrones que divergen de una región pequeña se pueden hacer converger con campos eléctricos y/o magnéticos.

La analogía entre los rayos de luz y de electrones va todavía más allá. El modelo del *rayo* en la óptica geométrica es una representación aproximada del modelo *ondulatorio* más general. La óptica geométrica (óptica de rayos) es válida siempre que se desprecien los efectos de interferencia y difracción. Asimismo, el modelo de un electrón como partícula puntual que sigue una trayectoria lineal es una descripción aproximada del comportamiento real del electrón; este modelo es útil cuando se pueden despreciar los efectos relacionados con la naturaleza ondulatoria de los electrones.

¿Por qué un microscopio electrónico es superior a un microscopio óptico? La *resolución* de un microscopio óptico está limitada por efectos de difracción, como se describió en la sección 36.7. Si se usan longitudes de onda de alrededor de 500 nm, un microscopio óptico no puede diferenciar objetos menores que algunos cientos de nanómetros, independientemente del cuidado que se tenga en la fabricación de las lentes. La resolución de un microscopio electrónico se limita, en forma semejante, por las longitudes de onda de los electrones, pero esas longitudes de onda pueden ser muchos miles de veces *menores* que las de la luz visible. El resultado es que el aumento de un microscopio electrónico puede ser miles de veces mayor que el de un microscopio óptico.

Observe que la capacidad de un microscopio electrónico para formar una imagen ampliada *no* depende de las propiedades ondulatorias de los electrones. Dentro de las limitaciones del principio de incertidumbre de Heisenberg, se pueden calcular las trayectorias de los electrones considerándolos como partículas clásicas cargadas, bajo la acción de campos de fuerza eléctrica y magnética (en analogía con la óptica geométrica). Sólo cuando se habla de la *resolución* sí son importantes las propiedades ondulatorias.

Ejemplo 39.5 Un microscopio electrónico

El haz de electrones no relativistas de un microscopio electrónico se produce con un dispositivo parecido al cañón de electrones que se usó en el experimento de Davisson-Germer (figura 39.3). ¿Qué voltaje de aceleración se necesita para producir electrones de 10 pm = 0.010 nm de longitud de onda (unas 50,000 veces menor que las longitudes de onda características de la luz visible)? La energía cinética inicial de los electrones es despreciable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que tal situación es similar al experimento de Davisson-Germer, podemos usar todos los experimentos deducidos para comprender ese experimento.

PLANTEAR: El voltaje de aceleración (nuestra incógnita) es la cantidad V_{ba} en la ecuación (39.5). Los datos son los valores de las demás cantidades en esa ecuación, por lo que podemos calcular V_{ba}.

EJECUTAR: Despejando V_{ba} de la ecuación (39.5) e insertando los números adecuados, tenemos

$$V_{ba} = \frac{h^2}{2me\lambda^2}$$

$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(10 \times 10^{-12}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.5 \times 10^4\ \text{V} = 15{,}000\ \text{V}$$

EVALUAR: Es aproximadamente igual al voltaje de aceleración de un haz de electrones en un cinescopio de TV. Este ejemplo demuestra, por cierto, que la nitidez de una imagen de TV *no* está limitada por los efectos de difracción de los electrones. También, note que este voltaje de 15 kV aumenta la energía cinética de los electrones desde un valor relativamente pequeño hasta 15 keV. Como los electrones tienen una energía en reposo de 0.511 MeV = 511 keV, se puede considerar, con exactitud, que esos electrones de 15 keV son no relativistas.

El microscopio electrónico de transmisión

Excepto en el interior de sus cañones de electrones, la mayoría de los microscopios electrónicos usan campos magnéticos, y no campos eléctricos, como "lentes" para enfocar el haz. Un arreglo frecuente de los *microscopios electrónicos de transmisión* tiene tres de esas lentes en un arreglo en forma de microscopio compuesto, como se

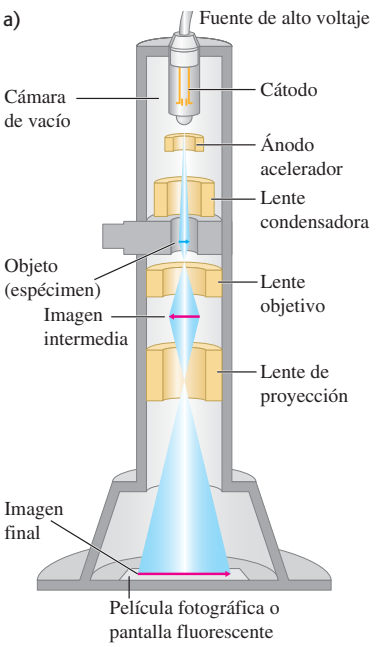
indica en la figura 39.10a. Los electrones son emitidos por un cátodo caliente, y acelerados por una diferencia normal de potencial de 10 a 100 kV. Pasan por una lente condensadora y se conforman en un rayo paralelo, antes de pasar por el espécimen u objeto a examinar. El espécimen a examinar es muy delgado, normalmente de 10 a 100 nm de espesor, por lo que los electrones no se desaceleran en forma apreciable al atravesarlo. La lente objetivo forma entonces una imagen intermedia de este objeto, y la lente de proyección produce una imagen real final del objeto. Las lentes objetivo y de proyección desempeñan los papeles de las lentes objetivo y ocular, respectivamente, de un microscopio óptico compuesto (sección 34.8). La imagen final se registra en una película fotográfica, o se proyecta sobre una pantalla fluorescente, para verla o fotografiarla. Todo el aparato, incluyendo el espécimen, debe estar encerrado en un recipiente al vacío, igual que en el caso del tubo de rayos catódicos; de no ser así, los electrones se dispersarían con las moléculas de aire, y perjudicarían la imagen. La figura 39.10b muestra una imagen que se obtuvo con un microscopio electrónico de transmisión.

Se podría pensar que cuando la longitud de onda del electrón es de 0.01 nm (como en el ejemplo 39.5), también la resolución sería más o menos de 0.01 nm. De hecho, casi nunca es mejor que 0.5 nm, en parte porque la distancia focal de una lente magnética depende de la rapidez del electrón, que nunca es exactamente igual para todos los electrones del haz.

El microscopio electrónico de barrido

Una variación importante es el *microscopio electrónico de barrido.* El haz de electrones se enfoca formando una línea muy fina que barre el espécimen, al igual que el haz de electrones en un cinescopio de TV traza la figura. Cuando el haz barre el espécimen, los electrones salen despedidos y son reunidos por un ánodo recolector positivo con respecto a la muestra, mantenido a un potencial de algunos cientos de volts. La corriente en el ánodo recolector se amplifica y usa para modular el haz de electrones en un tubo de rayos catódicos, que es barrido en sincronización con el haz en el microscopio. Así, el tubo de rayos catódicos traza una imagen muy aumentada del espécimen. Este esquema tiene varias ventajas. El espécimen puede ser grueso, porque el haz no necesita atravesarlo. También, la producción de electrones despedidos depende del *ángulo* con el que el haz llega a la superficie. Así, las micrografías de un microscopio electrónico de barrido parecen mucho más tridimensionales que las tomadas con luz visible. La resolución característica es de 10 nm, todavía mucho más fina que la de los mejores microscopios ópticos. La imagen que abre el presente capítulo muestra una imagen hecha con un microscopio electrónico de barrido.

39.10 a) Esquema de un microscopio electrónico de transmisión (MET). b) La imagen de este MET presenta una célula de piel en el proceso de división en dos células vástago. Se utilizó un color falso para mostrar el material genético (verde oscuro).

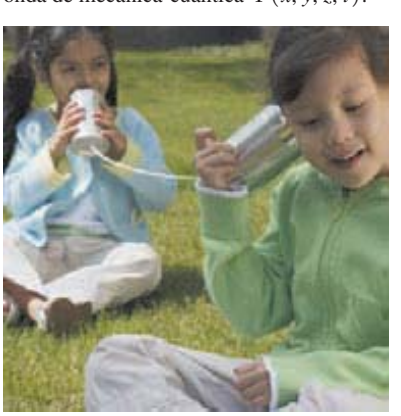


39.5 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger

Hemos reseñado pruebas persuasivas de que a una escala atómica o subatómica, una partícula como el electrón no se puede describir en forma sencilla como un punto. En cambio, usamos una *función de onda* para describir el estado de una partícula. Describiremos en forma más específica el lenguaje cinemático que se debe usar para remplazar el esquema clásico de la descripción de una partícula por sus coordenadas y componentes de velocidad.

Nuestro nuevo esquema para describir el estado de una partícula tiene mucho en común con el lenguaje del movimiento ondulatorio clásico. En el capítulo 15 describimos las ondas transversales en una cuerda, especificando la posición de cada punto en ella, en cada instante en el tiempo, mediante una *función de onda* (sección 15.3). Si y representa el desplazamiento con respecto al equilibrio en el momento t, de un punto de la cuerda a una distancia x del origen, la función $y\,(x, t)$ representa el desplazamiento de cualquier punto x en cualquier momento t. Una vez conocida la función de onda para determinado movimiento ondulatorio, sabemos todo lo que hay que saber acerca del movimiento. Podemos determinar la posición y la velocidad de cualquier punto en la cuerda en cualquier momento (figura 39.11). Desarrollamos formas específicas de esas funciones para ondas *senoidales,* en las que cada partícula tiene movimiento armónico simple.

39.11 Estos niños utilizan un "teléfono" de vaso y cordón para conversar. El desplazamiento del cordón está completamente descrito por una función de onda $y\,(x, t)$. Asimismo, una partícula está completamente descrita por la función de onda de mecánica-cuántica $\Psi(x, y, z, t)$.



Para las ondas sonoras seguimos una pauta parecida a la del capítulo 16. La función de onda $p\,(x, t)$ de una onda que viaja en dirección x, representaba la variación de presión en cualquier punto x en cualquier momento t. Usamos este lenguaje también en la sección 32.3, donde usamos *dos* funciones de onda para describir los campos eléctricos y magnéticos de las ondas *electromagnéticas*, en cualquier punto del espacio, en cualquier momento.

Por lo anterior, es natural usar una función de onda como elemento fundamental de nuestro nuevo lenguaje. El símbolo que se acostumbra utilizar para representar esta función de onda es Ψ o bien ψ. En general, Ψ es una función de todas las coordenadas de espacio y tiempo; en tanto que ψ es una función sólo de las coordenadas de espacio, y *no* del tiempo. Así como la función de onda $y\,(x, t)$ de las ondas mecánicas en una cuerda proporciona una descripción completa del movimiento, también la función de onda $\Psi(x, y, z, t)$ de una partícula contiene toda la información que se puede conocer acerca de ésta. La teoría matemática de la mecánica cuántica describe cómo usar $\Psi(x, y, z, t)$ para determinar los valores promedio de posición, velocidad, cantidad de movimiento, energía y cantidad de movimiento angular de la partícula. Las técnicas necesarias salen del alcance de esta descripción, pero están bien establecidas y respaldadas por resultados experimentales.

CUIDADO **Ondas de partícula contra ondas mecánicas** A diferencia de las ondas mecánicas en una cuerda, o las ondas sonoras en el aire, la función de onda de una partícula *no* es una onda mecánica que necesite algún medio material para propagarse. La función de onda describe la partícula, pero no la podemos definir en términos de algo material. Sólo podemos describir cómo se relaciona con efectos físicamente observables.

Interpretación de la función de onda

La función de onda describe la distribución de una partícula en el espacio, así como las funciones de onda electromagnética describen la distribución de los campos eléctrico y magnético. Cuando estudiamos los patrones de interferencia y difracción en los capítulos 35 y 36, vimos que la intensidad I de la radiación en cualquier punto de dichos patrones es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico, esto es, a E^2. En la interpretación de la interferencia y difracción de los fotones (sección 38.9), la intensidad en cada punto es proporcional a la cantidad de fotones que golpean en torno de ese punto, o también, a la *probabilidad* de que algún fotón individual llegue cerca de ese punto. Así, la magnitud del campo eléctrico en cada punto es proporcional a la probabilidad de encontrar un fotón cerca de ese punto.

Exactamente de esa misma forma, el cuadrado de la función de onda de una partícula en cada punto nos indica la probabilidad de encontrar la partícula cerca de ese punto. Con más precisión, deberíamos decir que es el cuadrado del *valor absoluto* de la función de onda, $|\Psi|^2$. Esto es necesario porque, como veremos después, Ψ puede ser una cantidad *compleja* con partes real e imaginaria. (La parte imaginaria de la función es una función real multiplicada por el número imaginario $i = \sqrt{-1}$.)

Para una partícula que se mueva en tres dimensiones, la cantidad $|\Psi(x, y, z, t)|^2\,dV$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre, en el momento t, dentro de un volumen dV en torno al punto (x, y, z). Es más probable que la partícula se encuentre en regiones donde $|\Psi|^2$ sea grande, etcétera. Esta interpretación, debida al físico alemán Max Born (figura 39.12), requiere que la función de onda Ψ esté *normalizada.* Es decir, que la integral de $|\Psi|^2\,dV$ sobre todo el espacio debe ser exactamente igual a 1. En otras palabras, la probabilidad de que la partícula esté *en algún lugar* del universo es exactamente 1, es decir, del 100%.

39.12 En 1926 el físico alemán Max Born (1882-1970) desarrolló la interpretación que $|\Psi|^2\,dV$ es la probabilidad de encontrar una partícula en determinado volumen dV. También acuñó el término "mecánica cuántica" (originalmente en alemán, *Quantenmechanik*). Por sus contribuciones Born compartió con Walter Bothe el Premio Nobel de Física en 1954.

CUIDADO **Interpretación de $|\Psi|^2$** Observe que $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ no es una probabilidad en sí misma. Más bien, $|\Psi(x, y, z, t)|^2\,dV$ es la probabilidad de encontrar la partícula dentro de un volumen dV en torno al punto (x, y, z) en el momento t. Si el volumen es más pequeño, se hace menos probable que la partícula se encuentre dentro de ese volumen, es decir, disminuye la probabilidad. Un nombre apropiado de $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ es la **función de distribución de probabilidad**, porque describe la forma en que está distribuida en el espacio la probabilidad de encontrar la partícula en distintos lugares.

Estados estacionarios

En general, el valor de $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ en determinado punto varía en función del tiempo. Eso tiene lógica: un electrón en un tubo de TV sale despedido del cátodo hacia la pantalla, y el lugar donde es más probable encontrarlo cambia al pasar el tiempo. Pero si la partícula está en un estado de energía definida, como un electrón en un átomo, en un nivel definido de energía, el valor de $|\Psi|^2$ en cada punto es *independiente* del tiempo. Ya que la distribución de probabilidad de la partícula en ese estado no cambia con el tiempo, a un estado con energía definida se le llama **estado estacionario**, el cual tiene una enorme importancia en la mecánica cuántica. Por ejemplo, para cada estado estacionario con energía definida en un átomo de hidrógeno, hay una función de onda específica. Es posible que un átomo esté en un estado que no sea idéntico con alguna de esas funciones de onda de estado estacionario, y que no tenga una energía definida. Sin embargo, la función de onda para cualquier estado siempre se puede escribir como una combinación de funciones de onda de estado estacionario. Vimos algo parecido en la sección 15.8: cualquier onda estacionaria en una cuerda, sin importar lo complicada que sea, se puede expresar como una combinación de vibraciones de la cuerda en modo normal. Dedicaremos la mayoría del capítulo 40 a determinar las funciones de onda de estado estacionario para distintas situaciones físicas.

¿Por qué $|\Psi|^2$ *sí* es independiente del tiempo, si la partícula está en un estado de energía definida? Esto es ¿por qué dichos estados son estacionarios? Para contestar esta pregunta notaremos primero el siguiente resultado de la mecánica cuántica: para una partícula en estado de energía definida E, la función de onda dependiente del tiempo $\Psi(x, y, z, t)$ se puede escribir como un producto de una función *independiente* del tiempo $\psi(x, y, z)$ y una función simple del tiempo:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar} \quad \text{(función de onda independiente del tiempo, para un estado estacionario)} \tag{39.14}$$

La función exponencial de la ecuación (39.14) se define con la *fórmula de Euler*, que establece que para cualquier ángulo θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \tag{39.15}$$

Así, la ecuación (39.14) indica que la función de onda para cualquier estado estacionario es una función *compleja*.

Ahora examinemos la función de distribución de probabilidad $|\Psi|^2$, obtenida con la ecuación (39.14). Note que $|\Psi|^2$ es el producto de Ψ por su *complejo conjugado* Ψ^*. Para determinar el complejo conjugado de un número complejo, sólo se sustituye toda i por $-i$. Por ejemplo, el complejo conjugado de $c = a + ib$, siendo a y b reales, es $c^* = a - ib$, de modo que $|c|^2 = c^*c = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (recuerde que $i^2 = -1$). El complejo conjugado de la ecuación (39.14) es

$$\Psi^*(x, y, z, t) = \psi^*(x, y, z)e^{+iEt/\hbar} \tag{39.16}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} |\Psi(x, y, z, t)|^2 &= \Psi^*(x, y, z, t)\Psi(x, y, z, t) \\ &= \psi^*(x, y, z)\psi(x, y, z)e^{+iEt/\hbar}\,e^{-iEt/\hbar} \\ &= \psi^*(x, y, z)\psi(x, y, z)e^0 = |\psi(x, y, z)|^2 \end{aligned} \tag{39.17}$$

Ya que $|\psi(x, y, z)|^2$ no depende del tiempo, la ecuación (39.17) demuestra que lo mismo debe ser válido para la función de distribución de probabilidad, $|\Psi(x, y, z, t)|^2$. Eso justifica el nombre de *estado estacionario* para un estado de energía definida.

La ecuación de Schrödinger

Hemos destacado la importancia de los estados estacionarios en la descripción de sistemas mecánico cuánticos. Como indica la ecuación (39.14), para describir un estado estacionario debemos conocer su función de onda espacial $\psi(x, y, z)$ y su energía E. Para determinar esos valores se usa una herramienta desarrollada en 1926 por el físico

39.13 Erwin Schrödinger (1887-1961) desarrolló en 1926 la ecuación que lleva su nombre, logro por el que compartió el Premio Nobel de Física en 1933, con el físico inglés P. A. M. Dirac. Después, hizo investigaciones en filosofía y en historia de la ciencia.

austriaco Erwin Schrödinger (figura 39.13), que se llama *ecuación de Schrödinger*. Esta ecuación tiene el mismo papel fundamental en la mecánica cuántica que las leyes de Newton en la mecánica, y las ecuaciones de Maxwell en el electromagnetismo. Nuestra comprensión de todo sistema mecánico cuántico, incluyendo átomos, moléculas, núcleos atómicos y electrones en los sólidos, se basa en las soluciones de esta ecuación para esos sistemas.

No podemos *deducir* la ecuación de Schrödinger partiendo de otros principios. En sí misma es un nuevo principio. Pero podemos demostrar cómo se relaciona con las ecuaciones de De Broglie y podemos hacer que parezca factible.

La forma más sencilla de la ecuación de Schrödinger es la de una partícula de masa m que sólo se mueve en una dimensión, paralela al eje x, por lo que la función de onda espacial ψ sólo es una función de x. Supondremos que la partícula se mueve en presencia de una fuerza conservativa que sólo tiene una componente x, por lo que está la energía potencial correspondiente $U(x)$. La **ecuación de Schrödinger** para esa partícula, con energía definida E, es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad \text{(ecuación de Schrödinger unidimensional)} \qquad (39.18)$$

En esta ecuación, E es constante. ¿Cómo saber si esta ecuación es correcta? Porque funciona. Las predicciones que se hacen con esta ecuación concuerdan con los resultados experimentales. En el capítulo 40 la aplicaremos a varios casos físicos, cada uno con una forma distinta de la función $U(x)$.

Ecuación de onda para una partícula libre

Por ejemplo, examinemos una partícula *libre* que no esté sometida a fuerza alguna. Si no hay fuerza, $U(x)$ es independiente de x; para simplificar, diremos que $U(x) = 0$. Si esa partícula se mueve en dirección de $+x$ con una cantidad de movimiento de magnitud p, su energía cinética (y, en consecuencia, su energía total) es $E = p^2/2m$. Esa partícula está en un estado de energía definida (un estado estacionario).

De acuerdo con las ecuaciones de De Broglie, la partícula tiene una longitud de onda definida, $\lambda = h/p$, y una frecuencia definida, $f = E/h$. Por analogía con las ondas mecánicas viajeras que estudiamos en la sección 15.3, escribiremos la función de onda para la partícula como sigue:

$$\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + B\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad (39.19)$$

siendo A y B constantes. Como en las ondas mecánicas del capítulo 15, y las ondas electromagnéticas del capítulo 32, usaremos el número de onda $k = 2\pi/\lambda$ y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ en la ecuación (39.19). Éstas se relacionan con la cantidad de movimiento y la energía como sigue:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h}\frac{h}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{h}hf = \frac{E}{\hbar} \qquad (39.20)$$

La función de onda de la ecuación (39.19) no parece estar en la forma de estado estacionario que se da en la ecuación (39.14). Sin embargo, la podemos transformar en ella, si $B = iA$. Entonces,

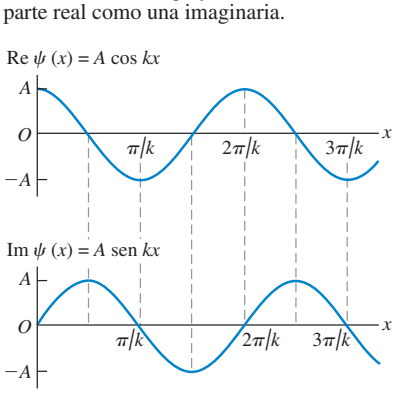
$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= A\cos(kx - \omega t) + iA\,\text{sen}(kx - \omega t)\\ &= A[\cos(kx - \omega t) + i\,\text{sen}(kx - \omega t)]\\ &= Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}\end{aligned} \qquad (39.21)$$

En la ecuación (39.21) hemos aplicado de nuevo la fórmula de Euler, que establece que para cualquier ángulo θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \qquad (39.22)$$

Al comparar la ecuación (39.21) y la (39.14) se ve que nuestra función de onda sí representa en realidad un estado estacionario con energía $E = \hbar\omega$ y la función de onda espacial $\psi(x) = Ae^{ikx}$. La figura 39.14 es una gráfica de las partes real e imaginaria de esta función.

39.14 La función de onda espacial $\psi(x) = Ae^{ikx}$ para una partícula libre de cantidad de movimiento definida $p = \hbar k$ es una función *compleja*: tiene tanto una parte real como una imaginaria.



Si sustituimos $\psi(x)$ en el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger, la (39.18), se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2(Ae^{ikx})}{dx^2} + (0)(Ae^{ikx}) = -\frac{\hbar^2}{2m}(ik)^2 Ae^{ikx} = \frac{\hbar^2k^2}{2m}Ae^{ikx} = \frac{p^2}{2m}\psi(x) \tag{39.23}$$

(Aplicamos el resultado de que la segunda derivada de e^{ax}, donde a es una constante, es a^2e^{ax}.) El lado derecho de la ecuación (39.18) es $E\psi(x)$. Como $E = p^2/2m$, de acuerdo con la ecuación (39.18), vemos de la ecuación (39.23) que la función de onda de la partícula libre en la ecuación (39.21) satisface la ecuación de Schrödinger.

Si k es positiva en la ecuación (39.21), la función de onda representa una partícula libre que se mueve en la dirección de $+x$. Si k es negativa, la cantidad de movimiento y, en consecuencia, el movimiento son en la dirección de $-x$. (Con un valor negativo de k, la longitud de onda es $\lambda = 2\pi/|k|$.)

Para una partícula libre no hay restricción sobre el valor de p, por lo que no hay restricción sobre el valor de la energía $E = p^2/2m$. En el capítulo 40 veremos que si $U(x)$ no es una constante, entonces sólo puede haber soluciones de la ecuación de Schrödinger para ciertos valores de E. Esos valores representan los *niveles de energía* permitidos en el sistema descrito por $U(x)$. Este descubrimiento es de máxima importancia. Antes del desarrollo de la ecuación de Schrödinger, no había forma de predecir niveles de energía partiendo de teoría fundamental alguna, excepto del modelo de Bohr, que había tenido un éxito muy limitado.

También hay una versión de la ecuación de Schrödinger que incluye la dependencia con respecto al tiempo. Se necesita para estudiar estados que *no* son estacionarios y para los cuales la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ depende del tiempo. Sin embargo, no necesitamos esa versión para calcular los niveles de energía y las funciones de onda de estados estacionarios. Cuando sí se necesita una función de onda dependiente del tiempo, para un estado estacionario de energía E, sólo usamos la ecuación (39.14). La ecuación de Schrödinger con dependencia del tiempo es esencial para estudiar los detalles de las *transiciones* entre los estados. En cursos más avanzados usted podrá estudiar la mecánica cuántica de fenómenos dependientes del tiempo, como emisión y absorción de fotones y duraciones de los estados.

Ejemplo 39.6 La ecuación de Schrödinger

Se tiene la función de onda $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$, donde k es positiva. ¿Es una función de onda estacionaria para una partícula libre? ¿Cuál es la energía?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una función de onda de estado estacionario válida para una partícula libre debe satisfacer la ecuación de Schrödinger, ecuación (39.18), con $U(x) = 0$.

PLANTEAR: Para probar la ecuación mencionada $\psi(x)$, sólo se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación. Si el resultado es una constante multiplicada por $\psi(x)$, la función de onda sí es una solución, y la constante es igual a la energía E.

EJECUTAR: Al sustituir $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$ y $U(x) = 0$ en la ecuación (39.18), obtenemos

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2(A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx})}{dx^2}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}[(ik)^2A_1e^{ikx} + (-ik)^2A_2e^{ikx}]\\ &= \frac{\hbar^2k^2}{2m}(A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(x)\end{aligned}$$

Vemos que el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger es igual a una constante por $\psi(x)$, por lo que esta $\psi(x)$ sí es una función de onda válida de estado estacionario para una partícula libre. La constante es justo igual a la energía: $E = \hbar^2k^2/2m$.

EVALUAR: Observe que $\psi(x)$ es una *superposición* de dos funciones de onda diferentes: una es para una partícula con cierta magnitud de cantidad de movimiento $p = \hbar k$ que se mueve en la dirección de x positiva, y otra es para una partícula con la misma magnitud de cantidad de movimiento, que se mueve en dirección de la x negativa. Si bien la función de onda combinada representa un estado estacionario con una energía definida, este estado *no* tiene una cantidad de movimiento definida. En el capítulo 40 veremos que esa función de onda puede representar una *onda estacionaria*, e investigaremos los casos en los que puede haber ondas de materia estacionaria.

Activ ONLINE Physics
17.7 Paquetes de ondas

Paquetes de ondas

La función de onda de una partícula libre, representada por la ecuación (39.21), tiene una cantidad de movimiento definida p en la dirección de x. Para tal estado, *no* hay incertidumbre en la cantidad de movimiento: $\Delta p_x = 0$. El principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (39.11), indica que $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$. Si Δp_x es cero, entonces Δx debe ser infinita. El precio que se paga por conocer con precisión la cantidad de movimiento de la partícula es que ¡no tenemos idea de *dónde* está la partícula! Esto se puede resolver calculando la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x,t)|^2$:

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = (A^* e^{-ikx} e^{+i\omega t})(A e^{ikx} e^{-i\omega t})$$
$$= A^* A e^0 = |A|^2$$

La función de distribución de probabilidad no depende del tiempo, como se esperaría, porque es un estado estacionario (un estado de energía definida). Tampoco depende de la posición, lo que indica que es igualmente probable encontrar la partícula ¡*en cualquier lugar* del espacio! Matemáticamente, este caso se presenta porque la función de onda espacial $\psi(x) = Ae^{ikx} = A\cos kx + iA\,\text{sen}\,kx$ es una función senoidal que abarca desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$ con la misma amplitud A. (Esto también quiere decir que no se puede normalizar la función de onda: la integral de $|\Psi(x,t)|^2$ sobre todo el espacio sería infinita para cualquier valor de A.)

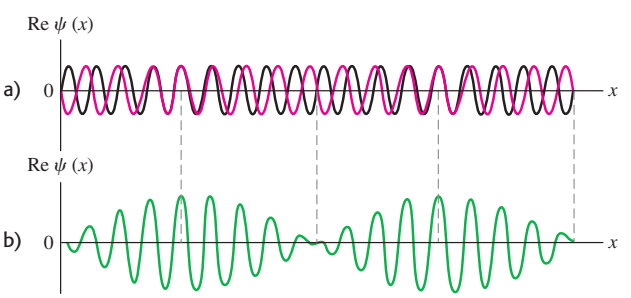
En los casos prácticos, siempre se tiene *cierta* idea de dónde está una partícula. Para describir este caso, necesitamos una función de onda que esté más localizada en el espacio. Podemos crear una sobreponiendo dos o más funciones senoidales, como hicimos en el ejemplo 39.6. En él sumamos dos funciones de onda con números de onda opuestos, k y $-k$; para obtener una función de onda localizada, debemos hacer una elección diferente.

Para simplificar los cálculos, imaginaremos funciones de onda que sólo dependen de una coordenada espacial (x), y las consideraremos en un instante en el tiempo (por ejemplo, $t = 0$). Entonces, nuestras funciones de onda sólo son funciones de x, por lo que las representaremos con ψ. Por ejemplo, sumemos dos funciones distintas de función de onda de estado estacionario para una partícula libre, como la de la ecuación (39.21); pero con valores del número de onda k_1 y k_2 un poco distintos. Cuando $t = 0$, los factores de tiempo $e^{-i\omega_1 t}$ y $e^{-i\omega_2 t}$ son ambos iguales a $e^0 = 1$, por lo que la función de onda, cuando $t = 0$, es

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A_1 e^{ik_1 x} + A_2 e^{ik_2 x} \\ &= [A_1\cos(k_1 x) + iA_1\,\text{sen}(k_1 x)] + [A_2\cos(k_2 x) + iA_2\,\text{sen}(k_2 x)] \\ &= [A_1\cos(k_1 x) + A_2\cos(k_2 x)] + i[A_1\,\text{sen}(k_1 x) + A_2\,\text{sen}(k_2 x)]\end{aligned} \tag{39.24}$$

Para separar las partes real e imaginaria de $\psi(x)$ hemos usado la fórmula de Euler, ecuación (39.22).

La figura 39.15a es una gráfica de las partes reales de las funciones individuales de onda para el caso en que $A_2 = -A_1$; la figura 39.15b representa la parte real de la función de onda $\psi(x)$ combinada, definida por la ecuación (39.24). Algo muy parecido a la figura 39.15b lo vimos en nuestro análisis de las pulsaciones, en la sección 16.7: al sobreponer dos ondas senoidales con frecuencias un poco distintas (figura 16.24), el resultado era una onda con carácter "concentrado" que no tenían las ondas individuales. De la misma forma, una partícula representada por la función de onda concentrada de



39.15 a) Las partes reales de dos ondas senoidales con números de onda un poco distintos, mostradas en un instante en el tiempo. b) La superposición de esas ondas tiene un número de onda igual al promedio de los dos números de onda de las dos ondas individuales. La amplitud varía, dando a la onda total un carácter agrupado que no poseía alguna de las ondas individuales.

la ecuación (39.24) es más probable que se encuentre en alguna región que en otras; esto es, está *localizada*. Sin embargo, la cantidad de movimiento de esa partícula ya no tiene un valor definido, porque comenzamos con dos números distintos. Esto concuerda con el principio de incertidumbre de Heisenberg: al disminuir la incertidumbre en la posición de la partícula, hemos aumentado la incertidumbre en su cantidad de movimiento.

No es difícil imaginar la superposición de dos ondas senoidales adicionales con distintos números de onda y amplitudes, a modo de reforzar concentraciones alternas en la figura 39.15b, y anularse en las intermedias. Por último, si sobreponemos ondas con una gran cantidad de números de onda distintos, construiremos una onda sólo con una concentración (figura 39.16). Entonces, finalmente, vemos algo que comienza a verse como una partícula y una onda, al mismo tiempo. Es una partícula en el sentido de estar localizada en el espacio; si la vemos desde cierta distancia, parecerá un punto. Pero también tiene una estructura periódica, que es la característica de una onda.

A ese pulso ondulatorio se le llama **paquete de ondas**. Esa superposición se puede representar mediante una ecuación como la siguiente:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx}\,dk \qquad (39.25)$$

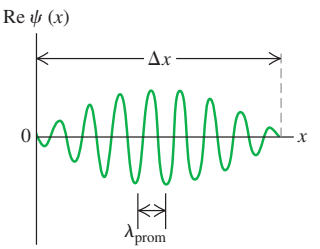
Esta integral representa la superposición de una cantidad muy grande de ondas, cada una con un número de onda distinto y cada una con una amplitud $A(k)$ que depende de k.

Hay una relación importante entre las dos funciones $\psi(x)$ y $A(k)$. Esta relación se muestra en forma cualitativa en la figura 39.17. Si la función $A(k)$ tiene un pico agudo, como en la figura 39.17a, sólo estamos superponiendo un intervalo angosto de números de onda. El pulso ondulatorio que resulta es entonces relativamente ancho (figura 39.17b). Pero si usamos un intervalo más amplio de números de onda, para que la función de onda $A(k)$ sea más ancha (figura 39.17c), el pulso ondulatorio tiene una localización más angosta (figura 39.17d).

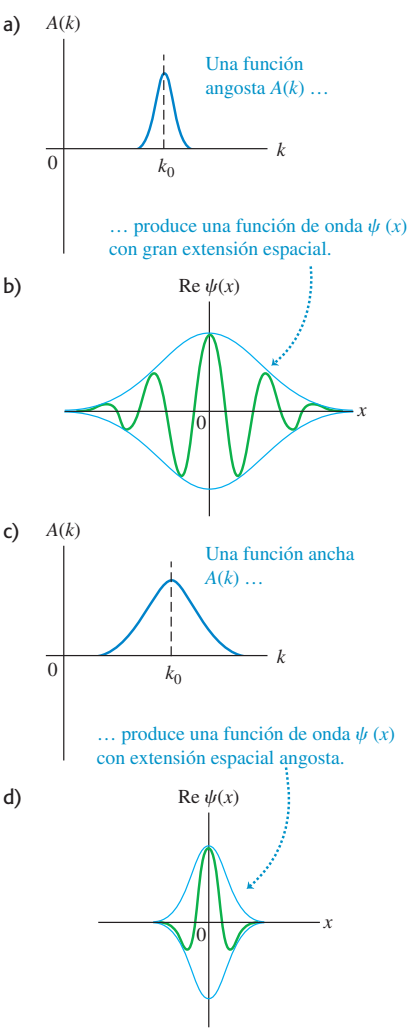
Lo que vemos es el principio de incertidumbre en acción. Un intervalo angosto de k equivale a un intervalo angosto de $p_x = \hbar k$ y, por lo tanto, una Δp_x pequeña; el resultado es una Δx relativamente grande. Un intervalo amplio de k corresponde a una Δp_x grande, y la Δx resultante es menor. Vemos entonces que el principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ es una consecuencia inevitable de la relación de De Broglie, y de las propiedades de las integrales, como la ecuación (39.25). Esas integrales se llaman *integrales de Fourier*; son una generalización del concepto de las series de Fourier, que mencionamos en la sección 15.8. En ambos casos, estamos representando una forma compleja de onda como una superposición de funciones senoidales. Con las series de Fourier usamos una sucesión de frecuencias (o valores de k) que son múltiplos enteros de algún valor básico; en tanto que con las integrales de Fourier superponemos funciones con una distribución *continua* de valores de k.

Evalúe su comprensión de la sección 39.5 ¿Un paquete de onda definido por la ecuación (39.25) representa un estado estacionario?

39.16 Al sobreponer una gran cantidad de ondas senoidales con distintos números de onda y las amplitudes adecuadas, se puede producir un pulso ondulatorio con longitud de onda $\lambda_{prom} = 2\pi/k_{prom}$ localizada en una región del espacio de longitud Δx. ¿Ese pulso es una partícula o una onda?



39.17 Cómo al variar la función $A(k)$ en la expresión del paquete de ondas, ecuación (39.25), cambia el carácter de la función de onda $\psi(x)$.



CAPÍTULO 39 RESUMEN

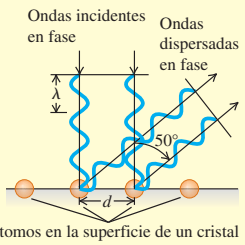
Ondas de De Broglie: Los electrones y otras partículas tienen propiedades ondulatorias. La longitud de esas ondas depende de la cantidad de movimiento de la partícula, de la misma manera que para los fotones. El estado de una partícula no se describe por sus coordenadas y sus componentes de velocidad, sino por una función de onda, que en general es una función de las tres coordenadas de espacio, y del tiempo. (Véase el ejemplo 39.1.)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad (39.1)$$

$$E = hf \qquad (39.2)$$

Difracción de electrones y microscopio electrónico: La difracción de un haz de electrones desde la superficie de un cristal metálico proporcionó la primera confirmación directa de la naturaleza ondulatoria de las partículas. Si se acelera un electrón no relativista desde el reposo, a través de una diferencia de potencial V_{ba}, su longitud de onda se determina con la ecuación (39.5). Los microscopios electrónicos usan longitudes de onda muy pequeñas, de electrones en rápido movimiento, para formar imágenes cuya resolución es miles de veces mayor que la alcanzable con microscopios de luz visible. (Véanse los ejemplos 39.2 y 39.5.)

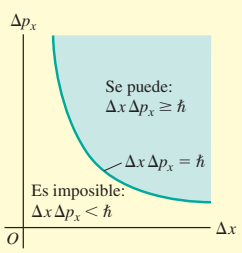
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} \qquad (39.5)$$



Principio de incertidumbre de Heisenberg: Es imposible hacer determinaciones precisas de una coordenada de una partícula, y de la componente correspondiente de cantidad de movimiento. La precisión de esas mediciones, para las componentes x, está limitada por el principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (39.11); hay relaciones correspondientes para las componentes y y z. La incertidumbre ΔE en la energía de un estado ocupado durante un tiempo Δt se expresa con la ecuación (39.13). En tales ecuaciones, $\hbar = h/2\pi$. (Véanse los ejemplos 39.3 y 39.4.)

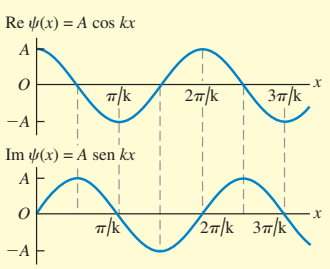
$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \qquad (39.11)$$
(principio de incertidumbre de Heisenberg para posición y cantidad de movimiento)

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \qquad (39.13)$$
(principio de incertidumbre de Heisenberg para energía y tiempo)



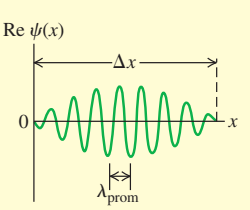
Funciones de onda: La función de onda $\Psi(x, y, z, t)$ para una partícula contiene toda la información acerca de esa partícula. La cantidad $|\Psi(x, y, z, t)|^2$, llamada función de distribución de probabilidad, determina la probabilidad relativa de encontrar una partícula cerca de determinada posición en determinado momento. Si la partícula está en un estado de energía definida, llamado estado estacionario, $\Psi(x, y, z, t)$ es un producto de una función ψ que sólo depende de las coordenadas de espacio, por una función $e^{-iEt/\hbar}$ que depende sólo del tiempo. Para un estado estacionario, la función de distribución de probabilidad es independiente del tiempo.

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad (39.14)$$
(estado estacionario)



La ecuación de Schrödinger: Para una partícula que se mueve en una dimensión, en presencia de una función de energía potencial $U(x)$, la función de onda para un estado estacionario de energía E satisface la ecuación de Schrödinger. Se pueden formar funciones de onda más complejas superponiendo funciones de onda de estado estacionario. Estas funciones más complejas pueden representar partículas que estén localizadas en cierta región, pero que sigan teniendo propiedades ondulatorias, comunicándole aspectos tanto de partícula como onda. (Véase el ejemplo 39.6.)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$
(ecuación de Schrödinger unidimensional) (39.18)



Términos clave

longitud de onda de De Broglie, *1350*
mecánica cuántica, *1350*
función de onda, *1350*
condición en la frontera, *1351*
difracción de electrones, *1353*
principio de incertidumbre de Heisenberg, *1357*
microscopio electrónico, *1360*
función de distribución de probabilidad, *1362*
estado estacionario, *1363*
ecuación de Schrödinger, *1364*
paquete de ondas, *1367*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

El detalle visible más pequeño en una imagen es comparable con la longitud de onda utilizada para formar la imagen. Fácilmente los electrones pueden estar dados por una cantidad de movimiento grande p y, por ende, una longitud de onda corta $\lambda = h/p$, de manera que sirven para mostrar detalles extremadamente pequeños. (Véase la sección 39.4.)

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

39.1 Respuesta: i) De acuerdo con el ejemplo 39.1, la rapidez de una partícula es $v = h/\lambda m$ y la energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2 = (m/2)(h/\lambda m)^2 = h^2/2\lambda^2 m$. Esto demuestra que para determinada longitud de onda, la energía cinética es inversamente proporcional a la masa. Por lo tanto, el protón, que tiene menor masa, tiene más energía cinética que el neutrón.

39.2 Respuesta: no La energía de un fotón es $E = hf$ y su frecuencia es $f = c/\lambda$. Por consiguiente, $E = hc/\lambda$ y $\lambda = hc/E = (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}) \times (2.998 \times 10^8\ \text{m/s})/(54\ \text{eV}) = 2.3 \times 10^{-8}\ \text{m}$. Es más de 100 veces mayor que la longitud de onda de un electrón con la misma energía. Mientras que los protones y electrones tienen propiedades ondulatorias, tienen distintas relaciones entre su energía y su cantidad de movimiento y, en consecuencia, entre su energía y su longitud de onda.

39.3 Respuestas: i) y iii) (empate), ii) y iv) (empate) Según el principio de incertidumbre de Heisenberg, cuanto menor sea la incertidumbre Δx en la coordenada x, mayor será la incertidumbre Δp_x en la cantidad de movimiento x. La relación entre Δx y Δp_x no depende de la masa de la partícula, y de esta manera es la misma para un protón que para un electrón.

39.5 Respuesta: no La ecuación (39.25) representa una superposición de funciones de onda con distintos valores de número de onda k y, por consiguiente, distintos valores de energía $E = \hbar^2 k^2/2m$. El estado que representa esta función de onda combinada no es uno de energía definida y, en consecuencia, no es un estado estacionario. Otra forma de verlo es notar que la función de onda dependiente del tiempo $\Psi(x, t)$ tendría un factor $e^{-iEt/\hbar}$ dentro de la integral en la ecuación (39.25), con un valor distinto de E para cada valor de k. En consecuencia, esta función de onda tiene una dependencia muy complicada con respecto al tiempo, y la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ sí depende del tiempo.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P39.1. En un intento por reconciliar los modelos ondulatorio y corpuscular de la luz, algunas personas han sugerido que el protón sube y baja en las crestas y los valles de la onda electromagnética. ¿Qué aspectos son *incorrectos* en tal descripción.

P39.2. Si un protón y un electrón tienen la misma rapidez, ¿cuál tiene la mayor longitud de onda de De Broglie? Explique por qué.

P39.3. Si un protón y un electrón tienen la misma energía cinética ¿cuál tiene la mayor longitud de onda de De Broglie? Explique por qué.

P39.4. ¿Un fotón tiene longitud de onda de De Broglie? En caso afirmativo, ¿cómo se relaciona con la longitud de la onda electromagnética asociada? Explique por qué.

P39.5. Cuando un haz de electrones pasa por un orificio muy pequeño, produce un patrón de difracción sobre una pantalla, al igual que la luz. ¿Esto significa que un electrón se dispersa al pasar por el orificio? ¿Qué indica dicho patrón?

P39.6. Se le pide diseñar un sistema de imanes para dirigir un haz de electrones de 54 eV, como los que se describen en el ejemplo 39.2 (sección 39.2). Se busca dirigir el haz de electrones hasta un lugar específico deseado, con una exactitud de ± 1.0 mm. En su diseño ¿toma usted en cuenta la naturaleza ondulatoria de los electrones? Explique por qué.

P39.7. La mitad superior del patrón de difracción de electrones de la figura 39.6 es la imagen especular de la mitad inferior. ¿Sería correcto decir que la mitad superior del patrón es causada por electrones que pasan por la mitad superior de la rendija? Explique por qué.

P39.8. Determinado electrón en el aparato experimental de la figura 39.6 va a dar a la película fotográfica a una distancia x por arriba del centro del patrón. Dado el valor de x, ¿es posible calcular la trayectoria precisa que siguió el electrón? Explique por qué.

P39.9. ¿El principio de incertidumbre tiene algo que ver con la buena puntería? Es decir, ¿la exactitud con la que una bala puede dar en el blanco está limitada por el principio de incertidumbre? Explique por qué.

P39.10. Suponga que se hace un experimento de interferencia con dos rendijas y un haz de electrones. ¿Se formaría el mismo patrón de interferencia si se descubre primero una rendija y después la otra, en vez de las dos al mismo tiempo? Si no es así, ¿por qué no? ¿Acaso cada electrón no pasa por una rendija o por la otra? O bien, ¿cada electrón pasa por ambas rendijas? Describa esta última posibilidad a la luz del principio de complementariedad.

P39.11. La ecuación (39.13) indica que la energía de un sistema puede tener incertidumbre. ¿Quiere decir eso que ya no es válido el principio de conservación de la energía? Explique por qué.

P39.12. La luz láser se debe a transiciones de estados metaestables de vida larga. ¿Por qué es más monocromática que la luz ordinaria?

P39.13. ¿Podría hacerse un experimento de difracción de electrones con tres o cuatro rendijas? ¿Con una retícula con muchas rendijas? ¿Qué clase de resultados se esperarían con una rejilla? ¿Se transgrediría el principio de incertidumbre? Explique por qué.

P39.14. Como se ve en la mitad inferior de la figura 39.5, el patrón de difracción formado por electrones que atraviesan una hoja de aluminio es una serie de anillos concéntricos. Pero si se sustituye la hoja de aluminio por un monocristal de aluminio, en el patrón sólo aparecen ciertos puntos de esos anillos. Explique por qué.

P39.15. ¿Por qué un microscopio electrónico puede tener más aumento que un microscopio ordinario?

P39.16. Si la mecánica cuántica sustituye el lenguaje de la mecánica newtoniana, ¿por qué no hay que usar funciones de onda para describir el movimiento de cuerpos macroscópicos, como pelotas de béisbol y automóviles?

P39.17. Un estudiante hace notar que la relación entre la óptica geométrica y la imagen ondulatoria más general es análoga a la relación entre la mecánica newtoniana, con trayectorias de partícula bien definidas, y la mecánica cuántica. Comente esta apreciación.

P39.18. Como indica la ecuación (39.14), la función de onda dependiente del tiempo para un estado estacionario es un número complejo que tiene una parte real y otra parte imaginaria. ¿Cómo puede esta función tener un significado físico, si tiene una parte *imaginaria*?

P39.19. Cuando usted mide la presión del aire en un neumático, siempre escapa un poco de aire; el proceso de hacer la medición cambia la cantidad que se mide. Imagine otros ejemplos de mediciones que cambien o perturben la cantidad que se mide.

P39.20. ¿Por qué debe normalizarse la función de onda de una partícula?

P39.21. Si una partícula está en un estado estacionario, ¿quiere decir eso que no se mueve? Si una partícula se mueve en el espacio vacío, con una cantidad de movimiento constante $\vec{p}$ y, en consecuencia, con energía constante $E = p^2/2m$, ¿está en un estado estacionario? Explique sus respuestas.

P39.22. Algunos láseres emiten luz en impulsos que sólo duran 10^{-12} s. La longitud de esos impulsos es $(3 \times 10^8 \text{ m/s})(10^{-12} \text{ s}) = 3 \times 10^{-4}$ m $= 0.3$ mm. ¿La luz de un láser pulsado puede ser tan monocromática, que la de un láser que emita un haz continuo y permanente? Explique por qué.

Ejercicios

Sección 39.1 Ondas de De Broglie

39.1. *a*) Un electrón se mueve con una rapidez de 4.70×10^6 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie? *b*) Un protón se mueve con la misma rapidez. Determine su longitud de onda de De Broglie.

39.2. Para experimentos de difracción en cristales (descritos en la sección 39.2) con frecuencia lo adecuado son longitudes de onda del orden de 0.20 nm. Determine la energía, en electrón volts, de una partícula con esa longitud de onda, si esa partícula es *a*) un fotón; *b*) un electrón, y *c*) una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg).

39.3. Un electrón tiene una longitud de onda de De Broglie de 2.80×10^{-10}. Determine: *a*) la magnitud de su cantidad de movimiento; *b*) su energía cinética (en joules y en electrón volts).

39.4. Longitud de onda para una partícula alfa. Una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) emitida en el decaimiento radiactivo del uranio 238 tiene 4.20 MeV de energía. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

39.5. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, ¿cuál es la longitud de onda de De Broglie del electrón, cuando está *a*) en el nivel $n = 1$ y *b*) en el nivel $n = 4$? En cada caso, compare la longitud de De Broglie con la circunferencia $2\pi r_n$ de la órbita.

39.6. *a*) Una partícula libre no relativista, de masa m, tiene energía cinética K. Deduzca una ecuación de la longitud de onda de De Broglie de la partícula, en función de m y K. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón de 800 eV?

39.7. ¿Por qué no *nos* difractamos? *a*) Calcule la longitud de onda de De Broglie de una persona común que pasa por una entrada. Efectúe aproximaciones razonables de las cantidades necesarias. *b*) La persona del inciso *a*) muestra un comportamiento ondulatorio cuando pasa por una sola rendija de la entrada? ¿Por qué?

39.8. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para un electrón cuya rapidez es *a*) $v = 0.480c$ y *b*) $v = 0.960c$? (*Sugerencia:* use la ecuación relativista correcta para la cantidad de movimiento, si es necesario.)

39.9. *a*) Si un fotón y un electrón tienen la misma energía de 20.0 eV cada uno, determine su longitud de onda. *b*) Si un fotón y un electrón tienen la misma longitud de onda de 250 nm cada uno, calcule su energía. *c*) Va a estudiar una molécula orgánica de unos 250 nm de longitud, ¿usará un microscopio óptico o uno electrónico? Aproximadamente, ¿cuál es la longitud de onda que debe usar y qué técnica, los fotones o los electrones? Probablemente, ¿cuál de los dos dañará menos la molécula?

39.10. El hidrógeno gaseoso (H_2) está a 0 °C. La masa de un *átomo* de hidrógeno es de 1.67×10^{-27} kg. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie promedio de las moléculas de hidrógeno? *b*) ¿Qué tan rápido se tiene que mover un electrón para tener la misma longitud de onda de De Broglie que el hidrógeno? ¿Necesita considerar la relatividad de este electrón? *c*) ¿Cuál debería ser la energía de un fotón que tiene la misma longitud de onda que las moléculas y los electrones de H_2? Compárela con la energía cinética de la molécula de hidrógeno del inciso *a*) y del electrón en el inciso *b*).

39.11. Longitud de onda de una bala. Calcule la longitud de onda de De Broglie para una bala de 5.00 g que se mueve a 340 m/s. ¿La bala tendrá propiedades ondulatorias?

Sección 39.2 Difracción de electrones

39.12. ¿A través de qué diferencia de potencial se deben acelerar los electrones para que tengan *a*) la misma longitud de onda que un rayo x de 0.150 nm y *b*) la misma energía que el rayo x del inciso *a*)?

39.13. *a*) ¿Aproximadamente con qué velocidad debe moverse un electrón para que tenga una longitud de onda con la que se pueda medir la distancia entre átomos adyacentes en los cristales normales (unos 0.10 nm)? *b*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón en el inciso *a*)? *c*) ¿Cuál sería la energía de un fotón de la misma longitud de onda que el electrón en el inciso *b*)? *d*) ¿Cuáles de ellos, electrones o fotones, serían un detector más efectivo en estructuras pequeñas? ¿Por qué?

39.14. Un haz de electrones se acelera del reposo con una diferencia de potencial de 0.100 kV y luego pasa por una rendija delgada. El haz difractado muestra su primera difracción mínima a $\pm 11.5°$ desde la dirección original del haz visto desde la rendija. *a*) ¿Necesitamos usar fórmulas de relatividad? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Qué tan ancha es la rendija?

39.15. Un haz de neutrones con la misma energía se dispersa en átomos que están a distancias de 0.0910 nm en el plano superficial de un cristal. El máximo de intensidad $m = 1$ se presenta cuando el ángulo θ en la figura 39.3 es de 28.6°. ¿Cuál es la energía cinética de cada neutrón en el haz en eV?

39.16. Un haz de electrones de 188 eV se dirige, con incidencia normal, hacia una superficie cristalina como se observa en la figura 39.4b. El máximo de intensidad de $m = 2$ está en un ángulo $\theta = 60.6°$. *a*) ¿Cuál es la distancia entre átomos adyacentes en la superficie? *b*) ¿En qué otro ángulo, o ángulos, hay un máximo de intensidad? *c*) ¿Para qué energía de electrón (eV) estaría el máximo de intensidad de $m = 1$ en $\theta = 60.6°$? Para esta energía ¿hay un máximo de intensidad de $m = 2$? Explique por qué.

39.17. En un experimento de difracción de electrones como el de la figura 39.3, se utiliza un CD-ROM en vez de un cristal. La superficie del CD-ROM tiene pistas formadas de agujeros diminutos, con una distancia uniforme de 1.60 μm. *a*) Si la rapidez de los electrones es 1.26×10^4 m/s, ¿a qué valores de θ aparecerán los máximos de intensidad de $m = 1$ y $m = 2$? *b*) Los electrones dispersados en esos máximos llegan, con incidencia normal, a una película fotográfica a 50.0 cm del CD-ROM. ¿Cuál es la distancia entre esos máximos en la película?

Sección 39.3 Probabilidad e incertidumbre

39.18. Un fastidioso mosquito de 1.5 mg está zumbando cerca de usted mientras estudia física en su habitación, la cual mide 5.0 m de ancho y 2.5 m de alto. Decide aniquilar de un golpe al insecto cuando éste se aproxima a usted pero sabe que necesita estimar la rapidez del insecto

para darle un golpe certero. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal del mosquito? *b*) ¿Qué límite impone en el principio de incertidumbre de Heisenberg a su capacidad de conocer la velocidad horizontal de este mosquito? ¿Dicha limitación es un impedimento serio en su intento por aniquilarlo?

39.19. Con mediciones extremadamente cuidadosas, usted determina la coordenada x del centro de masa de un automóvil, con una incertidumbre tan sólo de 1.00 μm. La masa del vehículo es de 1200 kg. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la componente x de la velocidad del centro de masa del auto, de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg? *b*) ¿El principio de incertidumbre impone un límite práctico a nuestra capacidad de hacer mediciones simultáneas de posiciones y velocidades de objetos ordinarios, como automóviles, libros y personas? Explique por qué.

39.20. Una canica de 10.0 g se coloca suavemente sobre una mesa horizontal que tiene 1.75 m de ancho. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal de la canica? *b*) Según el principio de incertidumbre de Heizenberg, ¿qué incertidumbre mínima tiene la velocidad horizontal de la canica? *c*) A la luz de su respuesta al inciso *b*), ¿cuál es el tiempo máximo que la canica podría permanecer el la mesa? Compare este tiempo con la edad del Universo, que es aproximadamente de 14 mil millones de años. (*Sugerencia:* ¿puede usted saber que la velocidad horizontal de la canica es *exactamente* cero?)

39.21. Un investigador ha ideado un método nuevo de aislar partículas individuales. Dice que ese método le permite determinar, en forma simultánea, la posición de una partícula a lo largo de un eje, con una desviación estándar de 0.12 nm, y su componente de cantidad de movimiento a lo largo de ese eje con una desviación estándar de $3.0 \times 10^{-25}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$. Aplique el principio de incertidumbre de Heisenberg para evaluar la validez de su afirmación.

39.22. *a*) La coordenada x de un electrón se mide con una incertidumbre de 0.20 mm. ¿Cuál es la componente x de la velocidad del electrón v_x, si la incertidumbre porcentual mínima en una medición simultánea de v_x es 1.0%? *b*) Repita el inciso *a*) para un protón.

39.23. Un átomo en un estado metaestable tiene 5.2 ms de duración. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado metaestable?

39.24. *a*) La incertidumbre en la componente y de la posición de un protón es 2.0×10^{-12} m. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en una medición simultánea de la componente y de la velocidad del protón? *b*) La incertidumbre en la componente z de la velocidad de un electrón es de 0.250 m/s. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en una medición simultánea de la coordenada z del electrón?

39.25. La partícula ψ ("psi") tiene una energía en reposo de 3097 MeV ($1\ \text{MeV} = 10^6\ \text{eV}$). Es inestable y su vida es de 7.6×10^{-21} s. Estime la incertidumbre en la energía en reposo de la partícula ψ. Exprese su respuesta en MeV, y como fracción de la energía en reposo de esa partícula.

39.26. Duración de una partícula. La partícula W^+ es inestable y tiene energía en reposo de 80.41 GeV ($1\ \text{GeV} = 10^9\ \text{eV}$), y la incertidumbre de su energía en reposo es de 2.06 GeV. Estime la duración, o vida, de la partícula W^+.

Sección 39.4 El microscopio electrónico

39.27. Usted quiere estudiar el espécimen biológico mediante una longitud de onda de 10.0 nm, y tiene la opción de utilizar ondas electromagnéticas, o bien, un microscopio electrónico. *a*) Determine la razón entre la energía de un fotón con longitud de onda de 10.0 nm y la energía cinética de un electrón con longitud de onda de 10.0 nm. *b*) En vista de su respuesta al inciso *a*), ¿qué sería menos dañino para el espécimen al estudiarlo: fotones o electrones?

39.28. *a*) En un microscopio electrónico, ¿qué voltaje de aceleración se necesita para obtener electrones con una longitud de onda de 0.0600 nm? *b*) Si en vez de electrones se usan protones, ¿qué voltaje de aceleración se necesita para producir protones cuya longitud de onda sea de 0.0600 nm? (*Sugerencia:* en cada caso, la energía cinética inicial es despreciable.)

Sección 39.5 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger

39.29. Considere una función de onda dada por $\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$, donde $k = 2\pi/\lambda$ y A es una constante real. *a*) ¿Para qué valores de x es máxima la probabilidad de encontrar la partícula descrita por esa función de onda? Explique por qué. *b*) ¿Para qué valores de x esa probabilidad es *cero*? Explique por qué.

39.30. Calcule $|\Psi|^2$ para $\Psi = \psi \operatorname{sen} \omega t$, donde ψ es independiente del tiempo, y ω es una constante real. ¿Es una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

39.31. Normalización de la función de onda. Considere una partícula que se mueve en una dimensión, a la que llamaremos eje x. *a*) ¿Significa esto que la función de onda de esta partícula está *normalizada*? *b*) La función de onda es $\psi(x) = e^{ax}$, donde a es un número positivo real normalizado? ¿Esto podría ser una función de onda válida? *c*) Si la partícula descrita por la función de onda $\psi(x) = Ae^{-bx}$, donde A y b son números positivos reales, está confinada al intervalo $x \geq 0$, determine A (incluyendo sus unidades), de manera que la función de onda esté normalizada?

39.32. Una partícula se describe con una función de onda $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, donde A y α son constantes reales positivas. Si aumenta el valor de α, ¿qué efecto tiene sobre *a*) la incertidumbre en la posición de la partícula y *b*) la incertidumbre en la cantidad de movimiento de la partícula? Explique por qué.

39.33. Considere la función de valores complejos $f(x, y) = (x - iy)/(x + iy)$. Calcule $|f|^2$.

39.34. La partícula A se describe con la función de onda $\psi(x, y, z)$. La partícula B se describe con la función de onda $\psi(x, y, z)e^{i\phi}$, siendo ϕ una constante real. ¿Cómo se compara la probabilidad de encontrar la partícula A dentro del volumen dV en torno a cierto punto en el espacio, con la probabilidad de encontrar la partícula B dentro de ese mismo volumen?

39.35. Una partícula en movimiento en una dimensión (el eje x) se describe por la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-bx}, & \text{para } x \geq 0 \\ Ae^{bx}, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

donde $b = 2.00\ \text{m}^{-1}$, $A > 0$ y el eje x apunta hacia la derecha. *a*) Determine A de manera que se normalice la función de onda. *b*) Grafique la función de onda. *c*) Calcule la probabilidad de encontrar esta partícula en cada una de las siguientes regiones: i) dentro de los 50.0 cm del origen, ii) del lado izquierdo del origen (¿puede usted adivinar primero la respuesta observando la gráfica de la función de onda?), iii) entre $x = 0.500$ m y $x = 1.00$ m.

39.36. Combinaciones lineales de funciones de onda. Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de la ecuación (39.18), con la misma energía E. Demuestre que $\psi = B\psi_1 + C\psi_2$ también es una solución con energía E, para cualquier valor de las constantes B y C.

39.37. Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de la ecuación (39.18) con energías E_1 y E_2, respectivamente, donde $E_1 \neq E_2$. ¿Es $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$, donde A y B son constantes distintas de cero, una solución a la ecuación (39.18)? Explique su respuesta.

Problemas

39.38. Un haz de electrones de 40 eV se mueve en la dirección $+x$, y pasa por una rendija paralela al eje y, de 5.0 μm de ancho. El patrón de difracción se capta en una pantalla a 2.5 m de la rendija. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de los electrones? *b*) ¿Cuánto tardan los electrones en ir de la rendija a la pantalla? *c*) Use el ancho del patrón

central de difracción para calcular la incertidumbre en la componente y de la cantidad de movimiento de un electrón, justo después de haber pasado por la rendija. *d*) Use el resultado del inciso *c*) y el principio de incertidumbre de Heisenberg (ecuación 39.11 para y) y estime la incertidumbre mínima en la coordenada y del electrón justo después de haber pasado por la rendija. Compare su resultado con el ancho de la rendija.

39.39. *a*) ¿Cuál es la energía de un fotón cuya longitud de onda es 0.10 μm? *b*) Aproximadamente ¿con qué diferencia de potencial deben acelerarse los electrones, para que muestren naturaleza ondulatoria al pasar por un agujero de alfiler de 0.10 μm de diámetro? ¿Cuál es la rapidez de esos electrones? *c*) Si se usaran protones en vez de electrones, ¿con qué diferencia de potencial se tendrían que acelerar, para que mostraran naturaleza ondulatoria al pasar por el agujero de alfiler? ¿Cuál sería la rapidez de esos protones?

39.40. Unos electrones pasan por una sola rendija de 150 nm de ancho y llegan a una pantalla a 24.0 cm de distancia. Se determina que no llegan electrones a la pantalla en ángulos mayores que $\pm 20.0°$, pero que sí los hay en todos los puntos más cercanos al centro. *a*) ¿Qué velocidad tenían esos electrones al pasar por la rendija? *b*) ¿Cuáles serán los siguientes ángulos mayores en los que no llegan electrones a la pantalla?

39.41. Un haz de electrones se acelera del reposo y luego pasa por un par de rendijas delgadas idénticas que están separadas 1.25 nm. Usted observa que la primera franja oscura de interferencia de doble rendija ocurre en $\pm 18.0°$ desde la dirección original del haz, vista en una pantalla lejana. *a*) ¿Estos electrones son relativistas? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿A través de qué diferencia de potencial estaban acelerados los electrones?

39.42. Un haz de protones y un haz de partículas alfa (de masa 6.64×10^{-27} y carga de $+2e$) se aceleran del reposo a través de la misma diferencia de potencial, y pasan por orificios circulares idénticos en una película opaca muy delgada. Visto desde el orificio, el haz de protones difractado forma su primer anillo oscuro a 15° con respecto a su dirección original. Cuando se observa de forma similar, ¿con qué ángulo la partícula alfa formará su primer anillo oscuro?

39.43. Un haz de electrones y otro de fotones pasan por rendijas idénticas. En una pantalla lejana, la primera franja oscura ocurre en el mismo ángulo para ambos haces. Las rapideces de los electrones son mucho menores que la rapidez de la luz. *a*) Exprese la energía de un fotón en términos de la energía cinética K de uno de los electrones. *b*) ¿Cuál es mayor, la energía de un fotón o la energía cinética de un electrón?

39.44. Se pasa luz coherente a través de dos rendijas angostas, cuya separación es de 40.0 μm. La franja clara de segundo orden en el patrón de interferencia está a un ángulo de 0.0300 rad. Si se usaran electrones en vez de luz, ¿cuál debe ser su energía cinética (en eV) para producir un patrón de interferencia que también tenga el máximo de segundo orden a 0.0300 rad?

39.45. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un glóbulo rojo, con masa de 1.00×10^{-11} g, que se mueve a 0.400 cm/s? ¿Debemos preocuparnos por la naturaleza ondulatoria de los glóbulos rojos al describir el flujo de la sangre por el organismo?

39.46. Para explorar la estructura interior del núcleo atómico se usan electrones de alta rapidez. Para ellos sigue siendo válida la ecuación $\lambda = h/p$, pero se debe usar la ecuación relativista de la cantidad de movimiento $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. *a*) Demuestre que la rapidez de un electrón cuya longitud de onda λ de De Broglie es

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc\lambda/h)^2}}$$

b) la cantidad h/mc es igual a 2.426×10^{-12} m. [Como vimos en la sección 38.7, esta misma cantidad aparece en la ecuación (38.23), de la dispersión de Compton de fotones por electrones.] Si λ es pequeña en comparación con h/mc, el denominador en la ecuación determinada en el inciso *a*) se acerca a la unidad, y la rapidez v se acerca mucho a c. En este caso, conviene escribir $v = (1 - \Delta)c$ y expresar la rapidez del electrón en función de Δ y no de v. Deduzca una ecuación para Δ que sea válida cuando $\lambda \ll h/mc$. [*Sugerencia:* use el desarrollo del binomio $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n - 1)z^2/2 + \cdots$, válido para el caso $|z| < 1$.] *c*) ¿Con qué rapidez se debe mover un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea de 1.00×10^{-15} m, comparable con el tamaño de un protón? Exprese su respuesta en la forma $v = (1 - \Delta)c$, y determine el valor de Δ.

39.47. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie, para un electrón que se acelera desde el reposo a través de un aumento de potencial de 125 V? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie, de una partícula alfa $(q = +2e,\ m = 6.64 \times 10^{-27}\,\text{kg})$ acelerada desde el reposo por una caída de potencial de 125 V?

39.48. Suponga que la incertidumbre en la posición de un electrón es igual al radio de la órbita $n = 1$ de Bohr del hidrógeno. Calcule la incertidumbre mínima simultánea de la componente de la cantidad de movimiento correspondiente, y compárela con la magnitud de esa cantidad para el electrón en la órbita $n = 1$ de Bohr. Comente sus resultados.

39.49. *a*) Una partícula de masa m tiene energía cinética igual a tres veces su energía en reposo. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para esta partícula? (*Sugerencia:* debe usar la ecuación relativista de la cantidad de movimiento y energía cinética: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ y $K = E - mc^2$.) *b*) Determine el valor numérico de la energía cinética (en MeV) y la longitud de onda (en metros), si la partícula del inciso *a*) es i) un electrón y ii) un protón.

39.50. Energía del protón en un núcleo. Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. *a*) Estime la incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento de un protón, si se confina dentro de un núcleo. *b*) Suponga que esta incertidumbre en la cantidad de movimiento es una estimación de la magnitud de esa cantidad. Use la relación relativista entre la energía y la cantidad de movimiento, ecuación (37.39), para obtener una estimación de la energía cinética de un protón confinado dentro de un núcleo. *c*) Para que un protón permanezca enlazado dentro de un núcleo, ¿cuál debe ser la magnitud de la energía potencial (negativa)? Exprese su respuesta en eV y en MeV Compárela con la energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno, cuya magnitud es de algunas decenas de eV. (Esto explica por qué la interacción que mantiene unido al núcleo se llama "fuerza nuclear fuerte".)

39.51. Energía del electrón en un núcleo. Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. *a*) Estime la incertidumbre mínima en la cantidad de movimiento de un electrón, si está confinado dentro de un núcleo. *b*) Suponga que esta incertidumbre en la cantidad de movimiento es una estimación de la magnitud de esa cantidad. Use la relación relativista entre energía y cantidad de movimiento, ecuación (37.39), para obtener un estimado de la energía cinética de un electrón confinado dentro de un núcleo. *c*) Compare la energía calculada en el inciso *b*) con la magnitud de la energía potencial de Coulomb de un protón y un electrón separados una distancia de 5.0×10^{-15} m. Con base en su resultado, ¿podría haber electrones dentro del núcleo? (*Nota:* es interesante comparar este resultado con el del problema 39.50.)

39.52. En un cinescopio de TV, el voltaje de aceleración es de 15.0 kV, y el haz de electrones pasa por una abertura de 0.50 mm de diámetro, y llega a una pantalla a 0.300 m atrás. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre de la componente de la velocidad del electrón perpendicular a la línea entre la abertura y la pantalla. *b*) ¿Cuál es la incertidumbre en la posición del punto donde el electrón llega a la pantalla? *c*) ¿Esta incertidumbre afecta mucho la calidad de la imagen? (Use ecuaciones no relativistas para el movimiento de los electrones. Es bastante exacto y, desde luego, adecuado para obtener una estimación de los efectos de la incertidumbre.)

39.53. El pión neutro (π^0) es una partícula inestable producida en choques de partículas con alta energía. Su masa aproximada es 264 veces la del electrón, y su duración promedio es de 8.4×10^{-17} s antes de desintegrarse en dos fotones de rayos gamma. Use la relación $E = mc^2$ entre la masa en reposo y la energía, para calcular la incertidumbre en la masa de la partícula, y exprésela como fracción de esa masa.

39.54. ¿Efectos cuánticos en la vida cotidiana? Un insecto de 1.25 mg vuela a través de un orificio con diámetro de 4.00 mm en un mosquitero (malla metálica) para ventana común. El espesor del mosquitero es de 0.500 mm. *a*) ¿Cuáles deberían ser la longitud de onda aproximada y la rapidez del insecto como para que aquella muestre comportamiento ondulatorio conforme pasa por el orificio? *b*) Con la rapidez calculada para el inciso *a*), ¿cuánto tardaría el insecto en pasar por los 0.500 mm de espesor del orificio en el mosquitero? Compare este tiempo con la edad del Universo (que es de 14 mil millones de años). ¿Esperaría ver la "difracción del insecto" en la vida cotidiana?

39.55. Difracción en el umbral de una puerta. Si la longitud de onda de usted fuera de 1.0 m, sufriría mucha difracción al pasar por una puerta. *a*) ¿Cuál debe ser su rapidez para tener esa longitud de onda? (Suponga que su masa es de 60.0 kg.) *b*) A la rapidez calculada en el inciso *a*), ¿cuántos años tardaría en moverse 0.80 m (un paso)? ¿Notará efectos de difracción cuando pasa usted por las puertas?

39.56. Incertidumbres en los espectros atómicos. Cierto átomo tiene un nivel de energía de 2.58 eV arriba del nivel fundamental. Una vez excitado hasta este nivel, permanece allí durante 1.64×10^{-7} s (aproximadamente) antes de emitir un fotón y regresar al nivel fundamental. *a*) ¿Cuál es la energía del fotón (en electrón volts)? ¿Cuál es su longitud de onda (en nanómetros)? *b*) Cuál será la mínima incertidumbre posible en la energía del fotón? Exprese su respuesta en electrón volts. *c*) Demuestre que $|\Delta E/E| = |\Delta\lambda/\lambda|$ si $|\Delta\lambda/\lambda| \ll 1$. Use esto para calcular la magnitud de la incertidumbre mínima posible en la longitud de onda del fotón. Exprese su respuesta en nanómetros.

39.57. Usted intenta usar un microscopio electrónico para estudiar la estructura de algunos cristales. Para una resolución precisa, usted desea que la longitud de onda de los electrones sea de 1.00 nm. *a*) ¿Tales electrones son relativistas? *b*) ¿Qué potencial de aceleración se necesita? *c*) ¿Cuál es la energía cinética de los electrones que usted está utilizando? Para saber si es lo suficientemente grande como para dañar los cristales que estudia, compárela con la energía potencial de una molécula típica de NaCl, que es de aproximadamente 6.0 eV. *d*) Si usted decide usar ondas electromagnéticas en su demostración, ¿qué energía deberían tener sus protones para producir la misma resolución que los electrones? ¿Tal energía dañaría el cristal?

39.58. Para rayos x con longitud de onda de 0.0300 nm, la intensidad máxima $m = 1$ para un cristal tiene lugar cuando el ángulo θ de la figura 36.23c es de 35.8°. ¿A qué ángulo θ ocurre el máximo $m = 1$ cuando se utiliza un haz de electrones de 4.50 KeV? Suponga que los electrones también se dispersan de los átomos en el plano superficial de este mismo cristal.

39.59. También se puede producir difracción de electrones cuando hay interferencia entre ondas de electrones que se dispersan de átomos en la superficie de un cristal, y ondas que se dispersan de átomos en el plano siguiente abajo de la superficie, a una distancia d de ella (véase la figura 36.23c). *a*) Deduzca una ecuación para determinar los ángulos θ en los que hay un máximo de intensidad de ondas de electrones con longitud de onda λ. *b*) La distancia entre los planos cristalinos de cierto metal es 0.091 nm. Si se usan electrones de 71.0 eV, calcule el ángulo en el que hay un máximo de intensidad debido a la interferencia entre las ondas dispersadas en planos cristalinos adyacentes. El ángulo se mide como se observa en la figura 36.23c. *c*) El ángulo real del máximo de intensidad es un poco distinto de su resultado en el inciso *b*). La causa es la función trabajo ϕ del metal (véase la sección 38.2), que cambia en $-e\phi$ la energía potencial del electrón al moverse desde el vacío al interior del metal. Si se tiene en cuenta el efecto de la función trabajo, ¿el ángulo de intensidad máxima es mayor o menor que el valor calculado en el inciso *b*)? Explique por qué.

39.60. Energía de punto cero. Imagine una partícula de masa m que se mueve en un potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$, como en el sistema de masa y resorte. La energía total de la partícula es $E = p^2/2m + \frac{1}{2}kx^2$. Suponga que p y x se relacionan aproximadamente por el principio de incertidumbre de Heisenberg, $px \approx h$. *a*) Calcule el valor mínimo posible de la energía E, y el valor de x que produce la E mínima. A esta energía mínima posible, que no es cero, se llama *energía de punto cero*. *b*) Para la x calculada en el inciso *a*), ¿cuál es la relación de energía cinética a potencial de la partícula?

39.61. Una partícula de masa m se mueve en un potencial $U(x) = A|x|$, siendo A una constante positiva. En una imagen simplificada, los quarks (que forman los protones, neutrones y otras partículas, como se explicará en el capítulo 44) tienen energía potencial de interacción que tiene aproximadamente esta forma, donde x representa la distancia entre un par de quarks. Ya que $U(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, no es posible separar los quarks entre sí (fenómeno que se llama *confinamiento de quark*). *a*) Según la física clásica, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre esta partícula en función de x? *b*) Aplicando el principio de incertidumbre como en el problema 39.60, determine en forma aproximada la energía de punto cero de la partícula.

39.62. La descripción de la sección 39.5 demuestra que la función de onda $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$ es un estado estacionario, donde ψ es independiente del tiempo y ω es una constante real (no compleja). Considere la función de onda $\Psi = \psi_1 e^{-i\omega_1 t} + \psi_2 e^{-i\omega_2 t}$, donde ψ_1 y ψ_2 son distintas funciones independientes del tiempo, y ω_1 y ω_2 son distintas constantes de valor real. Suponga ψ_1 y ψ_2 son funciones de valor real, por lo que $\psi_1^* = \psi_1$ y $\psi_2^* = \psi_2$. ¿Esta Ψ es una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

39.63. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. La ecuación (39.18) es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión. La ecuación dependiente del tiempo es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

Si $\psi(x)$ es una solución de la ecuación (39.18) con energía E, demuestre que la función dependiente del tiempo $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$ es una solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, si se selecciona ω en forma adecuada. ¿Cuál es el valor de ω que hace que Ψ sea solución?

39.64. Función de onda dependiente del tiempo para una partícula libre. Un ejemplo de una función de onda dependiente del tiempo es el de una partícula libre [una para la cual $U(x) = 0$ para toda x] de energía E y componente x de cantidad de movimiento p. A partir de las relaciones de De Broglie (véase la sección 39.1), esa partícula tiene asociada una frecuencia $f = E/h$ y una longitud de onda $\lambda = h/p$. Una primera aproximación razonable para la función de onda dependiente del tiempo para esa partícula es $\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$, siendo A constante, $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular y $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. Es la misma función que usamos para describir una onda mecánica [véase la ecuación (15.7)] o una onda electromagnética que se propaga en la dirección x [véase la ecuación (32.16)]. *a*) Demuestre que $\omega = E\hbar$, $k = p/\hbar$, y $\omega = \hbar k^2/2m$. (*Sugerencia:* la energía sólo es cinética, así que $E = p^2/2m$.) *b)* Para comprobar esta aproximación de la función de onda dependiente del tiempo, sustituya $\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$ en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo (problema 39.63*)* con $U(x) = 0$ (para que la partícula sea libre). Demuestre que esta aproximación de $\Psi(x, t)$ *no* satisface esta ecuación, por lo que no es una función de onda adecuada para una partícula libre. *c*) Use el procedimiento descrito en el inciso *b*) para demostrar que una segunda aproximación, $\Psi(x, t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$, tampoco

es una función de onda adecuada para una partícula libre. *d*) Considere una combinación de las funciones propuestas en los incisos *b*) y *c*):

$$\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t) + B\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Use el procedimiento descrito en el inciso *b*) para demostrar que esta función de onda sí es una solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, con $U(x) = 0$, pero sólo si $B = iA$. [*Sugerencia:* para satisfacer la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para todas x y t, deben ser iguales los coeficientes de $\cos(kx - \omega t)$ en ambos lados de la ecuación. Lo mismo sucede con los coeficientes de $\operatorname{sen}(kx - \omega t)$ en ambos lados de la ecuación.] Es un ejemplo del resultado general que las funciones de onda dependientes del tiempo siempre tienen tanto una parte real como una parte imaginaria.

39.65. Imagine otro universo donde el valor de la constante de Planck sea de $0.0663\ \text{J}\cdot\text{s}$, pero donde las leyes físicas y todas las demás constantes físicas son iguales que las de nuestro Universo. En ese universo, dos estudiantes de física están atrapando pelotas. Están a 12 m de distancia, y uno lanza una pelota de 0.25 kg directamente hacia el otro, con una rapidez de 6.0 m/s. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre en la cantidad de movimiento horizontal de la pelota, en una dirección perpendicular a aquella en la que se lanzó, si el estudiante que la lanzó conoce que está dentro de un cubo de 125 cm^3 al momento de lanzarla? *b*) ¿A qué distancia horizontal del segundo estudiante llegará la pelota?

39.66. Una partícula se describe con la función de onda normalizada $\psi(x, y, z) = Axe^{-\alpha x^2}e^{-\beta y^2}e^{-\gamma z^2}$, donde A, α, β y γ son todas constantes reales y positivas. La probabilidad de que la partícula se encuentre en el volumen infinitesimal $dx\,dy\,dz$ centrado en el punto (x_0, y_0, z_0) es $|\psi(x_0, y_0, z_0)|^2\,dx\,dy\,dz$. *a*) ¿A qué valor de x_0 es más probable encontrar la partícula? *b*) ¿Hay valores de x_0 para los que la probabilidad de encontrar la partícula sea cero? En caso afirmativo, ¿en qué x_0?

39.67. Una partícula se describe con la función de onda normalizada $\psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}$, donde A y α son constantes reales y positivas. *a*) Determine la probabilidad de encontrar la partícula a una distancia entre r y dr del origen. (*Sugerencia:* véase el problema 39.66. Considere un cascarón esférico centrado en el origen, con radio interior r y espesor dr.) *b*) ¿Para qué valor de r la probabilidad del inciso *a*) tiene su valor máximo? ¿Es el mismo valor de r para el que $|\psi(x, y, z)|^2$ es máximo? Explique las diferencias que haya.

39.68. Considere el paquete de onda definido por

$$\psi(x) = \int_0^\infty B(k)\cos kx\,dk$$

Sea $B(k) = e^{-\alpha^2 k^2}$. *a*) La función $B(k)$ tiene su valor máximo en $k = 0$. Sea k_h el valor de k en el cual $B(k)$ ha bajado hasta la mitad de su valor máximo y defina el ancho de $B(k)$ como $w_k = k_\text{h}$. En términos de α, ¿qué es w_k? *b*) Use tablas de integrales para evaluar la integral que representa $\psi(x)$. ¿Para qué valor de x es máxima $\psi(x)$? *c*) Defina el ancho de $\psi(x)$ como $w_x = x_\text{h}$, donde x_h es el valor positivo de x donde $\psi(x)$ ha bajado hasta la mitad de su valor máximo. Calcule w_x en función de α. *d*) La cantidad de movimiento p es igual a $hk/2\pi$, por lo que el ancho de B en cantidad de movimiento angular es $w_p = hw_k/2\pi$. Calcule el producto $w_p w_x$ y compárelo con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

39.69. a) Use la integral del problema 39.68 para determinar la función de onda $\psi(x)$ para una función $B(k)$ definida por

$$B(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1/k_0, & 0 \le k \le k_0 \\ 0, & k > k_0 \end{cases}$$

Esto representa una combinación igual de todos los números de onda entre 0 y k_0. Así, $\psi(x)$ representa una partícula con número de onda promedio $k_0/2$, con una dispersión o incertidumbre total en número de onda igual a k_0. A esta dispersión la llamaremos *ancho* w_k de $B(k)$, por lo que $w_k = k_0$. *b*) Haga la gráfica de $B(k)$ en función de k, y de $\psi(x)$ en función de x para el caso $k_0 = 2\pi/L$, donde L es una longitud. Localice el punto donde $\psi(x)$ tiene su valor máximo, e identifique ese punto de su gráfica. Ubique los dos puntos más cercanos a este máximo (uno a cada lado de él) donde $\psi(x) = 0$ y defina la distancia a lo largo del eje x, entre esos dos puntos, como w_x, el ancho de $\psi(x)$. Indique la distancia w_x en su gráfica. ¿Cuál es el valor de w_x si $k_0 = 2\pi/L$? *c*) Repita el inciso *b*) para el caso $k_0 = \pi/L$. *d*) La cantidad de movimiento p es igual a $hk/2\pi$, por lo que el ancho de B en cantidad de movimiento es $w_p = hw_k/2\pi$. Calcule el producto $w_p w_x$ para cada uno de los casos $k_0 = 2\pi/L$ y $k_0 = \pi/L$ Comente sus resultados a la luz del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Problemas de desafío

39.70. La naturaleza ondulatoria de las partículas da como resultado la situación mecánico-cuántica que una partícula confinada en una caja sólo puede tener longitudes de onda que causen ondas estacionarias en esa caja, con nodos en sus paredes. *a*) Demuestre que un electrón confinado en una caja unidimensional de longitud L tendrá niveles de energía definidos por

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

(*Sugerencia:* recuerde que la relación entre la longitud de onda de De Broglie y la rapidez de una partícula no relativista es $mv = h/\lambda$. La energía de la partícula es $\frac{1}{2}mv^2$.) *b*) Si un átomo de hidrógeno se modela como una caja unidimensional de longitud igual al radio de Bohr, ¿cuál es la energía (en electrón volts) del nivel mínimo de energía del electrón?

39.71. Usted entró a un concurso donde se trata de dejar caer una canica de 20.0 g desde el techo de un edificio para que caiga en un blanco pequeño, a 25.0 m abajo. De acuerdo con consideraciones de incertidumbre, ¿cuál es la distancia característica a la que fallará del blanco, dado que le apunta con la máxima precisión posible? (*Sugerencia:* la incertidumbre Δ_{xf} en la coordenada x de la canica, al llegar al suelo, se debe en parte a la incertidumbre Δx_i en la coordenada x inicial y en parte a la incertidumbre en v_x inicial. Esta última da lugar a una incertidumbre Δv_x en el movimiento horizontal de la canica al momento de caer. Los valores de Δx_i y Δv_x se relacionan por el principio de incertidumbre. Una Δx_i pequeña produce una Δv_x grande, y viceversa. Determine el valor de Δx_i que produzca una incertidumbre total mínima en x al llegar al piso. No tome en cuenta todos los efectos de la resistencia del aire.)

MECÁNICA CUÁNTICA 40

¿Estos recipientes contienen una solución de partículas semiconductoras microscópicas, cada una de las cuales actúan como un "átomo" de tamaño nanométrico. Las partículas brillan cundo se exponen a la luz ultravioleta. ¿Por qué las partículas más pequeñas (a la izquierda) brillan en azul, en tanto que las partículas más grandes (a la derecha) brillan en rojo?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo calcular las funciones de onda y los niveles de energía para una partícula confinada en una caja.
- Cómo analizar el comportamiento mecánico-cuántico de una partícula en un pozo de potencial.
- Cómo la mecánica cuántica hace posible que las partículas lleguen a donde la mecánica newtoniana indica que no pueden.
- Cómo utilizar la mecánica cuántica para analizar un oscilador armónico.
- Cómo extender los cálculos mecánico-cuánticos a problemas tridimensionales.

En el capítulo 39 vimos que a veces las partículas se comportan como ondas y que se pueden describir con funciones de onda. Ya estamos listos para hacer un análisis sistemático de partículas en *estados confinados* (por ejemplo, electrones en átomos), que incluye determinar sus posibles funciones de onda y niveles de energía.

Nuestro análisis implica determinar soluciones de la ecuación de Schrödinger, que presentamos en el capítulo 39. Para todo sistema mecánico-cuántico, las funciones de onda para cualquier estado de energía definida deben ser soluciones de la ecuación de Schrödinger para ese sistema. Como veremos, al resolver la ecuación de Schrödinger se determinan en forma automática los niveles de energía posibles para el sistema. Describiremos varias aplicaciones unidimensionales sencillas de la ecuación de Schrödinger.

Además de las energías, al resolver la ecuación de Schrödinger se obtienen las probabilidades de encontrar una partícula en diversas regiones. Un resultado sorprendente es que hay una probabilidad distinta de cero de que las partículas microscópicas atraviesen barreras delgadas, aun cuando la mecánica newtoniana prohíbe dicho proceso.

Por último, generalizaremos la ecuación de Schrödinger a tres dimensiones. Con ello, facilitaremos el camino para describir las funciones de onda del átomo de hidrógeno en el capítulo 41. A la vez, las funciones de onda de ese átomo forman la base de nuestro análisis para átomos más complejos, de la tabla periódica de los elementos, de los niveles de energía de los rayos x y de otras propiedades de los átomos.

40.1 Partícula en una caja

En este capítulo aprenderemos cómo usar la ecuación de Schrödinger para determinar los niveles posibles de energía, y las funciones de onda correspondientes, para diversos sistemas. Al igual que en el capítulo 39, llamaremos *estacionarios* a los estados de energía definida. Para simplificar, comenzaremos con problemas en los que la

Activ ONLINE Physics
20.2 Partícula en una caja

partícula sólo se puede mover a lo largo del eje x. De acuerdo con la sección 39.5, la ecuación de Schrödinger para esos problemas unidimensionales es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad \text{(ecuación unidimensional de Schrödinger)} \qquad (40.1)$$

En realidad, esta ecuación es una conclusión sobre la energía cinética [representada por el término $-(\hbar^2/2m)d^2\psi(x)/dx^2$] más la energía potencial [representada por el término $U(x)\psi(x)$] es igual a la energía total [representada por el término $E\psi(x)$]. Entonces, el problema fundamental es el siguiente: para determinada función $U(x)$ de energía potencial, ¿cuáles son las funciones de onda de estado estacionario posibles, $\psi(x)$, y cuáles son las energías E correspondientes?

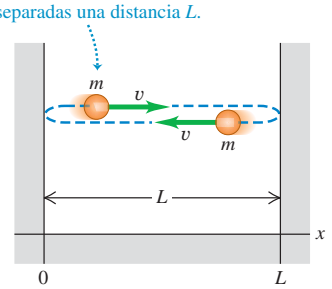
En la sección 39.5 resolvimos este problema para el caso $U(x) = 0$, que corresponde a una partícula *libre*. Las funciones de onda permitidas, y sus energías correspondientes, son

$$\psi(x) = Ae^{ikx} \qquad E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \qquad \text{(partícula libre)} \qquad (40.2)$$

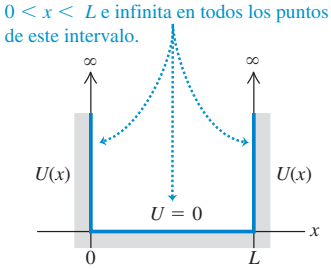
El número de onda k es igual a $2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. Vimos que k puede tener cualquier valor real, por lo que la energía E de una partícula libre puede tener cualquier valor, desde cero hasta infinito. Además, la partícula se puede encontrar con igual probabilidad, desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Ahora veamos un modelo sencillo en el que una partícula está *confinada*, por lo que no puede escapar al infinito, sino está confinada a una región restringida del espacio. Nuestro sistema consiste en una partícula confinada entre dos paredes rígidas separadas por una distancia L (figura 40.1). El movimiento sólo es unidimensional, y la partícula se mueve sólo a lo largo del eje x dentro de las paredes en $x = 0$ y $x = L$. La energía potencial que corresponde a las paredes rígidas es infinita, por lo que la partícula no puede escapar; entre las paredes, la energía potencial es cero. Con frecuencia, a esta situación se le describe como **"partícula en una caja"**. Este modelo podría representar un electrón que tiene libre movimiento dentro de una molécula larga y recta, o a lo largo de un alambre muy delgado. La función de energía potencial se grafica en la figura 40.2.

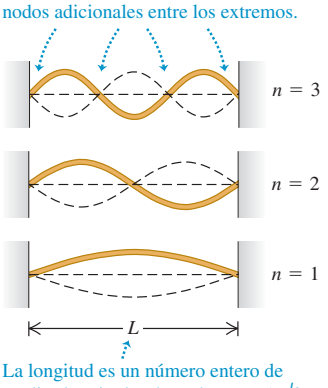
40.1 Concepción newtoniana de una partícula en una caja.



40.2 La función de energía potencial para una partícula en una caja.



40.3 Modos normales de vibración para una cuerda de longitud L sujeta en ambos extremos.



Función de onda para una partícula en una caja

Para resolver la ecuación de Schrödinger para este sistema, comenzaremos con algunas restricciones sobre la función de onda $\psi(x)$ de la partícula. Como la partícula está confinada a la región $0 \le x \le L$, se esperaría que $\psi(x)$ sea cero fuera de la región. Esto concuerda con la ecuación de Schrödinger: si el término $U(x)\psi(x)$ en la ecuación (40.1) va a ser finito, entonces, $\psi(x)$ debe ser cero donde $U(x)$ sea infinita.

Además, $\psi(x)$ debe ser una función *continua*, para ser una solución matemática bien comportada de la ecuación de Schrödinger. Si lo es, $\psi(x)$ debe ser cero en la frontera de la región, $x = 0$ y $x = L$. Esas dos condiciones son *condiciones en la frontera* para el problema, y deben ser familiares, porque son las mismas condiciones que usamos para determinar los modos normales de una cuerda en vibración, en la sección 15.8 (figura 40.3); usted debería repasar esa descripción.

Una condición adicional establece que para calcular la segunda derivada, $d^2\psi(x)/dx^2$ en la ecuación (40.1), la *primera* derivada $d\psi(x)/dx$ también debe ser continua, excepto en los puntos donde la energía potencial se vuelve infinita (como lo hace en las paredes de la caja). Esto es similar al requisito de que una cuerda vibratoria, como la que se muestra en la figura 40.3, no puede tener un quiebre en ella (que correspondería a una discontinuidad en la primera derivada de la función de onda), excepto en sus extremos.

Ahora despejaremos las funciones de onda en la región $0 \le x \le L$ sujetas a las condiciones anteriores. En esta región, $U(x) = 0$, por lo que la función de onda en esos lugares debe cumplir

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \qquad \text{(partícula en una caja)} \qquad (40.3)$$

La ecuación (40.3) es *igual* que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre, por lo que es tentador llegar a la conclusión de que las funciones de onda y las energías están definidas por la ecuación (40.2). Es cierto que $\psi(x) = Ae^{ikx}$ satisface la ecuación de Schrödinger con $U(x) = 0$; es continua y tiene una primera derivada continua, ya que $d\psi(x)/dx = ikAe^{ikx}$. Sin embargo, esta función de onda *no* satisface las condiciones en la frontera de que $\psi(x)$ debe ser cero en $x = 0$ y $x = L$: en $x = 0$, la función de onda de la ecuación (40.2) es igual a $Ae^0 = A$, y en $x = L$ es igual a Ae^{ixL}. (Serían iguales a 0 si $A = 0$, pero entonces la función de onda sería cero ¡y no habría partícula alguna!)

La forma de salir de este dilema es recordar el ejemplo 39.6 (sección 39.5), donde vimos que una solución más general de estado estacionario de la ecuación de Schrödinger, con $U(x) = 0$, es

$$\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx} \tag{40.4}$$

Esta función de onda es una superposición de dos ondas: una que viaja en dirección $+x$, de amplitud A_1 y la otra que viaja en la dirección $-x$ con el mismo número de onda, pero con amplitud A_2. Esto es análogo al caso de las ondas estacionarias sobre una cuerda (figura 40.3), que podemos considerar como superposición de dos ondas senoidales que se propagan en direcciones opuestas (véase la sección 15.7). La energía que corresponde a la ecuación (40.4) es $E = \hbar^2k^2/2m$, igual que para una sola onda.

Para saber si la función de onda expresada por la ecuación (40.4) puede satisfacer las condiciones en la frontera, la redactaremos en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Euler, ecuación (39.15):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A_1(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\,kx) + A_2[\cos(-kx) + i\,\mathrm{sen}(-kx)]\\ &= A_1(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\,kx) + A_2(\cos kx - i\,\mathrm{sen}\,kx)\\ &= (A_1 + A_2)\cos kx + i(A_1 - A_2)\,\mathrm{sen}\,kx\end{aligned} \tag{40.5}$$

Cuando $x = 0$, esto es igual a $\psi(0) = A_1 + A_2$, que debe ser igual a cero si se va a satisfacer la condición en la frontera en ese punto. Por consiguiente, $A_2 = -A_1$, y la ecuación (40.5) se transforma en

$$\psi(x) = 2iA_1\,\mathrm{sen}\,kx = C\,\mathrm{sen}\,kx \tag{40.6}$$

Hemos simplificando la ecuación introduciendo la constante $C = 2iA_1$. (Regresaremos después a esta constante.) También podemos satisfacer la segunda condición en la frontera, de que $\psi = 0$ en $x = L$, eligiendo valores de k tales que $kL = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Por consiguiente, la ecuación (40.6) sí define funciones de onda de estado estacionario para una partícula en una caja, en la región $0 \le x \le L$. (Fuera de esta región, $\psi(x) = 0$.) Los valores posibles de k, y de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, son

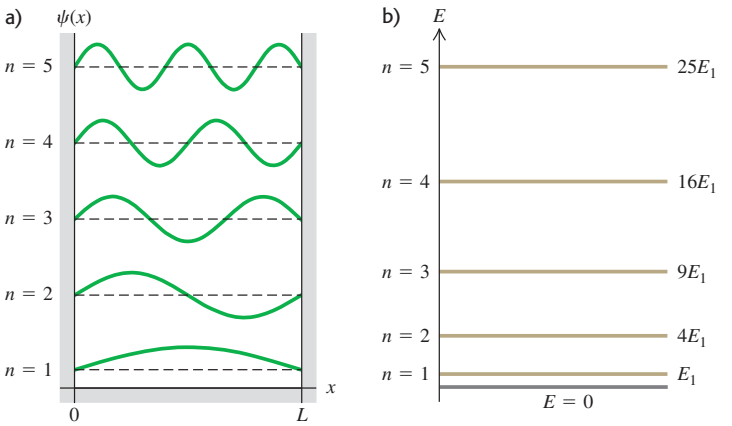
$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.7}$$

Al igual que para la cuerda de la figura 40.3, la longitud L de la región es un número entero de medias longitudes de onda.

Niveles de energía para una partícula en una caja

Los niveles de energía posibles se definen con $E = \hbar^2k^2/2m = p^2/2m$, donde $p = \hbar k = (h/2\pi)(2\pi/\lambda) = h/\lambda$ es la magnitud de la cantidad de movimiento de una partícula libre con número de onda k y longitud de onda λ. Eso tiene sentido, ya que el interior de la región $0 \le x \le L$, la energía potencial es cero y toda la energía es cinética. Para cada valor de n hay valores correspondientes p, λ y E, que llamaremos p_n λ_n y E_n, respectivamente. Al armar todas las piezas resulta

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L} \tag{40.8}$$



40.4 a) Funciones de onda para una partícula en una caja, con $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Cada una de las líneas punteadas horizontales representa $\psi = 0$ para la función de onda respectiva. Por claridad, las cinco gráficas se han desplazado verticalmente. b) Diagrama de niveles de energía para una partícula en una caja. Cada energía es n^2E_1, donde E_1 es la energía del nivel fundamental.

y

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots) \quad \text{(niveles de energía, partícula en una caja)} \tag{40.9}$$

Ésos son los niveles de energía posibles para una partícula en una caja. Cada uno de ellos tiene su propio valor de número cuántico n y una función de onda correspondiente, que representaremos con ψ_n. Cuando sustituimos k en la ecuación (40.6) por $n\pi/L$ de la ecuación (40.7), llegamos a

$$\psi_n(x) = C\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \tag{40.10}$$

La figura 40.4a muestra las gráficas de las funciones de onda $\psi_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Note que esas funciones se ven idénticas a las de una onda estacionaria en una cuerda (figura 40.3). La figura 40.4b muestra el diagrama de niveles de energía para este sistema. Los niveles de las energías sucesivamente mayores, que son proporcionales a n^2, están a distancias cada vez mayores entre sí. Hay una cantidad infinita de niveles, porque las paredes son perfectamente rígidas; aun una partícula con energía cinética infinitamente grande está confinada dentro de la caja.

CUIDADO **No se permite la energía cero** Observe que la energía de una partícula en una caja *no puede* ser cero. La ecuación (40.9) indica que para que $E = 0$, se necesitaría que $n = 0$, pero sustituyendo $n = 0$ en la ecuación (40.10) da una función de onda cero. Como una partícula se describe con una función de onda distinta de cero, eso quiere decir que no puede haber una partícula con $E = 0$.

Ejemplo 40.1 Electrón en una caja del tamaño de un átomo

Calcule el nivel mínimo de energía para una partícula en una caja, si la partícula es un electrón, y la caja mide 5.0×10^{-10} m en su interior, es decir, es un poco mayor que un átomo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere lo que ya hemos aprendido en esta sección acerca de una partícula en una caja.

PLANTEAR: El nivel mínimo de energía (esto es, el estado fundamental) corresponde a $n = 1$ en la ecuación (40.9).

EJECUTAR: Según la ecuación (40.9),

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.109 \times 10^{-31}\,\text{kg})(5.0 \times 10^{-10}\,\text{m})^2}$$
$$= 2.4 \times 10^{-19}\,\text{J} = 1.5\,\text{eV}$$

EVALUAR: Una partícula atrapada en una caja es bastante diferente de un electrón confinado en un átomo, pero es confortante saber que esta energía tiene el mismo orden de magnitud que los niveles atómicos de energía reales.

El lector debe ser capaz de demostrar que al sustituir el electrón por un protón o un neutrón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) en una caja del ancho de un átomo de tamaño mediano ($L = 1.1 \times 10^{-14}$ m) se obtiene $E_1 = 1.7$ MeV. Esto nos demuestra que las energías de partículas en el núcleo son más o menos un millón de veces mayores que las de los electrones en los átomos, lo que da una pista de la causa por la que cada reacción de fisión y fusión nuclear desprende tanta energía, mucho más, que con una reacción química.

Si repite este cálculo para una bola de billar ($m = 0.2$ kg) que rebota de uno a otro lado entre las bandas elásticas, sobre una mesa de billar sin fricción y perfectamente elástica ($L = 1.5$ m), verá que la separación entre los niveles de energía es de 4×10^{-67} J (ejercicio 40.1). Este valor despreciable demuestra que los efectos cuánticos no tendrán mucho efecto sobre los juegos de billar.

Probabilidad y normalización

Analicemos un poco más a fondo las funciones de onda para una partícula en una caja, teniendo en cuenta la interpretación de la función de onda ψ como *probabilidad*, que describimos en la sección 39.5. En nuestro caso unidimensional, la cantidad $|\psi(x)|^2\,dx$ es proporcional a la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro de un intervalo pequeño dx en torno a x. Para una partícula en una caja,

$$|\psi(x)|^2\,dx = C^2\text{sen}^2\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Tanto $\psi(x)$ como $|\psi(x)|^2$ se grafican en la figura 40.5, para $n = 1$, 2 y 3. Observamos que no son igualmente probables todas las posiciones. Esto contrasta con el caso de la mecánica clásica, en donde todas las posiciones entre $x = 0$ y $x = L$ son igualmente probables. Vemos en la figura 40.5b que $|\psi(x)|^2 = 0$ en algunos puntos, por lo que la probabilidad de encontrar la partícula exactamente en esos puntos es cero. No deje que eso le preocupe: el principio de incertidumbre ya nos ha indicado que no podemos medir con exactitud la posición. La partícula sólo está localizada y debe estar en algún lugar entre $x = 0$ y $x = L$, y no debe estar exactamente en determinado valor de x.

Sabemos que la partícula debe estar en *algún lugar* del Universo, esto es, entre $x = -\infty$ y $x = +\infty$. Entonces, la *suma* de las probabilidades para todas las dx en todos los lugares (la probabilidad *total* de encontrar la partícula) debe ser igual a 1. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx = 1 \qquad \text{(condición de normalización)} \tag{40.11}$$

Se dice que una función de onda está *normalizada* si tiene una constante como C en la ecuación (40.10) que se calcula para que la probabilidad total sea igual a 1 en la ecuación (40.11). El proceso de calcular la constante se llama **normalización**, como indicamos en la sección 39.5. ¿Por qué ocuparse de la normalización? Porque una función de onda normalizada, $|\psi(x)|^2\,dx$ no sólo es proporcional a la probabilidad de encontrar a la partícula en dx, sino *es igual* a tal probabilidad. Recuerde, de la sección 39.5, que a $|\psi(x)|^2$ se le llama *función de distribución de probabilidad.*

Ahora normalizaremos la función de onda $\psi(x)$ definida por la ecuación (40.10) para la partícula en una caja. Como $\psi(x)$ es cero excepto entre $x = 0$ y $x = L$, la ecuación (40.11) se transforma en

$$\int_0^L C^2\text{sen}^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = 1 \tag{40.12}$$

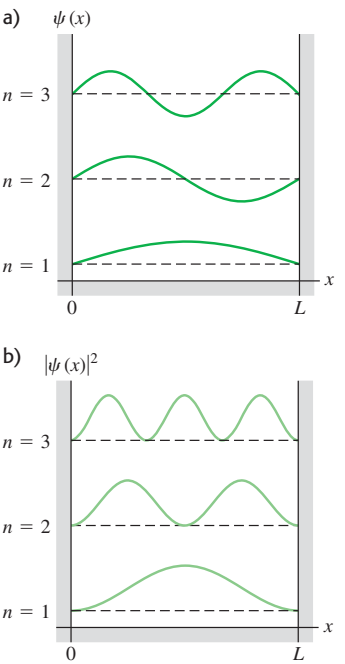
El lector puede evaluar esta integral usando la identidad trigonométrica $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$; el resultado es $C^2L/2$. Así, nuestra interpretación probabilista de la función de onda necesita que $C^2L/2 = 1$, es decir, $C = (2/L)^{1/2}$; la constante C *no* es arbitraria. (Esto es contrario al problema clásico de la cuerda vibratoria, donde C representa una amplitud que depende de las condiciones iniciales.) Así, las funciones de onda normalizadas de estado estacionario para una partícula en una caja son

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ (partícula en una caja)} \tag{40.13}$$

A continuación revisaremos si nuestros resultados para la partícula en una caja son consistentes con el principio de incertidumbre. Se puede definir la posición de la partícula como $x = L/2 \pm L/2$, para poder estimar la incertidumbre en la posición como $\Delta x \approx L/2$. De la ecuación (40.8), la magnitud de la cantidad de movimiento en estado n es $p_n = nh/2L$. Una estimación razonable de la incertidumbre en la cantidad de movimiento es la diferencia de cantidad de movimiento de dos niveles que difieran en 1 en sus valores de n; esto es, $\Delta p_x \approx h/2L$. Entonces, el producto, $\Delta x\,\Delta p_x$ es

$$\Delta x\,\Delta p_x = \frac{h}{4}$$

40.5 Gráficas de a) $\psi(x)$ y *b)* $|\psi(x)|^2$ para las primeras tres funciones de onda ($n = 1, 2, 3$) de una partícula en una caja. Las líneas punteadas horizontales representan $\psi(x) = 0$ y $|\psi(x)|^2 = 0$ para cada uno de los tres niveles. El valor de $|\psi(x)|^2\,dx$ en cada punto es la probabilidad de que la partícula se encuentre en un intervalo pequeño dx centrado en el punto.



Esto es consistente con el principio de incertidumbre, ecuación (39.11), $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar = h/2\pi$, donde la incertidumbre se definen con más precisión como desviaciones estándar.

Ejemplo 40.2 ¿Función de onda no senoidal?

a) Demuestre que $\psi(x) = Ax + B$, donde A y B son constantes, es una solución de la ecuación de Schrödinger para un nivel de energía $E = 0$ de una partícula en una caja. *b*) ¿Qué restricciones imponen las condiciones en la frontera $x = 0$ y $x = L$ a las constantes A y B?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema se vale de la idea de que cualquier función de onda físicamente razonable debe satisfacer tanto la ecuación de Schrödinger como las condiciones en la frontera adecuadas.

PLANTEAR: En el inciso *a*) sustituimos $\psi(x)$ en la ecuación de Schrödinger para una partícula en una caja, la ecuación (40.3), para determinar si es una solución. En el inciso *b*) se pedirá que $\psi(x)$ sea igual a cero en $x = 0$ y en $x = L$.

EJECUTAR: *a*) Según la ecuación (40.3), la ecuación de Schrödinger para este caso es $-(\hbar^2/2m)\,d^2\psi(x)/dx^2 = E\psi(x)$. Al diferenciar dos veces $\psi(x) = Ax + B$ con respecto a x se obtiene $d^2\psi(x)/dx^2 = 0$, por lo que el lado izquierdo de la ecuación también es cero. Puesto que asumimos que $E = 0$, el lado derecho de la ecuación también es cero. Como $0 = 0$, $\psi(x) = Ax + B$ es una solución de esta ecuación de Schrödinger para $E = 0$. Advierta que tanto $\psi(x)$ como su derivada $d\psi(x)/dx = A$ son funciones continuas, como deben ser.

b) Al aplicar la condición en la frontera en $x = 0$ se obtiene $\psi(0) = B$, de manera que la constante B debe ser cero y $\psi(x) = Ax$. Al aplicar la condición en la frontera, en $x = L$ resulta $\psi(L) = AL = 0$, por lo que la constante A debe ser igual a cero. Entonces, la función de onda es igual a cero dentro de la caja y también fuera de la caja, y hay probabilidad *cero* de encontrar la partícula en cualquier lugar, con esta función de onda. Por lo anterior, $\psi(x) = Ax + B$ no es una función de onda físicamente válida.

EVALUAR: La moraleja de esta historia es que una función de onda para una partícula debe satisfacer la ecuación de Schrödinger para una situación física dada, pero muchas de ellas, incluyendo la función que se considera aquí, tienen que rechazarse por que no satisfacen las condiciones en la frontera.

Dependencia con respecto al tiempo

Por último, notaremos que las funciones de onda $\psi_n(x)$ en la ecuación (40.13) sólo depende de la coordenada *espacial* x. De acuerdo con la sección 39.5, la función completa de onda también depende del *tiempo*. La ecuación (39.14) indica que si $\psi(x)$ es la función de onda para un estado de energía definida E, la función completa de onda $\Psi(x, t)$, dependiente del tiempo, es

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad \text{(función de onda dependiente del tiempo, para un estado estacionario)} \tag{40.14}$$

De la ecuación (40.12) se concluye que las funciones de onda dependientes del tiempo, para una partícula en una caja, son

$$\Psi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-iE_n t/\hbar} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.15}$$

En esta ecuación, las energías E_n se definen con la ecuación (40.9).

El valor absoluto de $e^{-iEt/\hbar}$ es la unidad: $|e^{-iEt/\hbar}|^2 = e^{+iEt/\hbar}e^{-iEt/\hbar} = e^0 = 1$. Por consiguiente, $|\Psi(x, t)|^2$ es igual a $|\psi(x)|^2$, y la función de distribución de probabilidad no depende del tiempo. En la sección 39.5, vimos que esto es el origen del término *estado estacionario* para indicar un estado con energía definida. Así, en los cálculos con estados que tienen energía definida, se justifica omitir el factor tiempo. Nos ocuparemos casi siempre con estados estacionarios en nuestras aplicaciones de mecánica cuántica.

Evalúe su comprensión de la sección 40.1 Si una partícula en una caja está en el n-ésimo nivel de energía, ¿cuál es el valor promedio de su componente x de cantidad de movimiento P_x? i) $nh/2L$; ii) $(\sqrt{2}/2)nh/L$; iii) $(1/\sqrt{2})nh/L$; iv) $(1/2\sqrt{2})nh/L$; v) cero.

40.2 Pozos de potencial

Activ Online Physics
20.1 Diagramas de energía potencial
20.2 Pozos de potencial

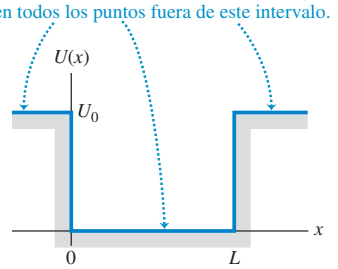
Un **pozo de potencial** es una función de energía potencial $U(x)$ que tiene un mínimo. Esto lo presentamos en la sección 7.5, y también lo usamos para describir el movimiento periódico en el capítulo 13. En la mecánica newtoniana, una partícula confinada

en un pozo de potencial puede vibrar de un lado a otro con movimiento periódico. Nuestra primera aplicación de la ecuación de Schrödinger a la partícula en una caja, implicaba un pozo de potencial rudimentario, con una función $U(x)$ que es cero dentro de cierto intervalo e infinita en cualquier otro lugar. Esta función corresponde a unos cuantos casos en la naturaleza, como se mencionó en la sección 40.1, pero la correspondencia sólo es aproximada.

Un pozo de potencial que se aproxima mejor a varios casos físicos reales es un pozo con lados verticales, pero con altura *finita*. La figura 40.6 muestra una función de energía potencial que es cero en el intervalo $0 \leq x \leq L$ y tiene el valor U_0 fuera de dicho intervalo. A esta función a menudo se le llama **potencial de pozo cuadrado**. Podría servir como modelo sencillo para un electrón dentro de una lámina metálica de espesor L, que se mueve en dirección perpendicular a las superficies de la hoja. El electrón se puede mover con libertad dentro del metal, pero debe superar una barrera de energía potencial, de altura U_0, para escapar por alguna de las superficies del metal. La energía U_0 se relaciona con la *función trabajo* que describimos en la sección 38.2 en relación con el efecto fotoeléctrico. En una aplicación tridimensional se puede usar una versión esférica de un pozo de potencial, en forma aproximada, para describir los movimientos de protones y neutrones dentro de un núcleo.

40.6 Un pozo de potencial cuadrado.

La energía potencial U es cero en el intervalo $0 \leq x \leq L$ y tiene el valor constante U_0 en todos los puntos fuera de este intervalo.



Estados confinados de un potencial de pozo cuadrado

En la mecánica newtoniana, la partícula está atrapada (localizada) en un pozo si la energía total E es menor que U_0. En la mecánica cuántica, a ese estado atrapado a menudo se le llama **estado confinado**. Todos los estados están confinados cuando el pozo tiene profundidad infinita, pero si E es mayor que U_0 para un pozo finito, la partícula *no* está confinada.

Para un pozo cuadrado finito, examinaremos las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el estado confinado, que corresponden a $E < U_0$. El método más fácil es considerar por separado las regiones donde $U = 0$ y donde $U = U_0$. Cuando $U = 0$, la ecuación de Schrödinger se reduce a la ecuación (40.3). Se reordena esta ecuación, y se ve que

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \tag{40.16}$$

Según la ecuación (40.5), podemos expresar las soluciones de esta ecuación como combinaciones de $\cos kx$ y $\operatorname{sen} kx$, donde $E = \hbar^2k^2/2m$, por lo que $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Por consiguiente, dentro del pozo cuadrado ($0 \leq x \leq L$) se tiene que

$$\psi(x) = A\cos\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x \qquad \text{(dentro del pozo)} \tag{40.17}$$

donde A y B son constantes. Hasta ahora, esto se parece mucho al análisis de la partícula en una caja, de la sección 40.1.

En las regiones $x < 0$ y $x > L$ se usa la ecuación (40.1) con $U = U_0$. Al reordenarlas,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) \tag{40.18}$$

La cantidad $U_0 - E$ es positiva, por lo que las soluciones de esta ecuación son exponenciales. Si se usa κ (la letra griega kappa) como positiva en la abreviatura $\kappa = [2m(U_0 - E)]^{1/2}/\hbar$, se pueden escribir las soluciones en la forma

$$\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \qquad \text{(fuera del pozo)} \tag{40.19}$$

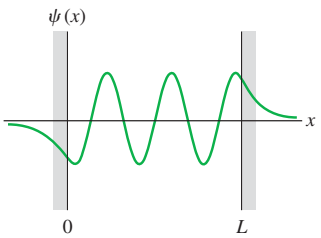
donde C y D son constantes con distintos valores, en las regiones $x < 0$ y $x > L$.

Vemos que las funciones de onda de estado confinado para este sistema son senoidales dentro del pozo y exponenciales fuera de él. Debemos usar el exponente positivo en la región $x < 0$ y el exponente negativo en la región $x > L$. Esto es, $D = 0$ para $x < 0$ y $C = 0$ para $x > L$. Si no eligiéramos esas constantes, ψ tendería al infinito cuando $|x|$ tienda a infinito, y no se satisfaría la condición de normalización, ecuación (40.11). También hay que hacer coincidir las funciones de onda para que satisfagan

las condiciones en la frontera que mencionamos en la sección 40.1: $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en los puntos de frontera ($x = 0$ y $x = L$). Si la función de onda $\psi(x)$ o su pendiente $d\psi(x)/dx$ cambiaran en forma discontinua en un punto, la segunda derivada $d^2\psi(x)/dx^2$ sería *infinita* en ese punto. Pero eso violaría la ecuación de Schrödinger, que establece que en cualquier punto $d^2\psi(x)/dx^2$ es proporcional a $U - E$. En nuestro caso, $U - E$ es finita en todos los puntos, por lo que también $d^2\psi(x)/dx^2$ debe ser finita en todos los puntos.

La igualación de las funciones senoidales y exponenciales en los puntos de límite, para que se unan uniformemente, sólo es posible para ciertos valores específicos de la energía total E, por lo que este requisito determina los niveles de energía posibles del pozo cuadrado finito. No hay fórmula sencilla para los niveles de energía, como había para el pozo infinitamente profundo. La determinación de los niveles es un problema matemático bastante complejo, donde se requiere resolver una ecuación trascendente por aproximación numérica; no entraremos en los detalles. La figura 40.7 muestra la forma general de una función de onda posible. Las propiedades más notables de esta función de onda son las "colas exponenciales" que se prolongan fuera del pozo, en regiones prohibidas por la mecánica newtoniana (porque en esas regiones la partícula tendría energía cinética negativa). Veremos que hay cierta probabilidad de encontrar la partícula *fuera* del pozo de potencial, a pesar que según la mecánica clásica eso es imposible. Esta penetración en las regiones clásicamente prohibidas es un efecto cuántico sin analogía clásica, para las partículas. Describiremos un resultado sorprendente de este efecto, en la sección 40.3.

40.7 Una función de onda posible para una partícula en un pozo de potencial finito. La función es senoidal dentro del pozo ($0 \le x \le L$) y exponencial fuera de él. Tiende de forma asintótica a cero, cuando $|x|$ es grande. Las funciones deben unirse uniformemente en $x = 0$ y en $x = L$; la función de onda y su derivada deben ser continuas.



Ejemplo 40.3 El pozo y la caja

Demuestre que la ecuación (40.19), $\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$, es consistente con la correspondiente función de onda para la partícula en una caja.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La ecuación (40.19) define las funciones de onda posibles fuera del pozo de potencial. Como la función de onda fuera de la caja (que es un pozo de potencial infinito) es igual a cero, debemos demostrar que $\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$ tiende a cero para $x < 0$ y para $x > L$, cuando la profundidad (U_0) del pozo de potencial tiende a infinito.

PLANTEAR: Usamos lo que sabemos de la función exponencial y la definición de la cantidad κ en la ecuación (40.19): $\kappa = [2m(U_0 - E)]^{1/2}/\hbar$.

EJECUTAR: Cuando U_0 tiende a infinito, κ también tiende a infinito. En la región $x < 0$, la función de onda es $\psi(x) = Ce^{\kappa x}$; cuando $\kappa \to \infty$, $\kappa x \to -\infty$ y $e^{\kappa x} \to 0$, por lo que la función de onda tiende a cero para toda $x < 0$. En la región $x > L$, la función de onda es $\psi(x) = De^{-\kappa x}$; cuando $\kappa \to \infty$, $-\kappa x \to -\infty$ y $e^{-\kappa x} \to 0$, por lo que la función de onda también tiende a cero para toda $x > L$.

EVALUAR: En la sección 40.1 *supusimos* que $\psi(x) = 0$ fuera de la caja. Este análisis da validez a nuestra hipótesis.

En nuestro estudio de la mecánica, con frecuencia examinábamos casos al límite, para comprobar nuestros resultados (véase los ejemplos 5.11 y 5.13, en la sección 5.2). Este ejemplo demuestra que esta técnica también es de utilidad en problemas de mecánica cuántica, al igual que en problemas de todas las ramas de la física.

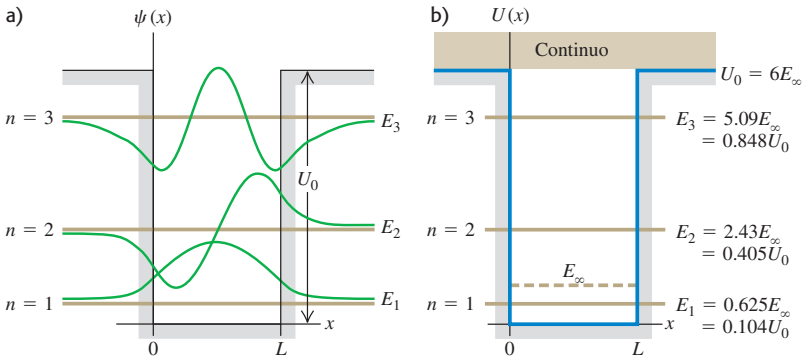
Comparación de pozos cuadrados finitos e infinitos

Continuemos nuestra comparación del pozo de potencial de profundidad finita con el de profundidad infinita, lo cual iniciamos en el ejemplo 40.3. Primero, como las funciones de onda para el pozo finito no son cero en $x = 0$ y $x = L$, la longitud de onda de la parte senoidal de cada función de onda es *mayor* de lo que sería con un pozo infinito. De acuerdo con $p = h/\lambda$, este aumento en λ corresponde a una magnitud reducida de cantidad de movimiento y, por consiguiente, a una energía reducida. Así, cada nivel de energía, incluyendo el nivel fundamental, es *más bajo* para un pozo finito que para uno de profundidad infinita con el mismo ancho.

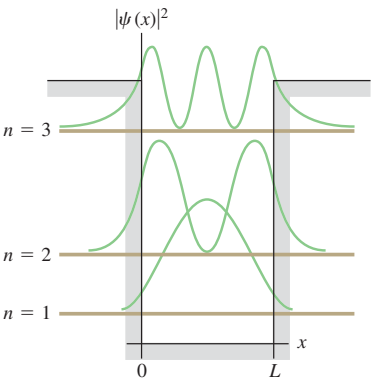
En segundo lugar, un pozo con profundidad finita U_0 sólo tiene una cantidad *finita* de estados confinados y sus niveles de energía correspondientes, en comparación con la cantidad *infinita* para un pozo infinitamente profundo. La cantidad de niveles que haya dependerá de la magnitud de U_0 en comparación con la energía del nivel fundamental para el pozo infinito, a la que llamaremos E_∞. De la ecuación (40.9),

$$E_\infty = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{40.20}$$

40.8 a) Funciones de onda para los tres estados confinados de una partícula en un pozo de potencial finito, con profundidad U_0, para el caso $U_0 = 6E_\infty$. La línea horizontal marrón para cada función de onda corresponde a $\psi = 0$; el lugar vertical de esas líneas indica la energía de cada estado confinado. b) Diagrama de niveles de energía para este sistema. Las energías se expresan como múltiplos de E_∞ y también como fracciones de U_0. Son posibles todas las energías mayores que U_0; los estados con $E > U_0$ forman un continuo.



40.9 Funciones de distribución de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para la función de onda del pozo cuadrado que se ve en la figura 40.8. La línea horizontal marrón para cada función de onda corresponde a $|\psi|^2 = 0$.



Cuando U_0 es *mucho mayor* que E_∞ (un pozo muy hondo), hay muchos estados confinados, y las energía de los más bajos son casi iguales a las de un pozo infinitamente profundo. Cuando U_0 sólo es unas pocas veces mayor que E_∞, sólo hay unos cuantos estados confinados. (Pero siempre hay al menos un estado confinado, independientemente de lo poco profundo que sea al pozo.) Como en el caso del pozo infinitamente profundo, *no* hay estado con $E = 0$; ese estado violaría el principio de incertidumbre.

La figura 40.8 muestra el caso específico donde $U_0 = 6E_\infty$; en este caso, hay tres estados confinados. Los niveles de energía se expresan tanto en fracciones de la profundidad del pozo U_0, como en múltiplos de E_∞. Advierta que si el pozo fuera infinitamente profundo, los tres niveles más inferiores, de acuerdo con la ecuación (40.9), serían E_∞, $4E_\infty$ y $9E_\infty$. También se muestran las funciones de onda de los tres estados confinados.

Sucede que cuando U_0 es menor que E_∞, sólo hay un estado confinado. En el límite, cuando U_0 es *mucho menor* que E_∞ (un pozo muy superficial o muy angosto), la energía de este estado único es, aproximadamente, $E = 0.68U_0$.

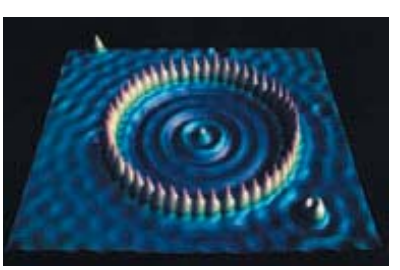
La figura 40.9 muestra gráficas de las distribuciones de probabilidad, esto es, de los valores de $|\psi|^2$, para las funciones de onda de la figura 40.8a. Como en el pozo infinito, no todas las posiciones son igualmente probables. Ya hemos comentado la posibilidad de encontrar la partícula fuera del pozo, en regiones prohibidas por la mecánica clásica.

También hay estados para los cuales E es *mayor que* U_0. En este caso, la partícula no está confinada, sino que es libre de moverse por todos los valores de x. Así, es posible *cualquier* energía E mayor que U_0. Estos estados de partícula libre forman entonces un *continuo*, y no un conjunto discreto de estados con niveles de energía definidos. Las funciones de onda para partículas libres son senoidales, tanto dentro como fuera del pozo. La longitud de onda es más corta dentro del pozo que fuera de él, y corresponde a mayor energía cinética en el interior que en el exterior.

El pozo cuadrado de potencial descrito en esta sección tiene varias aplicaciones prácticas. Ya mencionamos antes un ejemplo de un electrón dentro de una lámina. Una versión tridimensional, en la que U es cero dentro de una región esférica de radio R y su valor es U_0 fuera de ella, es el modelo más sencillo para representar la interacción de un neutrón con un núcleo en experimentos de dispersión de neutrones. En este contexto, el modelo se llama *modelo de bola de cristal* del núcleo, porque los neutrones que interaccionan con ese potencial se dispersan en forma parecida a la dispersión de la luz por una bola de cristal.

La figura 40.10 es una demostración gráfica de partículas en un pozo de potencial finito *bi*dimensional, y el ejemplo 40.4 describe otra aplicación del pozo cuadrado de potencial.

40.10 Para formar esta imagen se colocaron 48 átomos de hierro (representados como picos amarillos) en un círculo, sobre una superficie de cobre. La "altura" en cada punto dentro del círculo indica la densidad de los electrones en ese punto. El patrón de onda estacionaria es muy similar a la función de distribución de probabilidad para una partícula en un pozo de potencial finito unidimensional. (Esta imagen se tomó con un microscopio de barrido y tunelamiento, como veremos en la sección 40.3.)



Ejemplo 40.4 Electrón en un pozo cuadrado

Un electrón está atrapado en un pozo cuadrado de 0.50 nm (comparable a unos pocos diámetros atómicos). *a*) Determine la energía de nivel fundamental, si el pozo es infinitamente profundo. *b*) Si la profundidad real del pozo es seis veces la energía de nivel fundamental determinada en el inciso *a*), calcule los niveles de energía. *c*) Si el átomo hace una transición de un estado con energía E_2 a uno con energía E_1, emitiendo un fotón, determine la longitud de onda del fotón. ¿En qué región del espectro electromagnético está el fotón? *d*) Si el electrón está inicialmente en su nivel fundamental y absorbe un fotón, ¿cuál es la energía mínima que debe tener el fotón, para sacar al electrón del pozo? ¿En qué región del espectro está el fotón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos las ideas de una partícula en una caja y un pozo cuadrado. La energía del fotón emitido o absorbido en una transición es igual a la diferencia de energía entre dos niveles que intervienen en la transición.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (40.20) para calcular la energía E_∞ del nivel fundamental, para un pozo infinitamente profundo. Las energías para un pozo cuadrado con $U_0 = 6E_\infty$ se observan en la figura 40.8b. La longitud de onda del fotón se obtiene con la relación $E = hf = hc/\lambda$ [ecuación (38.8)].

EJECUTAR: *a*) Según la ecuación (40.20),

$$E_\infty = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2(1.055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.50 \times 10^{-9}\,\text{m})^2}$$
$$= 2.4 \times 10^{-19}\,\text{J} = 1.5\,\text{eV}$$

b) El dato es $U_0 = 6E_\infty$, así que $U_0 = 6(1.5\,\text{eV}) = 9.0\,\text{eV}$. Podemos simplemente medir los niveles de energía en la figura 40.8b. Las respuestas son

$$E_1 = 0.104U_0 = 0.104(9.0\,\text{eV}) = 0.94\,\text{eV}$$
$$E_2 = 0.405U_0 = 0.405(9.0\,\text{eV}) = 3.6\,\text{eV}$$
$$E_3 = 0.848U_0 = 0.848(9.0\,\text{eV}) = 7.6\,\text{eV}$$

También,

$$E_1 = 0.625E_\infty = 0.625(1.5\,\text{eV}) = 0.94\,\text{eV}$$
$$E_2 = 2.43E_\infty = 2.43(1.5\,\text{eV}) = 3.6\,\text{eV}$$
$$E_3 = 5.09E_\infty = 5.09(1.5\,\text{eV}) = 7.6\,\text{eV}$$

c) La energía del fotón es

$$E_2 - E_1 = 3.6\,\text{eV} - 0.94\,\text{eV} = 2.7\,\text{eV}$$

La longitud de onda se determina con $E = hf = hc/\lambda$:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{2.7\,\text{eV}} = 460\,\text{nm}$$

Este fotón se encuentra en la región azul del espectro visible.

d) En la figura 40.8b vemos que la energía mínima necesaria para elevar el electrón y sacarlo del pozo, desde su nivel fundamental $n = 1$, es la profundidad del pozo ($U_0 = 9.0\,\text{eV}$) menos la energía inicial del electrón ($E_1 = 0.94\,\text{eV}$), es decir, 8.1 eV. Como 8.1 eV es tres veces los 2.7 eV de energía del fotón del inciso *c*), la longitud de onda del correspondiente fotón es un tercio de 460 nm, o 150 nm, que está en la región ultravioleta del espectro.

EVALUAR: Para comprobar nuestros resultados de las energías para los tres estados confinados, observe que si el pozo hubiera sido infinitamente profundo, las energías serían

$$E_1 = E_\infty = 1.5\,\text{eV}$$
$$E_2 = 4E_\infty = 6.0\,\text{eV}$$
$$E_3 = 9E_\infty = 13.5\,\text{eV}$$

Las energías que determinamos en el inciso *b*) tienen valores menores que éstos. Esto tiene sentido: como indicamos antes, la profundidad finita del pozo hace bajar los niveles de energía, en comparación con los de un pozo infinitamente profundo.

Una aplicación de estas ideas consiste en los *puntos cuánticos*, que son partículas de tamaño nanométrico de un semiconductor como el seleniuro de cadmio (CdSe). Un electrón en un punto cuántico se comporta mucho como una partícula en un pozo de potencial finito con ancho L del mismo tamaño que el punto. Cuando los puntos cuánticos se iluminan con luz ultravioleta, los electrones absorben los fotones ultravioleta y se excitan a niveles de alta energía como el nivel $n = 3$ descritos en este ejemplo. Si el electrón regresa al nivel fundamental ($n = 1$) en dos o más pasos (por ejemplo, de $n = 3$ a $n = 2$ y de $n = 2$ a $n = 1$), uno de estos pasos implicará emitir un fotón de luz visible como lo calculamos aquí. (Describimos este proceso de *fluorescencia* en la sección 38.3.) Al aumentar el valor de L disminuyen las energías de los niveles y por consiguiente el espacio entre éstos, y también disminuye la energía y se incrementa la longitud de onda de los fotones emitidos. La fotografía de inicio de este capítulo muestra puntos cuánticos de distintos tamaños en una solución, cada uno de los cuales emite una longitud de onda característica dependiendo de su tamaño. Los puntos cuánticos pueden inyectarse en tejido vivo y su fluorescencia es útil como trazador en la investigación biológica y en medicina. Asimismo, quizá sea la clave de una nueva generación de láseres y computadoras ultrarrápidas.

Evalúe su comprensión de la sección 40.2 Suponga que el ancho del pozo de potencial finito, en la figura 40.8, se reduce a la mitad. ¿Cómo debe cambiar el valor de U_0 para que siga habiendo sólo tres niveles de energía confinados, y sus energías sean las fracciones de U_0 que muestra la figura 40.8b? i) U_0 debe aumentar en un factor de 4; ii) U_0 debe aumentar en un factor de 2; iii) U_0 debe permanecer igual; iv) U_0 debe disminuir en un factor de $\frac{1}{2}$; v) U_0 debe disminuir en un factor de $\frac{1}{4}$.

40.3 Barreras de potencial y tunelamiento

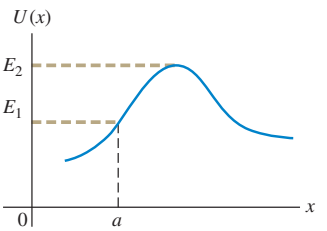
Una **barrera de potencial** es lo contrario a un pozo de potencial: es una función de energía potencial con un *máximo*. La figura 40.11 muestra un ejemplo. En la mecánica newtoniana, si la energía total es E_1, una partícula que inicialmente esté a la izquierda

de la barrera de potencial debe quedar a la izquierda del punto $x = a$. Si tuviera que moverse hacia la derecha de este punto, la energía potencial U sería mayor que la energía total E. Ya que $K = E - U$, la energía cinética sería negativa, lo cual es imposible, ya que para que un valor de $K = \frac{1}{2}mv^2$ sea negativo se necesitaría que la masa fuera negativa o que la rapidez fuera imaginaria.

Si la energía total es mayor que E_2, la partícula puede pasar la barrera. Un carrito de montaña rusa puede remontar la subida si tiene suficiente energía cinética desde el inicio. Si no la tiene, se detendrá a media subida y después se regresará hacia abajo.

La mecánica cuántica nos describe un fenómeno peculiar y muy interesante, en relación con las barreras de potencial. Una partícula que se encuentra con esa barrera no necesariamente es regresada; hay cierta probabilidad de que salga por el otro lado, aun cuando no tenga la energía cinética suficiente para remontar la barrera, según la mecánica newtoniana. A esta penetración de barrera se le llama **tunelamiento**. Es un nombre natural: se cava un túnel que atraviese una montaña y ya no es necesario llegar hasta la cima. Sin embargo, en el tunelamiento de la mecánica cuántica, la partícula no perfora en realidad un túnel para atravesar la barrera, ni pierde energía en el proceso de tunelamiento.

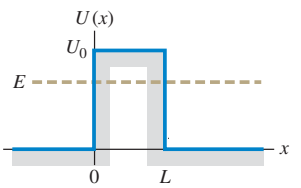
40.11 Una barrera de energía potencial. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la energía total es E_1, una partícula que esté en el lado izquierdo de la barrera no puede ir más lejos que $x = a$. Si la energía total es mayor que E_2, la partícula puede salvar la barrera.



Tunelamiento a través de una barrera rectangular

Para comprender cómo puede darse el tunelamiento, examinemos la función de energía potencial $U(x)$, que muestra la figura 40.12. Es como la figura 40.6 puesta de cabeza; la energía potencial es cero en cualquier lugar, excepto en el intervalo $0 \leq x \leq L$, donde tiene el valor U_0. Esto podría representar un modelo sencillo para un electrón y dos placas metálicas separadas por un entrehierro de espesor L. Igualaremos a cero la energía potencial dentro de alguna de las placas, pero será igual a U_0 en el espacio entre ellas.

40.12 Una barrera rectangular de energía potencial de ancho L y altura U_0. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la energía total E es menor que U_0, una partícula no puede pasar sobre esta barrera, y está confinada al lado donde esté inicialmente.

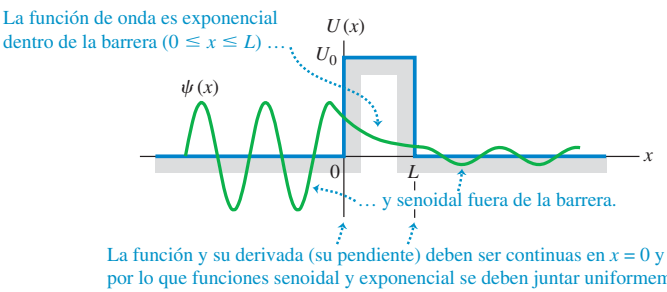


Examinemos las soluciones de la ecuación de Schrödinger para esta función de energía potencial, para el caso en que E es menor que U_0. Podemos usar nuestros resultados de la sección 40.2. En las regiones $x < 0$ y $x > L$, la solución es senoidal y está representada por la ecuación (40.17). Dentro de la barrera ($0 \leq x \leq L$), la solución es exponencial, como en la ecuación (40.19). Igual que el pozo de potencial finito, las funciones se deben unir uniformemente en los puntos limítrofes $x = 0$ y $x = L$. Esto es, la función y su derivada deben ser continuas en esos puntos.

Estos requisitos conducen a una función de onda como la que se muestra en la figura 40.13. La función *no* es cero dentro de la barrera (la región prohibida por la mecánica newtoniana). Es todavía más notable que una partícula que inicialmente esté a la *izquierda* de la barrera, tenga cierta probabilidad de encontrarse a la *derecha* de esa barrera. ¿Qué tan alta es la probabilidad? Eso depende del ancho L de la barrera y de la energía E (toda cinética) de la partícula, en comparación con la altura U_0 de la barrera. La probabilidad T de que la partícula atraviese la barrera es proporcional al cuadrado de la relación de las amplitudes de las funciones senoidales de onda, a los dos lados de la barrera. Esas amplitudes se determinan igualando las funciones de onda y sus derivadas en los puntos limítrofes, lo cual es un problema matemático. Cuando T es mucho menor que la unidad, se determina en forma aproximada con

$$T = Ge^{-2\kappa L} \quad \text{donde} \quad G = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

(probabilidad de tunelamiento) (40.21)



40.13 Una función de onda posible para una partícula que se pasa atravesando la barrera de energía potencial de la figura 40.12.

La probabilidad disminuye rápidamente al aumentar el ancho L de la barrera. También depende en forma crítica de la diferencia de energía $U_0 - E$, que representa la energía cinética adicional que necesitaría la partícula para subir y pasar sobre la barrera, en un análisis newtoniano.

Ejemplo 40.5 Tunelamiento en una barrera

Un electrón de 2.0 eV encuentra una barrera de 5.0 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que se filtre a través de la barrera, si el ancho de ésta es *a*) 1.00 nm, *b*) 0.50 nm (más o menos diez y cinco diámetros atómicos, respectivamente)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las ideas de tunelamiento a través de una barrera rectangular, como la que muestran las figuras 40.12 y 40.13.

PLANTEAR: La incógnita es la probabilidad de tunelamiento T en la ecuación (40.21), que evaluaremos con los datos $E = 2.0$ eV (energía del electrón), $U = 5.0$ eV (altura de la barrera), $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg (masa del electrón) y $L = 1.00$ nm o 0.50 nm (ancho de la barrera).

EJECUTAR: Primero evaluaremos G y κ en la ecuación (40.21), usando $E = K = 2.0$ eV:

$$G = 16\frac{2.0\text{ eV}}{5.0\text{ eV}}\left(1 - \frac{2.0\text{ eV}}{5.0\text{ eV}}\right) = 3.8$$

$$U_0 - E = 5.0\text{ eV} - 2.0\text{ eV} = 3.0\text{ eV} = 4.8 \times 10^{-19}\text{ J}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(4.8 \times 10^{-19}\text{ J})}}{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}} = 8.9 \times 10^{9}\text{ m}^{-1}$$

(Note que las unidades de energía en eV se simplifican al calcular G, pero hubo que convertir eV a $\text{J} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$ para determinar κ en m^{-1}.)

a) Cuando $L = 1.00\text{ nm} = 1.00 \times 10^{-9}$ m, $2\kappa L = 2(8.9 \times 10^{9}\text{ m}^{-1}) \times (1.00 \times 10^{-9}\text{ m}) = 17.8$, y

$$T = Ge^{-2\kappa L} = 3.8e^{-17.8} = 7.1 \times 10^{-8}$$

b) Cuando $L = 0.50$ nm, la mitad de 1.00 nm, $2\kappa L$ es la mitad de 17.8, es decir, 8.9, y

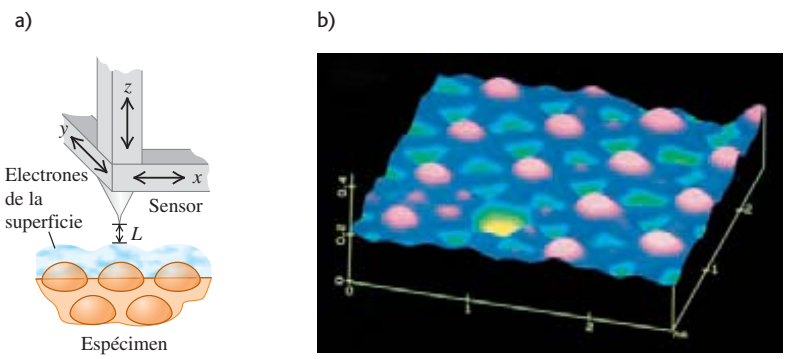
$$T = 3.8e^{-8.9} = 5.2 \times 10^{-4}$$

EVALUAR: Al reducir a la mitad el ancho de esta barrera, la probabilidad del tunelamiento aumenta en un factor casi de diez mil.

Aplicaciones del tunelamiento

El tunelamiento es importante en muchas áreas de la física, incluyendo algunas de mucha relevancia práctica. Por ejemplo, cuando usted retuerce dos alambres de cobre para unirlos y conectarlos, o cierra los contactos de un interruptor, la corriente pasa de uno a otro conductor, a pesar de que haya una capa delgada de óxido de cobre, no conductor, entre ellos. Los electrones se filtran atravesando esta delgada capa aislante. El *diodo túnel* es un dispositivo semiconductor donde los electrones atraviesan una barrera de potencial. La corriente puede conectarse y desconectarse con mucha rapidez (en menos de algunos picosegundos) al variar la altura de la barrera. La *unión de Josephson* consiste en dos superconductores separados por una capa de óxido de unos pocos átomos de espesor (de 1 a 2 nm). Los pares de electrones en el superconductor se pueden filtrar atravesando la capa de barrera, comunicando al dispositivo unas propiedades de circuito excepcionales. Las uniones Josephson son útiles para establecer normas precisas de voltaje y para medir campos magnéticos diminutos.

El *microscopio de barrido y tunelamiento* (STM de *scanning tunneling microscope*) usa tunelamiento de electrones para formar imágenes de las superficies, hasta escalas de átomos individuales. Una aguja conductora extremadamente aguda se acerca mucho

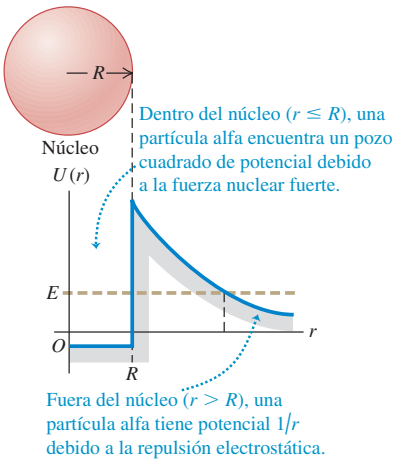


40.14 a) Esquema del sensor de un microscopio de barrido y tunelamiento (STM). Al barrer la superficie con el sensor conductor puntiagudo, en las direcciones x y y, también se mueve en la dirección de z para mantener una corriente constante de tunelamiento. La posición variable del sensor se registra y usa para formar una imagen de la superficie. b) Esta imagen STM a colores muestra átomos de sodio (rosas) absorbidos en una superficie de platino. La mancha amarilla indica un átomo faltante.

a la superficie, a menos de 1 nm, aproximadamente (figura 40.14a). Cuando la aguja tiene un potencial positivo con respecto a la superficie, los electrones pueden filtrarse a través de la barrera de energía potencial de la superficie, y llegar a la aguja. Como muestra el ejemplo 40.5, la probabilidad de tunelamiento y, por consiguiente, la corriente de tunelamiento, dependen mucho del ancho L de la barrera (la distancia entre la superficie y la punta de la aguja). En una forma de operación, la aguja recorre la superficie y, al mismo tiempo, se mueve perpendicular a ella para mantener una corriente constante de tunelamiento. Se registra el movimiento de la aguja y, después de muchos recorridos paralelos, se puede reconstruir una imagen de la superficie. Es esencial tener un control extremadamente preciso del movimiento de la aguja, y también aislarla de la vibración. La figura 40.14b muestra una imagen de los átomos de sodio sobre la superficie de un cristal de platino. (La figura 40.10 también es una imagen con STM.)

El tunelamiento tiene gran importancia en la física nuclear. Cuando dos núcleos se filtran a través de la barrera causada por su repulsión eléctrica y se acercan lo suficiente para que la fuerza nuclear fuerte los una, puede efectuarse una reacción de fusión. Las reacciones de fusión se efectúan en los núcleos de las estrellas, incluyendo el núcleo del Sol; sin el tunelamiento el Sol no brillaría. La emisión de partículas alfa de núcleos inestables también implica el tunelamiento. Una partícula alfa en la superficie de un núcleo encuentra una barrera de potencial debida al efecto combinado de la fuerza nuclear de atracción y la repulsión eléctrica de la parte restante del núcleo (figura 40.15). La partícula alfa se filtra a través de esta barrera. Como la probabilidad de tunelamiento depende en forma tan crítica de la altura y el ancho de la barrera, las duraciones de los núcleos emisores de partículas alfa varían entre límites extremadamente amplios. En el capítulo 43 regresaremos a la desintegración alfa.

40.15 Función aproximada de energía potencial para una partícula alfa que interactúa con un núcleo de radio R. Si una partícula alfa dentro del núcleo tiene energía E mayor que cero, puede pasar atravesando la barrera y escapar del núcleo.



Evalúe su comprensión de la sección 40.3 ¿Es posible que una partícula que pase por tunelamiento se encuentre *dentro* de la barrera, y no en alguno de sus lados?

40.4 El oscilador armónico

En la mecánica newtoniana, un **oscilador armónico** es una partícula de masa m sobre la cual actúa una componente de fuerza conservativa $F_x = -k'x$. (En esta descripción usaremos k' para representar la *constante de fuerza*, minimizando la confusión con el número de onda $k = 2\pi/\lambda$.) Esta componente de fuerza es proporcional al desplazamiento x de la partícula, con respecto a $x = 0$, su posición de equilibrio. La función correspondiente de energía potencial es $U = \frac{1}{2}k'x^2$ (figura 40.16). Cuando la partícula se desplaza con respecto al equilibrio, adquiere un movimiento senoidal con frecuencia angular $\omega = (k'/m)^{1/2}$. Estudiamos este sistema con detalle en el capítulo 13; el lector debería repasar esa descripción.

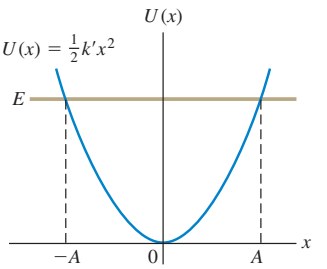
Un tema interesante y útil para nosotros es un análisis mecánico-cuántico del oscilador armónico usando la ecuación de Schrödinger. Las soluciones permiten tener una perspectiva de las vibraciones de las moléculas, la teoría cuántica de las capacidades caloríficas, las vibraciones de átomos en sólidos cristalinos, y muchos otros casos.

Antes de entrar en detalle, haremos una estimación bien informada de los niveles de energía. El nivel E de energía de un *fotón* se relaciona con su frecuencia angular ω mediante $E = hf = (h/2\pi)(\omega/2\pi) = \hbar\omega$. El oscilador armónico tiene una frecuencia angular ω característica, cuando menos en la mecánica newtoniana. Entonces, una propuesta razonable sería que en el análisis mecánico-cuántico, los niveles de energía de un oscilador armónico sean múltiplos de la cantidad

$$\hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m}}$$

Son los niveles de energía que supuso Planck para deducir su ley de radiación (véase la sección 38.8). Fue una buena hipótesis: los niveles de energía son, efectivamente, múltiplos semienteros $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ múltiplos de $\hbar\omega$.

40.16 Función de energía potencial para el oscilador armónico. En la mecánica newtoniana, la amplitud A se relaciona con la energía total E mediante $E = \frac{1}{2}k'A^2$, y la partícula está confinada al intervalo $x = -A$ a $x = A$.



Para el oscilador armónico pondremos $\frac{1}{2}k'x^2$ en vez de U en la ecuación unidimensional de Schrödinger, ecuación (40.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}k'x^2\psi=E\psi \qquad \begin{matrix}\text{(ecuación de Schrödinger}\\ \text{para el oscilador armónico)}\end{matrix} \tag{40.22}$$

Las soluciones de esta ecuación son funciones de onda para los estados físicamente posibles del sistema.

Funciones de onda, condiciones en la frontera y niveles de energía

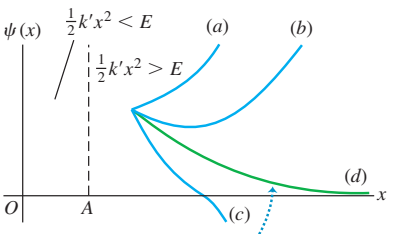
En la descripción de los potenciales en el pozo cuadrado de la sección 40.2, encontramos que los niveles de energía se determinan con condiciones en la frontera, en las paredes del pozo. Sin embargo, el potencial del oscilador armónico no tiene paredes como tales. Entonces, ¿cuáles son las condiciones adecuadas en la frontera? En forma clásica, $|x|$ no puede ser mayor que la amplitud A, que es el desplazamiento máximo con respecto al equilibrio. La mecánica cuántica sí permite que haya algo de penetración en las regiones prohibidas clásicamente; aunque la probabilidad disminuye a medida que aumenta la penetración. Así, las funciones de onda deben tender a cero cuando $|x|$ se hace grande.

No es tan trivial, como parecería, el requisito de que $\psi(x)\to 0$ cuando $|x|\to\infty$. Suponga que calculamos *numéricamente* soluciones de la ecuación (40.22). Comenzamos en algún punto x, seleccionando valores de $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en ese punto. Usando la ecuación de Schrödinger para evaluar $d^2\psi(x)/dx^2$ en el punto, podemos calcular $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ en un punto vecino en $x+\Delta x$, y así sucesivamente. Con una computadora se puede iterar muchas veces este proceso, con incrementos Δx suficientemente pequeños, podemos calcular con gran precisión la función de onda. Sin embargo, no tenemos la garantía que una función obtenida así tienda a cero cuando x es grande. Para visualizar en qué clase de problemas nos podemos meter, replantearemos la ecuación (40.22) en la forma

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}k'x^2-E\right)\psi(x) \tag{40.23}$$

En esta forma, la ecuación indica que cuando x es suficientemente grande (sea positiva o negativa) para que la cantidad $(\frac{1}{2}k'x^2-E)$ sea positiva, la función $\psi(x)$ y su segunda derivada $d^2\psi(x)/dx^2$ tienen el mismo signo.

La segunda derivada de $\psi(x)$ es la tasa de cambio de la *pendiente* de $\psi(x)$. Considere un punto con $x>A$, para el cual $\frac{1}{2}k'x^2-E>0$. Si $\psi(x)$ es positiva, también lo es $d^2\psi(x)/dx^2$, y la función es *cóncava hacia arriba*. La figura 40.17 muestra cuatro clases posibles de comportamiento, partiendo de un punto $x>A$. Si la pendiente es positiva inicialmente, la función se curva hacia arriba cada vez con mayor pendiente (curva *a*) y llega a infinito. Si la pendiente inicialmente es negativa en el punto, hay tres posibilidades. Si la pendiente cambia demasiado rápido (curva *b*), la curva se va hacia arriba y de nuevo hacia el infinito. Si la pendiente no cambia con la rapidez suficiente, la curva va hacia abajo y cruza el eje x. Después de haberlo cruzado, $\psi(x)$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ son negativas las dos (curva *c*) y la curva cóncava hacia abajo se dirige hacia el infinito *negativo*. Entre estos infinitos hay la posibilidad de que la curva se flexione justo lo suficiente para deslizarse asintóticamente hacia el eje x (curva *d*). En este caso, $\psi(x)$, $d\psi(x)/dx$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ tienden a cero cuando x es grande; en esta posibilidad está la única esperanza de satisfacer la condición en la frontera de que $\psi(x)\to 0$ cuando $|x|\to\infty$ y sólo se da para ciertos valores muy especiales de la constante E.



40.17 Posibles comportamientos de las funciones de onda para el oscilador armónico, en la región $\frac{1}{2}k'x^2>E$. En esta región, $\psi(x)$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ tienen el mismo signo. La curva es cóncava hacia arriba cuando $d^2\psi(x)/dx^2$ es positiva y cóncava hacia abajo cuando $d^2\psi(x)/dx^2$ es negativa.

Sólo la curva *d*, que tiende asintóticamente hacia el eje x cuando x es grande, es una función de onda aceptable para este sistema.

Esta descripción cualitativa permite comprender algo sobre la forma en que las condiciones en la frontera, para este problema, determinan los niveles posibles de energía. La ecuación (40.22) también se puede resolver en forma exacta. Las soluciones, aunque no se encuentran en los cursos elementales de cálculo, son bien conocidas de los matemáticos; se llaman *funciones de Hermite*. Cada una es una función exponencial multiplicada por un polinomio en x. El estado con la energía mínima (el estado fundamental) tiene la función de onda

$$\psi(x)=Ce^{-\sqrt{mk'}\,x^2/2\hbar} \tag{40.24}$$

La constante C se selecciona para normalizar la función, esto es, para que $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = 1$. Con las tablas de integrales se puede determinar C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

La energía correspondiente, que llamaremos E_0, es la del estado fundamental:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \tag{40.25}$$

Tal vez usted no crea que la ecuación (40.24) *sea* realmente una solución de la ecuación (40.22) (la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico) con la energía definida por la ecuación (40.25). Lo invitamos a calcular la segunda derivada de la ecuación (40.24), a sustituirla en la ecuación (40.22) y a comprobar que en realidad sí es una solución, cuando la ecuación (40.25) da como resultado E_0 (ejercicio 40.28). Es algo complicado, pero el resultado es satisfactorio y vale la pena el esfuerzo.

Un análisis adicional de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico demuestra que se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[\frac{1}{2}k'x^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}}\right]\psi(x)$$

Al comparar esa ecuación complicada con la (40.23) nos encontramos con una agradable sorpresa: los niveles de energía, que llamamos E_n, se definen con la fórmula sencilla

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

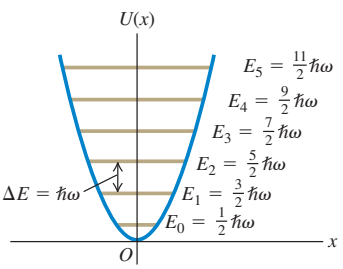
(niveles de energía, oscilador armónico) (40.26)

donde n es el número cuántico que identifica cada estado y cada nivel de energía. Advierta que el nivel fundamental de energía $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ se representa con $n = 0$ y no con $n = 1$.

La ecuación (40.26) confirma nuestra hipótesis de que los niveles de energía son múltiplos de $\hbar\omega$. Los niveles de energía adyacentes están separados por un intervalo constante de $\hbar\omega = hf$, como Planck supuso en 1900. Hay una cantidad infinita de niveles, lo cual no debería sorprendernos, ya que estamos trabajando un pozo de potencial de profundidad infinita. A medida que $|x|$ aumenta, $U = \frac{1}{2}k'x^2$ se incrementa sin límite.

La figura 40.18 muestra los seis niveles de energía mínimos, y la función de energía potencial $U(x)$. Para cada nivel n, el valor de $|x|$ en el que la línea horizontal que representa la energía total E_n cruza $U(x)$, define la amplitud A_n del oscilador newtoniano correspondiente.

40.18 Niveles de energía del oscilador armónico. La distancia entre dos niveles adyacentes cualquiera es $\Delta E = \hbar\omega$. La energía del nivel fundamental es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.



Ejemplo 40.6 Vibración en un cristal de sodio

Un átomo de sodio de masa 3.82×10^{-26} kg vibra en un cristal, con movimiento armónico simple. La energía potencial aumenta 0.0075 eV cuando el átomo se desplaza 0.014 nm de su posición de equilibrio. *a*) Determine la frecuencia angular, según la mecánica newtoniana. *b*) Calcule las distancias entre los niveles de energía adyacentes, en electrón volts. *c*) Si un átomo emite un fotón durante una transición de un nivel de vibración al siguiente nivel menor, ¿cuál es la longitud de onda de ese fotón? ¿En cuál región del espectro electromagnético está?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza descripciones tanto newtonianas como de mecánica cuántica para un oscilador armónico.

PLANTEAR: Para calcular la frecuencia angular $\omega = (k'/m)^{1/2}$, usaremos la información proporcionada y la ecuación $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$ para la energía potencial. La distancia entre niveles de energía adyacentes se determina con la ecuación (40.26). Calcularemos la longitud de onda del fotón emitido, usando las mismas ideas que en el ejemplo 40.4 (sección 40.2).

continúa

EJECUTAR: No conocemos k', pero podemos determinarla porque $U = 0.0075\ \text{eV} = 1.2 \times 10^{-21}\ \text{J}$ cuando $x = 0.014 \times 10^{-9}\ \text{m}$. Entonces,

$$U = \frac{1}{2}k'x^2$$

$$k' = \frac{2U}{x^2} = \frac{2(1.2 \times 10^{-21}\ \text{J})}{(0.014 \times 10^{-9}\ \text{m})^2} = 12.2\ \text{N/m}$$

a) La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{12.2\ \text{N/m}}{3.82 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 1.79 \times 10^{13}\ \text{rad/s}$$

b) Según la ecuación (40.26) y la figura 40.18, la distancia entre los niveles adyacentes de energía es

$$\hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(1.79 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1}) = 1.88 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0118\ \text{eV}$$

c) Partiendo de $E = hc/\lambda$, la longitud de onda correspondiente es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.0118\ \text{eV}} = 1.05 \times 10^{-4}\ \text{m} = 105\ \mu\text{m}$$

Este fotón está en la región infrarroja del espectro.

EVALUAR: Este ejemplo nos indica que las constantes de fuerza para las fuerzas interatómicas son del orden de unos cuantos N/m, no muy distintas de los valores para los resortes en el hogar, o los juguetes que funcionan con resortes, como un Slinky®. También parece indicar que los físicos pueden aprender acerca de las vibraciones de los átomos, midiendo la radiación que emiten al pasar de un estado vibratorio a uno más bajo. En el capítulo 42 exploraremos más este tema.

Comparación entre osciladores cuánticos y newtonianos

Activ ONLINE Physics
20.1.6 Diagramas de energía potencial, pregunta 6

La figura 40.19 muestra las cuatro primeras funciones de onda para el oscilador armónico. También, cada gráfica muestra la amplitud A de un oscilador armónico newtoniano con la misma energía, esto es, el valor de A determinado con

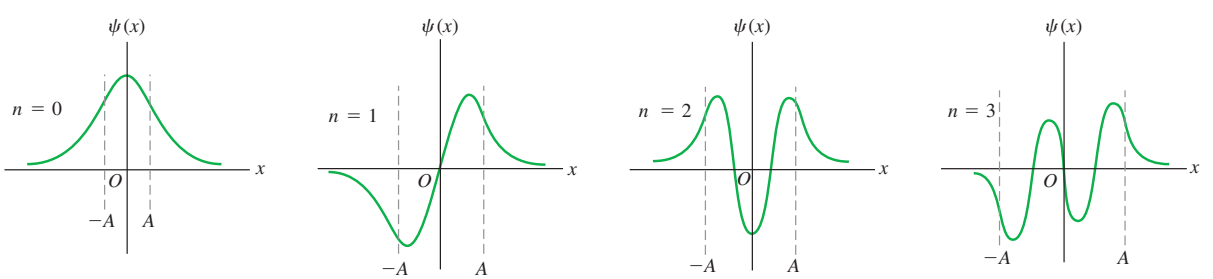
$$\frac{1}{2}k'A^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (40.27)$$

En cada caso, hay algo de penetración de la función de onda en las regiones $|x| > A$, prohibidas por la mecánica newtoniana. Esto se parece al efecto que observamos con la partícula en un pozo cuadrado finito.

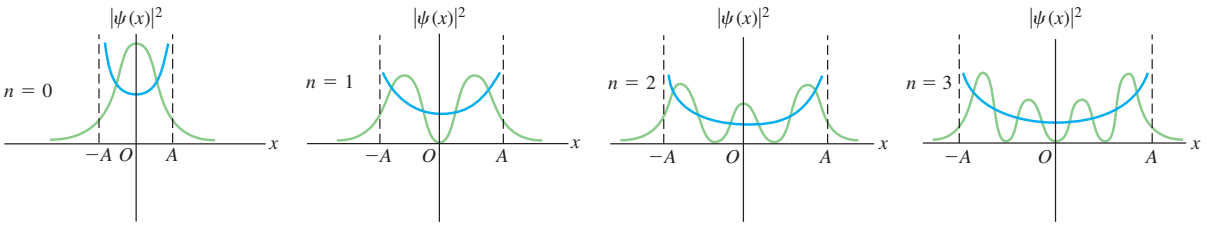
CUIDADO **Ponga especial atención en sus símbolos algebraicos** Esta amplitud A newtoniana (en unidades de m) *no* es la misma que la constante A de normalización en mecánica cuántica (en $\text{m}^{-1/2}$) que se usa en varias funciones de onda en este capítulo. También, la frecuencia angular ω (en rad/s) del oscilador armónico *no* es la misma que la frecuencia angular ω (también en rad/s) obtenida partiendo de la relación de De Broglie $E = \hbar\omega$ [es la causa por la que la ecuación (40.14) se expresó en función de $2\pi E/h = E/\hbar$, y no en términos de ω]. Por último, hemos diferenciado la constante de fuerza k' (en N/m o kg/s^2) del número de onda k (en rad/m). Ninguna de esas cantidades es lo mismo que κ (en m^{-1}) que se usó en las ecuaciones (40.19) y (40.21), o a la energía cinética K (en J o eV). ▮

La figura 40.20 muestra las distribuciones de probabilidad, $|\psi(x)|^2$ para estos mismos estados. Cada gráfica también muestra las distribuciones de probabilidad determinadas con análisis newtoniano, donde la probabilidad de encontrar la partícula cerca de un punto elegido al azar es inversamente proporcional a su rapidez en ese

40.19 Las primeras cuatro funciones de onda para el oscilador armónico. La amplitud A de un oscilador newtoniano con la misma energía total se indica en cada una. Cada función de onda penetra un poco en las regiones clásicamente prohibidas $|x| > A$. La cantidad total de máximos y mínimos finitos para cada función es $n + 1$, uno más que el número cuántico.



40.20 Funciones de distribución de probabilidad $|\psi|^2$ para las funciones de onda del oscilador armónico que se indican en la figura 40.19. Para cada una se muestra la amplitud A del movimiento newtoniano con la misma energía. Las líneas azules muestran las distribuciones de probabilidad correspondientes para el movimiento newtoniano. A medida que n aumenta, las funciones mecánico-cuánticas promediadas se parecen cada vez más a las curvas newtonianas.



punto. Si promediamos las funciones de las curvas de probabilidad mecánico-cuánticas, los resultados para $n > 0$ se parecen a las predicciones newtonianas. Esta concordancia mejora al aumentar n; la figura 40.21 muestra la funciones clásicas y mecánico-cuánticas de probabilidad, para $n = 10$. Observe que la distancia entre los ceros de $|\psi(x)|^2$ en la figura 40.21 aumenta al incrementarse la distancia a $x = 0$. Esto tiene lógica, desde la perspectiva newtoniana: a medida que una partícula se aleja de $x = 0$, disminuyen su energía cinética K y la magnitud p de su cantidad de movimiento. Razonando en forma mecánico-cuántica, eso quiere decir que aumenta la longitud de onda $\lambda = h/p$, por lo que la distancia entre los ceros de $\psi(x)$ (y en consecuencia de $|\psi(x)|^2$) también se incrementa.

En el análisis newtoniano del oscilador armónico, la energía mínima es cero y la partícula está en reposo en su posición de equilibrio. Eso no es posible en la mecánica cuántica; ninguna solución de la ecuación de Schrödinger tiene $E = 0$ y satisface las condiciones en la frontera. Además, si hubiera un estado así, violaría el principio de incertidumbre, porque no habría incertidumbre en la posición o en la cantidad de movimiento. Ciertamente, la energía debe ser cuando menos de $\frac{1}{2}\hbar\omega$ para el sistema, para concordar con el principio de incertidumbre. Para ver en forma cualitativa por qué es así, imaginemos un oscilador newtoniano con energía total $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Podemos determinar una amplitud A y la velocidad máxima, igual que lo hicimos en la sección 13.3. Las relaciones adecuadas son las ecuaciones (13.21), de la energía total, y (13.23) para la rapidez máxima. Igualando $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, se llega a

$$E = \frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \qquad A = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{k'm}}}$$

$$p_{\text{máx}} = mv_{\text{máx}} = m\sqrt{\frac{k'}{m}}A = m\sqrt{\frac{k'}{m}}\sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{k'm}}} = \sqrt{\hbar\sqrt{k'm}}$$

Por último, si suponemos que A representa la incertidumbre Δx en la posición, y que $p_{\text{máx}}$ es la incertidumbre correspondiente ΔP_x en la cantidad de movimiento, el producto de las dos incertidumbres es

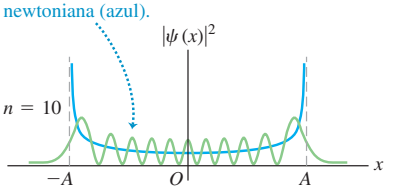
$$\Delta x\,\Delta p_x = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{k'm}}}\sqrt{\hbar\sqrt{k'm}} = \hbar$$

Este producto es igual, entonces, al valor mínimo permitido por la ecuación (39.11), $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar$, y así satisface el principio de incertidumbre. Si la energía hubiera sido menor que $\frac{1}{2}\hbar\omega$, el producto $\Delta x\,\Delta p_x$ hubiera sido menor que $\hbar$, y se habría violado el principio de incertidumbre.

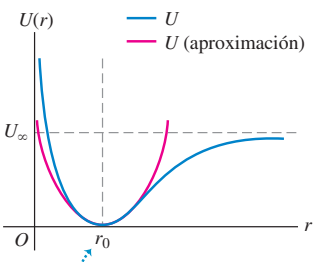
Aun cuando una función de energía potencial no tenga exactamente forma parabólica, podemos aproximarla con el potencial de oscilador armónico para desplazamientos suficientemente pequeños con respecto al equilibrio. La figura 40.22 muestra una función típica de energía potencial para una fuerza interatómica en una molécula. A separaciones grandes se nivela, lo que corresponde a la ausencia de fuerza a grandes distancias. Pero es aproximadamente parabólica cerca del punto mínimo (la posición de equilibrio de los átomos). Cerca del equilibrio, la vibración molecular es aproximadamente

40.21 Funciones de distribución de probabilidad newtoniana y mecánico-cuántica, para un oscilador armónico en el estado $n = 10$. También se muestra la amplitud newtoniana A.

Cuanto mayor sea el valor de n, la distribución de probabilidad mecánico-cuántica (verde) se acercará más a la distribución de probabilidad newtoniana (azul).



40.22 Una función de energía potencial que describe la interacción de dos átomos en una molécula diatómica. La posición de equilibrio está en $r = r_0$. La energía potencial necesaria para disociar la molécula es U_∞.



Cuando r está cerca de r_0, la curva de energía potencial es aproximadamente parabólica (indicada con la curva roja), y el movimiento es aproximadamente armónico simple.

armónica simple, con los niveles de energía definidos por la ecuación (40.26), como supusimos en el ejemplo 40.6.

Evalúe su comprensión de la sección 40.4 Un sistema mecánico-cuántico que está inicialmente en su nivel fundamental y absorbe un fotón y termina en el primer estado excitado. Después, el sistema absorbe un segundo fotón y termina en el segundo estado excitado. ¿Para cuál de los siguientes sistemas, el segundo fotón tiene una longitud de onda mayor que el primero? i) un oscilador armónico; ii) un átomo de hidrógeno; iii) una partícula en una caja.

40.5 Problemas tridimensionales

Hemos explicado la ecuación de Schrödinger y sus aplicaciones, sólo para problemas *unidimensionales*, el análogo de una partícula newtoniana moviéndose a lo largo de una recta. El modelo de línea recta es adecuado para algunas aplicaciones, pero para comprender la estructura atómica, necesitamos una generalización tridimensional.

No es difícil adivinar cómo se debería ver la ecuación de Schrödinger tridimensional. En primer lugar, la función de onda ψ es una función de las tres coordenadas espaciales (x, y, z). En general, la función de energía potencial depende también de las tres coordenadas, y se puede escribir como $U(x, y, z)$. A continuación, observamos que el término $-(\hbar^2/2m)d^2\psi/dx^2$ en la ecuación de Schrödinger unidimensional, ecuación (40.1), se relaciona con la energía cinética de la partícula en el estado descrito por la función de onda ψ. Por ejemplo, si en este término se inserta la función de onda $\psi(x) = Ae^{ikx}$ para una partícula libre cuya cantidad de movimiento tiene la magnitud $p = \hbar k$ y su energía cinética es $K = p^2/2m$, obtendremos $-(\hbar^2/2m)(ik)^2Ae^{ikx} = (\hbar^2k^2/2m)Ae^{ikx} = (p^2/2m)\psi(x) = K\psi(x)$. Si la cantidad de movimiento de la partícula tiene tres componentes (p_x, p_y, p_z), entonces la energía cinética es

$$K = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \tag{40.28}$$

Tomadas en forma conjunta, tales observaciones sugieren que la generalización correcta de la ecuación de Schrödinger para tres dimensiones es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right) + U(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \tag{40.29}$$

(ecuación tridimensional de Schrödinger)

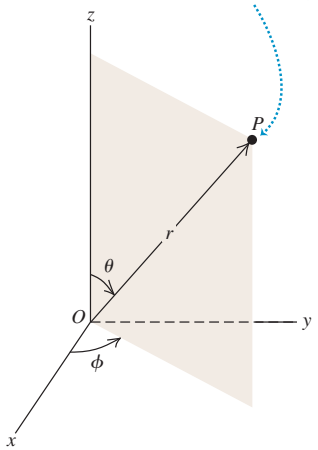
Se usan derivadas parciales, porque ψ es una función de x, y y z. Como en una dimensión, E es constante para un estado de determinada energía.

No pretenderemos haber *deducido* la ecuación (40.29). Como la versión unidimensional, habrá que probar esta ecuación comparando sus predicciones con los resultados experimentales. Como veremos en capítulos posteriores, la ecuación (40.29) pasa bien esta prueba, con gran éxito, por lo que tenemos la confianza en que *sí sea* la ecuación correcta.

En muchos problemas prácticos, en estructura atómica y en muchas cosas más, la función de energía potencial tiene *simetría esférica*; depende sólo de la distancia $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ al origen de las coordenadas. Para aprovechar esta simetría se usan *coordenadas esféricas* (r, θ, ϕ) (figura 40.23) en vez de coordenadas cartesianas (x, y, z). Entonces, una función de energía potencial con simetría esférica es una función sólo de r, y no de θ ni de ϕ, por lo que $U = U(r)$. Sucede que este hecho simplifica enormemente el problema para determinar soluciones de la ecuación de Schrödinger, aun cuando las derivadas en la ecuación (40.29) sean bastante más complicadas cuando se expresan en términos de coordenadas esféricas. Tenga cuidado: muchos textos de matemáticas intercambian los ángulos θ y ϕ con respecto a los de la figura 40.23.

40.23 En mecánica cuántica, las coordenadas esféricas tienen utilidad especial en problemas donde la energía potencial sólo depende de r, la distancia al origen.

La posición de un punto P se puede describir con las coordenadas rectangulares (x, y, z) o con las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ).



Para el átomo de hidrógeno, la función de energía potencial $U(r)$ es la conocida función de la ley de Coulomb:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{40.30}$$

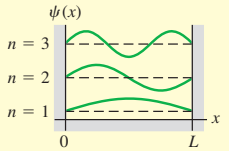
Veremos que para *todas* las funciones de energía potencial con simetría esférica $U(r)$, cada función de onda posible se puede expresar como producto de tres funciones: una es sólo función de r, una sólo de θ y una sólo de ϕ. Además, las funciones de θ y ϕ son las *mismas* para *cada* función de energía potencial con simetría esférica. Este resultado se relaciona en forma directa con el problema de determinar los valores posibles del *momento angular* para los diversos estados. Describiremos estos temas de forma más detallada en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 40 RESUMEN

Partícula en una caja: Los niveles de energía para una partícula de masa m en una caja (un pozo cuadrado de potencial, infinitamente profundo) de ancho L se determinan con la ecuación (40.9). Las funciones de onda normalizadas correspondientes para la partícula se determinan con la ecuación (40.13). (Véanse los ejemplos 40.1 y 40.2.)

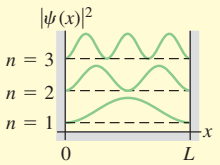
$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.9}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.13}$$

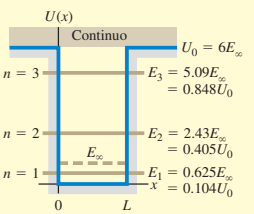


Funciones de onda y normalización: Para ser una solución de la ecuación de Schrödinger, la función de onda $\psi(x)$ y su derivada $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en todos los puntos, excepto donde la función de energía potencial $U(x)$ tenga una discontinuidad infinita. Las funciones de onda se suelen normalizar de tal modo que la probabilidad total de que la partícula se encuentre en algún lugar sea igual a la unidad.

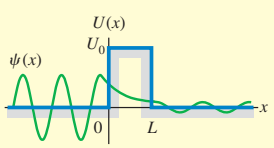
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1 \quad \text{(condición de normalización)} \tag{40.11}$$



Pozo de potencial finito: En un pozo de potencial con profundidad finita U_0, los niveles de energía son menores que para un pozo infinitamente profundo del mismo ancho, y la cantidad de niveles de energía que corresponden a estados confinados es finita. Los niveles se obtienen haciendo coincidir las funciones de onda en las paredes del pozo, para satisfacer la continuidad de $\psi(x)$ y de $d\psi(x)/dx$. (Véanse los ejemplos 40.3 y 40.4.)

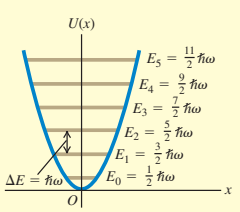


Barreras de potencial y tunelamiento: Hay cierta probabilidad de que una partícula penetre una barrera de energía potencial, aunque su energía cinética inicial sea menor que la altura de la barrera. A este proceso se le llama tunelamiento. (Véase el ejemplo 40.5.)



Oscilador armónico cuántico: Los niveles de energía del oscilador armónico, para el cual $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, se determinan con la ecuación (40.26). La distancia entre dos niveles adyacentes cualesquiera es $\hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ es la frecuencia angular de oscilación del oscilador armónico newtoniano correspondiente. (Véase el ejemplo 40.6.)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.26}$$



Problemas tridimensionales: La ecuación de Schrödinger para problemas tridimensionales es la ecuación (40.29).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right) + U(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \tag{40.29}$$

Términos clave

partícula en una caja, *1376*
normalización, *1379*
pozo de potencial, *1380*
potencial de pozo cuadrado, *1381*
estado confinado, *1381*
barrera de potencial, *1384*
tunelamiento, *1385*
oscilador armónico, *1387*

Respuesta a la pregunta de inicio del capítulo ?

Cuando un electrón de una de estas partículas, llamadas *puntos cuánticos*, hace una transición de un nivel excitado a uno inferior, emite un fotón cuya energía es igual a la diferencia en energía entre niveles. Cuanto menor sea el punto cuántico, mayor será el espacio de energía entre niveles y, por lo tanto, la longitud de onda de los fotones emitidos será más corta (más azul). Véase el ejemplo 40.4 (sección 40.2) para mayores detalles.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

40.1 Respuesta: v) Nuestra deducción de las funciones de onda estacionaria para una partícula en una caja demuestra que son superposiciones de ondas que se propagan en direcciones opuestas, al igual que una onda estacionaria en una cuerda. Una onda tiene cantidad de movimiento en la dirección de x positiva, mientras que la otra tiene una cantidad de movimiento de igual magnitud, pero en la dirección de la x negativa. La componente *total* de la cantidad de movimiento en dirección de x es cero.

40.2 Respuesta: i) Los niveles de energía se ordenan como se ve en la figura 40.8b si $U_0 = 6E_\infty$, entonces $E_\infty = \pi^2\hbar^2/2mL^2$ es la energía de nivel fundamental de un pozo infinito. Si el ancho del pozo L se reduce a $\frac{1}{2}$ de su valor inicial, E_∞ aumenta en un factor de 4, por lo que U_0 debe aumentar también en un factor de 4. Las energías E_1, E_2 y E_3 que se ven en la figura 40.8b, son todas fracciones específicas de U_0, por lo que también aumentarán en un factor de 4.

40.3 Respuesta: sí La figura 40.13 muestra una función de onda posible $\psi(x)$ para el tunelamiento; ya que $\psi(x)$ no es cero dentro de la barrera ($0 \le x \le L$), hay cierta probabilidad de que la partícula se encuentre ahí.

40.4 Respuesta: ii) Si el segundo fotón tiene una mayor longitud de onda y, por ende, menor energía que el primer fotón, la diferencia en energía entre los niveles excitados primero y segundo debe ser menor que la diferencia entre el nivel fundamental y el primer nivel excitado. Éste es el caso para el átomo de hidrógeno, para el cual la diferencia de energía entre niveles disminuye conforme aumenta la energía (véase la figura 38.9). En cambio, la diferencia de energía entre niveles sucesivos aumenta para una partícula en una caja (véase la figura 40.4b) y es constante para un oscilador armónico (véase la figura 40.18).

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P40.1. Para la partícula en una caja se elige $k = n\pi/L$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ para ajustarse a la condición en la frontera de que $\psi = 0$ cuando $x = L$. Sin embargo, $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$ también satisfacen esa condición en la frontera. ¿Por qué no elegimos también esos valores de n?

P40.2. Si ψ se normaliza, ¿cuál es el significado físico del área bajo una gráfica de $|\psi|^2$ en función de x, entre x_1 y x_2? ¿Cuál es el área total bajo la gráfica de $|\psi|^2$ cuando se incluyen todas las x? Explique por qué.

P40.3. Para una partícula en una caja ¿cómo se vería la función de distribución de probabilidad $|\psi|^2$ si la partícula se comportara como una partícula clásica (newtoniana)? ¿Las distribuciones de probabilidad reales tienden a esta forma clásica cuando n es muy grande? Explique por qué.

P40.4. En el capítulo 15 representamos una onda estacionaria como superposición de dos ondas que viajaban en direcciones opuestas. ¿Se puede pensar también que las funciones de onda de una partícula en una caja son una combinación de dos ondas viajeras? ¿Por qué? ¿Qué interpretación física tiene esta representación? Explique su respuesta.

P40.5. Una partícula en una caja está en el nivel fundamental. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la mitad derecha de la caja? (Véase la figura 40.5, pero no evalúe una integral.) ¿La respuesta es la misma si la partícula está en un nivel excitado? Explique por qué.

P40.6. Las funciones de onda para una partícula en una caja (véase la figura 40.5a) son cero en esos puntos. ¿Quiere eso decir que la partícula no puede moverse y pasar por uno de esos puntos? Explique cómo.

P40.7. Para una partícula confinada en un pozo cuadrado infinito, ¿es correcto decir que cada estado de energía definida también es un estado de longitud de onda definida? ¿Es también un estado de cantidad de movimiento definida? Explique por qué. (*Sugerencia:* recuerde que la cantidad de movimiento es un vector.)

P40.8. Para una partícula en un pozo de potencial finito, ¿es correcto decir que cada estado confinado de energía definida también es un estado de longitud de onda definida? ¿Es un estado de cantidad de movimiento definida? Explique por qué.

P40.9. La ecuación 40.15 expresa las funciones de onda dependientes del tiempo para una partícula en una caja. ¿Cómo una función de onda que tiene partes tanto real como imaginaria puede describir la posición (que es un número real) de una partícula?

P40.10. En la figura 40.5b, la función de probabilidad es cero en los puntos $x = 0$ y $x = L$, las "paredes" de la caja. ¿Quiere decir eso que la partícula nunca choca contra las paredes? Explique por qué.

P40.11. Una partícula queda confinada a un pozo de potencial finito en la región $0 < x < L$. ¿Cómo el área bajo la gráfica de $|\psi|^2$ en la región $0 < x < L$ se compara con el área total bajo la gráfica de $|\psi|^2$ cuando se incluyen todas las x posibles?

P40.12. Compare las funciones de onda para los tres primeros niveles de energía de una partícula en una caja de ancho L (figura 40.5a) con las funciones de onda correspondientes a un pozo de potencial finito del mismo ancho (figura 40.8a). ¿Cómo se compara la longitud de onda en el intervalo $0 \le x \le L$ para el nivel $n = 1$ de la partícula en una caja, con la longitud de onda correspondiente del nivel $n = 1$ en el pozo de potencial finito? Use el resultado para explicar por qué E_1 es menor que E_∞ en el caso que muestra la figura 40.8b.

P40.13. En la sección 40.2 se indicó que un pozo de potencial finito siempre tiene cuando menos un nivel confinado, sin importar lo superficial que sea. ¿Quiere decir eso que cuando $U_0 \to 0$, $E_1 \to 0$? ¿Viola eso el principio de incertidumbre de Heisenberg? Explique por qué.

P40.14. La figura 40.8a muestra que cuanto mayor sea la energía de un estado confinado en un pozo de potencial finito, la función de onda se extenderá más fuera del pozo (entra a los intervalos $x < 0$ y $x > L$). Explique por qué sucede esto.

P40.15. En la mecánica clásica (newtoniana), la energía total E de una partícula nunca puede ser menor que la energía potencial U, ya que la

energía cinética K no puede ser negativa. Sin embargo, en el tunelamiento a través de una barrera (sección 40.3) una partícula atraviesa por regiones donde E es menor que U. ¿Es eso una contradicción? Explique por qué.

P40.16. La figura 40.10 muestra la imagen de 48 átomos de hierro tomada por un microscopio de barrido y tunelamiento, los cuales son colocados en una superficie de cobre; se trata del patrón que indica la densidad de los electrones en la superficie de cobre. ¿Qué puede inferir usted acerca de la función de energía potencial dentro del círculo de los átomos de hierro?

P40.17. En forma cualitativa, ¿cómo espera que la probabilidad de que una partícula se filtre a través de una barrera de potencial dependa de la altura de la barrera? Explique por qué.

P40.18. La función de onda de la figura 40.13 es distinta de cero tanto para $x < 0$ como para $x > L$. ¿Quiere eso decir que la partícula se divide en dos partes al chocar contra la barrera, y que una parte se filtra por la barrera y la otra rebota en ella? Explique por qué.

P40.19. Las distribuciones de probabilidad, para las funciones de onda del oscilador armónico (véase las figuras 40.20 y 40.21) comienzan a parecerse a la distribución de probabilidad clásica (newtoniana), cuando el número cuántico n se hace grande. ¿Serían iguales las distribuciones que las del caso clásico, en el límite cuando n es muy grande? Explique por qué.

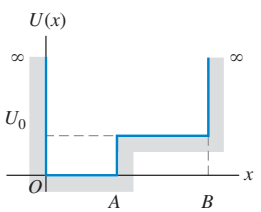
P40.20. En la figura 40.21, ¿cómo la probabilidad de encontrar una partícula en la mitad central de la región $-A < x < A$ se compara con la probabilidad de encontrar la partícula en la mitad externa de la región? ¿Es consistente con la interpretación física de la situación?

P40.21. Compare los niveles de energía permitidos para el átomo de hidrógeno, la partícula en una caja y el oscilador armónico. ¿Cuáles son los valores del número cuántico n para el nivel fundamental y el segundo nivel excitado de cada sistema?

P40.22. En el átomo de hidrógeno, la función de energía potencial sólo depende de la distancia r al núcleo, y no de la dirección. Ésta es, esféricamente simétrica. ¿Espera que todas las funciones de onda correspondientes del electrón, en el átomo de hidrógeno, tengan simetría esférica? Explique por qué.

P40.23. Dibuje la función de onda para el pozo de energía potencial que se muestra en la figura 40.24, cuando E_1 es menor que U_0 y cuando E_3 es mayor que U_0.

Figura **40.24** Pregunta P40.23.



Ejercicios

Sección 40.1 Partícula en una caja

40.1. Bolas de billar en nivel fundamental. *a*) Calcule el nivel mínimo de energía para una partícula en una caja, si la partícula es una bola de billar ($m = 0.20$ kg) y la caja tiene un ancho de 1.5 m, el tamaño de una mesa de billar. (Suponga que la bola de billar se desliza sin fricción, y no rueda. Esto es, no tenga en cuenta la energía cinética *de rotación*.) *b*) Como toda la energía del inciso *a*) es cinética, ¿a qué velocidad corresponde? ¿Cuánto tiempo tardaría la bola, a esta rapidez, para ir de un lado de la mesa al otro? *c*) ¿Cuál es la diferencia en la energía entre los niveles $n = 2$ y $n = 1$? *d*) ¿Son importantes los efectos mecánico-cuánticos en el juego del billar?

40.2. Para un protón es una caja de ancho L, ¿cuál debe ser el ancho de la caja para que el nivel fundamental de energía sea 5.0 MeV, valor característico de la energía con la que están confinadas las partículas en un núcleo? Compare su resultado con el tamaño de un núcleo, que es del orden de 10^{-14} m.

40.3. Calcule el ancho L de una caja unidimensional que correspondería al valor absoluto del estado fundamental de un átomo de hidrógeno.

40.4. Cuando un átomo de hidrógeno sufre una transición desde el nivel $n = 2$ hasta $n = 1$, se emite un fotón con $\lambda = 122$ nm. *a*) Si el átomo se modela como un electrón en una caja unidimensional, ¿cuál es el ancho de la caja, para que la transición de $n = 2$ a $n = 1$ corresponda a la emisión de un fotón con esta energía? *b*) Para una caja con el ancho calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la energía del estado fundamental? ¿Cómo corresponde a la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno? *c*) ¿Cree usted que una caja unidimensional es un buen modelo de un átomo de hidrógeno? Explique por qué. (*Sugerencia:* compare la distancia entre los niveles de energía adyacentes, en función de n.)

40.5. Cierto átomo requiere 3.0 eV de energía para excitar un electrón desde el nivel fundamental al primer nivel excitado. Modele el átomo como un electrón en una caja y calcule el ancho L de la caja.

40.6. Recuerde que $|\psi|^2\,dx$ es la probabilidad de que una partícula, cuya función de onda normalizada $\psi(x)$, esté en el intervalo x a $x + dx$. Imagine una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Sea esa partícula en su nivel fundamental, y use ψ_n de la ecuación (40.13). *a*) ¿Para qué valores de x, si los hay, en el intervalo de 0 a L, la probabilidad de encontrar la partícula es cero? *b*) ¿Para qué valores de x es máxima la probabilidad? *c*) En los incisos *a*) y *b*), ¿son consistentes sus respuestas con la figura 40.8? Explique por qué.

40.7. Repita el ejercicio 40.6 para la partícula en su primer nivel de excitación.

40.8. *a*) Demuestre que $\psi = A\text{sen}kx$ es una solución de la ecuación (40.3) si $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. *b*) Explique por qué es una función de onda aceptable para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$ sólo si k es un múltiplo entero de π/L.

40.9. *a*) Repita el ejercicio 40.8 con $\psi = A$ sen kx. *b*) Explique por qué ésa no puede ser una función de onda aceptable para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$, independientemente de cuál sea el valor de k.

40.10. *a*) Determine la energía de excitación, desde el nivel fundamental hasta el tercer nivel excitado, para un electrón confinado en una caja de ancho 0.125 nm. *b*) El electrón hace una transición desde el nivel $n = 1$ hasta $n = 4$, absorbiendo un fotón. Calcule la longitud de onda de este fotón.

40.11. Un electrón está en una caja de 3.0×10^{-10} m de ancho. ¿Cuáles son la longitud de onda de De Broglie y la magnitud de la cantidad de movimiento de ese electrón, si está en *a*) el nivel $n = 1$; en *b*) el nivel $n = 2$; en *c*) el nivel $n = 3$? En cada caso, ¿cómo se compara la longitud de onda con el ancho de la caja?

40.12. Demuestre que la función de onda dependiente del tiempo dada por la ecuación (40.15) es una solución a la ecuación unidimensional de Schrödinger, ecuación (40.1).

Sección 40.2 Pozos de potencial

40.13. *a*) Demuestre que $\psi = A\,\text{sen}\,kx$, donde k es una constante, *no* es una solución de la ecuación (40.1) para $U = U_0$ y $E < U_0$. *b*) ¿Es esta ψ una solución para $E > U_0$?

40.14. Un electrón se mueve por el pozo cuadrado de la figura 40.6. Tiene energía $E = 3U_0$. ¿Cuál es la relación de la longitud de onda de De Broglie del electrón en la región $x > L$, a la longitud de onda para $0 < x < L$?

40.15. Un electrón está confinado en un pozo cuadrado de profundidad $U_0 = 6E_\infty$. ¿Cuál es el ancho del pozo, si su energía de estado fundamental es 2.00 eV?

40.16. Un electrón está confinado en un pozo cuadrado de 1.50 nm de ancho y profundidad $U_0 = 6E_\infty$. Si el electrón está inicialmente en el

nivel fundamental, y absorbe un fotón, ¿qué longitud de onda máxima puede tener el fotón y todavía sacar al electrón del pozo?

40.17. Calcule $d^2\psi/dx^2$ para la función de onda de la ecuación (40.17) y demuestre que la función es una solución de la ecuación (40.16).

40.18. Calcule $d^2\psi/dx^2$ para la función de onda de la ecuación (40.19), y demuestre que para cualquier valor de C y de D, es una solución de la ecuación (40.1), para $x \leq 0$ y $x \geq L$, cuando $U = U_0$ y $E < U_0$.

40.19. Un protón está confinado en un pozo cuadrado de 4.0 fm $= 4.0 \times 10^{-15}$ m de ancho. La profundidad del pozo es seis veces la energía de nivel fundamental E_∞ del pozo infinito correspondiente. Si el protón hace una transición del nivel cuya energía es E_1 hasta el nivel de energía E_3, absorbiendo un fotón, determine la longitud de onda del fotón.

40.20. Un electrón está confinado en un pozo cuadrado, cuya profundidad es igual a seis veces la energía E_∞ de nivel fundamental de un pozo infinito con el mismo ancho. El fotón con mayor longitud de onda es absorbido por el electrón que tiene una longitud de onda de 400.0 nm. Determine el ancho del pozo.

Sección 40.3 Barreras de potencial y tunelamiento

40.21. Un electrón de energía cinética inicial 6.0 eV encuentra una barrera de 11.0 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que se filtre cuánticamente, si el ancho de la barrera es *a*) 0.80 nm, *b*) 0.40 nm?

40.22. Un electrón de 5.0 eV de energía cinética inicial encuentra una barrera de altura U_0 y ancho de .060 nm. ¿Cuál es el coeficiente de transmisión si *a*) $U_0 = 7.0$ eV; *b*) $U_0 = 9.0$ eV; *c*) $U_0 = 13.0$ eV?

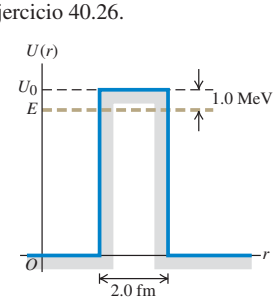
40.23. Un electrón se mueve por la barrera cuadrada que se ve en la figura 40.12, pero su energía es *mayor* que la altura de la barrera. Si $E = 2U_0$, ¿cuál es la relación de la longitud de onda de De Broglie, del electrón en la región $x > L$ entre la longitud de onda para $0 < x < L$?

40.24. Un protón con 50.0 eV de energía cinética inicial se encuentra con una barrera de 70.0 eV de altura. ¿Cuál es el ancho de la barrera, si la probabilidad de tunelamiento es de 3×10^{-3}? ¿Cómo se compara esto con el ancho de la barrera para un electrón con la misma energía que pasa por una barrera de la misma altura con la misma probabilidad?

40.25. *a*) Un electrón con energía cinética inicial de 32 eV se encuentra con una barrera cuadrada de 41 eV de altura y 0.25 nm de ancho. ¿Cuál es la probabilidad para que el electrón se filtre a través de la barrera? *b*) Un protón con la misma energía cinética se encuentra con la misma barrera. ¿Cuál es la probabilidad para que el protón se filtre a través de la barrera?

40.26. Desintegración alfa. En un modelo sencillo de un núcleo radiactivo, una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) queda atrapada por una barrera cuadrada de 2.0 fm de ancho, y 30.0 MeV de altura. *a*) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento cuando la partícula alfa encuentre la barrera, si su energía cinética es 1.0 MeV menor que el borde de la barrera (figura 40.25)? *b*) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento, si la energía de la partícula alfa es 10.0 MeV menor que la parte superior de la barrera?

Figura 40.25 Ejercicio 40.26.



Sección 40.4 El oscilador armónico

40.27. Un bloque de madera de 0.250 kg de masa oscila en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es 110 N/m. Calcule la energía del nivel fundamental y la separación de energías entre niveles adyacentes. Exprese sus resultados en joules y en electrón volts. ¿Son importantes los efectos cuánticos?

40.28. Demuestre que la $\psi(x)$ definida por la ecuación (40.24) es una solución de la ecuación (40.22) con energía $E_0 = \hbar\omega/2$.

40.29. Los químicos usan el espectro de absorción infrarrojo para identificar las sustancias en una muestra. En una de ellas, un químico encontró que se absorbía luz con longitud de onda de 5.8 μm. *a*) Calcule la energía de esta transición. *b*) Si la molécula tiene una masa de 5.6×10^{-26} kg encuentre la constante de fuerza.

40.30. La energía de estado fundamental de un oscilador armónico es 5.60 eV. Si el oscilador sufre una transición de su nivel $n = 3$ al $n = 2$ emitiendo un fotón ¿cuál es la longitud de onda del fotón?

40.31. En la sección 40.4 se demostró que para el nivel fundamental de un oscilador armónico, $\Delta x \Delta p_x = \hbar$. Haga un análisis similar para un nivel excitado cuyo número cuántico sea n. ¿Cómo depende de n el producto de incertidumbres $\Delta x \Delta p_x$?

40.32. Para la función de onda $\psi(x)$ del nivel fundamental del oscilador armónico definida por la ecuación (40.24), $|\psi|^2$ tiene un máximo en $x = 0$. *a*) Calcule la relación de $|\psi|^2$ en $x = +A$ entre $|\psi|^2$ en $x = 0$, donde A está definido por la ecuación (40.27) con $n = 0$ para el nivel fundamental. *b*) Calcule la relación de $|\psi|^2$ en $x = +2A$ entre $|\psi|^2$ en $x = 0$. En cada caso, ¿coincide su resultado con el de la figura 40.20?

40.33. Para el átomo de sodio del ejemplo 40.6, calcule *a*) la energía del estado fundamental, *b*) la longitud de onda de un fotón emitido cuando ocurre la transición de $n = 4$ a $n = 3$; *c*) la diferencia de energía para cualquier transición $\Delta n = 1$.

Problemas

40.34. Demuestre que la función de onda $\psi(x) = Ae^{ikx}$ es una solución de la ecuación 40.1 para una partícula de masa m, en una región donde la energía potencial es una constante $U_0 < E$. Encuentre la expresión para k, y relaciónela con la cantidad de movimiento de la partícula y con su longitud de onda de De Broglie.

40.35. Funciones de onda como las del problema 40.34 pueden representar partículas libres que se mueven con velocidad $v = p/m$ en la dirección de x. Considere un haz de tales partículas que inciden sobre un escalón de energía potencial $U(x) = 0$, para $x < 0$ y $U(x) = U_0 < E$, para $x > 0$. La función de onda para $x < 0$ es $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$, que representa partículas incidentes y reflejadas, y para $x > 0$ es $\psi(x) = Ce^{ik_2x}$, que representa partículas transmitidas. Use la condición de que tanto ψ como su primera derivada deben ser continuas en $x = 0$ para calcular las constantes B y C en función de k_1, k_2 y A.

40.36. Sea ΔE_n la diferencia de energías entre los niveles adyacentes de energía E_n y E_{n+1}, para una partícula en una caja. La relación $R_n = \Delta E_n/E_n$ compara la energía de un nivel con la separación de energía del nivel siguiente superior. *a*) ¿Para qué valor de n es máxima R_n y cuál es esa R_n máxima? *b*) ¿A qué tiende R_n cuando n se hace muy grande? ¿Cómo se compara este resultado con el valor clásico de esta cantidad?

40.37. Fotón en un láser de colorante. Un electrón en una molécula orgánica larga, que se usa en un láser de colorante, se comporta en forma aproximada como una partícula en una caja de 4.18 nm de ancho. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido, cuando el electrón sufre una transición *a*) del primer nivel excitado al nivel fundamental, y *b*) desde el segundo nivel excitado al primer nivel excitado?

40.38. Una partícula está en el nivel fundamental de una caja que va de $x = 0$ a $x = L$. *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se

encuentre en la región entre 0 y $L/4$? Haga el cálculo integrando $|\psi(x)|^2\,dx$, donde ψ esté normalizada desde $x = 0$ hasta $x = L/4$. *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región entre $x = L/4$ y $x = L/2$? *c*) ¿Cómo se comparan los resultados de los incisos *a*) y *b*)? Explique su respuesta. *d*) Sume las probabilidades calculadas en los incisos *a*) y *b*). *e*) ¿Sus resultados de los incisos *a*), *b*) y *c*) son consistentes con la figura 40.5b? Explique por qué.

40.39. ¿Cuál es la probabilidad para que una partícula se encuentre en una caja de longitud L en la región entre $x = L/4$ y $x = 3L/4$, estando la partícula en *a*) el nivel fundamental y *b*) el primer nivel excitado? (*Sugerencia:* integre $|\psi(x)|^2\,dx$, estando ψ normalizada, entre $L/4$ y $3L/4$.) *c*) ¿Sus resultados de los incisos *a*) y *b*) son consistentes con la figura 40.5b? Explique por qué.

40.40. Considere una partícula que está en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$, en su nivel fundamental. Calcule la probabilidad $|\psi|^2\,dx$ de que la partícula se encuentre en el intervalo de x a $x + dx$ para *a*) $x = L/4$; *b*) $x = L/2$; *c*) $x = 3L/4$.

40.41. Repita el problema 40.40 para una partícula en el primer nivel excitado.

40.42. Una partícula está confinada en una caja de paredes perfectamente rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Aunque la magnitud de la fuerza instantánea que las paredes ejercen sobre la partícula es infinita, y el tiempo durante el que actúa es cero, el impulso (el producto de fuerza por tiempo) es finito y también cuantizado. Demuestre que el impulso ejercido por la pared en $x = 0$ es $(nh/L)\hat{\imath}$ y el impulso ejercido por la pared en $x = L$ es $-(nh/L)\hat{\imath}$. (*Sugerencia:* es posible que necesite repasar la sección 8.1.)

40.43. Un compañero sugiere que una función de onda posible para una partícula libre con masa m [una para la cual la función de energía potencial $U(x)$ es cero] es

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{+\kappa x}, & x < 0 \\ e^{-\kappa x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

donde κ es una constante positiva. *a*) Grafique esta función de onda propuesta. *b*) Demuestre que satisface la ecuación de Schrödinger para $x < 0$ si la energía es $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$, esto es, si la energía de la partícula es *negativa*. *c*) Demuestre que la función de onda propuesta también satisface la ecuación de Schrödinger para $x \geq 0$ con la misma energía que en el inciso *b*). *d*) Explique por qué la función de onda propuesta *no* es, a pesar de todo, una solución aceptable de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. (*Sugerencia:* ¿cuál es el comportamiento de la función en $x = 0$?) De hecho, es imposible que una partícula libre [una para la cual $U(x) = 0$] tenga energía menor que cero.

40.44. La distancia de penetración η en un pozo de potencial finito es la distancia a la cual la función de onda ha disminuido a $1/e$ de la función de onda en punto de retorno clásico:

$$\psi(x = L + \eta) = \frac{1}{e}\psi(L)$$

La distancia de penetración puede demostrarse mediante

$$\eta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}}$$

La probabilidad de encontrar la partícula más allá de la distancia de penetración es casi cero. *a*) Calcule η para un electrón que tiene una energía cinética de 13 eV en un pozo de potencial con $U_0 = 20$ eV. *b*) Determine η para un protón de 20.0 MeV atrapado en un pozo de potencial con 30.0 MeV de profundidad.

40.45. *a*) Para el pozo de potencial finito de la figura 40.6, ¿qué relaciones se obtienen entre las constantes A y B de la ecuación (40.17), y C y D de la ecuación (40.19), al aplicar la condición en la frontera de que ψ sea continua en $x = 0$ y $x = L$? *b*) ¿Qué relaciones se obtienen entre A, B, C y D al aplicar la condición en la frontera donde $d\psi/dx$ sea continua en $x = 0$ y $x = L$?

40.46. Un electrón con 5.5 eV de energía cinética inicial se encuentra con una barrera de potencial cuadrada, de altura 10.0 eV. ¿Cuál es el ancho de la barrera, si el electrón tiene una probabilidad del 0.10% de filtrarse a través de la barrera?

40.47. Una partícula de masa m y energía total E se filtra a través de una barrera cuadrada de altura U_0 y ancho L. Cuando el coeficiente de transmisión *no* es mucho menor que la unidad, ese coeficiente es

$$T = \left[1 + \frac{(U_0 \operatorname{senh} \kappa L)^2}{4E(U_0 - E)}\right]^{-1}$$

donde sen $\operatorname{senh}\kappa L = (e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})/2$ es el seno hiperbólico de κL. *a*) Demuestre que si $\kappa L \gg 1$, esta ecuación de T tiende a la ecuación (40.21). *b*) Explique por qué la restricción $\kappa L \gg 1$ en el inciso *a*) implica que la barrera sea relativamente ancha, o bien, que la energía E sea relativamente pequeña en comparación con U_0. *c*) Demuestre que cuando la energía cinética de incidencia de la partícula E tiende a U_0, la altura de la barrera, T tiende a $[1 + (kL/2)^2]^{-1}$, siendo $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ el número de onda de la partícula incidente. (*Sugerencia:* si $|z| \ll 1$, entonces, $\operatorname{senh} z \approx z$.)

40.48. Un oscilador armónico consiste en una masa de 0.020 kg con un resorte. Su frecuencia es de 1.50 Hz y la masa tiene una rapidez de 0.360 m/s al pasar por la posición de equilibrio. *a*) ¿Cuál es el valor del número cuántico n para este nivel de energía? *b*) ¿Cuál es la diferencia de energías entre los niveles E_n y E_{n+1}? ¿Es detectable esa diferencia?

40.49. Para amplitudes pequeñas de oscilación, el movimiento de un péndulo es armónico simple. Para un péndulo con un periodo de 0.500 s, determine la energía de nivel fundamental, y la diferencia de energía entre niveles adyacentes. Exprese sus resultados en joules y en electrón volts. ¿Son detectables esos valores?

40.50. Algunos protones de 164.9 nm se emiten en una transición de $\Delta n = 1$ dentro de una estructura de estado sólido, la cual está modelada como electrones en una caja con longitud de 0.500 nm. ¿Qué transición corresponde a la luz emitida?

40.51. *a*) Demuestre por sustitución directa en la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico unidimensional que la función de onda $\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha^2 x^2/2}$, donde $\alpha^2 = m\omega/\hbar$, es una solución con energía que corresponde a $n = 0$ en la ecuación (40.22). *b*) Determine la constante de normalización A_0. *c*) Calcule los puntos de curvatura clásicos y demuestre, en cambio, que la densidad de probabilidad tiene un máximo en $x = 0$.

40.52. *a*) Demuestre por sustitución directa en la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico unidimensional que la función de onda $\psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha^2 x^2/2}$, donde $\alpha^2 = m\omega/\hbar$, es una solución con energía que corresponde a $n = 1$ en la ecuación (40.22). *b*) Determine la constante de normalización A_1. *c*) Demuestre que la densidad de probabilidad tiene un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = \pm 1/\alpha$, que corresponden a los puntos de curvatura clásicos para el estado fundamental $n = 0$.

40.53. Un oscilador armónico isotrópico tridimensional. Un oscilador armónico isotrópico tiene la función de energía potencial $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k'(x^2 + y^2 + z^2)$. (*Isotrópico* quiere decir que la constante de fuerza k' es la misma en las tres direcciones de coordenadas.) *a*) Demuestre que para ese potencial, una solución de la ecuación (40.29) se expresa con $\psi = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$. En esta ecuación, $\psi_{n_x}(x)$ es una solución a la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico unidimensional, ecuación (40.22), con energía $E_{n_x} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Las funciones $\psi_{n_y}(y)$ y $\psi_{n_z}(z)$ son análogas a las funciones de onda unidimensionales para oscilaciones en las direcciones y y z. Determine la energía asociada con esa ψ. *b*) De acuerdo con sus resultados en el inciso *a*), ¿cuáles son las energías de nivel fundamental y del primer nivel excitado del oscilador isotrópico tridimensional? *c*) Demuestre que

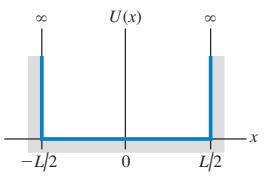
sólo hay un estado (un conjunto de números cuánticos n_x, n_y y n_z) para el nivel fundamental, pero tres estados para el primer nivel excitado.

40.54. Oscilador armónico anisotrópico tridimensional. Un oscilador tiene la función de energía potencial $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_1'(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k_2'z^2$, donde $k_1' > k_2'$. A este oscilador se le llama *anisotrópico* porque la constante de fuerza no es igual en las tres direcciones de coordenadas. *a*) Deduzca una ecuación general para los niveles de energía del oscilador (véase el problema 40.53). *b*) De acuerdo con sus resultados en el inciso *a*), ¿cuáles son las energías de nivel fundamental y de primer nivel excitado de este oscilador? *c*) ¿Cuántos estados (distintos conjuntos de números cuánticos n_x, n_y y n_z) hay para el nivel fundamental y para el primer nivel excitado? Compárelos con el inciso *c*) del problema 40.53.

Problemas de desafío

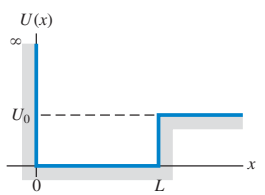
40.55. En la sección 40.1 se examinó una caja con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Ahora imagine una caja de ancho L, pero centrada en $x = 0$, por lo que va de $x = -L/2$ a $x = +L/2$ (véase la figura 40.26). Observe que esta caja es simétrica con respecto a $x = 0$. *a*) Considere posible las funciones de onda de la forma $\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$. y aplique las condiciones de frontera en los límites de la pared para obtener los niveles de energía permitidos. *b*) Otro conjunto posible de funciones de onda son funciones de la forma $\psi(x) = A \cos kx$. Aplique las condiciones de frontera en la pared para obtener los valores permitidos de la energía. *c*) Compare las energías obtenidas en los incisos *a*) y *b*) con el conjunto de energías dadas en la ecuación (40.9). *d*) Una función f impar satisface la condición $f(x) = -f(-x)$, y una función par g satisface $g(x) = g(-x)$. De las funciones de onda de los incisos *a*) y *b*) ¿Cuáles son pares y cuales son impares?

Figura **40.26** Problema de desafío 40.55.



40.56. Considere un pozo de potencial definido como $U(x) = \infty$ para $x < 0$, $U(x) = 0$ para $0 < x < L$, y $U(x) = U_0 > 0$ para $x > L$ (figura 40.27). Considere una partícula con masa m y energía cinética $E < U_0$ que está atrapada en el pozo. *a*) La condición de frontera en la pared infinita ($x = 0$) es $\psi(0) = 0$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $0 < x < L$, para que satisfaga tanto la ecuación de Schrödinger como esta condición en la frontera? *b*) La función de onda debe permanecer finita cuando $x \to \infty$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $x > L$, para que se satisfagan la ecuación de Schrödinger y la condición en la frontera para el infinito? *c*) Imponga las condiciones en la frontera para que ψ y $d\psi/dx$ sean continuas en $x = L$. Demuestre que las energías de los niveles permitidos se obtienen a partir de la solución de la ecuación $k\cot kL = -\kappa$, donde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ y $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$.

Figura **40.27** Problema de desafío 40.56.



40.57. La aproximación WKB. Quizá sea desafiante resolver la ecuación de Schrödinger para los niveles de energía de estado confinado, en un pozo arbitrario de potencial. Para los niveles de energía, un método alternativo que puede dar buenos resultados aproximados es la *aproximación WKB* (por los físicos Gregor Wenzel, Hendrik Kramers y Léon Brillouin, quienes fueron precursores en la aplicación de la mecánica cuántica). La aproximación WKB comienza con tres afirmaciones físicas: i) De acuerdo con De Broglie, la magnitud de la cantidad de movimiento p de una partícula mecánico-cuántica es $p = h/\lambda$. ii) La magnitud de la cantidad de movimiento se relaciona con la energía cinética K mediante la ecuación $K = p^2/2m$. iii) Si no hay fuerzas no conservativas, en la mecánica newtoniana la energía E de una partícula es constante, e igual en cada punto a la suma de las energías cinética y potencial en ese punto: $E = K + U(x)$, donde x es la coordenada. *a*) Combine estas tres ecuaciones para demostrar que la longitud de onda en una coordenada x se puede escribir en la forma

$$\lambda(x) = \frac{h}{\sqrt{2m[E - U(x)]}}$$

Así, percibimos una partícula mecánico-cuántica en un pozo de potencial $U(x)$ como semejante a una partícula libre, pero con una longitud de onda $\lambda(x)$ que es una función de la posición. *b*) Cuando la partícula entra a una región de energía potencial creciente, ¿qué sucede con su longitud de onda? *c*) En un punto donde $E = U(x)$, la mecánica newtoniana indica que la partícula tiene energía cinética cero, y debe estar momentáneamente en reposo. A ese punto se le llama *punto de retorno clásico*, porque es donde una partícula newtoniana debe detener su movimiento e invertir su dirección. Por ejemplo, un objeto que oscila en movimiento armónico simple con amplitud A va y viene entre los puntos $x = -A$ y $x = +A$; cada uno de ellos es un punto de retorno clásico, porque en ellos la energía potencial $\frac{1}{2}k'x^2$ es igual a la energía total $\frac{1}{2}k'A^2$. En la ecuación WKB con la expresión de $\lambda(x)$, ¿cuál es la longitud de onda en un punto de retorno clásico? *d*) Para una partícula en una caja de longitud L, las paredes de esa caja son puntos de retorno clásicos (véase la figura 40.1). Además, la cantidad de longitudes de onda que caben dentro de la caja debe ser semientera (véase la figura 40.3), por lo que $L = (n/2)\lambda$ y, en consecuencia, $L/\lambda = n/2$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ [Note que es una reafirmación de la ecuación (40.7).] El esquema WKB para determinar los niveles energía de estado confinado para un pozo de potencial *arbitrario* es una extensión de estas observaciones. Es necesario que para una energía E permitida, haya una cantidad semientera de longitudes de onda entre los puntos de retorno clásicos para esa energía. Como la longitud de onda en la aproximación WKB no es una constante, sino que depende de x, la cantidad de longitudes de onda entre puntos de retorno clásicos a y b, para un valor determinado de la energía, es la integral de $1/\lambda(x)$ entre esos puntos:

$$\int_a^b \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{n}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Use la ecuación de $\lambda(x)$ que obtuvo en el inciso *a*) para demostrar que la *condición WKB para una energía permitida de estado confinado* se puede escribir como

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

e) Como comprobación de la ecuación en el inciso *d*), aplíquela a una partícula en una caja con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Evalúe la integral y demuestre que los niveles de energía permitidos de acuerdo con la aproximación WKB son iguales a los definidos con la ecuación (40.9). (*Sugerencia:* debido a que las paredes de la caja son infinitamente altas, los puntos $x = 0$ y $x = L$ son puntos de retorno clásicos para *cualquier* energía E. Dentro de la caja, la energía potencial es cero.) *f*) Para el pozo cuadrado finito de la figura 40.6, demuestre que la ecuación WKB del inciso *d*) predice las *mismas* energías de estado confinado que para un

pozo cuadrado infinito del mismo ancho. (*Sugerencia:* suponga que $E < U_0$. Entonces, los puntos de retorno clásicos están en $x = 0$ y $x = L$.) Esto demuestra que la aproximación WKB es deficiente cuando la función de energía potencial cambia en forma discontinua, como en un pozo de potencial finito. En los dos siguientes problemas examinaremos casos en los que la función de energía potencial cambia en forma gradual, y la aproximación WKB es mucho más útil.

40.58. La aproximación WKB (véase el problema de desafío 40.57) se puede usar para calcular los niveles de energía de un oscilador armónico. En esa aproximación, los niveles de energía son las soluciones de la ecuación

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En ella, E es la energía, $U(x)$ es la función de energía potencial y $x = a$ y $x = b$ son los puntos de retorno clásicos (los puntos en los que E es igual a la energía potencial, por lo que la energía cinética newtoniana sería cero). *a*) Determine los puntos de retorno clásicos para un oscilador armónico con energía E y constante de fuerza k'. *b*) Haga la integral en la aproximación WKB y demuestre que los niveles de energía en esta aproximación son $E_n = \hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ y $n = 1, 2, 3\ldots$ (*Sugerencia:* recuerde que $\hbar = h/2\pi$. Una integral conocida útil es

$$\int \sqrt{A^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{A^2 - x^2} + A^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{|A|}\right)\right]$$

donde arcsen representa la función seno inverso. Observe que el integrando es par, por lo que la integral de $-x$ a x es igual a dos veces la integral de 0 a x. *c*) ¿Cómo se comparan los niveles aproximados de energía determinados en el inciso *b*) con los verdaderos, calculados con la ecuación (40.26)? ¿La aproximación WKB da estimaciones erróneas o precisas de los niveles de energía? ¿Qué tanto?

40.59. Los protones, neutrones y muchas otras partículas más están formadas por partículas más fundamentales llamadas *quarks* y *antiquarks* (la antimateria equivalente de los quarks). Un quark y un antiquark pueden formar un estado confinado con diversos niveles de energía, cada uno de los cuales correspondiendo a una partícula distinta observada en el laboratorio. Por ejemplo, la partícula ψ es un estado confinado de baja energía de un quark llamado encanto y su antiquark, con una energía en reposo de 3097 MeV; la partícula $\psi(2S)$ es un estado excitado de esta misma combinación de quark y antiquark, con una energía en reposo de 3686 MeV. Una representación simplificada de la interacción de energía potencial entre un quark y un antiquark es $U(x) = A|x|$, donde A es una constante positiva y x representa la distancia entre el quark y el antiquark. Puede usar la aproximación WKB (véase el problema de desafío 40.57) para determinar los niveles de energía de estado confinado para esta función de energía potencial. En la aproximación WKB, los niveles de energía son las soluciones de la ecuación

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

En este caso, E es la energía, $U(x)$ es la función de energía potencial y $x = a$ y $x = b$ son los puntos de retorno clásicos (los puntos en los que E es igual a la energía potencial, por lo que la energía cinética newtoniana sería cero). *a*) Determine los puntos de retorno clásicos para el potencial $U(x) = A|x|$ y para una energía E. *b*) Haga la integral anterior y demuestre que los niveles de energía permitidos en la aproximación WKB se definen con

$$E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{3mAh}{4}\right)^{2/3} n^{2/3} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(*Sugerencia:* el integrando es par, por lo que la integral de $-x$ a x es igual a dos veces la integral de 0 a x.) *c*) ¿La diferencia de energías entre niveles sucesivos aumenta, disminuye o permanece igual cuando n se incrementa? ¿Cómo se compara con el comportamiento de los niveles de energía para el oscilador armónico? ¿Y con la partícula en una caja? ¿Puede sugerir una regla sencilla que relacione la diferencia de energías entre niveles sucesivos y la forma de la función de energía potencial?

ESTRUCTURA ATÓMICA

41

?El sodio (con 11 electrones por átomo) es un metal altamente reactivo que se enciende espontáneamente en el aire, mientras que el neón (con 10 electrones por átomo) es un gas inerte que casi nunca sufre reacciones químicas. ¿Cómo un solo electrón extra puede hacer que estos dos elementos sean tan significativamente diferentes?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir los estados de un átomo de hidrógeno en términos de números cuánticos.
- Cómo los campos magnéticos afectan el movimiento orbital de electrones.
- Cómo sabemos que los electrones tienen su propia cantidad de movimiento angular intrínseca.
- Cómo analizar la estructura de átomos con muchos electrones.
- Cómo los rayos x emitidos por átomos revelan su estructura interna.

Algunos físicos afirman que toda la química está contenida en la ecuación de Schrödinger. Esto es algo exagerado, pero tal ecuación puede enseñarnos mucho acerca del comportamiento químico de los elementos y la naturaleza de los enlaces químicos, porque permite tener una perspectiva de la tabla periódica de los elementos y de las bases microscópicas del magnetismo.

Podemos aprender mucho sobre la estructura y las propiedades de *todos* los átomos, a partir de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Esas soluciones tienen valores cuantizados de la cantidad de movimiento angular. No necesitamos hacer una declaración separada acerca de la cuantización, como la que hicimos con el modelo de Bohr. Identificaremos los estados con un conjunto de números cuánticos, que usaremos después también con átomos de muchos electrones. Veremos que el electrón tiene también una cantidad de movimiento angular "espín" (o *spin*, es decir, "de giro") intrínseca, además de la cantidad de movimiento angular orbital asociada con su movimiento.

También nos encontraremos con el principio de exclusión, una especie de reglamento de zonificación microscópica que es la clave para comprender los átomos con muchos electrones. Este principio indica que no puede haber dos electrones en un átomo que tengan el mismo estado mecánico-cuántico. Por último, usaremos los principios de este capítulo para explicar los espectros característicos de rayos x de los átomos.

41.1 El átomo de hidrógeno

Continuemos nuestra descripción del átomo de hidrógeno, iniciada en el capítulo 38. En el modelo de Bohr, los electrones se mueven en órbitas circulares, como partículas newtonianas, pero con valores cuantizados de la cantidad de movimiento angular. Si bien este modelo determinó los niveles de energía correctos en el átomo de hidrógeno, los deducidos de los espectros, tenía muchas dificultades conceptuales. Se mezclaba la física clásica con conceptos nuevos y aparentemente contradictorios. No permitía entender el proceso por el que se emiten y absorben los fotones. No se podía generalizar a los átomos con más de un electrón. Para el átomo de hidrógeno predecía propiedades

magnéticas incorrectas. Y quizá lo más importante era que su imagen del electrón, como partícula de materia localizada en un punto, era inconsistente con la concepción más general que desarrollamos en los capítulos 39 y 40. Ahora veamos cómo ir más allá del modelo de Bohr y aplicar la ecuación de Schrödinger para determinar las funciones de onda de estados estacionarios (estados de energía definida) del átomo de hidrógeno. Como en la sección 38.5, incluiremos el movimiento del núcleo con tan sólo remplazar la masa m del electrón con su masa reducida m_r.

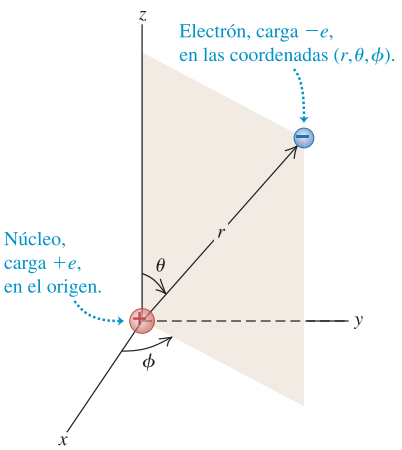
La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno

Ya describimos la versión tridimensional de la ecuación de Schrödinger en la sección 40.5. El problema del átomo de hidrógeno se formula mejor en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) como las que se muestran en la figura 41.1; por lo tanto, la energía potencial es simplemente

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \tag{41.1}$$

La ecuación de Schrödinger con esta función de energía potencial se puede resolver en forma exacta; las soluciones son combinaciones de funciones conocidas. Sin entrar en detalles, podemos describir las propiedades más importantes del procedimiento y los resultados.

41.1 La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno puede resolverse fácilmente usando coordenadas esféricas.



En primer lugar, las soluciones se obtienen por medio de un método llamado *separación de variables*, en el que se expresa la función de onda $\psi(r, \theta, \phi)$ como producto de tres funciones, y cada función depende de sólo de una de las tres coordenadas:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{41.2}$$

Esto es, la función $R(r)$ depende *sólo* de r, $\Theta(\theta)$ *sólo* depende de θ, y $\Phi(\phi)$ *sólo* depende de ϕ. Cuando se sustituye la ecuación (41.2) en la ecuación de Schrödinger, se obtienen tres ecuaciones separadas, y cada una sólo contiene una de las coordenadas. Ésta es una simplificación enorme: reduce el problema de resolver una ecuación diferencial *parcial* bastante compleja, con tres variables independientes, al problema mucho más simple de resolver tres ecuaciones diferenciales *ordinarias* separadas, cada una con una variable independiente.

Las soluciones físicamente aceptables de esas tres ecuaciones se determinan con las *condiciones en la frontera*. La función radial $R(r)$ debe tender a cero cuando r es grande, ya que estamos describiendo *estados confinados* del electrón, localizado cerca del núcleo. Es análogo al requisito de que las funciones de onda del oscilador armónico (sección 40.4) deben tender a cero cuando x es grande. Las funciones angulares $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ deben ser *periódicas*. Por ejemplo, (r, θ, ϕ) y $(r, \theta, \phi + 2\pi)$ describen el mismo punto, por lo que $\Phi(\phi + 2\pi)$ debe ser igual a $\Phi(\phi)$. Asimismo, las funciones angulares deben ser *finitas* para todos los valores relevantes de los ángulos. Por ejemplo, hay soluciones de la ecuación de Θ que se vuelven infinitas en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; no son aceptables, ya que $\psi(r, \theta, \phi)$ debe ser normalizable.

Las funciones radiales $R(r)$ son una función exponencial $e^{-\alpha r}$ (siendo α positiva) multiplicada por un polinomio en r. Las funciones $\Theta(\theta)$ son polinomios formados por diversas potencias de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, y las funciones $\Phi(\phi)$ simplemente son proporcionales $e^{im_l\phi}$, donde $i = \sqrt{-1}$ y m_l es un entero que puede ser positivo, cero o negativo.

En el proceso para determinar las soluciones que satisfagan las condiciones en la frontera, también se determinan los niveles de energía correspondientes. Sus energías, que representaremos con E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) son *idénticas* a las del modelo de Bohr, definidas por la ecuación (38.18), sustituyendo la masa en reposo del electrón m por la masa reducida m_r. Al reformular esa ecuación usando $\hbar = h/2\pi$, se obtiene

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{13.60\ \text{eV}}{n^2} \quad \text{(niveles de energía del hidrógeno)} \tag{41.3}$$

Al igual que en la sección 38.5, llamaremos **número cuántico principal** a n, para el nivel de energía E_n.

El resultado de que la ecuación (41.3) se puede obtener a partir de la ecuación de Schrödinger es una confirmación importante, ya que es válido este método. El análisis

de Schrödinger es muy distinto del modelo de Bohr, tanto formal como conceptualmente y, sin embargo, ambos dan como resultado el mismo esquema de niveles de energía, el cual coincide con las energías determinadas con los espectros. Como veremos, el análisis de Schrödinger puede explicar mucho más aspectos del átomo de hidrógeno, que los que puede explicar el modelo de Bohr.

Cuantización de la cantidad de movimiento angular orbital

Las soluciones que satisfacen las condiciones en la frontera, que mencionamos anteriormente, también tienen valores cuantizados de la *cantidad de movimiento angular orbital*. Esto es, sólo se permiten ciertos valores discretos de la magnitud y las componentes de la cantidad de movimiento angular orbital. Al describir el modelo de Bohr en la sección 38.5, mencionamos que la cuantización de la cantidad de movimiento angular era un resultado con escasa justificación fundamental. ¡Con la ecuación de Schrödinger aparece en forma automática!

Los valores posibles de la magnitud L de la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{\boldsymbol{L}}$ se determinan con el requisito de que la función $\Theta(\theta)$ sea finita cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. En un nivel de energía E_n y número cuántico principal n, los valores posibles de L son

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad \text{(magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital)} \tag{41.4}$$

El *número cuántico de la cantidad de movimiento angular orbital* l se llama **número cuántico orbital**, en forma abreviada. En el modelo de Bohr, cada nivel de energía correspondía a un solo valor de cantidad de movimiento angular. La ecuación (41.4) muestra que, de hecho, hay n valores distintos posibles de L para el n-ésimo nivel de energía.

Una propiedad interesante de la ecuación (41.4) es que la cantidad de movimiento angular orbital es *cero* para los estados $l = 0$. Este resultado no concuerda con el modelo de Bohr, donde el electrón siempre se movía en un círculo de radio definido, y L nunca era cero. Las funciones de onda ψ con $l = 0$ sólo dependen de r; las funciones $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ para dichos estados son constantes. Entonces, las funciones de onda para los estados $l = 0$ tienen simetría esférica; no hay nada en su distribución de probabilidades $|\psi|^2$ que favorezca una u otra dirección y no hay cantidad de movimiento angular orbital.

Los valores permitidos de la *componente* de $\vec{\boldsymbol{L}}$ en determinada dirección, por ejemplo, la componente L_z en dirección z se determina con el requisito de que la función $\Phi(\phi)$ debe ser igual $\Phi(\phi + 2\pi)$. Los valores posibles de L_z son

$$L_z = m_l\hbar \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \qquad \text{(componentes de la cantidad de movimiento angular orbital)} \tag{41.5}$$

Se ve que m_l puede ser cero o entero positivo o negativo hasta una magnitud l, pero no mayor que ésta. Es decir, $|m_l| \leq l$. Por ejemplo, si $l = 1$, m_l puede ser igual a 1, 0 o -1. Por razones que veremos después, *a* m_l se le llama *número cuántico orbital magnético*, o en forma breve, **número cuántico magnético**.

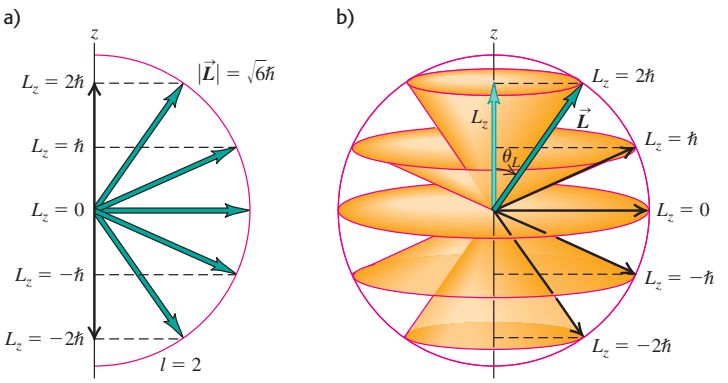
La componente L_z nunca puede ser igual a L (a menos que ambos sean cero). Por ejemplo, cuando $l = 2$, el valor máximo posible de m_l también es 2; entonces, las ecuaciones (41.4) y (41.5) dan como resultado

$$L = \sqrt{2(2+1)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar = 2.45\hbar$$
$$L_z = 2\hbar$$

La figura 41.2 (siguiente página) muestra este caso. El valor mínimo del ángulo θ_L entre el vector $\vec{\boldsymbol{L}}$ y el eje $_z$ es

$$\theta_L = \arccos\frac{L_z}{L} = \arccos\frac{2}{2.45} = 35.3°$$

41.2 a) Cuando $l = 2$, la magnitud de $\vec{L}$ es $\sqrt{6}\hbar = 2.45\hbar$, pero la dirección de $\vec{L}$ no está definida. En esta representación vectorial semiclásica, $\vec{L}$ forma un ángulo de 35.3° con el eje z, cuando la componente z tiene su valor máximo de $2\hbar$. b) Conos de las posibles direcciones de $\vec{L}$.



El principio de incertidumbre también requiere que $|L_z|$ siempre sea menor que L. Suponga que pudiéramos conocer la *dirección* precisa del vector cantidad de movimiento angular orbital. Entonces, definiríamos ahí la dirección del eje z, y L_z sería igual a L. Eso corresponde a una partícula que sólo se mueva en el plano xy, en cuyo caso la componente z de la cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ sería cero, sin incertidumbre Δp_z. Entonces, el principio de incertidumbre $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$ requiere que la incertidumbre Δz en la coordenada z sea infinita. Eso es imposible para un estado localizado; llegamos a la conclusión de que no podemos conocer con precisión la dirección de $\vec{L}$. Así, como ya lo habíamos dicho, la componente de $\vec{L}$ en determinada dirección no puede ser tan grande como su magnitud L. También, si no podemos conocer con precisión la magnitud de $\vec{L}$, no podemos determinar con precisión las componentes L_x y L_y. Por lo anterior, en la figura 41.2b se muestran *conos* de direcciones posibles de $\vec{L}$.

Quizás usted se pregunte por qué dedicamos especial atención al eje z. No hay razón fundamental para ello; desde luego, al átomo no le importa cuál sistema de coordenadas usemos. El punto es que no podemos determinar con certidumbre las tres componentes de la cantidad de movimiento angular orbital, por lo que en forma arbitraria seleccionamos uno como el que deseamos medir. Cuando describamos las interacciones del átomo con un campo magnético, elegiremos en forma consistente al eje z como la dirección de $\vec{B}$.

Notación de números cuánticos

Las funciones de onda para el átomo de hidrógeno se determinan con los valores de tres números cuánticos n, l y m. La energía E_n se determina por el número cuántico principal n, de acuerdo con la ecuación (41.3). La magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital se determina con el número cuántico orbital l, como en la ecuación (41.4). La componente de la cantidad de movimiento angular orbital en dirección de un eje determinado (por costumbre, el eje z) se determina con el número cuántico magnético m_l, como en la ecuación (41.5). La energía no depende de los valores de l ni de m_l (figura 41.3), por lo que para cada nivel de energía E_n definido por la ecuación (41.3) hay más de un estado distinto con la misma energía, pero distintos números cuánticos. La existencia de más de un estado distinto con la misma energía se llama **degeneración**; no tiene contraparte en el modelo de Bohr.

A los estados con diversos valores del número cuántico orbital l se les representa con frecuencia mediante letras, de acuerdo con el siguiente esquema:

$l = 0$: estados s
$l = 1$: estados p
$l = 2$: estados d
$l = 3$: estados f
$l = 4$: estados g
$l = 5$: estados h

y se continúa el orden alfabético. Esta elección aparentemente irracional de las letras s, p, d y f se originó en la época antigua de la espectroscopia y no tiene significado

41.3 La energía de un satélite en órbita depende de la distancia media entre el satélite y el centro de la Tierra. *No* depende de si la órbita es circular (con una cantidad de movimiento angular orbital L grande) o elíptica (en cuyo caso L es menor). Del mismo modo, la energía de un átomo de hidrógeno no depende de la cantidad de movimiento angular orbital.

fundamental. En una forma importante de la *notación espectroscópica* que usaremos a menudo, un estado con $n = 2$ y $l = 1$ se llama estado $2p$; un estado con $n = 4$ y $l = 0$ es un estado $4s$ y así sucesivamente. Sólo los estados s ($l = 0$) tienen simetría esférica.

Veamos algo más sobre nomenclatura. La extensión radial de las funciones de onda aumenta al incrementarse el número cuántico principal n, y se puede hablar de una región del espacio asociada con determinado valor de n, una **capa**. En especial, en las descripciones de átomos con muchos electrones, a esas capas se les asignan letras mayúsculas:

$n = 1$: capa K
$n = 2$: capa L
$n = 3$: capa M
$n = 4$: capa N

etcétera, continuando alfabéticamente. Para cada n, los distintos valores de l corresponden *a subcapas* distintas. Por ejemplo, la capa L ($n = 2$) contiene las subcapas $2s$ y $2p$.

La tabla 41.1 muestra algunas de las combinaciones posibles de los números cuánticos n, l y m_l para funciones de onda del átomo de hidrógeno. También se muestra la notación espectroscópica y la notación de capas.

Tabla 41.1 Estados cuánticos del átomo de hidrógeno

n	l	m_l	Notación espectroscópica	Capa
1	0	0	$1s$	K
2	0	0	$2s$	L
2	1	−1, 0, 1	$2p$	
3	0	0	$3s$	
3	1	−1, 0, 1	$3p$	M
3	2	−2, −1, 0, 1, 2	$3d$	
4	0	0	$4s$	N
y así sucesivamente				

Estrategia para resolver problemas 41.1 Estructura atómica

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Muchos problemas de la estructura atómica se pueden resolver sólo refiriéndose a los números cuánticos que describen la energía total E, la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital $\vec{L}$, la componente z de $\vec{L}$, y otras propiedades del átomo.

PLANTEAR *el problema:* Decida cuál es la incógnita, y reúna las ecuaciones que se usarán para determinar su valor. Pueden incluir las ecuaciones: (41.3), (41.4) y (41.5).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Asegúrese de conocer los valores posibles de los números cuánticos n, l y m_l del átomo de hidrógeno. Todos son enteros; n siempre es mayor que cero, l puede ser cero o positivo hasta $n - 1$, y m_l puede ir desde $-l$ hasta l. Usted debe contar la cantidad de estados (n, l, m_l) en cada capa (K, L, M, etcétera) y cada subcapa ($3s$, $3p$, $3d$, etcétera). Más que sólo memorizar, debería conocer cómo formar la tabla 41.1.
2. Determine la incógnita.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando se comprueben valores numéricos, ayuda estar familiarizado con algunas magnitudes características. Por ejemplo, la energía potencial eléctrica de un protón y un electrón que están a 0.10 nm de distancia (característica de las dimensiones atómicas) es −15 eV, aproximadamente. La luz visible (emitida en varias transiciones entre estados del átomo de hidrógeno) tiene longitudes de onda de unos 500 nm, y frecuencias cercanas a 5×10^{14} Hz. En Estrategias para resolver problemas 39.1 (sección 39.1) verá otras magnitudes típicas.

Ejemplo 41.1 Conteo de los estados del hidrógeno

¿Cuántos estados distintos (n, l, m_l) hay para el átomo de hidrógeno con $n = 3$? Calcule las energías de esos estados.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las relaciones entre el principal número cuántico n, el número cuántico orbital l, el número cuántico magnético m_l y la energía de un estado para el átomo de hidrógeno.

PLANTEAR: Para determinar la cantidad de estados, recurriremos a la de restricción para l, que puede tener valores enteros de 0 a $n - 1$, y que m_l puede tener valores de $-l$ a l. La energía de cualquier estado en particular se determina con la ecuación (41.3).

EJECUTAR: Cuando $n = 3$, l puede ser 0, 1 o 2. Cuando $l = 0$, m_l sólo puede ser 0 (1 estado). Cuando $l = 1$, m_l puede ser −1, 0 o 1 (3 estados). Cuando $l = 2$, m_l puede ser −2, −1, 0, 1 o 2 (5 estados). La cantidad

continúa

total de estados (n, l, m_l) con $n = 3$ es, por consiguiente, $1 + 3 + 5 = 9$. (En la sección 41.3 veremos que la cantidad total de estados $n = 3$ es en realidad el doble, es decir, 18, debido al espín del electrón.)

Todas las energías de esos estados son iguales, ya que la energía sólo depende de n. De acuerdo con la ecuación (41.3), con $n = 3$,

$$E_3 = \frac{-13.60\ \text{eV}}{3^2} = -1.51\ \text{eV}$$

EVALUAR: Conviene recordar que el nivel fundamental del hidrógeno tiene $n = 1$ y $E_1 = -13.6$ eV. Esos estados excitados tienen mayor energía, como debe ser.

Ejemplo 41.2 Cantidad de movimiento angular en un nivel excitado del hidrógeno

Considere los estados del hidrógeno con $n = 4$. *a*) ¿Cuál es la magnitud máxima L de la cantidad de movimiento angular orbital? *b*) ¿Cuál es el valor máximo de L_z? *c*) ¿Cuál es el ángulo mínimo entre $\vec{\boldsymbol{L}}$ y el eje z? Exprese las respuestas a los incisos *a*) y *b*) en función de $\hbar$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: De nuevo se nos pide relacionar el número cuántico principal n y el número cuántico orbital l para un átomo de hidrógeno. También necesitamos la conexión entre el valor de l y la magnitud y las direcciones posibles del vector cantidad de movimiento angular orbital.

PLANTEAR: Se usará la ecuación (41.4) en el inciso *a*) para determinar el valor máximo de L, y entonces se usará la ecuación (41.5) en el inciso *b*) para determinar el valor máximo de L_z. El ángulo mínimo entre $\vec{\boldsymbol{L}}$ y el eje z se presenta cuando L_z es máximo (de manera que $\vec{\boldsymbol{L}}$ casi esté alineado con el eje positivo de z).

EJECUTAR: *a*) Cuando $n = 4$, el valor máximo del número cuántico de la cantidad de movimiento angular l es $(n - 1) = (4 - 1) = 3$; de acuerdo con la ecuación (41.4),

$$L = \sqrt{3(3 + 1)}\,\hbar = \sqrt{12}\,\hbar = 3.464\hbar$$

b) Para $l = 3$, el valor máximo del número cuántico magnético m_l es 3; de la ecuación (41.5),

$$L_z = 3\hbar$$

c) El ángulo *mínimo* permitido entre $\vec{\boldsymbol{L}}$ y el eje z corresponde a los valores *máximos* permitidos de L_z y m_l (la figura 41.2b muestra un ejemplo con $l = 2$). Para el estado con $l = 3$ y $m_l = 3$,

$$\theta_{\text{mín}} = \arccos\frac{(L_z)_{\text{máx}}}{L} = \arccos\frac{3\hbar}{3.464\hbar} = 30.0°$$

EVALUAR: Como comprobación, puede usted verificar que el ángulo sea mayor que 30.0° para todos los estados con valores menores de l.

Distribuciones de probabilidad para electrones

Más que representar a un electrón como una partícula puntual que se mueve describiendo un círculo preciso, la ecuación de Schrödinger define una *distribución de probabilidad* que rodea al núcleo. Como las distribuciones de probabilidad para el átomo de hidrógeno son tridimensionales, son más difíciles de visualizar que las órbitas circulares bidimensionales del modelo de Bohr. Le ayudará que se fije en la *función de distribución de probabilidad radial* $P(r)$, esto es, la probabilidad por longitud radial de que el electrón se encuentre a diversas distancias del protón. Según la sección 39.5, la probabilidad para que el electrón se encuentre en un pequeño elemento de volumen dV es $|\psi|^2\,dV$. (Se supone que ψ está normalizada, esto es, que la integral de $|\psi|^2\,dV$ sobre todo el espacio es igual a la unidad, por lo que hay 100% de probabilidades de encontrar el electrón en algún lugar del Universo.) Consideremos que nuestro elemento de volumen es un cascarón esférico delgado, de radio interior r y radio exterior $r + dr$. El volumen dV de este cascarón es, aproximadamente, su área $4\pi r^2$ multiplicada por su espesor dr:

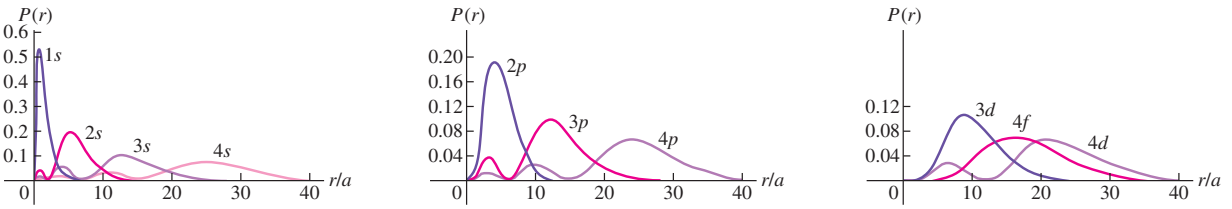
$$dV = 4\pi r^2\,dr \tag{41.6}$$

Se representará por $P(r)\,dr$ la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro del intervalo radial dr y, entonces,

$$P(r)\,dr = |\psi|^2\,dV = |\psi|^2 4\pi r^2\,dr \qquad \text{(probabilidad de que el electrón esté entre } r \text{ y } r + dr\text{)} \tag{41.7}$$

Para funciones de onda que dependen de θ y ϕ, así como de r, usaremos el valor de $|\psi|^2$ promediado en todos los ángulos en la ecuación (41.7).

41.4 Funciones $P(r)$ de distribución de probabilidad radial, para varias funciones de onda del átomo de hidrógeno, graficadas en función de la relación r/a [véase la ecuación (41.8)]. Para cada función, la cantidad de máximos es $(n - l)$. Las curvas para las que $l = n - 1$ ($1s$, $2p$, $3d$, …) sólo tienen un máximo, que está en $r = n^2a$.



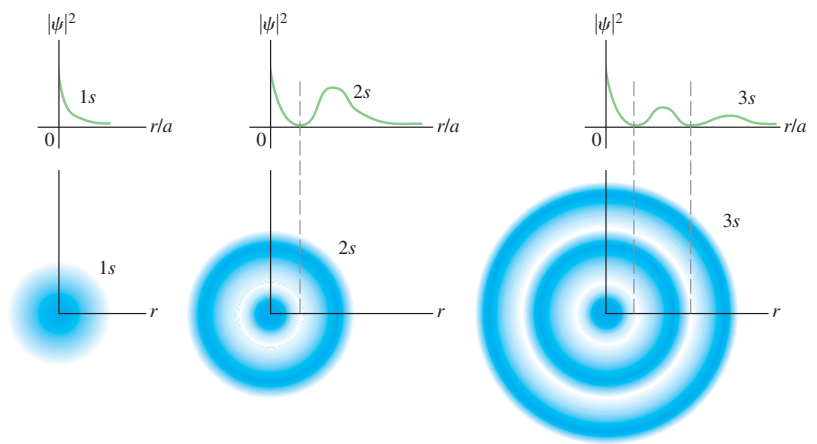
En la figura 41.4 se ven gráficas de $P(r)$ para varias funciones de onda del átomo de hidrógeno. Las escalas de r están indicadas en múltiplos de a, la distancia mínima entre el electrón y el núcleo en el modelo de Bohr,

$$a = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_r e^2} = 5.29 \times 10^{-11}\ \text{m} \qquad (r \text{ mínimo, modelo de Bohr}) \qquad (41.8)$$

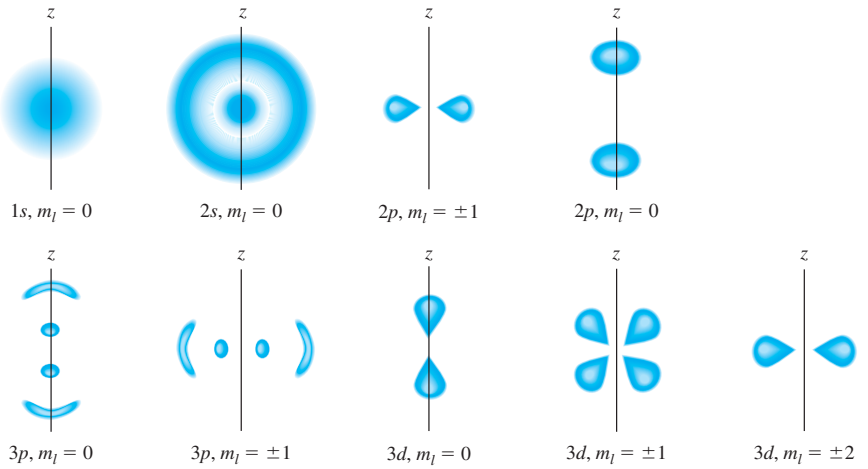
Igual que para una partícula en una caja (véase la sección 40.1), hay algunas posiciones donde la probabilidad es cero aunque, nuevamente, el principio de incertidumbre nos indica que no hay por qué preocuparse: de cualquier modo, un electrón no se puede localizar con exactitud. Observe que $P(r)$ tiene un solo máximo en n^2a, para los estados que tienen la l máxima posible para cada n (como los estados $1s$, $2p$, $3d$ y $4f$). Para esos estados, es más probable que el electrón se encuentre a la distancia del núcleo que el modelo de Bohr predice, $r = n^2a$.

La figura 41.4 muestra las funciones de distribución de probabilidad *radial* $P(r) = 4\pi r^2|\psi|^2$, que indican la probabilidad relativa para que el electrón esté dentro de un cascarón esférico delgado de radio r. En contraste, las figuras 41.5 y 41.6 muestran las funciones de distribución *tridimensional* de probabilidad $|\psi|^2$ que indican la probabilidad relativa de encontrar el electrón dentro de una caja pequeña en determinada posición. Cuanto más oscura sea la "nube" azul, mayor será el valor de $|\psi|^2$. La figura 41.5 muestra cortes transversales de las nubes de probabilidad con simetría esférica, para las tres subcapas inferiores s, para las cuales $|\psi|^2$ sólo depende de la coordenada radial r. La figura 41.6 (siguiente página) muestra cortes transversales de otros estados electrónicos, para los que $|\psi|^2$ sólo depende de r y de θ. En *cualquier* estado estacionario del átomo de hidrógeno, $|\psi|^2$ es independiente de ϕ.

41.5 Funciones $|\psi|^2$ tridimensionales de distribución de probabilidad, para las funciones de onda $1s$, $2s$ y $3s$ del átomo de hidrógeno, con simetría esférica.



41.6 Cortes transversales de distribuciones tridimensionales de probabilidad, para algunos estados cuánticos del átomo de hidrógeno. No están en la misma escala. Gire mentalmente cada dibujo con respecto al eje z para obtener la representación tridimensional de $|\psi|^2$. Por ejemplo, la distribución de probabilidad $2p$, $m_l = \pm 1$ se ve como una rosquilla (dona) borrosa.



Ejemplo 41.3 Una función de onda del hidrógeno

La función de onda de estado fundamental para el hidrógeno (un estado 1s) es

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

a) Verifique que esta función esté normalizada. *b*) ¿Cuál es la probabilidad para que el electrón se encuentre a una distancia menor que a, del núcleo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Es necesario demostrar que esta función de onda satisface la condición de que la probabilidad de encontrar el electrón en *algún lugar* es 1. Entonces, se requiere calcular la probabilidad de que estará en la región $r < a$.

PLANTEAR: En el inciso *a*) haremos la integral $\int |\psi|^2\, dV$ sobre todo el espacio; si es igual a 1, la función de onda está normalizada. En el inciso *b*) haremos la misma integral sobre un volumen esférico que vaya del origen (el núcleo) hasta una distancia a del núcleo.

EJECUTAR: *a*) Como la función de onda sólo depende de la coordenada radial r podemos elegir nuestros elementos de volumen como cascarones esféricos de radio r, espesor dr y volumen dV definido por la ecuación (41.6). Entonces,

$$\int_{\text{todo el espacio}} |\psi_{1s}|^2\, dV = \int_0^\infty \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a}(4\pi r^2\, dr) = \frac{4}{a^3}\int_0^\infty r^2 e^{-2r/a}\, dr$$

La siguiente integral indefinida se puede encontrar en una tabla de integrales, o se puede integrar por partes:

$$\int r^2 e^{-2r/a}\, dr = \left(-\frac{ar^2}{2} - \frac{a^2 r}{2} - \frac{a^3}{4}\right) e^{-2r/a}$$

Es sencillo realizar esta evaluación entre los límites $r = 0$ y $r = \infty$; es cero en $r = \infty$ por el factor exponencial, y en $r = 0$ sólo sobrevive el último término en los paréntesis. Entonces, el valor de la integral es $a^3/4$. Con todo ello, se ve que

$$\int_0^\infty |\psi_{1s}|^2\, dV = \frac{4}{a^3}\int_0^\infty r^2 e^{-2r/a}\, dr = \frac{4}{a^3}\frac{a^3}{4} = 1$$

La función de onda *está* normalizada.

b) Para determinar la probabilidad P para que el electrón esté ubicado en $r < a$, hacemos la misma integración, pero con los límites 0 y a. Dejaremos los detalles como un ejercicio para el lector (véase el ejercicio 41.13). Para el límite superior se obtiene $-5e^{-2}a^3/4$; el resultado final es

$$P = \int_0^a |\psi_{1s}|^2 4\pi r^2\, dr = \frac{4}{a^3}\left(-\frac{5a^3 e^{-2}}{4} + \frac{a^3}{4}\right)$$
$$= 1 - 5e^{-2} = 0.323$$

EVALUAR: Nuestros resultados indican que en un estado fundamental esperaríamos que el electrón se encuentre a una distancia del núcleo menor que a más o menos $\frac{1}{3}$ del tiempo, y a mayor distancia, unos $\frac{2}{3}$ del tiempo. Es difícil decir, pero en la figura 41.4, más o menos $\frac{2}{3}$ del área bajo la curva 1s está a distancias mayores que a (esto es, $r/a > 1$).

Átomos hidrogenoides

En el análisis de Schrödinger son igualmente válidas dos generalizaciones que describimos con el modelo de Bohr en la sección 38.5. La primera es que si el "átomo" no está formado por un solo protón y un solo neutrón, la masa reducida m_r del sistema

causará cambios en las ecuaciones (41.3) y (41.8) que son apreciables con algunos sistemas extraños. Un ejemplo es el *positronio*, formado por un positrón y un electrón (figura 38.21). La segunda es que nuestro análisis es aplicable a iones con un solo electrón, como He^+, Li^{+2}, etcétera. Para esos iones se sustituye e^2 por Ze^2 en las ecuaciones (41.3) y (41.8), siendo Z la cantidad de protones (el **número atómico**). Esta sustitución supera con mucho el pequeño cambio en la masa reducida m_r en esas ecuaciones.

El análisis de Schrödinger del átomo de hidrógeno es mucho más complicado, tanto conceptual como matemáticamente, que el análisis newtoniano del movimiento planetario, o el modelo semiclásico de Bohr. Maneja probabilidades, y no certidumbres, y predice valores discretos, y no continuos, de la energía y de la cantidad de movimiento angular. Este análisis nos permite entender fenómenos para los cuales son inadecuados la mecánica clásica y el electromagnetismo. Una complejidad más es el precio que se paga por la mejor comprensión.

Evalúe su comprensión de la sección 41.1 Ordene de mayor a menor los siguientes estados del átomo de hidrógeno según la probabilidad de que se encuentren electrones en la colindancia con $r = 5a$: i) $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$; ii) $n = 2$, $l = 1$, $m_l = +1$; iii) $n = 2$, $l = 1$, $m_l = 0$.

41.2 El efecto Zeeman

El **efecto Zeeman** es la división en niveles atómicos de energía y de las líneas espectrales asociadas, cuando los átomos se colocan en un campo magnético (figura 41.7). Este efecto confirma, en forma experimental, la cuantización de la cantidad de movimiento angular. La descripción en esta sección, donde se supone que sólo la cantidad de movimiento angular es la cantidad de movimiento angular *orbital* de un solo electrón, también demuestra por qué a m_l se le llama número cuántico magnético.

Los átomos contienen cargas en movimiento, por lo que no debe sorprender que las fuerzas magnéticas causen cambios en ese movimiento y en los niveles de energía. Ya a mediados del siglo XIX los físicos especulaban acerca de que las fuentes de luz visible podrían ser carga eléctrica en vibración, a escala atómica. En 1896 el físico holandés Pieter Zeeman fue quien primero demostró que, en la presencia de un campo magnético, algunas líneas espectrales se desdoblaban en grupos de líneas muy cercanas (figura 41.8). Tal efecto lleva hoy su nombre.

Momento magnético de un electrón en órbita

Comencemos nuestro análisis del efecto Zeeman repasando el concepto de *momento dipolar magnético* o *momento magnético*, que presentamos en la sección 27.7. Una espira plana de corriente con área vectorial $\vec{A}$ que conduce la corriente I tiene un momento magnético $\vec{\mu}$ definido por

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \tag{41.9}$$

Cuando un dipolo magnético de momento $\vec{\mu}$ se pone en un campo magnético $\vec{B}$, el campo ejerce un par de torsión $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ en el dipolo. La energía potencial U asociada con esta interacción se define con la ecuación (27.27):

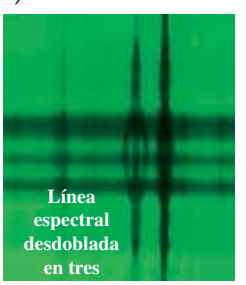
$$U = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{41.10}$$

Ahora usaremos las ecuaciones (41.9) y (41.10), con el modelo de Bohr, para examinar la interacción de un átomo de hidrógeno con un campo magnético. El electrón en órbita (rapidez v) equivale a una espira de corriente de radio r y área πr^2. La corriente media I es la carga promedio, por unidad de tiempo, que pasa por un punto de la órbita. Es igual a la magnitud de la carga e dividida entre el tiempo T de una revolución,

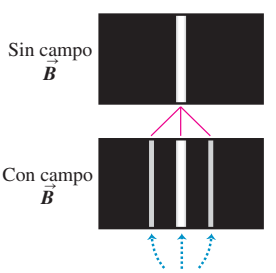
41.7 Efectos magnéticos sobre el espectro de la luz solar. a) La rendija de un espectrógrafo se coloca a lo largo de la línea negra que cruza una parte de la mancha solar. b) El campo magnético de 0.4 T en la mancha (mil veces mayor que el campo terrestre) desdobla la línea espectral intermedia en tres líneas.

a)

b)



41.8 Efecto Zeeman normal. Compárelo con la figura 41.7b.



Cuando se coloca un gas excitado en un campo magnético, la interacción de los momentos magnéticos orbitales con el campo desdobla las líneas espectrales individuales del gas y se forman conjuntos de tres líneas.

que es $T = 2\pi r/v$. Así, $I = ev/2\pi r$ y de acuerdo con la ecuación (41.9), la magnitud μ del momento magnético es

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2} \tag{41.11}$$

También podemos expresar esto en términos de la magnitud L de la cantidad de movimiento angular orbital. De la ecuación (10.28), $L = mvr$ para una partícula en órbita circular, y la ecuación (41.11) se transforma en

$$\mu = \frac{e}{2m}L \tag{41.12}$$

La relación de la magnitud de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ entre la magnitud de $\vec{\boldsymbol{L}}$ es $\mu/L = e/2m$, y se llama *razón* o *relación giromagnética.*

En el modelo de Bohr, $L = nh/2\pi = n\hbar$, donde $n = 1, 2, \ldots$ Para un estado con $n = 1$ (un estado fundamental), la ecuación (41.12) es $\mu = (e/2m)\hbar$. Esta cantidad es una unidad natural para el momento magnético; se le llama **magnetón de Bohr** y se representa con μ_B:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \qquad \text{(definición del magnetón de Bohr)} \tag{41.13}$$

Al evaluar la ecuación (41.13):

$$\mu_B = 5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T} = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T o A} \cdot \text{m}^2$$

Observe que las unidades J/T y $\text{A} \cdot \text{m}^2$ son equivalentes. Ya definimos antes esto en la sección (opcional) 28.8.

Si bien el modelo de Bohr parece indicar que el movimiento orbital de un electrón atómico causa un momento magnético, ese modelo *no* produce predicciones correctas acerca de las interacciones magnéticas. Por ejemplo, el modelo de Bohr indica que un electrón en un átomo de hidrógeno en estado fundamental tiene un momento magnético de igual magnitud que μ_B. No obstante, la representación de Schrödinger indica que ese electrón en estado fundamental está en un estado s con cantidad de movimiento angular cero, por lo que ¡el momento magnético orbital debe ser *cero*! Para obtener los resultados correctos debemos describir los estados usando funciones de onda de Schrödinger.

En la formulación de Schrödinger, los electrones tienen la misma relación de μ a L (razón giromagnética) que en el modelo de Bohr, que es $e/2m$. Suponga que el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ se dirige a lo largo del eje $+z$. De acuerdo con la ecuación (41.10), la energía de interacción U del momento magnético con el campo es

$$U = -\mu_z B \tag{41.14}$$

donde μ_z es la componente z del vector $\vec{\boldsymbol{\mu}}$.

Ahora usaremos la ecuación (41.12) para determinar μ_z, recordando que e es la *magnitud* de la carga del electrón, y que la carga real es $-e$. Como la carga del electrón es negativa, los vectores cantidad de movimiento angular orbital y momento magnético son contrarios. Se observa que

$$\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z \tag{41.15}$$

Para las funciones de onda de Schrödinger, $L_z = m_l\hbar$, con $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$, así que

$$\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z = -m_l\frac{e\hbar}{2m} \tag{41.16}$$

CUIDADO **Los dos usos del símbolo *m*** Tenga precaución para no confundir la masa del electrón m con el número cuántico magnético m_l.

Por último, se puede expresar la energía de interacción con la ecuación (41.14):

$$U = -\mu_z B = m_l \frac{e\hbar}{2m} B \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \tag{41.17}$$

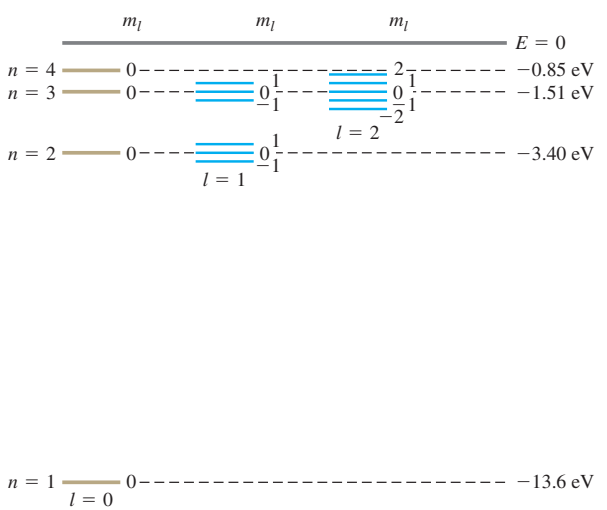
(energía de interacción magnética orbital)

En términos del magnetón de Bohr, $\mu_B = e\hbar/2m$,

$$U = m_l \mu_B B \qquad \text{(energía de interacción orbital magnética)} \tag{41.18}$$

El efecto del campo magnético es desplazar la energía de cada estado orbital en una cantidad U. La energía de interacción U depende del valor de m_l, porque m_l determina la orientación del momento magnético orbital en relación con el campo magnético. Esta dependencia es la causa por la que a m_l se le llame número cuántico magnético.

Como los valores de m_l van de $-l$ a $+l$ en escalones de uno, un nivel de energía con un valor determinado de número cuántico orbital l contiene $(2l + 1)$ estados orbitales diferentes. Sin un campo magnético, todos esos estados tienen la misma energía, es decir, son o están degenerados. El campo magnético elimina esta degeneración. En presencia de un campo magnético se desdoblan en $2l + 1$ niveles distintos de energía; los niveles adyacentes difieren en energía en $(e\hbar/2m)B = \mu_B B$. Este efecto sobre los niveles de energía del hidrógeno, se muestra en la figura 41.9. Las líneas espectrales que corresponden a transiciones de un conjunto de niveles a otro están desdobladas en consecuencia, y aparecen como una serie de tres líneas espectrales cercanas que sustituyen una línea única. Como muestra el siguiente ejemplo, el desdoblamiento de las líneas espectrales es bastante pequeño, porque el valor de $\mu_B B$ es pequeño, aun cuando los campos magnéticos sean apreciables.



41.9 Diagrama de niveles de energía para el hidrógeno, que muestra el desdoblamiento de los niveles de energía causados por la interacción del momento magnético orbital del electrón con un campo magnético externo. Se muestran los valores de m_l al lado de los diversos niveles. Por claridad, se exageraron las magnitudes relativas de los desdoblamientos. No se muestran los desdoblamientos para $n = 4$; ¿los puede trazar usted?

Ejemplo 41.4 Un átomo en un campo magnético

Un átomo en un estado con $l = 1$ emite un fotón de 600.000 nm de longitud de onda al decaer a un estado con $l = 0$. Si el átomo se coloca en un campo magnético con magnitud $B = 2.00$ T, determine los desplazamientos en los niveles de energía y en la longitud de onda, causados por la interacción entre el campo magnético y el momento magnético orbital del átomo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema tiene que ver con el desdoblamiento en niveles atómicos de energía provocado por un campo magnético (el efecto Zeeman).

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (41.17) o la (41.18) para determinar los desplazamientos en los niveles de energía. Así, la relación $E = hc/\lambda$,

continúa

entre la energía y la longitud de onda de un fotón, nos permite calcular las longitudes de onda emitidas durante las transiciones de los estados con $l = 1$ al estado $l = 0$.

EJECUTAR: La energía de un fotón de 600 nm es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{600 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 2.07\ \text{eV}$$

Entonces, si no hay campo magnético externo, la diferencia de energía entre los niveles $l = 0$ y $l = 1$ es 2.07 eV.

Cuando hay un campo de 2.00 T, la ecuación (41.18) indica que no hay desplazamiento del estado $l = 0$ (que tiene $m_l = 0$). Para los estados con $l = 1$, el desdoblamiento de niveles de energía se define como

$$\begin{aligned} U &= m_l \mu_B B = m_l (5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T})(2.00\ \text{T}) \\ &= m_l (1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}) = m_l (1.85 \times 10^{-23}\ \text{J}) \end{aligned}$$

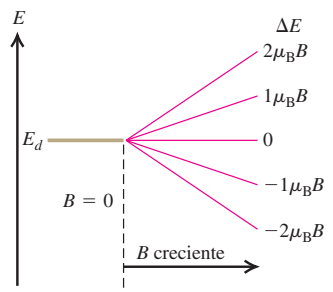
Cuando $l = 1$, los valores posibles de m_l son -1, 0 y $+1$, y los tres niveles correspondientes están separados por intervalos iguales de 1.16×10^{-4} eV. Es una fracción pequeña de la energía de un fotón de 2.07 eV:

$$\frac{1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}}{2.07\ \text{eV}} = 5.60 \times 10^{-5}$$

Los desplazamientos de *longitudes de onda* correspondientes son, aproximadamente, (5.60×10^{-5}) (600 nm) = 0.034 nm. La línea original de 600.000 nm se desdobla en un triplete con longitudes de onda de 599.966, 600.000 y 600.034 nm.

EVALUAR: Aun cuando 2.00 T es un campo intenso en la mayoría de los laboratorios, los desdoblamientos de longitud de onda son pequeños en extremo. Sin embargo, los espectrógrafos modernos cuentan con poder de resolución cromática más que suficiente para medir esos desdoblamientos (véase la sección 36.5).

Reglas de selección

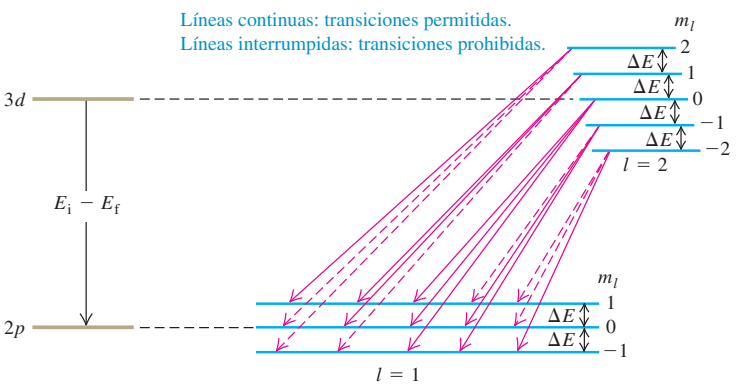


41.10 Desdoblamiento de los niveles de energía de un estado d ($l = 2$) causado por un campo magnético externo, suponiendo sólo que hay un momento magnético orbital.

La figura 41.10 muestra lo que sucede a un conjunto de estados d ($l = 2$) cuando aumenta el campo magnético. Los cinco estados, $m_l = -2, -1, 0, 1$ y 2, se degeneran (tienen la misma energía) cuando el campo es cero, pero cuando aumenta el campo los estados se dispersan y se elimina su degeneración. La figura 41.11 muestra los desdoblamientos de los estados $3d$ y $2p$. Diferencias iguales de energía $(e\hbar/2m)B = \mu_B B$ separan los niveles adyacentes. En ausencia de un campo magnético, una transición de un estado $3d$ a uno $2p$ produciría una sola línea espectral con energía de fotón $E_i - E_f$. Si los niveles están desdoblados como se muestra, parecería que hay cinco energías posibles de fotón.

De hecho, sólo hay tres posibilidades. No son posibles todas las combinaciones de niveles inicial y final, por una restricción relacionada con la conservación de la cantidad de movimiento angular. De ordinario, el fotón frecuentemente porta sólo una unidad ($\hbar$) de cantidad de movimiento angular, que conduce al requisito de que para una transición, l debe cambiar en 1, y m_l debe cambiar en 0 o en $\pm$ 1. Estas restricciones se llaman **reglas de selección**. Las transiciones que obedecen esas reglas se llaman *transiciones permitidas*; y a las que no, *transiciones prohibidas*. Las transiciones permitidas se muestran con flechas continuas en la figura 41.11. El lector debe contar las energías de transición posibles, para convencerse de que las nueve flechas continuas sólo representan tres energías posibles: el valor con campo cero $E_i - E_f$ y el valor de más o menos $\Delta E = (e\hbar/2m)B = \mu_B B$. Se muestran las líneas espectrales correspondientes.

Lo que hemos descrito se llama efecto Zeeman *normal*. Se basa por completo en la cantidad de movimiento angular orbital del electrón. De hecho, no hay nada particularmente *normal* en él. Excluye una consideración muy importante: la cantidad de movimiento angular *espín*, que será el tema de la siguiente sección.



41.11 La causa del efecto Zeeman normal. El campo magnético desdobla los niveles, pero las reglas de selección permiten transiciones sólo con tres cambios distintos de energía, y se producen tres frecuencias y longitudes de onda diferentes de fotones.

Evalúe su comprensión de La sección 41.2 En esta sección supusimos que el campo magnético apunta en la dirección de z positiva. ¿Cómo se afectarían los resultados si el campo magnético apuntara en la dirección de x positiva?

41.3 Espín del electrón

A pesar del éxito de la ecuación de Schrödinger para predecir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, hay varias observaciones experimentales que indican que no dice todo acerca del comportamiento de los electrones en los átomos. En primer lugar, los espectroscopistas han encontrado desdoblamientos en campo magnético distintos de las tres líneas que explicamos, y que a veces sus distancias entre sí son desiguales. Antes de que fuera comprendido este efecto, se llamó efecto Zeeman *anómalo* para diferenciarlo del efecto "normal" descrito en la sección anterior. La figura 41.12 muestra ambas clases de desdoblamientos.

En segundo lugar, algunos niveles de energía muestran desdoblamientos parecidos a los del efecto Zeeman, aunque *no* haya campo magnético externo. Por ejemplo, cuando las líneas del espectro del hidrógeno se examinan con un espectrógrafo de alta resolución, se observa que algunas consisten en conjuntos de líneas muy cercanas llamadas *multipletes*. Asimismo, la línea anaranjada-amarilla del sodio, que corresponde a la transición $4p \rightarrow 3s$ del electrón externo, se ve que es un doblete (λ = 589.0, 589.6 nm), lo cual parece indicar que en realidad el nivel $4p$ podría ser dos niveles muy cercanos. En su forma original, la ecuación de Schrödinger no predecía nada de esto.

El experimento de Stern y Gerlach

En 1922 surgieron anomalías parecidas en experimentos con haces atómicos, efectuados en Alemania por Otto Stern y Walter Gerlach. Cuando hicieron pasar un haz de átomos neutros a través de un campo magnético no uniforme (figura 41.13, véase la siguiente página), se desviaron los átomos de acuerdo con la orientación de sus momentos magnéticos con respecto al campo. Tales experimentos demostraron en forma muy directa la cuantización de la cantidad de movimiento angular. Si sólo hubiera cantidad de movimiento angular orbital, las desviaciones desdoblarían el haz formando una cantidad impar $(2l + 1)$ de componentes distintos. Sin embargo, algunos haces de átomos se desdoblaban en una cantidad *par* de componentes. Si usamos un símbolo j distinto para un número cuántico de momento angular, al igualar $2j + 1$ con un número par se obtiene $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, sugiriendo que hay un momento angular semientero. Esto no se puede entender con base en el modelo de Bohr ni con representaciones parecidas de la estructura atómica.

En 1925 dos estudiantes graduados en los Países Bajos, Samuel Goudsmidt y George Uhlenbeck, propusieron que el electrón podría tener algún movimiento

41.12 Ilustraciones de los efectos Zeeman normal y anómalo, para dos elementos: zinc y sodio. Los corchetes bajo cada ilustración muestran el desdoblamiento "normal" que se predice sin tener en cuenta el efecto del espín del electrón.

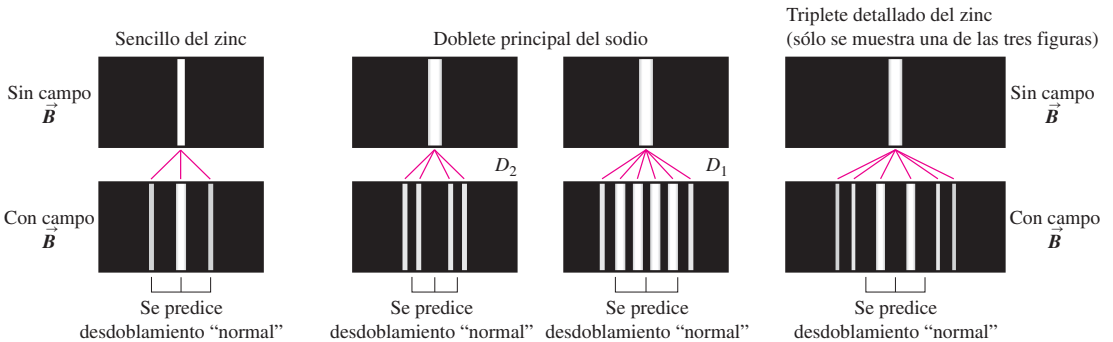
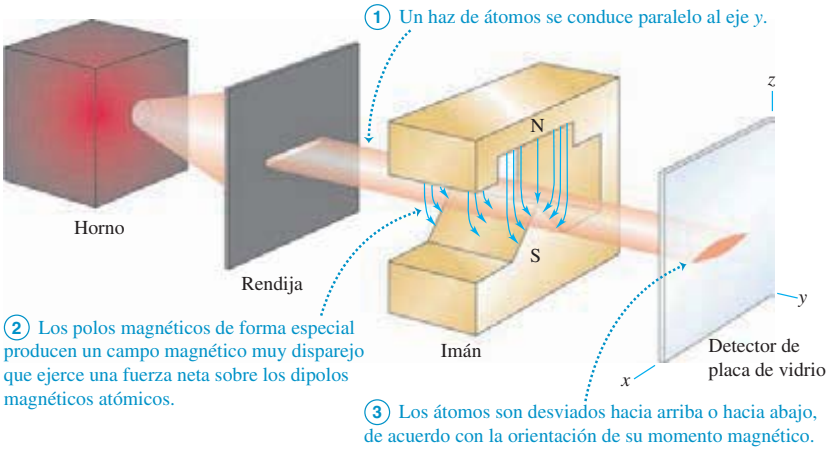


Figura normal: el experimento coincide con el desdoblamiento "normal" que se predice.

Figura anómala: el experimento no coincide con el desdoblamiento "normal" que se predice.

41.13 El experimento de Stern-Gerlach.



adicional. Usando un modelo semiclásico, sugirieron que el electrón se podría comportar como una esfera giratoria de carga, en vez de como una partícula. En ese caso, tendría una cantidad de movimiento angular *espín* adicional, así como el momento magnético correspondiente. Si se cuantizaran en forma muy parecida a la de una cantidad de movimiento angular *orbital* y su momento magnético, ayudarían a explicar las anomalías observadas en los niveles de energía.

Una analogía para el espín del electrón

Para introducir el concepto de **espín del electrón** comencemos con una analogía. La Tierra describe una órbita casi circular en torno al Sol y, al mismo tiempo, *gira* sobre su eje. Cada movimiento tiene su cantidad de movimiento angular asociada, que llamaremos cantidades de movimiento angulares *orbital* y *espín*, respectivamente. La cantidad de movimiento angular total de la Tierra es la suma vectorial de ambas. Si hubiera que modelar a la Tierra como un punto único, no tendría momento de inercia con respecto a su eje de giro ni, en consecuencia, tendría cantidad de movimiento angular espín. Pero si se incluye el tamaño finito de la Tierra en el modelo, se hace posible la cantidad de movimiento angular espín.

En el modelo de Bohr, suponga que el electrón no sólo es una carga puntual, sino una esfera giratoria pequeña que describe su órbita. Entonces, el electrón no sólo tiene cantidad de movimiento angular orbital, sino también cantidad de movimiento angular espín asociada con la rotación de su masa en torno a su eje. La esfera tiene una carga eléctrica, por lo que el movimiento giratorio causa espiras de corriente, y un momento magnético, como vimos en la sección 27.7. En un campo magnético, el momento magnético *espín* tiene una energía de interacción además de la del momento magnético *orbital* (la interacción de efecto Zeeman normal que describimos en la sección 41.2). Deberíamos ver desplazamientos Zeeman adicionales debidos al momento magnético espín.

Como ya mencionamos, de hecho, esos desplazamientos *sí* se observan en un análisis espectroscópico preciso. Ésta y otras pruebas experimentales han demostrado en forma concluyente que el electrón *sí* tiene una cantidad de movimiento angular espín y un momento magnético espín, que no dependen de su movimiento orbital sino que son intrínsecos del electrón mismo.

Números cuánticos espín

Como el momento angular orbital, la cantidad de movimiento angular espín de un electrón (representado por $\vec{S}$) está *cuantizado*. Suponga que contamos con algún aparato que mide determinada componente de $\vec{S}$, por ejemplo, la componente S_z. Se ve que los únicos valores posibles son

$$S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar \qquad \text{(componentes de cantidad de movimiento angular de espín)} \qquad (41.19)$$

Esta relación recuerda la ecuación $L_z = m_l\hbar$ para la componente z de la cantidad de movimiento angular orbital, excepto que $|S_z|$ es la *mitad* de $\hbar$, y no un múltiplo *entero*.

La ecuación (41.19) también sugiere que la magnitud S de la cantidad de movimiento angular espín se define con una ecuación análoga a la (41.4), sustituyendo el número cuántico orbital l por el **número cuántico espín** $s = \frac{1}{2}$:

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \qquad \text{(magnitud de la cantidad de movimiento angular espín)} \qquad (41.20)$$

Al electrón se le llama con frecuencia "partícula de espín $\frac{1}{2}$".

El modelo de Bohr es una imagen muy simplificada del comportamiento del electrón. En mecánica cuántica, donde las órbitas de Bohr ya se sustituyeron por distribuciones de probabilidad $|\psi|^2$, en realidad no podemos *representar* el espín del electrón. Si imaginamos que una distribución de probabilidad es una nube que rodea al núcleo, entonces podemos imaginar muchas flechas diminutas de espín distribuidas en la nube, y todas con componentes en dirección de $+z$, o todas con componentes en dirección de $-z$. Pero no tome muy en serio esta imagen.

Para identificar por completo el estado del electrón en un átomo de hidrógeno, necesitamos ahora un cuarto número cuántico m_s para especificar la orientación del espín del electrón. Para un electrón, se asignan a m_s los valores $+\frac{1}{2}$ o bien $-\frac{1}{2}$ para concordar con la ecuación (41.19):

$$S_z = m_s\hbar \quad \left(m_s = \pm\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(valores permitidos de } m_s \text{ y } S_z \text{ para un electrón)} \qquad (41.21)$$

El vector cantidad de movimiento angular espín $\vec{\boldsymbol{S}}$ solo puede tener dos orientaciones en el espacio, en relación con el eje z: *"espín arriba"* con una componente z de $+\frac{1}{2}\hbar$ y "*espín abajo*", con componente z de $-\frac{1}{2}\hbar$.

La componente z del momento magnético espín asociado (μ_z) se relaciona con S_z por

$$\mu_z = -(2.00232)\frac{e}{2m}S_z \qquad (41.22)$$

donde $-e$ y m son (como es costumbre) la carga y la masa del electrón. Cuando el átomo se coloca en un campo magnético, la energía de interacción $-\vec{\boldsymbol{\mu}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ del momento magnético dipolar espín con el campo causa desdoblamientos adicionales de los niveles de energía, y en las correspondientes líneas espectrales.

La ecuación (41.22) indica que la razón giromagnética del espín del electrón es aproximadamente el *doble* que el valor $e/2m$ de la cantidad de movimiento angular *orbital* y el momento dipolar magnético. Este resultado no tiene análogo clásico. Sin embargo, en 1928 Paul Dirac desarrolló una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger para los electrones. Su ecuación da como resultado una relación giromagnética para el espín exactamente igual a $2(e/2m)$. Se necesitaron otras dos décadas para desarrollar el área de la física llamada *electrodinámica cuántica* (se abrevia QED, por *quantum electrodynamics*), que predice el valor que "sólo" hemos obtenido con seis cifras significativas: 2.00232. De hecho, en la actualidad la QED predice un valor que concuerda con una medición reciente (en 2006), de 2.00231930436170(152), por lo que la QED es la teoría más precisa en toda la ciencia.

Ejemplo 41.5 Energía de interacción magnética espín

Calcule la energía de interacción para un electrón en un estado $l = 0$ (sin momento magnético orbital) en un campo magnético de 2.00 T de magnitud.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que no hay momento magnético orbital, la única interacción magnética es entre el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ y el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ debido al espín $\vec{\boldsymbol{S}}$ del electrón.

PLANTEAR: La interacción de energía es $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$ como en la ecuación (41.10). Igual que en la sección 41.2, supondremos que $\vec{\boldsymbol{B}}$ está en la dirección de z positiva, para que se pueda expresar la energía de interacción con la forma $U = -\mu_z B$ [ecuación (41.14)]. La componente z del momento magnético se expresa, mediante la ecuación (41.22), en función de S_z y S_z se define con la ecuación (41.19).

continúa

EJECUTAR: A1 combinar las ecuaciones (41.14), (41.19) y (41.22),

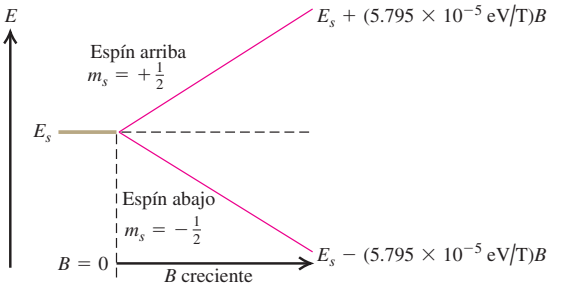
$$\begin{aligned} U &= -\left[-(2.00232)\left(\frac{e}{2m}\right)\left(\pm\frac{1}{2}\hbar\right)B\right] \\ &= \pm\frac{1}{2}(2.00232)\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)B = \pm(1.00116)\mu_B B \\ &= \pm(1.00116)(9.274\times10^{-24}\,\text{J/T})(2.00\,\text{T}) \\ &= \pm1.86\times10^{-23}\,\text{J} = \pm1.16\times10^{-5}\,\text{eV} \end{aligned}$$

El valor positivo de U corresponde a $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ (espín arriba) y el negativo a $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ (espín abajo).

EVALUAR: Comprobemos el *signo* de nuestros resultados. Si el electrón es espín abajo, la cantidad de movimiento angular espín $\vec{\boldsymbol{S}}$ apunta, en general, opuesto a $\vec{\boldsymbol{B}}$, y, en consecuencia, el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ (que es opuesto a $\vec{\boldsymbol{S}}$ porque la carga del electrón es negativa) apunta en general paralelo a $\vec{\boldsymbol{B}}$. De acuerdo con la ecuación (41.10), $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$, la energía de interacción es negativa si $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ son paralelos. Nuestros resultados demuestran que U realmente es negativa en este caso. En forma parecida, podemos decir que U debe ser positiva para un electrón de espín arriba, que es justo lo que hemos calculado.

Las líneas rojas de la figura 41.14 muestran cómo, al aumentar la magnitud del campo magnético, se afectan las energías de interacción de los dos estados distintos de espín. La cantidad $5.795\times10^{-5}\,\text{eV/T}$ es justo $(1.00116)\mu_B$. Las gráficas son líneas rectas porque, como indica la ecuación (41.14), U es proporcional a B.

41.14 Un nivel $l = 0$ de un solo electrón se desdobla por interacción del momento magnético espín con un campo magnético.



Acoplamiento espín-órbita

Como ya se mencionó, el momento dipolar magnético espín también produce desdoblamiento de niveles de energía, aun cuando *no* haya campo externo. Una causa se debe al movimiento orbital del electrón. En el modelo de Bohr, los observadores que se mueven con el electrón verían un núcleo con carga positiva girando en torno a ellos (igual que a los observadores terrestres les parece que el Sol describe una órbita en torno a la Tierra). Este movimiento aparente de carga causa un campo magnético en el lugar del electrón, medido en el marco de referencia del electrón en movimiento. La interacción resultante con el momento magnético espín causa un doble desdoblamiento de este nivel, que corresponde a las dos orientaciones posibles del espín del electrón.

No se pueden tomar muy en serio las descripciones basadas en el modelo de Bohr, pero se puede deducir un resultado parecido con la ecuación de Schrödinger. La energía de interacción U se puede expresar en función del producto escalar de los vectores cantidad de movimiento angular $\vec{\boldsymbol{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{S}}$. A este efecto se le llama **acoplamiento espín-órbita**; es el que causa la pequeña diferencia de energía entre los dos niveles excitados inferiores, muy cercanos, del sodio, que se ven en la figura 38.10a y del doblete correspondiente (589.0, 589.6 nm) en el espectro del sodio.

Ejemplo 41.6 Un campo magnético efectivo

Calcule el campo magnético efectivo sobre el electrón en los niveles $3p$ del átomo de sodio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las dos líneas del doblete del sodio se deben a transiciones desde los dos niveles $3p$, que están desdoblados por acoplamiento espín-órbita, hasta el nivel $3s$, que *no* está desdoblado, porque tiene $L = 0$. Concebimos el acoplamiento espín-órbita como una interacción entre el momento magnético espín del electrón, y un campo magnético efectivo debido al núcleo. Por consiguiente, este ejemplo es como el 41.5 al revés: allá el dato era B y calculamos la diferencia entre las energías de los dos estados de espín; aquí usaremos la diferencia de energía para determinar B.

PLANTEAR: La diferencia de energía entre los dos niveles $3p$ es igual a la diferencia de energía entre los dos fotones del doblete del sodio. Usaremos esta relación y los resultados del ejemplo 41.5 para determinar la incógnita, la intensidad del campo magnético efectivo B.

EJECUTAR: Las energías de los dos fotones son:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.136\times10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{589.0\times10^{-9}\,\text{m}} = 2.1052\,\text{eV}$$

y

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.136\times10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{589.6\times10^{-9}\,\text{m}} = 2.1031\,\text{eV}$$

Por lo tanto, la diferencia de energías entre los dos niveles $3p$ es

$$2.1052\ \text{eV} - 2.1031\ \text{eV} = 0.0021\ \text{eV} = 3.4 \times 10^{-22}\ \text{J}$$

La interacción espín-órbita eleva un nivel y baja el otro en 1.7×10^{-22} J, que es la mitad de esa diferencia. Según el ejemplo 41.5, la cantidad que sube o baja cada estado es $|U| = (1.00116)\mu_B B$, por lo que

$$B = \left|\frac{U}{(1.00116)\mu_B}\right| = \frac{1.7 \times 10^{-22}\ \text{J}}{9.28 \times 10^{-24}\ \text{J/T}} = 18\ \text{T}$$

EVALUAR: Este resultado indica que el campo magnético efectivo que actúa sobre el átomo es *muy* fuerte. Para producir un campo continuo de esta magnitud en el laboratorio, se requieren electroimanes de tecnología de punta.

Combinación de cantidades de movimiento angulares orbital y espín

Las cantidades de movimiento angulares orbital y espín ($\vec{\boldsymbol{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{S}}$, respectivamente) se pueden combinar de varias formas. Definiremos la cantidad de movimiento angular total $\vec{\boldsymbol{J}}$ como

$$\vec{\boldsymbol{J}} = \vec{\boldsymbol{L}} + \vec{\boldsymbol{S}} \tag{41.23}$$

Los valores posibles de la magnitud J se expresan en función de un número cuántico j mediante

$$J = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar \tag{41.24}$$

Entonces, puede haber estados donde $j = |l \pm \frac{1}{2}|$. Los estados $l + \frac{1}{2}$ corresponden al caso en que los vectores $\vec{\boldsymbol{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{S}}$ tienen componentes z paralelas, mientras que para los estados $l - \frac{1}{2}$ tienen componentes z antiparalelas. Por ejemplo, cuando $l = 1$, j puede ser $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. En otra notación espectroscópica, esos estados p se identifican con ${}^2P_{1/2}$ y ${}^2P_{3/2}$, respectivamente. El índice es la cantidad de orientaciones posibles de espín, y la letra P (ahora en mayúscula) indica estados con $l = 1$, y el subíndice es el valor de j. Este esquema se usó para identificar los niveles de energía del átomo de sodio en la figura 38.10a.

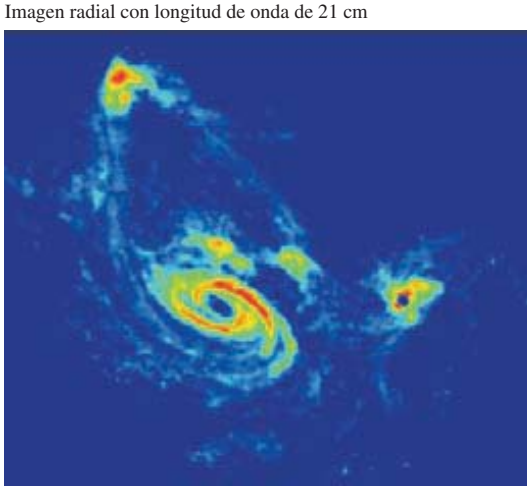
Los diversos desdoblamientos de líneas causados por interacciones magnéticas reciben el nombre colectivo de *estructura fina*. Hay también desdoblamientos adicionales, mucho menores, relacionados con el hecho de que el *núcleo* del átomo tiene un momento magnético dipolar que interactúa con los momentos magnéticos dipolares espín y/u orbitales de los electrones. A tales efectos se les llama *estructura hiperfina*. Por ejemplo, el nivel fundamental del hidrógeno se desdobla en dos estados, separados sólo por 5.9×10^{-6} eV. El fotón que se emite en las transiciones entre esos estados tiene una longitud de onda de 21 cm. Los radioastrónomos usan esa longitud de onda para cartografiar nubes interestelares de hidrógeno gaseoso, que están demasiado frías como para emitir luz visible (figura 41.15).

Evalúe su comprensión de la sección 41.3 ¿En cuál de las siguientes situaciones, el momento magnético es de un electrón perfectamente alineado con un campo magnético que apunta en la dirección z positiva? i) $m_s = +\frac{1}{2}$; ii) $m_s = -\frac{1}{2}$; iii) tanto i) como ii); iv) ni i) ni ii).

41.15 En una imagen con luz visible (arriba), estas tres galaxias lejanas parecen estar sin conexión. No obstante, de hecho, estas galaxias están conectadas mediante enormes serpentinas de hidrógeno gaseoso, como se indica en la imagen de colores falsos (abajo) formada con un radiotelescopio sintonizado a la longitud de onda de 21 cm emitida por los átomos de hidrógeno.

Galaxia en luz visible (imagen negativa; la galaxia aparece oscura)

Imagen radial con longitud de onda de 21 cm



41.4 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión

Hasta ahora, nuestro análisis de la estructura atómica se ha concentrado en el átomo de hidrógeno. Es natural: el hidrógeno neutro, con sólo un electrón, es el átomo más sencillo. Si no podemos entender el hidrógeno, con seguridad no comprenderemos cualquier cuestión más complicada. Pero ahora pasaremos a átomos con muchos electrones.

En general, un átomo que está en su estado normal (eléctricamente neutro) tiene Z electrones y Z protones. Recordemos que, en la sección 41.1, a Z lo llamamos *número atómico*. La carga eléctrica total de ese átomo es exactamente cero, porque el neutrón no tiene carga; mientras que las cargas del protón y electrón tienen la misma magnitud, pero signo contrario.

Podemos aplicar la ecuación de Schrödinger a este átomo general. Sin embargo, la complejidad del análisis aumenta con mucha rapidez al incrementarse Z. Cada uno de los Z electrones no sólo interactúa con el núcleo, sino también con cada uno de los demás electrones. Las funciones de onda y la energía potencial son funciones de $3Z$ coordenadas, y la ecuación contiene segundas derivadas con respecto a todas ellas. El problema matemático de determinar soluciones de esas ecuaciones es tan complejo que no se ha resuelto en forma exacta, aun para el átomo de helio neutro, que sólo tiene dos electrones.

Por fortuna, hay disponibles diversos esquemas de aproximación. La aproximación más sencilla consiste en no tener en cuenta todas las interacciones entre los electrones y considerar que cada electrón sólo se mueve bajo la acción del núcleo (que se considera una carga puntual). En esta aproximación, la función de onda para cada electrón es como la del átomo de hidrógeno, que se especifican con cuatro números cuánticos (n, l, m_l y m_s); la carga nuclear es Ze y no e. Para esto se requiere remplazar cada factor de e^2 en las funciones de onda y los niveles de energía por Ze^2. En particular, los niveles de energía se determinan con la ecuación (41.3), poniendo Z^2e^4 en vez de e^4:

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r Z^2 e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \tag{41.25}$$

Esta aproximación es muy drástica; aun cuando haya muchos electrones, sus interacciones mutuas son tan importantes como la interacción entre cada uno y el núcleo. Por consiguiente, este modelo no es de mucha utilidad para predicciones cuantitativas.

La aproximación del campo central

Una aproximación menos drástica y más útil consiste en imaginar que todos los electrones juntos forman una nube de carga que tiene, en promedio, *simetría esférica*. Podemos imaginar entonces que cada electrón individual se mueve en el campo eléctrico total debido al núcleo y a esta nube promediada de todos los demás electrones. Hay una función de energía potencial con simetría esférica $U(r)$, que corresponde a este modelo. Esta imagen se llama **aproximación de campo central**, y ofrece un punto de partida útil para comprender la estructura atómica. Si a usted le decepciona que haya que hacer aproximaciones en una etapa tan temprana de nuestra descripción, tenga en cuenta que estamos manejando problemas que al principio desafiaron todos los intentos de análisis, con o sin aproximaciones.

En la aproximación de campo central de nuevo podemos manejar funciones de onda para un electrón. La ecuación de Schrödinger sólo difiere de la ecuación para el hidrógeno en que la función de energía potencial de $1/r$ se sustituye por una función diferente, $U(r)$. Pero sucede que $U(r)$ no entra a las ecuaciones diferenciales de $\Theta(\theta)$ ni $\Phi(\phi)$, por lo que esas funciones angulares son exactamente las mismas que para el hidrógeno, y los *estados* de cantidad de movimiento angular orbital también son iguales que antes. Los números cuánticos l, m_l y m_s tienen el mismo significado que antes, y la magnitud y la componente z de la cantidad de movimiento angular orbital de nuevo se definen con las ecuaciones (41.4) y (41.5).

Las funciones de onda y las probabilidades radiales son distintas de las del hidrógeno, por el cambio de $U(r)$, por lo que los niveles de energía ya no se determinan con la ecuación (41.3). Todavía se puede identificar un estado con los cuatro números cuánticos (n, l, m_l, m_s). En general, la energía de un estado depende ahora de n y l, y no sólo de n como en el hidrógeno. Las restricciones sobre los valores de los números cuánticos son iguales que antes:

$$n \geq 1 \qquad 0 \leq l \leq n-1 \qquad |m_l| \leq l \qquad m_s = \pm\frac{1}{2} \qquad \text{(valores permitidos de los números cuánticos)} \tag{41.26}$$

El principio de exclusión

Para comprender la estructura de los átomos con muchos electrones, necesitamos un principio adicional, el *principio de exclusión*. Para saber por qué se necesita este principio, examinemos el estado de energía mínima, o *estado fundamental*, de un átomo con muchos electrones. En los estados con un electrón, del modelo de campo central,

hay un estado de energía mínima (correspondiente a un estado $n = 1$ del hidrógeno). Esperaríamos que para el estado fundamental de un átomo complejo, *todos* los electrones deberían estar en este estado mínimo. En ese caso, sólo deberíamos ver cambios graduales en las propiedades físicas y químicas, al examinar el comportamiento de átomos con cantidades crecientes de electrones (Z).

Esos cambios graduales *no* son lo que se observa. En vez de ello, las propiedades de los elementos varían mucho de uno al siguiente, y cada elemento tiene su personalidad propia y distinta. Por ejemplo, los elementos flúor, neón y sodio tienen 9, 10 y 11 electrones por átomo, respectivamente. El flúor ($Z = 9$) es un *halógeno*; tiende mucho a formar compuestos en los que cada átomo de flúor adquiere un electrón adicional. El sodio ($Z = 11$) es un *metal alcalino*; forma compuestos en los que cada átomo de sodio *pierde* un electrón. El neón ($Z = 10$) es un *gas noble*, que no forma compuestos. Tales observaciones demuestran que en el estado fundamental de un átomo complejo, los electrones *no pueden* estar todos en los estados de energía mínima. Pero, ¿por qué no?

La clave de este rompecabezas, descubierta en 1925 por es físico austriaco Wolfgang Pauli (figura 41.16), se llama **principio de exclusión**, que establece que **dos electrones no pueden ocupar el mismo estado mecánico-cuántico** en un sistema dado. Es decir, **dos electrones en un átomo no pueden tener los mismos valores de todos los cuatro números cuánticos (n, l, m_l y m_s)**. Cada estado cuántico corresponde a cierta distribución de la "nube" de electrones en el espacio. En consecuencia, el principio también indica que de hecho no más de dos electrones con valores opuestos del número cuántico m_s pueden ocupar la misma región del espacio. No debemos tomar muy en serio esta última afirmación, ya que las funciones de probabilidad para los electrones no tienen límites definidos ni precisos. Sin embargo, el principio de exclusión limita la cantidad de funciones de onda de electrones que se pueden traslapar. Imaginémoslo como el análogo mecánico-cuántico de una regla universitaria que sólo permite un alumno por escritorio.

41.16 La clave para entender la tabla periódica de los elementos fue el descubrimiento del principio de exclusión, por Wolfgang Pauli (1900-1958). Pauli recibió el Premio Nobel de Física en 1945 por este logro. La foto muestra a Pauli (a la izquierda) con Niels Bohr, viendo un trompo de juguete girando en el piso.

CUIDADO **El significado del principio de exclusión** No confunda el principio de exclusión con la repulsión eléctrica entre electrones. Si bien ambos efectos tienden a mantener separados los electrones dentro de un átomo, son de un carácter muy distinto. Dos electrones siempre se pueden acercar agregándoles energía para contrarrestar la repulsión eléctrica; en contraste, *nada* puede contrarrestar el principio de exclusión y forzar a dos electrones al mismo estado mecánico-cuántico.

La tabla 41.2 es una lista de algunos conjuntos de números cuánticos para estados electrónicos en un átomo. Se parece a la tabla 41.1 (sección 41.1), pero hemos agregado la cantidad de estados en cada subcapa y capa. Debido al principio de exclusión, la "cantidad de estados" es igual que la cantidad *máxima* de electrones que se pueden encontrar en esos estados. Para cada estado, m_s puede ser $+\frac{1}{2}$ o bien $-\frac{1}{2}$.

Como en las funciones de onda del hidrógeno, los distintos estados corresponden a diferentes distribuciones en el espacio. Los electrones con mayores valores de n se concentran a mayores distancias del núcleo. La figura 41.4 (sección 41.1) muestra dicho efecto. Cuando un átomo tiene más de dos electrones, no todos ellos pueden bajar a los estados de baja energía $n = 1$ más cercanos al núcleo, porque sólo hay dos estados de ésos; el principio de exclusión prohíbe ocupaciones múltiples de un estado. Algunos electrones son forzados a estados más alejados, con mayores energías. Cada valor de n

Tabla 41.2 Estados cuánticos de electrones en las primeras cuatro capas

n	l	m_l	Notación espectroscópica	Número de estados		Capa
1	0	0	1s	2		K
2	0	0	2s	2	8	L
2	1	−1, 0, 1	2p	6		
3	0	0	3s	2		
3	1	−1, 0, 1	3p	6	18	M
3	2	−2, −1, 0, 1, 2	3d	10		
4	0	0	4s	2		
4	1	−1, 0, 1	4p	6		
4	2	−2, −1, 0, 1, 2	4d	10	32	N
4	3	−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3	4f	14		

corresponde, más o menos, a una región del espacio en torno al núcleo, con la forma de un *cascarón* o *capa* esférico. Por consiguiente, se habla de la capa K como la región que está ocupada por los electrones en los estados $n = 1$, la capa L como la región de los estados $n = 2$, y así sucesivamente. Los estados con igual n pero distinta l forman *subcapas*, por ejemplo la subcapa $3p$.

La tabla periódica

El principio de exclusión se puede aplicar para deducir las propiedades más importantes de la estructura y comportamiento químico de átomos con varios electrones, incluyendo la tabla periódica de los elementos. Imaginemos la construcción de un átomo neutro, comenzando con un núcleo desnudo con Z protones, y agregándole Z electrones, uno por uno. Para obtener el estado fundamental del átomo en su totalidad, primero se llenan los estados electrónicos de mínima energía (los más cercanos al núcleo, con los valores mínimos de n y l), y se usan estados sucesivamente más altos, hasta que todos los electrones se hayan acomodado. Las propiedades químicas de un átomo se determinan principalmente por interacciones donde intervienen los electrones más externos, o *de valencia*, por lo que en especial debemos aprender cómo están arreglados esos electrones.

Veamos las configuraciones electrónicas de estado fundamental de los primeros átomos (en orden de Z creciente). Para el hidrógeno, el estado fundamental es 1s; el único electrón está en un estado $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. En el átomo de helio ($Z = 2$), *ambos* electrones están en estados 1s, con espines opuestos; uno tiene $m_s = -\frac{1}{2}$ y el otro tiene $m_s = +\frac{1}{2}$. Al estado fundamental del helio lo representaremos por $1s^2$. (El índice 2 no es un exponente; la notación $1s^2$ indica que hay dos electrones en la subcapa 1s. También se sobreentiende el índice 1 cuando no lo hay, como en 2s.) Para el helio, la capa K está totalmente llena, y todas las demás están vacías. El helio es un gas noble; no tiene tendencia a ganar ni a perder un electrón, y no forma compuestos.

El litio ($Z = 3$) tiene tres electrones. En su estado fundamental, dos de ellos están en estados 1s y uno en estado $2s$, por lo que el estado fundamental del litio se representa por $1s^2 2s$. En promedio, el electrón $2s$ está bastante más alejado del núcleo que los electrones 1s (figura 41.17). De acuerdo con la ley de Gauss, la carga *neta* Q_{encer} que atrae al electrón $2s$ se acerca más a $+e$ que al valor $+3e$ que tendría sin los dos electrones 1s. El resultado es que el electrón $2s$ está débilmente enlazado; sólo se requieren 5.4 eV para quitarlo, en comparación con los 30.6 eV obtenidos con la ecuación (41.25) con $Z = 3$ y $n = 2$. En su comportamiento químico, el litio es un *metal alcalino*. Forma compuestos iónicos donde cada átomo de litio pierde un electrón, y tiene valencia $+1$.

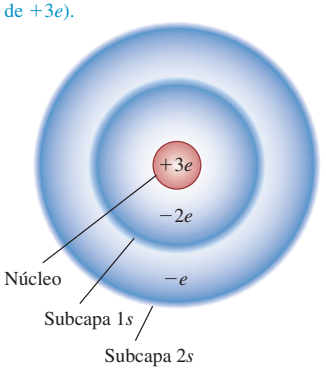
Sigue el berilio ($Z = 4$); su configuración de estado fundamental es $1s^2 2s^2$, y sus dos electrones de valencia llenan la subcapa s de la capa L. El berilio es el primero de los elementos *alcalinotérreos*, que forman compuestos iónicos en los que la valencia de los átomos es $+2$.

La tabla 41.3 muestra las configuraciones electrónicas de estado fundamental de los 30 primeros elementos. La capa L puede contener ocho electrones. Cuando $Z = 10$, las capas K y L están llenas, y no hay electrones en la capa M. Cabe esperar que esa sea una configuración bastante estable, con poca tendencia a ganar o perder electrones. Este elemento es el neón, un gas noble, sin compuestos conocidos. Después del neón, el siguiente elemento es el sodio ($Z = 11$), con capas K y L llenas, y un electrón en la capa M. Su estructura de "gas noble más un electrón" se parece a la del litio; ambos son metales alcalinos. El elemento *anterior* al neón es el flúor, con $Z = 9$. Tiene un lugar libre en la capa L, y tiene afinidad para ganar un electrón y llenar la capa. El flúor forma compuestos iónicos en los que tiene una valencia de -1. Este comportamiento es característico de los *halógenos* (flúor, cloro, bromo, yodo y ástato), todos los cuales tienen configuraciones de "gas noble menos uno" (figura 41.18).

Al seguir por la lista se pueden entender las regularidades del comportamiento químico que muestra la **tabla periódica de los elementos** (Apéndice D) con base en las configuraciones electrónicas. La semejanza de los elementos en cada *grupo* (columna vertical) de la tabla periódica es resultado de la semejanza en la configuración electrónica exterior. Todos los gases nobles (helio, neón, argón, kriptón, xenón y radón) tienen configuraciones de capa llena o capa llena más subcapa p llena. Todos los metales alcalinos (litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio) tienen configuraciones

41.17 Representación esquemática de la distribución de carga en un átomo de litio. El núcleo tiene carga de $+3e$.

En promedio, el electrón 2s está mucho más alejado del núcleo que los electrones 1*s*. Por lo tanto, sufre una carga nuclear neta de aproximadamente $+3e - 2e = +e$ (en vez de $+3e$).



41.18 La sal (cloruro de sodio, NaCl) se disuelve con facilidad en agua, haciendo salada el agua de mar, gracias a las configuraciones electrónicas del sodio y del cloro. El sodio puede perder con facilidad un electrón para formar un ion Na^+, y el cloro puede ganar fácilmente un electrón para formar un ion Cl^-. Tales iones se mantienen en solución porque son atraídos hacia los extremos polares de las moléculas de agua (véase la figura 21.31a).

Tabla 41.3 Configuraciones electrónicas para el estado fundamental

Elemento	Símbolo	Número atómico (Z)	Configuración electrónica
Hidrógeno	H	1	$1s$
Helio	He	2	$1s^2$
Litio	Li	3	$1s^2 2s$
Berilio	Be	4	$1s^2 2s^2$
Boro	B	5	$1s^2 2s^2 2p$
Carbono	C	6	$1s^2 2s^2 2p^2$
Nitrógeno	N	7	$1s^2 2s^2 2p^3$
Oxígeno	O	8	$1s^2 2s^2 2p^4$
Flúor	F	9	$1s^2 2s^2 2p^5$
Neón	Ne	10	$1s^2 2s^2 2p^6$
Sodio	Na	11	$1s^2 2s^2 2p^6 3s$
Magnesio	Mg	12	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$
Aluminio	Al	13	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p$
Silicio	Si	14	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$
Fósforo	P	15	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$
Azufre	S	16	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$
Cloro	Cl	17	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$
Argón	Ar	18	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$
Potasio	K	19	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s$
Calcio	Ca	20	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$
Escandio	Sc	21	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d$
Titanio	Ti	22	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^2$
Vanadio	V	23	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$
Cromo	Cr	24	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s 3d^5$
Manganeso	Mn	25	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^5$
Hierro	Fe	26	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$
Cobalto	Co	27	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^7$
Níquel	Ni	28	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^8$
Cobre	Cu	29	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s 3d^{10}$
Zinc	Zn	30	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10}$

de "gas noble más uno". Todos los metales alcalinotérreos (berilio, magnesio, calcio, estroncio, bario y radio) tienen configuraciones de "gas noble más dos" y todos los halógenos (flúor, cloro, bromo, yodo y ástato) tienen estructuras de "gas noble menos uno".

Se presenta una ligera complicación con las capas M y N, porque los niveles de subcapa $3d$ y $4s$ ($n = 3$, $l = 2$ y $n = 4$, $l = 0$, respectivamente) tienen energías parecidas (en el siguiente apartado describiremos por qué sucede así). El argón ($Z = 18$) tiene llenas todas las subcapas ls, $2s$, $2p$, $3s$ y $3p$, pero en el potasio ($Z = 19$), el electrón adicional pasa a un estado de energía $4s$, en vez de a uno $3d$ (porque el estado $4s$ tiene una energía un poco menor).

Los siguientes elementos tienen uno o dos electrones en la subcapa $4s$, y cantidades cada vez mayores en la subcapa $3d$. Todos esos elementos son metales con propiedades químicas y físicas bastante parecidas; forman la primera *serie de transición*, que comienza con el escandio ($Z = 21$) y termina con el zinc ($Z = 30$), para el cual todas las subcapas $3d$ y $4s$ están llenas.

Algo parecido sucede con $Z = 57$ hasta $Z = 71$, que tienen uno o dos electrones en la subcapa $6s$, pero con las subcapas $4f$ y $5d$ parcialmente llenas. Son los elementos de *tierras raras*; todos ellos tienen propiedades físicas y químicas muy parecidas. Y todavía hay otra serie, llamada de *actínidos*, que comienza con $Z = 91$.

Apantallamiento

Hemos mencionado que en la representación de estado central, los niveles de energía dependen de l y también de n. Tomemos por ejemplo al sodio ($Z = 11$). Si 10 de sus electrones llenan sus capas K y L, las energías de algunos de los estados para el electrón restante se determinan experimentalmente y resultan

$3s$ estados: -5.138 eV
$3p$ estados: -3.035 eV
$3d$ estados: -1.521 eV
$4s$ estados: -1.947 eV

Los estados 3*s* son los más bajos (más negativos); uno es el estado fundamental del undécimo electrón en el sodio. La energía de los estados 3*d* es bastante cercana a la del estado $n = 3$ en el hidrógeno. Lo sorprendente es que la energía del estado 4*s* es 0.426 eV *menor* que la del estado 3*d*, aun cuando el estado 4*s* tenga mayor *n*.

Se pueden comprender esos resultados con la ley de Gauss y la distribución de probabilidad radial. Para toda distribución con simetría esférica de la carga, la magnitud del campo eléctrico a una distancia *r* del centro es $Q_{\text{encl}}/4\pi\epsilon_0 r^2$, donde Q_{encer} es la carga total encerrada dentro de una esfera con radio *r*. Eliminamos mentalmente el electrón externo (de valencia) de un átomo de sodio. Lo que queda es una colección de 10 electrones con simetría esférica (que llenan las capas *K* y *L*) y 11 protones, por lo que $Q_{\text{encer}} = -10e + 11e = +e$. Si el undécimo electrón está totalmente fuera del conjunto anterior de cargas, es atraído por una carga efectiva de $+e$, y no de $+11e$. Éste es un ejemplo más extremo del efecto que se describe en la figura 41.17.

A este efecto se le llama **apantallamiento**; los 10 electrones *apantallan* 10 de los 11 protones, dejando una carga neta efectiva de $+e$. En general, un electrón que pasa todo su tiempo totalmente fuera de una carga positiva $Z_{\text{efe}}e$ tiene niveles de energía definidos por la ecuación del hidrógeno, donde e^2 se sustituye por $Z_{\text{efe}}e^2$. De acuerdo con la ecuación (41.25), queda

$$E_n = -\frac{Z_{\text{efe}}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \quad \text{(niveles de energía con apantallamiento)} \qquad (41.27)$$

Si el undécimo electrón en el átomo de sodio está totalmente fuera de la distribución de carga que queda, entonces $Z_{\text{efe}} = 1$.

CUIDADO **Diferentes ecuaciones para distintos átomos** Las ecuaciones (41.3), (41.25) y (41.27) definen todas valores de E_n en función de $(13.6\text{ eV})/n^2$, pero en general no se aplican a los mismos átomos. La ecuación (41.3) es *sólo* para el hidrógeno, la (41.25) sólo es para el caso en que no hay interacción con algún otro electrón (por lo que sólo es exacta cuando el átomo tiene sólo un electrón) y la ecuación (41.27) es adecuada cuando un electrón está apantallado del núcleo por otros electrones.

Ahora usemos las funciones de probabilidad radial de la figura 41.4, para explicar por qué la energía de un estado 3*d* del sodio es aproximadamente igual que para el valor $n = 3$ del hidrógeno: -1.51 eV. La distribución para el estado 3*d* (para el cual *l* tiene el valor máximo $n - 1$) tiene un máximo, y su radio más probable está *fuera* de las posiciones de los electrones con $n = 1$ o 2. (Esos electrones también son atraídos más cerca del núcleo que en el hidrógeno, porque están menos apantallados de la carga positiva $11e$ del núcleo.) Así, en el sodio, un electrón 3*d* pasa la mayoría de su tiempo bastante afuera de los estados $n = 1$ y $n = 2$ (las capas *K* y *L*). Los 10 electrones en esas capas apantallan casi todos 11 protones, excepto uno, y dejan una carga neta aproximada de $Z_{\text{efe}}e = (1)e$. Entonces, según la ecuación (41.27), la energía correspondiente aproximada es $-(1)^2(13.6\text{ eV})/3^2 = -1.51$ eV. Esta aproximación es muy cercana al valor experimental de -1.521 eV.

Si examinamos de nuevo la figura 41.4, veremos que la densidad de probabilidad radial para el estado 3*p* (para el cual $l = n - 2$) tiene dos picos, y que para el estado 3*s* ($l = n - 3$) tiene tres. Para el sodio, el primer pico pequeño en la distribución 3*p* define a un electrón 3*p* con mayor probabilidad (en comparación con el estado 3*d*) de estar *dentro* de las distribuciones de carga para los electrones en los estados $n = 2$. Esto es, un electrón 3*p* está apantallado en menor grado del núcleo que un electrón 3*d*, porque pasa algo de su tiempo dentro de las capas *K* y *L*, ya llenas. Así, para los electrones 3*p*, Z_{efe} es mayor que la unidad. De acuerdo con la ecuación (41.27), la energía 3*p* es menor (más negativa) que la 3*d*, de -1.521 eV. El valor real es -3.035 eV. Un electrón 3*s* pasa todavía más tiempo dentro de las capas electrónicas interiores que un electrón 3*p*, y Z_{efe} es mayor, y la energía es todavía más negativa.

Ejemplo 41.7 Determinación experimental de Z_{efe}

La energía medida de un estado 3*s* para el sodio es −5.138 eV. Calcule el valor de Z_{efe}.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El sodio tiene un solo electrón en la capa *M* exterior a las capas *K* y *L* que están llenas. Los electrones *K* y *L* apantallan parcialmente al único electrón *M* de la carga del núcleo; nuestra meta es determinar la magnitud de este apantallamiento.

PLANTEAR: Para este estado, los datos son $n = 3$ y $E_n = -5.138$ eV, por lo que se emplea la ecuación (41.27) para determinar Z_{efe}:

EJECUTAR: De la ecuación (41.27) para Z_{efe}, tenemos que:

$$Z_{efe}^2 = -\frac{n^2 E_n}{13.6\text{ eV}} = -\frac{3^2(-5.138\text{ eV})}{13.6\text{ eV}} = 3.40$$
$$Z_{efe} = 1.84$$

EVALUAR: La carga efectiva que atrae a un electrón 3*s* es 1.84*e*. Los 11 protones del sodio se apantallan por un promedio de 11 − 1.84 = 9.16 electrones, en vez de los 10 debido a la penetración del electrón 3*s* en las capas interiores (*K* y *L*).

Cada metal alcalino (litio, sodio, potasio, rubidio y cesio) tiene un electrón más que el gas noble correspondiente (helio, neón, argón, kriptón y xenón). Este electrón adicional está principalmente fuera de los demás electrones en las capas y subcapas llenas. Por consiguiente, todos los metales alcalinos se comportan en forma parecida al sodio.

Ejemplo 41.8 Energías de un electrón de valencia

El electrón de valencia del potasio tiene un estado fundamental 4*s*. Calcule la energía aproximada del estado que tiene la Z_{efe} mínima, y describa las energías relativas de los estados 4*s*, 4*p*, 4*d* y 4*f*.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El estado con la Z_{efe} mínima es aquel que pasa más tiempo fuera de las capas y subcapas interiores llenas, por lo que está más efectivamente apantallado de la carga del núcleo.

PLANTEAR: Una vez que determinamos que estado tiene la Z_{efe} mínima, aplicamos la ecuación (41.27) para determinar la energía de este estado.

EJECUTAR: Un estado 4*f* tiene $n = 4$ y $l = 3 = 4 - 1$. Así, es el estado de mayor cantidad de movimiento angular para $n = 4$ y, por consiguiente, el estado donde el electrón pasa la mayoría del tiempo fuera de las nubes de carga electrónica de las capas y subcapas interiores llenas. Esto hace que Z_{efe} para un estado 4*f* sea cercano a la unidad. Entonces, la ecuación (41.27) es

$$E_4 = -\frac{Z_{efe}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) = -\frac{1^2}{4^2}(13.6\text{ eV}) = -0.85\text{ eV}$$

Esta aproximación concuerda con la energía medida, dentro de la precisión dada.

Un electrón en un estado 4*d* pasa algo más de tiempo dentro de las capas internas, y su energía es, en consecuencia, poco más negativa (medida: −0.94 eV). Por la misma razón, un estado 4*p* tiene una energía todavía menor (medida: −2.73 eV) y un estado 4*s* tiene la mínima energía (medida: −4.339 eV).

EVALUAR: El análisis anterior se puede ampliar a los elementos alcalinotérreos simplemente ionizados: Be^+, Mg^+, Ca^+, Sr^+ y Ba^+. Para cualquier valor permitido de *n,* el estado *l* más elevado ($l = n - 1$) del electrón externo que queda ve una carga efectiva casi de $+2e$, por lo que para dichos estados, $Z_{efe} = 2$. Por ejemplo, un estado 3*d* para el Mg^+, tiene una energía aproximada de $-2^2(13.6\text{ eV})/3^2 = -6.0$ eV.

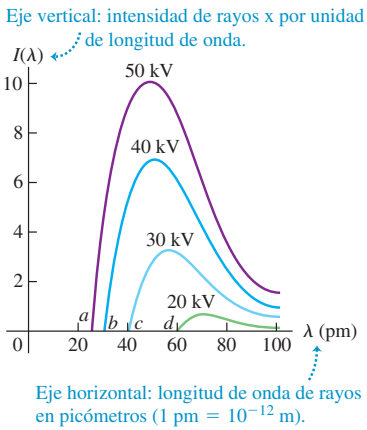
Evalúe su comprensión de la sección 41.4 Si los electrones *no* obedecieran el principio de exclusión, ¿sería más fácil o más difícil quitar el primer electrón del sodio?

41.5 Espectros de rayos x

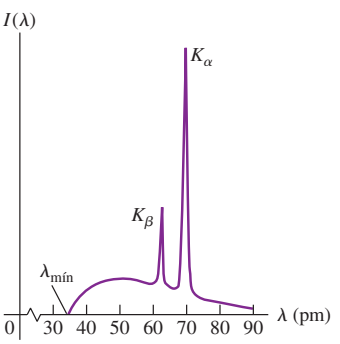
Los espectros de rayos x son otro ejemplo más de la riqueza y el poder de la ecuación de Schrödinger, y del modelo de estructura atómica que hemos deducido de ella, en la sección anterior. En la sección 38.7 describimos la producción de rayos x basándonos en el concepto de fotón. Con el desarrollo de las técnicas de difracción de rayos x (sección 36.6) debido a Von Laue, Bragg y otros, al comenzar 1912 fue posible medir con bastante precisión las longitudes de onda de los rayos x (con 0.1% o menos de error).

Los estudios detallados de los espectros de rayos x mostraron un espectro continuo de longitudes de onda (figura 41.19, siguiente página) con longitud de onda *mínima*

41.19 Las gráficas muestran un espectro continuo de rayos x producido por un blanco de tungsteno, cuando se golpea con electrones que se aceleran con un voltaje V_{AC}. Las cuatro curvas son para valores diferentes de V_{AC}; los puntos *a*, *b*, *c* y *d* muestran la longitud de onda mínima para cada diferencia de potencial.



41.20 Gráfica de intensidad por unidad de longitud de onda en función de la longitud de onda de rayos x producidos con un voltaje de aceleración de 35 kV y un blanco de molibdeno. La curva es una función uniforme parecida a la de la figura 41.19, pero con dos picos agudos que corresponden a parte del espectro de rayos x característico del molibdeno.



41.21 La raíz cuadrada de las frecuencias de la línea K_α, medidas por Moseley para 14 elementos.

(que corresponde a una frecuencia y energía *máximas* de fotones), determinada por el voltaje de aceleración V_{AC} en el tubo de rayos x, que obedece la ecuación deducida en la sección 38.7 para los procesos de *bremsstrahlung* (radiación por frenado):

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV_{AC}} \tag{41.28}$$

Esta radiación de espectro continuo es casi independiente del material del anticátodo (el *blanco*) en el tubo de rayos x.

Ley de Moseley y niveles atómicos de energía

Dependiendo de la diferencia de potencial de aceleración y del elemento blanco, se pueden presentar picos agudos superpuestos a este espectro continuo, como en la figura 41.20. Esos picos están en diferentes longitudes de onda para distintos elementos: forman lo que se llama un *espectro característico de rayos x* para cada elemento del blanco. En 1913 el científico inglés H. G. J. Moseley estudió esos espectros, con detalle, aplicando técnicas de difracción de rayos x. Encontró que la línea más intensa de corta longitud de onda en el espectro característico de rayos x para determinado elemento del blanco, llamada línea K_α, variaba uniformemente con el número atómico Z del elemento (figura 41.21). Esto contradice totalmente los espectros ópticos, donde los elementos con valores Z adyacentes tienen espectros que con frecuencia no tienen parecido entre sí.

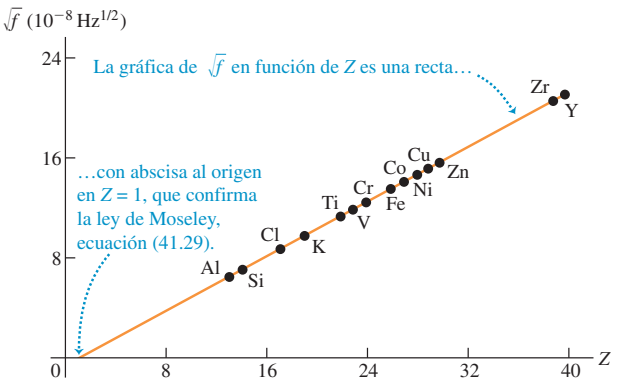
Moseley encontró que la relación se podía expresar en términos de las frecuencias f de los rayos x mediante una fórmula sencilla, llamada *ley de Moseley*:

$$f = (2.48 \times 10^{15}\ \text{Hz})(Z - 1)^2 \qquad \text{(ley de Moseley)} \tag{41.29}$$

El descubrimiento de esta fórmula por Moseley es equiparable al descubrimiento de Balmer de la fórmula empírica, ecuación (38.8), de las longitudes de onda en el espectro del hidrógeno.

No obstante, Moseley avanzó mucho más respecto a esta relación empírica; demostró cómo se pueden comprender los espectros de rayos x con base en los niveles de energía de los átomos en el blanco. Sus análisis se basaban en el modelo de Bohr, publicado el mismo año. Lo modificaremos un poco, aplicando las ideas de la estructura atómica descritas en la sección 41.4. Primero, recordemos que los electrones *externos* de un átomo son los responsables de los espectros ópticos. Sus estados excitados suelen estar sólo unos cuantos electrón volts arriba de su nivel fundamental. En transiciones de estados excitados al estado fundamental, suelen emitir fotones dentro o cerca de la región visible.

En contraste, los rayos x característicos son emitidos en transiciones que implican las capas *internas* de un átomo complejo. Ya los mencionamos en forma breve en la sección 38.7. En un tubo de rayos x, los electrones pueden chocar contra el blanco con la energía suficiente para sacar electrones de las capas internas de los átomos blanco. Estos electrones internos están mucho más cerca del núcleo que los electrones de las capas externas; están enlazados con mucho más firmeza y se pueden necesitar cientos o miles de electrón volts para quitarlos.



Suponga que un electrón es expulsado de la capa *K*. Este proceso deja una vacante, que llamaremos *hueco*. (Queda un electrón en la capa *K*.) Entonces, el hueco puede llenarse con un electrón que caiga desde una de las capas externas, como *L*, *M*, *N*. Esta transición se acompaña de una disminución de energía del átomo (porque se necesitaría *menos* energía para sacar a un electrón de una capa *L*, *M*, *N*…) y se emite un fotón de rayos x, con su energía igual a esa disminución. Cada estado tiene energía definida, por lo que los rayos x emitidos tienen longitudes de onda definidas; el espectro emitido es un espectro *de líneas*.

Se puede calcular la energía y la frecuencia de los fotones de rayos x K_α usando el concepto de *apantallamiento*. Un fotón de rayos x, K_α, se emite cuando cae un electrón de la capa *L* ($n = 2$) y llena un agujero en la capa *K* ($n = 1$). Al caer el electrón, es atraído por los *Z* protones en el núcleo, apantallados por el electrón restante en la capa *K*. En consecuencia, se determina en forma aproximada la energía con la ecuación (41.27), con $Z_{\text{efe}} = Z - 1$, $n_\text{i} = 2$ y $n_f = 1$. La energía, antes de la transición, es

$$E_\text{i} \approx -\frac{(Z-1)^2}{2^2}(13.6\text{ eV}) = -(Z-1)^2(3.4\text{ eV})$$

y después de la transición es

$$E_\text{f} \approx -\frac{(Z-1)^2}{1^2}(13.6\text{ eV}) = -(Z-1)^2(13.6\text{ eV})$$

La energía del fotón de rayos x K_α es $E_{K\alpha} = E_\text{i} - E_\text{f} \approx (Z-1)^2(-3.4\text{ eV} + 13.6\text{ eV})$; es decir,

$$E_{K\alpha} \approx (Z-1)^2(10.2\text{ eV}) \tag{41.30}$$

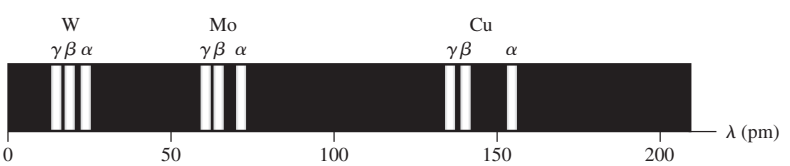
La frecuencia de todo fotón es su energía dividida entre la constante de Planck:

$$f = \frac{E}{h} \approx \frac{(Z-1)^2(10.2\text{ eV})}{4.136\times10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}} = (2.47\times10^{15}\text{ Hz})(Z-1)^2$$

Esta relación es casi idéntica a la ley experimental de Moseley, ecuación (41.29). En realidad, teniendo en cuenta las aproximaciones que hemos hecho, la concordancia es mejor de lo que podríamos esperar. Pero nuestro cálculo sí demuestra cómo se puede comprender la ley de Moseley con base en apantallamientos y transiciones entre niveles de energía.

El hueco en la capa *K* también puede llenarse con un electrón que caiga de la capa *M* o *N*, suponiendo que estuvieran ocupadas. Si es así, el espectro de rayos x de un grupo grande de átomos de un solo elemento, muestra una serie, llamada la serie *K,* de tres líneas, llamadas líneas: K_α, K_β y K_γ. Estas tres líneas se deben a transiciones en las que el hueco de la capa *K* se llena con un electrón *L*, *M* o *N*, respectivamente. La figura 41.22 muestra la serie *K* del tungsteno ($Z = 74$), el molibdeno ($Z = 42$) y el cobre ($Z = 29$).

Hay otras series de líneas de rayos x, llamadas serie *L*, *M* y *N*, que se producen después de la expulsión de electrones de las capas *L*, *M* y *N*, en vez de la capa *K*. En tales capas externas, los electrones están más alejados del núcleo, y no están enlazados con tanta firmeza como los de la capa *K*. Para quitarlos se requiere menos energía, y los fotones de rayos x que se emiten al llenarse estos huecos tienen menor energía que los de la serie *K*.



41.22 Longitudes de onda de las líneas: K_α, K_β y K_γ del tungsteno (W), molibdeno (Mo) y cobre (Cu).

En cada serie, las tres líneas se llaman líneas K_α, K_β y K_γ. La línea K_α es producida por la transición de un electrón *L* a la vacante en la capa *K*, la línea K_β por un electrón *M*, y la línea K_γ por un electrón *N*.

Ejemplo 41.9 Análisis químico por emisión de rayos x

Se mide la longitud de onda K_α de un elemento desconocido, y se obtiene el valor 0.0709 nm. ¿Cuál es el elemento?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para determinar de qué elemento se trata, es necesario saber su número atómico Z. Podemos lograrlo usando la ley de Moseley, que relaciona la frecuencia de la línea de emisión de rayos x K_α de un elemento con el número atómico Z de ese elemento.

PLANTEAR: Se usará la ecuación $f = c/\lambda$ para calcular la frecuencia de la línea K_α y, a continuación, se usará la ecuación (41.29) para determinar el valor correspondiente del número atómico Z. Entonces consultaremos la tabla periódica (Apéndice D) para determinar cuál elemento tiene ese número atómico.

EJECUTAR: La frecuencia es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.0709 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.23 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

De la ley de Moseley para Z,

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{f}{2.48 \times 10^{15} \text{ Hz}}} = 1 + \sqrt{\frac{4.23 \times 10^{18} \text{ Hz}}{2.48 \times 10^{15} \text{ Hz}}} = 42.3$$

Sabemos que Z debe ser un entero y, entonces, se concluye que $Z = 42$, que corresponde al elemento molibdeno.

EVALUAR: Si le preocupa que nuestro cálculo no resultara un entero para Z, recuerde que la ley de Moseley es una relación empírica. Hay pequeñas variaciones de un átomo a otro, debidas a diferencias en la estructura de las capas de electrones. Sin embargo, este ejemplo da una idea del poder de la ley de Moseley.

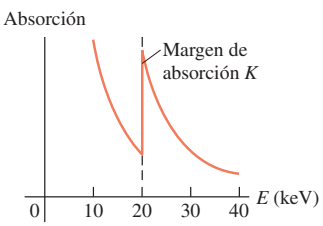
Niels Bohr comentaba que fueron las observaciones de Moseley, y no los experimentos de dispersión de Rutherford, Geiger y Marsden (sección 38.4), las que verdaderamente convencieron a los físicos de que el átomo consiste en un núcleo positivo rodeado por electrones en movimiento. A diferencia de Bohr o de Rutherford, Moseley no recibió Premio Nobel por su importante labor; esos premios se otorgan a científicos en vida, y Moseley murió en combate durante la Primera Guerra Mundial.

Espectro de absorción de rayos x

También podemos observar espectros de *absorción* de rayos x. A diferencia de los espectros ópticos, las longitudes de onda de absorción no suelen ser iguales que las de emisión, en especial en átomos con muchos electrones, y no producen espectros simples de líneas. Por ejemplo, la línea de emisión K_α se debe a una transición de la capa L a un hueco en la capa K. La condición inversa no se presenta en átomos con $Z \geq 10$, porque en el estado fundamental del átomo no hay hueco en la capa L. Para ser absorbido, un fotón debe tener la energía suficiente para mover un electrón a un estado vacío. Como los estados vacíos sólo tienen unos pocos electrón volts de energía menos que el continuo de los electrones libres, las energías mínimas de absorción en átomos con muchos electrones son más o menos iguales que las energías mínimas necesarias para quitar un electrón de su capa. En forma experimental, si se aumenta gradualmente el voltaje de aceleración y, en consecuencia, la energía máxima de los fotones, se observan aumentos repentinos de absorción cuando se alcanzan esas energías mínimas. Estos saltos súbitos de absorción se llaman *márgenes de absorción* (figura 41.23).

Los espectros característicos de rayos x son una herramienta analítica muy útil. Se usan espectrómetros de rayos x montados en satélites para estudiar las líneas de emisión de rayos x de átomos muy excitados en fuentes astronómicas lejanas. También, estos espectros se usan en el monitoreo de la contaminación del aire y en estudios de la abundancia de diversos elementos en las rocas.

41.23 Cuando un haz de rayos x atraviesa una placa de molibdeno, el grado de absorción en la placa depende de la energía E de los fotones de rayos x. En el margen de absorción K, a 20 keV se produce un aumento agudo de absorción. Los fotones con energías mayores que este valor pueden excitar un electrón de la capa K, haciéndolo pasar a un estado vacante o vacío.



Evalúe su comprensión de la sección 41.5 Un haz de fotones se pasa por una muestra de hidrógeno atómico a alta temperatura. ¿Con qué energía de fotones esperaría usted que hubiera un margen de absorción como el de la figura 41.23? i) 13.60 eV; ii) 3.40 eV; iii) 1.51 eV; iv) todos éstos; v) ninguno de éstos.

CAPÍTULO 41 RESUMEN

El átomo de hidrógeno: La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno obtiene los mismos niveles de energía que el modelo de Bohr. Si el núcleo tiene la carga Ze, hay un factor adicional de Z^2 en el numerador de la ecuación (41.3). La ecuación de (41.4) indica las magnitudes posibles L de la cantidad de movimiento angular orbital, y los valores posibles de la componente z de la cantidad de movimiento angular orbital se definen con la ecuación (41.5). (Véanse los ejemplos 41.1 y 41.2.)

La probabilidad de que un electrón atómico esté a la distancia entre r y $r + dr$ del núcleo es $P(r)dr$, definida por la ecuación (41.7). Las distancias atómicas se miden con frecuencia en unidades de a, la distancia mínima entre el electrón y el núcleo en el modelo de Bohr. (Véase el ejemplo 41.3.)

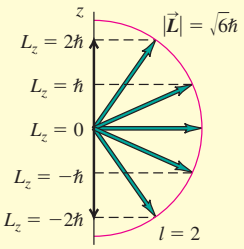
$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{13.60\text{ eV}}{n^2}$$
(niveles de energía del hidrógeno) (41.3)

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{41.4}$$

$$L_z = m_l\hbar \quad (m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l) \tag{41.5}$$

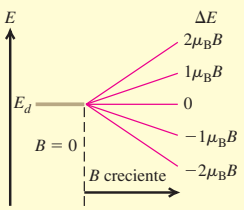
$$P(r)\,dr = |\psi|^2\,dV = |\psi|^2\,4\pi r^2\,dr \tag{41.7}$$

$$a = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_r e^2} = 5.29\times10^{-11}\text{ m} \tag{41.8}$$



El efecto Zeeman: La energía de interacción de un electrón (masa m) con el número cuántico magnético m_l en un campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de la dirección $+z$ se define con la ecuación (41.17) o (41.18), donde $\mu_B = e\hbar/2m$, se llama magnetón de Bohr. (Véase el ejemplo 41.4.)

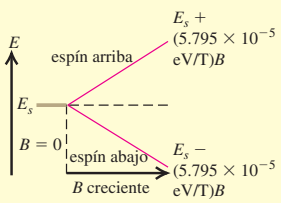
$$U = -\mu_z B = m_l\frac{e\hbar}{2m}B = m_l\mu_B B \quad (m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l)$$
(41.17), (41.18)



Espín del electrón: Un electrón tiene una cantidad de movimiento angular espín intrínseco de magnitud S, definido por la ecuación (41.20). Los valores posibles de la componente z de la cantidad de movimiento angular espín son $S_z = m_s\hbar$, donde $m_s = \pm\frac{1}{2}$. (Véanse los ejemplos 41.5 y 41.6.)

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\hbar \tag{41.20}$$

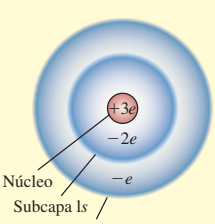
$$S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar \tag{41.19}$$



Átomos con muchos electrones: En un átomo de hidrógeno, los números cuánticos n, l, m_l y m_s del electrón tienen ciertos valores permitidos, de acuerdo con la ecuación (41.26). En un átomo con muchos electrones, los números cuánticos de cada electrón son los mismos, pero los niveles de energía dependen tanto de n como de l por el apantallamiento, que es la anulación parcial del campo del núcleo por los electrones interiores. Si la carga efectiva (apantallada) que atrae a un electrón es $Z_{efe}e$, las energías de los niveles se definen, en forma aproximada, por la ecuación (41.27). (Véanse los ejemplos 41.7 y 41.8.)

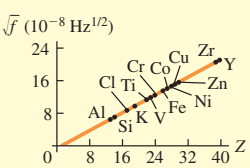
$$n \geq 1 \qquad 0 \leq l \leq n-1$$
$$|m_l| \leq l \qquad m_s = \pm\frac{1}{2} \tag{41.26}$$

$$E_n = -\frac{Z_{efe}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \tag{41.27}$$



Espectros de rayos x: La ley de Moseley indica que la frecuencia de un rayo x, K_α, producido en un blanco con número atómico Z se define con la ecuación (41.29). Los espectros característicos de rayos x se deben a transiciones hacia un hueco de un nivel de energía interior de un átomo. (Véase el ejemplo 41.9.)

$$f = (2.48\times10^{15}\text{ Hz})(Z-1)^2 \tag{41.29}$$



Términos clave

número cuántico principal, *1402*
número cuántico orbital, *1403*
número cuántico magnético, *1403*
degeneración, *1404*
capa, *1405*
número atómico, *1409*
efecto Zeeman, *1409*
magnetón de Bohr, *1410*
reglas de selección, *1412*
espín del electrón, *1414*
número cuántico espín, *1415*
acoplamiento espín-órbita, *1416*
aproximación de campo central, *1418*
principio de exclusión, *1419*
tabla periódica de los elementos, *1420*
apantallamiento, *1422*

Respuesta a la pregunta de inicio del capítulo ?

El neón es inerte porque tiene llenas las capas K y L; en tanto que el sodio es muy reactivo porque su electrón undécimo está débilmente enlazado en una capa M. Véase la sección 41.1 para más detalles.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

41.1 Respuestas: ii) y iii) (empate), i) Un electrón en un estado con un número cuántico principal n es más probable que se encuentre en $r = n^2a$. Esto es independiente de los valores de los números cuánticos l y m_l. Por consiguiente, un electrón con $n = 2$ (más probablemente se encontrará en $r = 4a$) es más probable que se encuentre cerca de $r = 5a$, que un electrón con $n = 1$ (más probablemente se encontrará en $r = a$).

41.2 Respuesta: no Todo lo que importa es la componente del momento magnético orbital del electrón a lo largo de la dirección de $\vec{B}$. A esto se le llama μ_z en la ecuación (41.14), porque *definimos* que el eje positivo de z tenga la dirección de $\vec{B}$. En realidad, los nombres de los ejes son arbitrarios por completo.

41.3 Respuesta: iv) Para que el momento magnético esté perfectamente alineado con la dirección z, la componente z del vector espín $\vec{S}$ debería tener el mismo valor absoluto que $\vec{S}$. No obstante, los valores posibles de S_z son $\pm\frac{1}{2}\hbar$ [ecuación (41.19)] mientras que la magnitud del vector espín es $S = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$ [ecuación (41.20)]. Por lo tanto, $\vec{S}$ nunca puede estar perfectamente alineado con cualquier dirección del espacio.

41.4 Respuesta: más difícil Si no hubiera principio de exclusión, los 11 electrones del átomo de sodio estarían en el nivel de energía mínima (nivel 1s) y la configuración sería $1s^{11}$. En consecuencia, sería más difícil quitar el primer electrón. (En un átomo de sodio real, el electrón de valencia está en un estado 3s apantallado, que tiene una energía comparativamente grande.)

41.5 Respuesta: iv) Un margen de absorción aparece cuando la energía del fotón es lo suficientemente alta como para eliminar un electrón en un nivel de energía dado del átomo. En una muestra de hidrógeno a alta temperatura, esperamos encontrar átomos cuyo electrón esté en el nivel fundamental ($n = 1$), el primer nivel excitado ($n = 2$), y el segundo nivel excitado ($n = 3$). De la ecuación (41.3), estos niveles tienen energías $E_n = (-13.60\ \text{eV})/n^2 = -13.60\ \text{eV}, -3.40\ \text{eV}$, y $-1.51\ \text{eV}$ (véase la figura 38.9b).

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para análisis

P41.1. ¿Las fuerzas gravitacionales juegan un papel importante en la estructura atómica? Explique por qué.

P41.2. ¿Cuáles son las diferencias más importantes entre el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno, y el análisis de Schrödinger? ¿Cuáles son las semejanzas?

P41.3. Para un cuerpo que gira alrededor del Sol, como un planeta, cometa o asteroide, ¿hay alguna restricción sobre la componente z de su cantidad de movimiento angular, tal como habría con la componente z de la cantidad de movimiento angular orbital del electrón en el hidrógeno? Explique por qué.

P41.4. ¿Por qué el análisis del átomo de helio es mucho más complicado que el del átomo de hidrógeno, tanto en un modelo del tipo de Bohr como cuando se usa la ecuación de Schrödinger?

P41.5. El experimento de Stern-Gerlach siempre se hace con haces de átomos *neutros*. ¿No sería más fácil hacer haces con átomos *ionizados*? ¿Por qué no?

P41.6. *a*) Si dos electrones en átomos de hidrógeno tienen el mismo número cuántico principal, ¿pueden tener diferentes cantidades de movimiento angular orbital? ¿Cómo? *b*) Si dos electrones en átomos de hidrógeno tienen el mismo número cuántico de cantidad de movimiento angular orbital, ¿pueden tener diferentes números cuánticos principales? ¿Cómo?

P41.7. En el experimento de Stern-Gerlach, ¿por qué es esencial que el campo magnético sea *no homogéneo*, es decir, no uniforme?

P41.8. En el estado fundamental del átomo de helio, un electrón debe tener el "espín abajo" y el otro el "espín arriba". ¿Por qué?

P41.9. Un electrón de un átomo de hidrógeno está en un nivel s, y el átomo está en un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$. Explique por qué el estado "espín arriba" $(m_s = +\frac{1}{2})$ tiene mayor energía que el estado "espín abajo" $(m_s = -\frac{1}{2})$.

P41.10. La aproximación de campo central es más exacta para metales alcalinos, que para metales de transición como hierro, níquel o cobre. ¿Por qué?

P41.11. La tabla 41.3 muestra que para el estado fundamental del átomo de potasio, el electrón externo está en un estado 4s. ¿Qué indica eso acerca de las energías relativas de los niveles 3d y 4s de este átomo? Explique por qué.

P41.12. Un estudiante dijo que cualquier capa llena debe tener cantidad de movimiento angular total cero y, en consecuencia, debe tener simetría esférica. ¿Cree usted que eso sea cierto? ¿Y qué hay de una *subcapa* llena? Explique por qué.

P41.13. ¿Por qué todos los elementos de transición ($Z = 21$ a 30) tienen propiedades químicas parecidas?

P41.14. Use la tabla 41.3 para tratar de determinar la configuración electrónica de estado fundamental del átomo neutro de galio (Ga), así como de los iones Ga^+ y Ga^-. El número atómico del galio es 31.

P41.15. Con base en el principio de exclusión de Pauli, la estructura de la tabla periódica de los elementos indica que debe haber un cuarto número cuántico, además de n, l y m_l. Explique por qué.

P41.16. Una pequeña cantidad de desdoblamiento de campo magnético de las líneas espectrales ocurre aun cuando los átomos no estén en un campo magnético. ¿Qué provoca esto?

P41.17. Las energías de ionización de los metales alcalinos (esto es, la mínima energía necesaria para sacar un electrón externo cuando el átomo está en su estado fundamental) son de unos 4 o 5 eV, mientras que las de los gases nobles están entre 11 y 25 eV. ¿Por qué esa diferencia?

P41.18. La energía necesaria para quitar el electrón $3s$ a un átomo de sodio en su estado fundamental es aproximadamente de 5 eV. ¿Esperaría usted que la energía necesaria para eliminar un electrón adicional sea más o menos la misma, mayor o menor? ¿Por qué?
P41.19. ¿Cuál es la "aproximación del campo central" y por qué es sólo una aproximación?
P41.20. El núcleo de un átomo de oro contiene 79 protones. ¿Cómo se compara la energía necesaria para sacar por completo un electrón $1s$ de un átomo de oro, con la energía necesaria para sacar un electrón del nivel fundamental en un átomo de hidrógeno? ¿En qué región del espectro electromagnético estaría un fotón con esta energía para cada uno de estos dos átomos?
P41.21. ¿Cuál es la diferencia básica entre los niveles de energía de rayos x y los niveles ordinarios de energía?
P41.22. Un átomo en su nivel fundamental absorbe un fotón de energía igual al margen de absorción K. ¿Al absorber este fotón, el átomo se ioniza? Explique por qué.
P41.23. ¿Un átomo de hidrógeno puede emitir rayos x? En caso afirmativo, ¿cómo? De lo contrario, ¿por qué no?

Ejercicios

Sección 41.1 El átomo de hidrógeno

41.1. Un electrón está en el átomo de hidrógeno con $n = 3$. *a*) Calcule los posibles valores de L y L_z para este electrón, en unidades de $\hbar$. *b*) Para cada valor de L, calcule todos los ángulos posibles de entre L y el eje z.
41.2. Un electrón está en el átomo de hidrógeno con $n = 5$. *a*) Calcule los posibles valores de L y L_z para este electrón, en unidades de $\hbar$. *b*) Para cada valor de L, calcule todos los ángulos posibles de entre L y el eje z. *c*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la magnitud del ángulo entre L y el eje z?
41.3. La cantidad de movimiento angular orbital de un electrón tiene $4.716 \times 10^{-34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ de magnitud. ¿Cuál es el número cuántico de cantidad de movimiento angular l, para este electrón?
41.4. Considerando los estados con número cuántico de cantidad de movimiento angular $l = 2$, *a*) en unidades de $\hbar$, ¿cuál es el valor máximo posible de L_z? *b*) En unidades de $\hbar$, ¿cuál es el valor de L? ¿Cuál es mayor L o la L_z máxima posible? *c*) Para cada valor permitido de L_z, ¿qué ángulo forma el vector $\vec{\boldsymbol{L}}$ con el eje $+z$? ¿Cómo se compara el ángulo mínimo para $l = 2$ con el ángulo mínimo para $l = 3$, calculado en el ejemplo 41.2?
41.5. Calcule, en unidades de $\hbar$, la magnitud de la cantidad de movimiento angular orbital máxima de un electrón para un átomo de hidrógeno, para estados con número cuántico principal 2, 20 y 200. Compare cada uno con el valor de $n\hbar$ postulado en el modelo de Bohr. ¿Qué tendencia observa usted?
41.6. *a*) Elabore una gráfica que contenga todos los conjuntos posibles de números cuánticos l y m, para los estados del electrón en el átomo de hidrógeno, cuando $n = 5$. ¿Cuántas combinaciones hay? *b*) ¿Cuáles son las energías de esos estados?
41.7. En la Estrategia para resolver problemas 41.1 se indica que la energía potencial eléctrica de un protón y un electrón a 0.10 nm de distancia tiene una magnitud de 15 eV. Compruebe esta afirmación.
41.8. *a*) ¿Cuál es la probabilidad para que un electrón en el estado $1s$ de un átomo de hidrógeno se encuentre a una distancia menor que $a/2$ del núcleo? *b*) Use los resultados del inciso a) y del ejemplo 41.3 para calcular la probabilidad de que el electrón esté a distancias entre $a/2$ y a del núcleo.
41.9. *a*) Para la función de onda $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ con $\Phi(\phi) = Ae^{im_l\phi}$, demuestre que $|\psi|^2$ es independiente de ϕ. *b*) ¿Qué valor debe tener A para que $\Phi(\phi)$ satisfaga la condición de normalización $\int_0^{2\pi} |\Phi(\phi)|^2 d\phi = 1$?
41.10. Para el hidrógeno ordinario, la masa reducida del electrón y del protón es $m_r = 0.99946m$, donde m es la masa del electrón (véase la sección 38.5). Para cada uno de los casos siguientes, calcule el coeficiente numérico de $-1/n^2$ en la ecuación (41.3), así como la energía del fotón emitido en una transición del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$: *a*) un átomo de hidrógeno en el que se supone que el núcleo tiene una masa infinita, por lo que $m_r = m$; *b*) el positronio (véase la sección 38.5), para el cual $m_r = m/2$, exactamente; *c*) el muonio, un átomo formado por un muón y un protón (véase el problema 38.59), para el que $m_r = 185.8m$.
41.11. Determine el valor numérico de a en la ecuación (41.8), para *a*) el átomo de hidrógeno donde se supone que el núcleo tiene una masa infinita, por lo que $m_r = m$; *b*) el positronio (véase la sección 38.5), para el cual $m_r = m/2$, exactamente; *c*) el muonio, un átomo formado por un muón y un protón (véase el problema 38.59), para el cual $m_r = 185.8m$. En el inciso *a*) a se vuelve a_0, el equivalente del radio de Bohr.
41.12. Demuestre que $\Phi(\phi) = e^{im_l\phi} = \Phi(\phi + 2\pi)$ (esto es, demuestre que $\Phi(\phi)$ es periódica con periodo 2π) si, y sólo si, m_l se restringe a los valores 0, ± 1, ± 2, . . . (*Sugerencia:* la fórmula de Euler indica que $e^{i\phi} = \cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi$.)
41.13. En el ejemplo 41.3 complete los detalles faltantes que indican que $P = 1 - 5e^{-2}$.

Sección 41.2 El efecto Zeeman

41.14. Un átomo de hidrógeno está en un estado d. En ausencia de un campo magnético externo, los estados con distintos valores de m_l tienen (aproximadamente) la misma energía. Para el caso de la interacción del campo magnético con el momento dipolar orbital magnético del átomo, *a*) calcule el desdoblamiento de los niveles m_l, en electrón volts, cuando el átomo se pone en un campo magnético de 0.400 T, que está en la dirección $+z$. *b*) ¿Cuál nivel m_l tiene la mínima energía? *c*) Trace un diagrama de niveles de energía que muestre los niveles d con y sin campo magnético externo.
41.15. Un átomo de hidrógeno en el estado $5g$ se coloca en un campo magnético de 0.600 T, que tiene la dirección de z. *a*) ¿En cuántos niveles se desdobla este estado por la interacción del momento dipolar magnético orbital del átomo con el campo magnético? *b*) ¿Cuál es la separación de energía entre niveles adyacentes? *c*) ¿Cuál es la separación de energía entre el nivel de mínima energía y el nivel de máxima energía?
41.16. Un átomo de hidrógeno sufre una transición de un estado $2p$ al estado fundamental $1s$. En ausencia de un campo magnético, la energía del fotón emitido es 122 nm. El átomo se coloca entonces en un campo magnético intenso, en dirección z. No tome en cuenta los efectos del espín, y sólo considere la interacción del campo magnético con el momento magnético orbital del átomo. *a*) ¿Cuántas longitudes de onda distintas de fotón se observan para la transición $2p \rightarrow 1s$? ¿Cuáles son los valores de m_l para los estados inicial y final de la transición que causa cada longitud de onda de fotón? *b*) Una longitud de onda observada es exactamente igual con campo magnético que sin él. ¿Cuáles son los valores inicial y final de m_l para la transición que produce un fotón con esta longitud de onda? *c*) Una longitud de onda observada en presencia de campo es mayor que sin campo. ¿Cuáles son los valores inicial y final de m_l para la transición que produce un fotón con esta longitud de onda? *d*) Repita el inciso *c*) para la longitud de onda que sea más corta que la que hay en ausencia del campo.
41.17. Un átomo de hidrógeno en un estado $3p$ se coloca en un campo magnético externo uniforme, $\vec{\boldsymbol{B}}$. En la interacción del campo magnético con el momento dipolar magnético orbital, *a*) ¿qué magnitud B del

campo se requiere para desdoblar el estado $3p$ en varios niveles con una diferencia de energía de 2.71×10^{-5} eV entre los niveles adyacentes? *b*) ¿Cuántos niveles habrá?

Sección 41.3 Espín del electrón

41.18. Un átomo de hidrógeno en el estado $n = 1$, $m_s = -\frac{1}{2}$ se coloca en un campo magnético de 0.480 T de magnitud, en la dirección $+z$. *a*) Calcule la energía de interacción magnética (en electrón volts) del electrón con el campo. *b*) ¿Hay alguna interacción de momento dipolar magnético orbital para este estado? Explique su respuesta. ¿Puede haber una interacción de momento dipolar magnético orbital para $n \neq 1$?

41.19. Calcule la diferencia de energías entre los niveles $m_s = \frac{1}{2}$ ("espín arriba") y $m_s = -\frac{1}{2}$ ("espín abajo") para un átomo de hidrógeno en el estado $1s$, cuando se pone en un campo magnético de 1.45 T en dirección de z *negativa*. ¿Cuál nivel, $m_s = \frac{1}{2}$ o $m_s = -\frac{1}{2}$, tiene la menor energía?

41.20. Elabore una lista de las distintas combinaciones posibles de l y j para un átomo de hidrógeno en el nivel $n = 3$.

41.21. Un átomo de hidrógeno en determinado estado de cantidad de movimiento angular tiene números cuánticos j de $\frac{7}{2}$ y $\frac{9}{2}$. ¿Cuál es la letra que representa el valor de l para ese estado?

41.22. La interacción hiperfina en un átomo de hidrógeno, entre el momento dipolar magnético del protón y el momento dipolar magnético espín del electrón, desdobla el nivel fundamental en dos niveles, separados por 5.9×10^{-6} eV. *a*) Calcule la longitud de onda y la frecuencia del fotón emitido cuando el átomo hace una transición entre esos estados, y compare su respuesta con el valor mencionado al final de la sección 41.3. ¿En qué parte del espectro electromagnético está? Dichos fotones son emitidos por nubes de hidrógeno frías en el espacio interestelar; al detectar esos fotones, los astrónomos pueden entender la cantidad y la densidad de esas nubes. *b*) Calcule el campo magnético efectivo que siente el electrón en esos estados (véase la figura 41.4). Compare su resultado con el campo magnético efectivo debido al acoplamiento espín-órbita, calculado en el ejemplo 41.6.

41.23. Espín clásico del electrón. *a*) Si se considera que un electrón es un objeto esférico clásico de 1.0×10^{-17} m de radio, ¿qué velocidad angular se necesita para producir una cantidad de movimiento angular espín de magnitud $\sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$? *b*) Use $v = r\omega$ y el resultado del inciso *a*) para calcular la rapidez v de un punto en el ecuador del electrón. ¿Qué parece indicar el resultado acerca de la validez de este modelo?

Sección 41.4 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión

41.24. Para el germanio (Ge, $Z = 32$) haga una lista de la cantidad de electrones en cada subcapa ($1s$, $2s$, $2p$, . . .). Use los valores permitidos de los números cuánticos, junto con el principio de exclusión. *No* consulte la tabla 41.3.

41.25. Elabore una lista de los cuatro números cuánticos n, l, m_l y m, para cada uno de los 10 electrones en el estado fundamental del átomo de neón. *No* consulte la tabla 41.2 ni la 41.3.

41.26. Para el magnesio, la primera energía potencial de ionización es 7.6 eV. La segunda energía potencial de ionización (energía adicional necesaria para sacar un segundo electrón) es casi el doble, 15 eV; y la de tercera ionización es mucho mayor, aproximadamente 80 eV. ¿Cómo se pueden comprender esos números?

41.27. El electrón $5s$ en el rubidio (Rb) ve una carga efectiva de $2.771e$. Calcule la energía de ionización de este electrón.

41.28. Las energías de los niveles $4s$, $4p$ y $4d$ del potasio se mencionan en el ejemplo 41.8. Calcule Z_{efe} para cada estado. ¿Qué tendencia indican sus resultados? ¿Cómo puede usted explicar esa tendencia?

41.29. *a*) El ion N^{+2} doblemente cargado se forma quitando dos electrones a un átomo de nitrógeno. ¿Cuál es la configuración electrónica de estado fundamental para el ion N^{+2}? *b*) Estime la energía del nivel menos fuertemente enlazado en la capa L del N^{+2}. *c*) El ion P^{+2} doblemente cargado se forma quitando dos electrones a un átomo de fósforo. ¿Cuál es la configuración electrónica de estado fundamental para el ion P^{+2}? *d*) Estime la energía del nivel menos fuertemente enlazado en la capa M del P^{+2}.

41.30. *a*) La energía del estado $2s$ del litio es -5.391 eV. Calcule el valor de Z_{efe} para este estado. *b*) La energía del estado $4s$ del potasio es -4.339 eV. Calcule el valor de Z_{efe} para este estado. *c*) Compare Z_{efe} para el estado $2s$ del litio, el estado $3s$ del sodio (véase el ejemplo 41.7) y el estado $4s$ del potasio. ¿Qué tendencia hay? ¿Cómo puede usted explicar esta tendencia?

41.31. Estime la energía del estado l más alto para *a*) la capa L del Be^{+}. *b*) La capa N del Ca^{+}.

Sección 41.5 Espectros de rayos x

41.32. Un rayo x, K_α se emite de una muestra, y tiene 7.46 keV de energía. ¿De qué elemento es la muestra?

41.33. Calcule la frecuencia, energía (en keV) y longitud de onda del rayo x, K_α para los elementos *a*) calcio (Ca, $Z = 20$); *b*) cobalto (Co, $Z = 27$); *c*) cadmio (Cd, $Z = 48$).

Problemas

41.34. *a*) ¿Cuál es el nivel de energía más bajo posible (en electrón volts) de un electrón en hidrógeno, si su cantidad de movimiento angular orbital es $\sqrt{12}\hbar$? *b*) ¿cuáles son los valores máximo y mínimo de la componente z de la cantidad de movimiento angular orbital (en términos de $\hbar$), para un electrón en el inciso *a*)? *c*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la cantidad de movimiento angular espín (en términos de $\hbar$), para el electrón del inciso *a*)? *d*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la cantidad de movimiento angular orbital (en términos de $\hbar$), para el electrón en la capa M del hidrógeno?

41.35. Considerando un electrón en hidrógeno que tiene -0.5440 eV de energía total. *a*) ¿Cuáles son los valores posibles de su cantidad de movimiento angular orbital (en términos de $\hbar$)? *b*) ¿Qué longitud de onda de la luz haría excitar este electrón a la siguiente capa superior? ¿Tal fotón sería visible para los seres humanos?

41.36. *a*) Demuestre todos los estados distintos para un electrón en la capa N del hidrógeno. Incluya los cuatro números cuánticos. *b*) Para un electrón f en la capa N, ¿cuáles son la cantidad de movimiento angular orbital máxima posible y el máximo valor posible para la componente de esta cantidad de movimiento angular en cualquier dirección elegida (el eje z)? ¿Cuál es la magnitud de su cantidad de movimiento angular espín? Exprese tales cantidades en unidades de $\hbar$. *c*) Para el electrón del estado d de la capa N, ¿cuáles son los ángulos máximo y mínimo entre su vector cantidad de movimiento angular y cualquier dirección elegida (el eje z)? *d*) ¿Cuál es el valor máximo de la cantidad de movimiento angular orbital para un electrón f de la capa M?

41.37. *a*) La energía de un electrón en el estado $4s$ del sodio es -1.947 eV. ¿Cuál es la carga neta efectiva del núcleo "vista" por este electrón? En promedio, ¿cuántos electrones apantallan el núcleo? *b*) Para un electrón exterior en el estado $4p$ del potasio, en promedio 17.2 electrones interiores apantallan el núcleo. i) ¿Cuál es la carga neta efectiva del núcleo "vista" por este electrón exterior? ii) ¿Cuál es la energía de este electrón exterior?

41.38. Para un átomo de hidrógeno, la probabilidad $P(r)$ de encontrar al electrón dentro de un cascarón esférico de radio interior r y radio exterior $r + dr$ está definida por la ecuación (41.7). Para un átomo de

hidrógeno en el estado fundamental 1*s*, ¿con qué valor de *r*, $P(r)$ tiene su valor máximo? ¿Cómo se compara su resultado con la distancia entre el electrón y el núcleo, para el estado $n = 1$ en el modelo de Bohr (ecuación 41.8)?

41.39. Un átomo de hidrógeno está en el estado l*s*. *a*) ¿Para qué valor de *r*, la energía potencial $U(r)$ es igual a la energía total *E*? Exprese su respuesta en función de *a*. Este valor de *r* se llama *punto de viraje clásico*, ya que es donde una partícula newtoniana detendría su movimiento e invertiría su dirección. *b*) Para *r* mayor que el punto de viraje clásico, $U(r) > E$. Clásicamente, la partícula no puede estar en esta región, porque la energía cinética no puede ser negativa. Calcule la probabilidad de que el electrón se encuentre en esta región clásicamente prohibida.

41.40. Átomos de Rydberg. Los *átomos de Rydberg* son aquellos cuyo electrón externo está en un estado excitado, con un número cuántico principal *muy* grande. Se han producido en el laboratorio y se han detectado en el espacio interestelar. *a*) ¿Por qué todos los átomos neutros de Rydberg con el mismo valor de *n* tienen en esencia la misma energía de ionización, independiente de la cantidad total de electrones que tenga el átomo? *b*) ¿Cuál es la energía de ionización de un átomo de Rydberg con un número cuántico principal de 350? ¿Cuál es el radio en el modelo de Bohr, de la órbita del electrón de Rydberg? *c*) Repita el inciso *b*) para $n = 650$.

41.41. La función de onda para un átomo de hidrógeno en el estado 2*s* es

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}\left(2 - \frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

a) Compruebe que esta función está normalizada. *b*) En el modelo de Bohr, la distancia entre el electrón y el núcleo en el estado $n = 2$ es $4a$, exactamente. Calcule la probabilidad de que un electrón en el estado 2*s* se encuentre a una distancia menor que $4a$ del núcleo.

41.42. La función de onda normalizada para un átomo de hidrógeno en el estado 2*s* aparece en el problema 41.41. *a*) Para un átomo de hidrógeno en el estado 2*s*, ¿para qué valor de *r* es máxima $P(r)$? ¿Cómo se compara su resultado con $4a$, la distancia entre el electrón y el núcleo en el estado $n = 2$ del modelo de Bohr? *b*) ¿A qué valor de *r* (distinto de $r = 0$ o bien $r = \infty$) $P(r)$ es igual a cero, por lo que la probabilidad para que el electrón se encuentre a esa distancia del núcleo es cero? Compare sus resultados con la figura 41.5.

41.43. *a*) Para un estado excitado del hidrógeno, demuestre que el ángulo mínimo que puede formar el vector cantidad de movimiento angular $\vec{\boldsymbol{L}}$ con el eje *z* es

$$(\theta_L)_{\text{mín}} = \arccos\left(\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$$

b) ¿Cuál es la ecuación correspondiente para $(\theta_L)_{\text{máx}}$, el mayor ángulo posible entre $\vec{\boldsymbol{L}}$ y el eje *z*?

41.44. *a*) Si se conoce el valor de L_z no podemos conocer L_x ni L_y con precisión. Pero *sí* podemos conocer el valor de la cantidad $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$? Deduzca una ecuación para esta cantidad, en función de *l*, m_l y $\hbar$. *b*) ¿Qué significado tiene $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$? *c*) Para un estado de cantidad de movimiento angular distinto de cero, determine los valores máximo y mínimo de $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$. Explique sus resultados.

41.45. La función de onda radial normalizada (ecuación 41.2) para el estado 2*p* del átomo de hidrógeno es $R_{2p} = (1/\sqrt{24a^5})re^{-r/2a}$. Después de promediar las variables angulares, la función de probabilidad radial es $P(r)\,dr = (R_{2p})^2 r^2\,dr$. ¿Para qué valor de *r* es máxima $P(r)$ para el estado 2*p*? Compare sus resultados con el radio del estado $n = 2$ en el modelo de Bohr.

41.46. Experimento de Stern-Gerlach. En un experimento de Stern-Gerlach, la fuerza deflectora sobre el átomo es $F_z = -\mu_z(dB_z/dz)$, y μ_z está determinado por la ecuación 41.22, y dB_z/dz es el gradiente del campo magnético. En un determinado experimento, la región del campo magnético tiene 50.0 cm de longitud; suponga que el gradiente del campo magnético es constante en esta región. Un haz de átomos de plata entra al campo magnético a una rapidez de 525 m/s. ¿Qué valor de dB_z/dz se requiere para dar una separación de 1.0 mm entre las dos componentes de espín, en el haz que sale del campo? (*Nota:* el momento magnético dipolar de la plata es igual que el del hidrógeno, ya que su electrón de valencia está en un estado con $l = 0$.)

41.47. En una transición de un estado 3*d* a uno 2*p* del hidrógeno, en un campo magnético externo, suponga que se pueden ignorar los efectos del espín del electrón (lo cual en realidad no es el caso), para que el campo magnético sólo interactúe con la cantidad de movimiento angular orbital. Identifique cada transición permitida con los valores m_l de los estados inicial y final. Para cada una de esas transiciones permitidas, determine el desplazamiento de la energía de transición con respecto al valor cero del campo, y demuestre que hay tres energías de transición distintas.

41.48. Un átomo en un estado 3*d* emite un fotón con longitud de onda de 475.082 nm, cuando se descompone a un estado 2*s*. *a*) ¿Cuál es la energía (en electrón volts) del fotón emitido en esta transición? *b*) Use las reglas de selección descritas en la sección 41.2, para calcular las transiciones permitidas si el átomo está ahora en un campo magnético externo de 3.500 T. Ignore los efectos del espín del electrón. *c*) Para el caso del inciso *b*), si la energía del estado 3*d* era originalmente −8.5000 eV sin campo magnético presente, ¿cuáles serán las energías de los estados en los que se desdobla en el campo magnético? *d*) ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas de la luz emitida durante la transición en el inciso *b*)?

41.49. Análisis espectral. Al estudiar el espectro de una nube gaseosa en el espacio, una astrónoma aumenta la línea espectral que resulta de una transición de un estado *p* a un estado *s*. Ella encuentra que la línea a 575.050 nm en realidad se ha desdoblado en tres líneas, con líneas adyacentes separadas 0.0462 nm, lo que indica que el gas está en un campo magnético externo. (Desprecie los efectos debidos al espín del electrón.) ¿Cuál es la intensidad del campo magnético exterior?

41.50. Un átomo de hidrógeno hace una transición de un estado $n = 3$ a uno $n = 2$ (la línea H_α de Balmer), mientras está en un campo magnético de dirección $+z$ y magnitud 1.40 T. *a*) Si el número cuántico magnético es $m_l = 2$ en el estado inicial ($n = 3$) y $m_l = 1$ en el estado final ($n = 2$), ¿cuánto se desplaza cada nivel de energía con respecto al valor de campo cero? *b*) ¿Cuánto se desplaza la longitud de onda de la línea H_α con respecto al valor de campo cero? ¿La longitud de onda aumenta o disminuye? No tome en cuenta el efecto del espín del electrón. [*Sugerencia:* use el resultado del problema 39.56c).]

41.51. Una gran cantidad de átomos de hidrógeno en los estados l*s* se coloca en un campo magnético externo que tiene la dirección $+z$. Suponga que los átomos están en equilibrio térmico a la temperatura ambiente, $T = 300$ K. De acuerdo con la distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la sección 38.6), ¿cuál es la relación de la cantidad de átomos en el estado $m_s = \frac{1}{2}$ entre la cantidad con $m_s = -\frac{1}{2}$ cuando la magnitud del campo magnético es *a*) 5.00×10^{-5} T (más o menos el campo geomagnético de la Tierra); *b*) 0.500 T; *c*) 5.00 T?

41.52. Campo magnético efectivo. Un electrón de un átomo de hidrógeno está en el estado 2*p*. En un modelo sencillo del átomo, suponga que el electrón describe un círculo en torno al protón, en una órbita de radio *r* igual al radio del modelo de Bohr para $n = 2$. Suponga que la rapidez *v* del electrón en órbita se puede calcular haciendo $L = mvr$, y suponiendo que *L* tiene el valor mecánico-cuántico de un estado 2*p*. En el marco de referencia del electrón, el protón gira en órbita con radio *r* y rapidez *v*. Modele al protón en órbita como una espira circular de corriente, y calcule el campo magnético que produce en el lugar del electrón.

41.53. Universo loco. En otro universo, el electrón es una partícula de espín $\frac{3}{2}$, en vez de espín $\frac{1}{2}$, pero toda la demás física es igual que la de nuestro Universo. En ese universo, *a*) ¿cuáles son los números atómicos de los dos gases inertes más ligeros? *b*) ¿Cuál es la configuración electrónica de estado fundamental del sodio?

41.54. Para un ion con carga nuclear Z y un solo electrón, la energía potencial eléctrica es $-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$, y la ecuación de las energías para los estados, y para las funciones de onda normalizadas, se obtiene partiendo de las del hidrógeno, sustituyendo e^2 por Ze^2. Para el ion N^{+6}, con siete protones y un electrón. *a*) ¿Cuál es la energía de estado fundamental en electrón volts? *b*) ¿Cuál es la energía de ionización, la necesaria para sacar el electrón del ion N^{+6}, si inicialmente está en el estado fundamental? *c*) Cuál es la distancia a [definida para el hidrógeno por la ecuación (41.8)] para este ion? *d*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando el ion N^{+6} hace una transición del estado $n = 2$ al estado fundamental con $n = 1$?

41.55. Un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$, $l = 1$, $m_l = -1$ emite un fotón al decaer a un estado fundamental con $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$. *a*) En ausencia de un campo magnético externo ¿cuál es la longitud de onda de este fotón? *b*) Si el átomo está en un campo magnético en dirección $+z$ y con magnitud de 2.20 T, ¿cuál es el desplazamiento para la longitud de onda del fotón, con respecto al valor con campo cero? ¿La longitud de onda aumenta o disminuye con el campo magnético? No tome en cuenta el efecto del espín del electrón. [*Sugerencia:* use el resultado del problema 39.56c).]

41.56. Un átomo de litio tiene tres electrones, y la configuración electrónica ${}^2S_{1/2}$ de estado fundamental es $1s^2 2s$. El estado excitado $1s^2 2p$ se desdobla en dos niveles muy cercanos, ${}^2P_{3/2}$ y ${}^2P_{1/2}$, por la interacción entre el espín y la órbita (véase el ejemplo 41.6, en la sección 41.3). Se emite un fotón de 67.09608 μm de longitud de onda en la transición ${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ y un fotón en longitud de onda de 67.09761 μm es emitido en la transición ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$. Calcule el campo magnético efectivo que ve el electrón en el estado $1s^2 2p$ del átomo de litio. ¿Cómo se compara su resultado con el del nivel $3p$ del sodio, que se determinó en el ejemplo 41.6?

41.57. Estime las longitudes de onda mínima y máxima de los rayos x característicos emitidos por *a*) vanadio ($Z = 23$), *b*) renio ($Z = 45$). Describa las aproximaciones que haya hecho.

41.58. Resonancia del espín del electrón. Los electrones en el más bajo de dos estados de espín, en un campo magnético, pueden absorber un fotón de la frecuencia adecuada y pasar al estado más alto. *a*) Calcule la magnitud B del campo magnético necesario para esta transición en un átomo de hidrógeno, con $n = 1$ y $l = 0$, que se va a inducir con microondas de longitud de onda λ. *b*) Calcule el valor de B para una longitud de onda de 3.50 cm.

41.59. *a*) Demuestre que la cantidad total de estados atómicos (incluyendo estados con espín distinto) en una capa de número cuántico principal n es $2n^2$. [*Sugerencia:* la suma de los N primeros enteros $1 + 2 + 3 + \cdots + N$ es $N(N + 1)/2$.] *b*) ¿Qué capa tiene 50 estados?

41.60. *a*) Si la cantidad de movimiento angular espín intrínseca S de la Tierra tiene las mismas limitaciones que el electrón, ¿cuál sería la velocidad angular del giro de nuestro planeta sobre su eje? Para obtener una respuesta razonable y simplificar los cálculos, suponga que la Tierra es completamente uniforme. *b*) En principio, podríamos utilizar el método del inciso *a*) para determinar la velocidad angular del espín del electrón? ¿Por qué?

Problemas de desafío

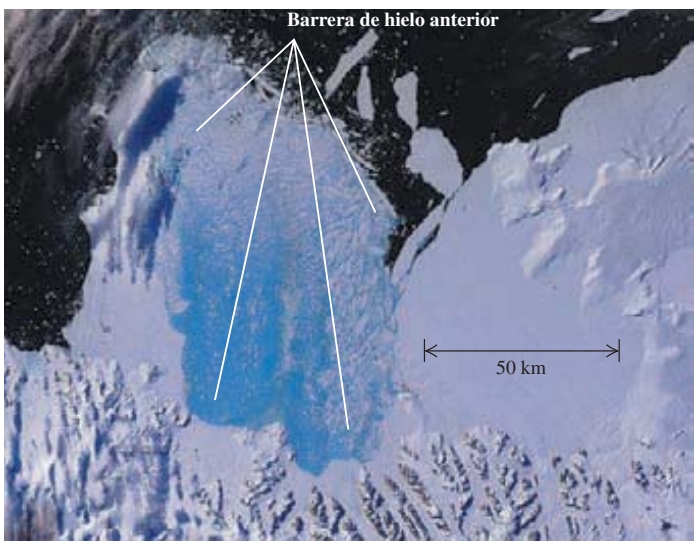
41.61. Cada uno de $2N$ electrones de masa m está en libertad de moverse a lo largo del eje x. La función de energía potencial para cada electrón es $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, donde k' es una constante positiva. Las interacciones eléctrica y magnética entre los electrones se pueden pasar por alto. Use el principio de exclusión para demostrar que la energía mínima del sistema de $2N$ electrones es $\hbar N^2\sqrt{k'/m}$. (*Sugerencia:* véase la sección 40.4, y la sugerencia para resolver el problema 41.59.)

41.62. Un modelo simple del átomo de helio tiene dos electrones, cada uno con masa m, que se mueven en torno al núcleo (de carga $+2e$) en la misma órbita circular. Cada electrón tiene cantidad de movimiento angular orbital $\hbar$ (esto es, la órbita es la de Bohr con radio mínimo), y los dos electrones siempre están en los lados opuestos del núcleo. No tenga en cuenta los efectos del espín. *a*) Determine el radio de la órbita, y la rapidez orbital de cada electrón. [*Sugerencia:* siga el procedimiento de la sección 38.5 para deducir las ecuaciones (38.12) y (38.13). Cada electrón siente una fuerza de atracción hacia el núcleo, y una fuerza de repulsión hacia el otro electrón.] *b*) ¿Cuál es la energía cinética total de los electrones? *c*) ¿Cuál es la energía potencial del sistema (el núcleo y los dos electrones? *d*) En este modelo, ¿cuánta energía se necesita para llevar los dos electrones al infinito? ¿Cómo se compara con el valor experimental de 79.0 eV?

41.63. Repita el cálculo del problema 41.39 para un electrón (ion) y carga nuclear Z. (Véase el problema 41.54.) ¿Cómo depende de Z la probabilidad para que el electrón se encuentre en la región clásicamente prohibida?

MOLÉCULAS Y MATERIA CONDENSADA

42



? En 2002 una plataforma de hielo flotante antártica con 10,000 años de antigüedad, del tamaño de Rhode Island, se colapsó repentinamente en respuesta a las temperaturas veraniegas cada vez mayores. ¿Qué propiedad de las moléculas de dióxido de carbono en nuestra atmósfera hace que sean un poderoso agente que desencadena temperaturas medias más altas en todo el mundo?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Los diversos tipos de enlaces que mantienen juntos a los átomos.
- Cómo las dinámicas de rotación y de vibración de las moléculas son reveladas por los espectros moleculares.
- Cómo y por qué los átomos forman estructuras cristalinas.
- Cómo utilizar el concepto de banda de energía para explicar las propiedades eléctricas de los sólidos.
- Un modelo sencillo de los metales que explique muchas de sus propiedades físicas.
- Cómo el carácter de un semiconductor puede transformarse radicalmente al sumar pequeñas cantidades de impureza.
- Algunas de las aplicaciones tecnológicas de los dispositivos semiconductores.
- Por qué ciertos materiales se vuelven superconductores a baja temperatura.

En el capítulo 41 explicamos la estructura y las propiedades de los átomos aislados. No obstante, dichos átomos son la excepción, ya que en general se encuentran átomos combinados, que forman moléculas o estructuras más extendidas que llamaremos materia condensada (líquida o sólida). Las fuerzas de atracción entre los átomos, llamadas enlaces moleculares, son las que los hacen combinar. En este capítulo estudiaremos varias clases de enlaces, así como los niveles de energía y los espectros relacionados con las moléculas diatómicas. Veremos que así como los átomos tienen energías cuantizadas, determinadas por el estado mecánico-cuántico de sus electrones, también las moléculas tienen energías cuantizadas, determinadas por sus estados de rotación y vibración.

Los mismos principios físicos de los enlaces moleculares se aplican de igual manera en el estudio de la materia condensada, en la cual se presentan varias clases de enlaces. Investigaremos el concepto de bandas de energía y veremos cómo ayudan a explicar las propiedades de los sólidos. A continuación, examinaremos con más detalle las propiedades de una clase especial de sólidos, los llamados semiconductores. En la radio, el televisor, las calculadoras de bolsillo y las computadoras actuales, se usan los semiconductores, los cuales han revolucionado todo el campo de la electrónica durante la mitad del siglo pasado.

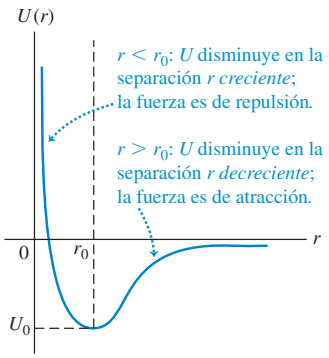
42.1 Clases de enlaces moleculares

Podemos aprovechar nuestra descripción de la estructura atómica, incluida en el capítulo 41, como base para investigar la naturaleza de los *enlaces moleculares*, que son las interacciones que mantienen unidos a los átomos para formar estructuras estables, como moléculas y sólidos.

Enlaces iónicos

El **enlace iónico** es una interacción entre átomos *ionizados* con carga opuesta. El ejemplo más conocido es el cloruro de sodio (NaCl), en donde el átomo de sodio cede su único electrón 3*s* al átomo de cloro, llenando su vacante en la subcapa 3*p*.

42.1 Cuando la separación r entre dos iones con carga opuesta es grande, la energía potencial $U(r)$ es proporcional a $1/r$ como en las cargas puntuales, y la fuerza es de atracción. A medida que r disminuye, las nubes de carga de los dos átomos se traslapan y la fuerza de atracción es menor. Si r es menor que la separación de equilibrio r_0, la fuerza es de repulsión.



Veamos el balance de energía en esta transacción. Al quitar el electrón 3*s* a un átomo de sodio neutro se requieren 5.138 eV de energía; a eso se le llama *energía de ionización* o *potencial de ionización* del sodio. El átomo neutro de cloro puede atraer un electrón adicional en la vacante de su subcapa 3*p*, donde está apantallado en forma incompleta por los demás electrones y, en consecuencia, es atraído hacia el núcleo. Este estado tiene 3.613 eV menos de energía que un átomo neutro de cloro, y un electrón libre alejado; 3.613 eV es la magnitud de la *afinidad electrónica* del cloro. Así, para crear los iones muy separados de Na^+ y Cl^- se requiere una inversión neta de tan sólo 5.138 eV − 3.613 eV = 1.525 eV. Cuando los dos iones con carga opuesta se acercan por su atracción mutua, la magnitud de su energía potencial negativa se determina por la cercanía a la que pueden llegar. A la vez, esa cercanía está limitada por el principio de exclusión, que prohíbe demasiado traslape de las nubes de electrones de los dos iones. Al disminuir la distancia, el principio de exclusión distorsiona las nubes de carga, por lo que los iones ya no interaccionan como cargas puntuales, y la interacción termina por volverse repulsión (figura 42.1).

La energía potencial eléctrica mínima para el NaCl es −5.7 eV a una separación de 0.24 nm. La energía neta liberada en la formación de los iones, y en su acercamiento a la separación de equilibrio, de 0.24 nm, es 5.7 eV − 1.525 eV = 4.2 eV. Así, sin tomar en cuenta la energía cinética de los iones, 4.2 eV es la *energía de enlace* o *energía de enlazamiento* de la molécula de NaCl; es la que se necesita para disociar la molécula en átomos neutros separados.

Ejemplo 42.1 Energía potencial eléctrica de la molécula de NaCl

Calcule la energía potencial eléctrica de los iones Na^+ y Cl^- separados 0.24 nm, si se pueden considerar cargas puntuales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Utilizaremos los conceptos de la sección 23.1 acerca de la energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales.

PLANTEAR: La ecuación (23.9) nos indica que la energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales q y q_0, separadas por una distancia r, es $U = qq_0/4\pi\epsilon_0 r$.

EJECUTAR: Las dos cargas son $q = +e$ (para el Na^+) y $q_0 = -e$ (para el Cl^-), en tanto que la separación es $r = 0.24\ \text{nm} = 0.24 - 10^{-9}\ \text{m}$. De acuerdo con la ecuación (23.9),

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0} = -(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{0.24 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= -9.6 \times 10^{-19}\ \text{J} = -6.0\ \text{eV}$$

EVALUAR: Este resultado concuerda bastante bien con el valor observado de −5.7 eV. La diferencia se debe a que en la distancia de equilibrio, los iones no se comportan exactamente como cargas puntuales; a esa separación se traslapan las nubes electrónicas de los dos iones.

Enlaces covalentes

Los enlaces iónicos son interacciones entre las distribuciones de carga que tienen casi simetría esférica y, por lo tanto, no son muy direccionales. Pueden implicar más de un electrón por átomo. Los elementos alcalinotérreos forman compuestos iónicos donde un átomo pierde *dos* electrones; un ejemplo es el $Mg^{+2}(Cl^-)_2$. La pérdida de más de dos electrones es relativamente rara; en su lugar, entra en operación una clase diferente de enlace.

El **enlace covalente** se caracteriza por una participación más igualitaria de los dos átomos, a diferencia de como sucede con el enlace iónico. El enlace covalente más sencillo se encuentra en la molécula de hidrógeno, que es una estructura que contiene dos protones y dos electrones. Este enlace se muestra en forma esquemática en la figura 42.2. Al acercarse los átomos separados (figura 42.2a), las funciones de onda de los electrones se distorsionan y se concentran más en la región entre los dos protones (figura 42.2b). La atracción neta de los electrones hacia cada protón balancea la repulsión de los dos protones y los dos electrones.

La interacción atractiva se produce entonces por un *par* de electrones; cada átomo contribuye con uno, y las nubes de carga se concentran principalmente en la región entre los dos átomos. La energía del enlace covalente en la molécula de hidrógeno H_2 es -4.48 eV.

Como vimos en el capítulo 41, el principio de exclusión permite que dos electrones ocupen la misma región del espacio (esto es, que estén en el mismo estado cuántico espacial), sólo cuando sus espines son opuestos. Cuando éstos son paralelos, el principio de exclusión prohíbe el estado molecular que sería más favorable, de acuerdo con consideraciones de energía (con ambos electrones en la región entre los átomos). Los espines opuestos son requisito esencial para que se forme un enlace covalente, y no pueden participar más de dos electrones en ese enlace.

Sin embargo, un átomo con varios electrones en su capa más externa puede formar varios enlaces covalentes. El enlazamiento de los átomos de carbono e hidrógeno, de importancia central en la química orgánica, es un ejemplo. En la molécula de *metano* (CH_4), el átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular, con un átomo de hidrógeno en cada vértice. El átomo de carbono tiene cuatro electrones en su capa *L*, y cada uno de ellos forma un enlace covalente con uno de los cuatro átomos de hidrógeno (figura 42.3). En moléculas orgánicas más complejas se dan pautas semejantes.

Debido al papel que juega el principio de exclusión, los enlaces covalentes son muy direccionales. En la molécula de metano, la función de onda de cada uno de los cuatro electrones de valencia es una combinación de las funciones de onda $2s$ y $2p$, que se llama *función de onda híbrida*. La distribución de probabilidad de cada una tiene un lóbulo que sobresale hacia un vértice de un tetraedro. Este arreglo simétrico minimiza el traslape de las funciones de onda para los pares de electrones, y minimiza su energía potencial de repulsión.

Los enlaces iónicos y covalentes representan dos extremos en el enlazamiento molecular, pero no hay una división definida entre ambos tipos. A menudo, hay una transferencia *parcial* de uno o más electrones, de uno a otro átomo. El resultado es que muchas moléculas que tienen átomos distintos tienen momentos dipolares eléctricos, esto es, una distribución de carga positiva en un extremo y de carga negativa en el otro. Esas moléculas se llaman *polares*. Las moléculas de agua tienen momentos dipolares eléctricos grandes; son los responsables de la constante dieléctrica excepcionalmente grande del agua líquida (véanse las secciones 24.4 y 24.5).

Enlaces de Van der Waals

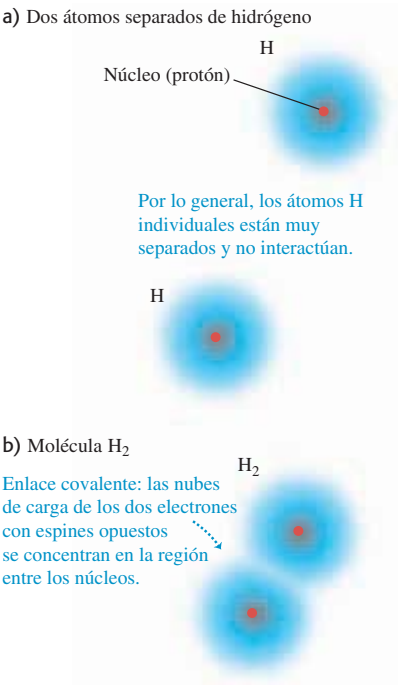
Los enlaces iónicos y covalentes, con energías de enlace características de 1 a 5 eV, se llaman *enlaces fuertes*. Hay también dos clases de enlaces más débiles. Uno de ellos es el **enlace de Van der Waals**, que es una interacción entre los momentos dipolares eléctricos de átomos o moléculas; las energías características son 0.1 eV o menores. El enlazamiento de las moléculas de agua en estado líquido y sólido se debe, en parte, a las interacciones dipolo-dipolo.

Ningún átomo tiene un momento dipolar eléctrico permanente, así como tampoco lo tienen muchas moléculas. Sin embargo, las distribuciones fluctuantes de carga pueden causar momentos dipolares fluctuantes, que a la vez pueden inducir momentos dipolares en las estructuras vecinas. En general, la interacción resultante dipolo-dipolo es de atracción, y produce un enlazamiento débil entre átomos o moléculas. La energía potencial de interacción baja con mucha rapidez al aumentar la distancia r entre las moléculas, por lo general, en función de $1/r^6$. La licuefacción y la solidificación de los gases inertes, y de moléculas como H_2, O_2 y N_2, se deben a interacciones de Van der Waals entre dipolos inducidos. No se necesita mucha energía térmica de agitación para romper estos enlaces débiles, por lo que muchas sustancias se encuentran normalmente en los estados sólido y líquido tan sólo a temperaturas muy bajas.

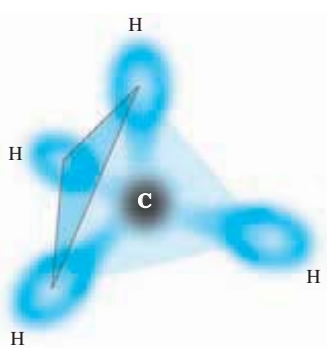
Puentes de hidrógeno

En otra clase de enlace débil, el **puente de hidrógeno**, un protón (ion H^+) se interpone entre dos átomos, los polariza y los atrae por medio de los dipolos inducidos. Este enlace es exclusivo de los compuestos que contienen hidrógeno, porque sólo el hidrógeno tiene un estado simplemente ionizado, donde no hay nube de los demás electrones; el ion hidrógeno es un protón desnudo, mucho menor que cualquier átomo simplemente

42.2 Enlace covalente en una molécula de hidrógeno.



42.3 Esquema de la molécula de metano (CH_4). El átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular, y forma cuatro enlaces covalentes con los átomos de hidrógeno en los vértices. Cada enlace covalente incluye dos electrones con espines opuestos, que forman una nube de carga concentrada entre el átomo de carbono y un átomo de hidrógeno.



ionizado. La energía de ionización suele ser menor que 0.5 eV. El puente de hidrógeno juega un papel esencial en muchas moléculas orgánicas, incluyendo el enlace cruzado de las cadenas de polímeros, como del polietileno, y el enlace cruzado entre las dos hebras de la molécula de ADN en doble hélice. Los puentes de hidrógeno también desempeñan un papel en la estructura del hielo.

Todas estas clases de enlace mantienen unidos a los átomos que forman *sólidos* y también en las moléculas. En realidad, un sólido es, en muchos aspectos, una molécula gigante. Hay otra clase de enlace, el *enlace metálico*, que entra en acción en la estructura de los sólidos metálicos. Regresaremos a este tema en la sección 42.3.

Evalúe su comprensión de la sección 42.1 Si los electrones obedecieran el principio de exclusión, pero *no* tuvieran espín, ¿cuántos electrones podrían participar en un enlace covalente? i) uno; ii) dos; iii) tres; iv) más de tres.

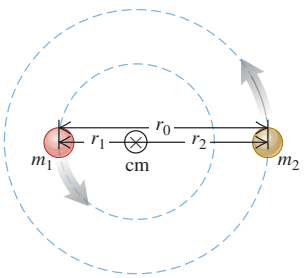
MP

42.2 Espectros moleculares

Las moléculas tienen niveles de energía que están relacionados con el movimiento giratorio y también con el movimiento vibratorio de los átomos, en relación mutua. Así como las transiciones entre niveles de energía en los átomos causan los espectros atómicos, las transiciones entre los niveles rotacional y vibratorio de las moléculas producen los *espectros moleculares*.

Niveles de energía de rotación

42.4 Molécula diatómica modelada como dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas una distancia r_0. Las distancias entre las masas y el centro de masa son r_1 y r_2, siendo $r_1 + r_2 = r_0$.



En esta descripción nos concentraremos más en las moléculas *diatómicas* para mantener las explicaciones lo más sencillas posible. En la figura 42.4 se muestra una molécula diatómica en forma de una mancuerna rígida (dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas una distancia constante r_0) que pueden *girar* en torno a ejes que pasan por su centro de masa, perpendicular a la recta que las une. ¿Cuáles son los niveles de energía asociados con este movimiento?

En la sección 10.5 demostramos que cuando un cuerpo rígido gira con rapidez angular ω en tomo a un eje perpendicular que pasa por su centro de masa, la magnitud L de su cantidad de movimiento angular se define por la ecuación (10.28), $L = I\omega$, donde I es el momento de inercia con respecto a ese eje de simetría. Su energía cinética se determina con la ecuación (9.17) $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Al combinar estas dos ecuaciones se observa que $K = L^2/2I$. No hay energía potencial U, por lo que la energía cinética K es igual a la energía mecánica total E:

$$E = \frac{L^2}{2I} \tag{42.1}$$

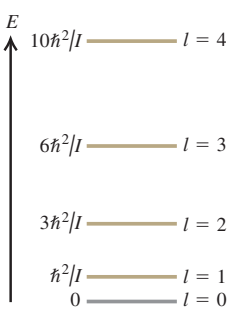
La energía potencial U igual a cero significa que no hay dependencia de U con respecto a θ ni a ϕ. Pero la función de energía potencial U en el átomo de hidrógeno tampoco depende de θ ni de ϕ. Entonces, las soluciones angulares de la ecuación de Schrödinger para la rotación de un cuerpo rígido son iguales que para el átomo de hidrógeno, y el momento angular se cuantiza de la misma forma. Como en la ecuación (41.4),

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \qquad (l = 0, 1, 2 \ldots) \tag{42.2}$$

Combinamos las ecuaciones (42.1) y (42.2) para obtener los *niveles de energía rotacional*:

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{(niveles de energía rotacional, molécula diatómica)} \tag{42.3}$$

42.5 El nivel fundamental y los cuatro primeros niveles excitados de energía de rotación, para una molécula diatómica. Los niveles no están igualmente espaciados.



La figura 42.5 es un diagrama de niveles de energía, que muestra esos niveles rotacionales. El nivel fundamental tiene número cuántico l igual a cero, y energía E cero, correspondiente a su cantidad de movimiento angular cero (no hay rotación). La distancia entre los niveles adyacentes se incrementa al aumentar l.

El momento de inercia I en las ecuaciones (42.1) y (42.3) se puede expresar en función de la *masa reducida* m_r de la molécula:

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{42.4}$$

Esta cantidad ya la presentamos en la sección 38.5 para adaptar la masa nuclear finita del átomo de hidrógeno. En la figura 42.4, las distancias r_1 y r_2 son las que hay del centro de masa a los núcleos de los átomos. Por definición de centro de masa, $m_1 r_1 = m_2 r_2$, y la figura también muestra $r_0 = r_1 + r_2$. Al despejar r_1 y r_2 de esas ecuaciones,

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0 \tag{42.5}$$

El momento de inercia es $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$; se sustituye de la ecuación (42.5) y se ve que

$$I = m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} r_0^2 + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} r_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 \quad \text{o}$$

$$I = m_r r_0^2 \qquad \text{(momento de inercia de una molécula diatómica)} \tag{42.6}$$

La masa reducida nos permite reducir este problema de dos cuerpos a uno equivalente de un cuerpo (una partícula de masa m_r que se mueve en círculo de radio r_0) igual que hicimos con el átomo de hidrógeno. De hecho, la única diferencia entre este problema y el átomo de hidrógeno es la diferencia en las fuerzas radiales. Para conservar la cantidad de movimiento angular, las transiciones permitidas se determinan con la misma regla de selección que para el átomo de hidrógeno: en las transiciones permitidas, l debe cambiar exactamente en una unidad.

Ejemplo 42.2 Espectro rotacional del monóxido de carbono

Los dos núcleos en la molécula de monóxido de carbono (CO) están separados una distancia de 0.1128 nm. La masa del átomo de carbono más común es exactamente 12 u, es decir, 1.993×10^{-26} kg. La masa del átomo de oxígeno más común es 15.995 u $= 2.656 \times 10^{-26}$ kg. *a*) Determine las energías de los tres niveles de energía rotacional inferiores. Exprese los resultados en electrón volts. *b*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en la transición del nivel $l = 2$ al nivel $l = 1$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las ideas desarrolladas en esta sección acerca de los niveles de energía rotacional de las moléculas.

PLANTEAR: Los datos son la distancia r_0 entre los átomos y sus masas, m_1 y m_2. Calcularemos la masa reducida m_r usando la ecuación (42.4), el momento de inercia I de la molécula, usando la ecuación (42.6) y las energías de los niveles con la ecuación (42.3). La energía E del fotón emitido es igual a la diferencia de energías entre los niveles $l = 2$ y $l = 1$; determinaremos la longitud de onda con la relación $E = hc/\lambda$ para un fotón.

EJECUTAR: *a*) Usando la ecuación (42.4) se ve que la masa reducida es $m_r = 1.139 \times 10^{-26}$ kg. De la ecuación (42.6),

$$I = m_r r_0^2 = (1.139 \times 10^{-26}\,\text{kg})(0.1128 \times 10^{-9}\,\text{m})^2$$
$$= 1.449 \times 10^{-46}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Los niveles rotacionales se calculan con la ecuación (42.3):

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1)\frac{(1.0546 \times 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s})^2}{2(1.449 \times 10^{-46}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2)}$$
$$= l(l+1)(3.838 \times 10^{-23}\,\text{J}) = l(l+1)0.2395\ \text{meV}$$

Al sustituir $l = 0, 1, 2$, se ve que

$$E_0 = 0 \qquad E_1 = 0.479\ \text{meV} \qquad E_2 = 1.437\ \text{meV}$$

b) La energía del fotón es

$$E = E_2 - E_1 = 0.958\ \text{meV}$$

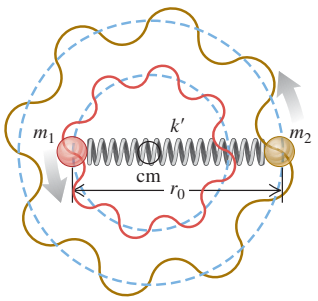
La longitud de onda del fotón es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{0.958 \times 10^{-3}\,\text{eV}}$$
$$= 1.29 \times 10^{-3}\,\text{m} = 1.29\ \text{mm}$$

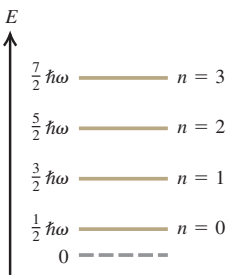
EVALUAR: La diferencia entre los dos primeros niveles de energía rotacional del CO es muy pequeña (más o menos $\frac{1}{2}$ meV, donde 1 meV $= 10^{-3}$ eV) en comparación con la diferencia entre los niveles atómicos de energía (normalmente algunos eV) correspondiente a los espectros ópticos. Por consiguiente, un fotón emitido por una molécula de CO en una transición del nivel $l = 2$ al nivel $l = 1$ tiene una energía muy baja, y una longitud de onda muy grande en comparación con la luz visible. En realidad, la longitud de onda calculada en el inciso *b*) está en la región de microondas del espectro. Las longitudes de onda de los fotones por transiciones rotacionales en otras moléculas también son grandes, y caen dentro de las regiones de microondas y del infrarrojo lejano del espectro.

En este ejemplo el dato fue la separación de equilibrio entre los átomos, llamada también la *longitud de enlace*, y se usó para calcular una de las longitudes de onda emitida por moléculas excitadas de CO. En los experimentos reales, los investigadores avanzan al revés de este problema: al medir las emisiones de microondas de una muestra de moléculas diatómicas, determinan el momento de inercia de la molécula y con ello la longitud del enlace.

42.6 Una molécula diatómica modelada como dos masas puntuales m_1 y m_2, unidas por un resorte con constante de fuerza k'.



42.7 El nivel fundamental y los tres primeros niveles excitados de vibración para una molécula diatómica, suponiendo que las oscilaciones son pequeñas. Los niveles están igualmente espaciados: su espaciamiento es $\Delta E = \hbar\omega$.



Niveles de energía vibratoria

Las moléculas nunca son completamente rígidas. En un modelo más realista de una molécula diatómica, la unión entre los átomos se representa no como varilla rígida, sino como un *resorte* (figura 42.6). Entonces, además de girar, los átomos de la molécula pueden *vibrar* con respecto a sus posiciones de equilibrio, a lo largo de la línea que los une. Para oscilaciones pequeñas, se puede suponer que la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento con respecto a la separación r_0 de equilibrio (como un resorte que obedece la ley de Hooke con una constante de fuerza k'), y el sistema es un oscilador armónico. En la sección 40.4 describimos el oscilador armónico mecánico cuántico. Los niveles de energía se definen con la ecuación (40.25), sustituyendo la masa m por la masa reducida m_r:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42.7}$$

(niveles de energía vibratoria de una molécula diatómica)

Esto representa una serie de niveles de energías con igual espaciamiento entre ellos, y esa separación de energía es

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \tag{42.8}$$

La figura 42.7 es un diagrama de niveles de energía, que muestra esos niveles de vibración. (Compare con la figura 40.18.)

CUIDADO **Esté atento con k, k' y K** De nuevo estamos usando k' como constante de fuerza, esta vez para minimizar la confusión con la constante de Boltzmann k, la constante del gas por molécula (introducida en la sección 18.3). Además de las cantidades k y k' también usaremos la unidad de temperatura 1 K = 1 kelvin.

Ejemplo 42.3 Constante de fuerza del monóxido de carbono

Para la molécula de monóxido de carbono del ejemplo 42.2, se determina que la distancia entre niveles de energía vibratoria es $\Delta E = 0.2690$ eV. Calcule la constante de fuerza k' para la fuerza interatómica.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La idea fundamental de este problema es que los niveles de energía vibratoria de una molécula diatómica tienen espacio uniforme ΔE, que depende de la constante de fuerza de la fuerza del "resorte" que mantiene unida la molécula.

PLANTEAR: El dato es el valor de ΔE, por lo que despejaremos la constante de fuerza k' (nuestra incógnita) de la ecuación (42.8).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (42.8),

$$k' = m_r\left(\frac{\Delta E}{\hbar}\right)^2 = (1.139 \times 10^{-26}\,\text{kg})\left(\frac{0.2690\,\text{eV}}{6.582 \times 10^{-16}\,\text{eV}\cdot\text{s}}\right)^2$$
$$= 1902\,\text{N/m}$$

EVALUAR: Esto corresponde a un resorte bastante flojo; para estirar 1.0 cm un resorte macroscópico con esta constante de fuerza se necesitaría una tracción de 19 N [aproximadamente 4 lb (2 kg)]. Las constantes de fuerza de las moléculas diatómicas suelen ser de 100 a 2000 N/M.

Combinación entre rotación y vibración

Los fotones de luz visible tienen energías de 1.77 eV a 3.10 eV. La diferencia de 0.2690 eV en el ejemplo 42.3 corresponde a un fotón en la región infrarroja del espectro, aunque más cercana a la región visible que el fotón en la transición *rotacional* del ejemplo 42.2. Las diferencias de energía vibratoria, si bien suelen ser mucho menores que las que producen los espectros atómicos, generalmente son mucho *mayores* que las diferencias entre energías rotacionales.

Si se incluyen las energías rotacional y vibratoria *al mismo tiempo*, los niveles de energía de nuestra molécula diatómica son

$$E_{nl} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \qquad (42.9)$$

El diagrama de nivel de energía se muestra en la figura 42.8. Para cada valor de n hay muchos valores de l, formando una serie de niveles estrechamente espaciados.

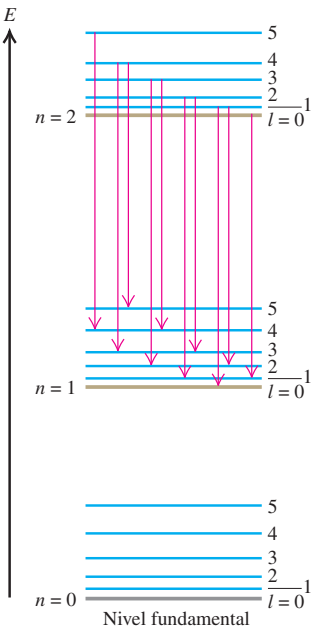
En la figura 42.8 las flechas muestran varias transiciones posibles en las que una molécula pasa de un nivel con $n = 2$ a uno con $n = 1$, emitiendo un fotón. Ya que el fotón lleva cantidad de movimiento angular, esas transiciones moleculares obedecen una *regla de selección* (sección 41.3): el número cuántico de cantidad de movimiento angular l debe aumentar en 1 o disminuir en 1: $\Delta l = \pm 1$. Una regla de selección adicional establece que si cambia el nivel vibratorio, debe aumentar el número cuántico vibratorio n en la ecuación (42.9) en 1 ($\Delta n = 1$), si se absorbe un fotón; o disminuir en 1 ($\Delta n = -1$) si se emite un fotón.

Por ejemplo, la figura 42.8 muestra que una molécula en el nivel $n = 2$, $l = 4$ puede emitir un fotón y bajar al nivel $n = 1$, $l = 5$ ($\Delta n = -1$, $\Delta l = +1$), o al nivel $n = 1$, $l = 3$ ($\Delta n = -1$, $\Delta l = -1$), pero se prohíbe que haga una transición $\Delta n = -1$, $\Delta l = 0$ en el nivel $n = 1$, $l = 4$.

Las transiciones entre estados con varios pares de valores de n producen distintas series de líneas espectrales, y el espectro que resulta tiene una serie de *bandas*. Cada banda corresponde a una transición vibratoria en particular, en cada línea individual en una banda representa una transición rotacional particular, con la regla de selección $\Delta l = \pm 1$. En la figura 42.9 se muestra un *espectro de bandas* típico.

Todas las moléculas pueden tener estados excitados de los *electrones*, además de los estados de rotación y de vibración que hemos descrito. En general, están a mayores energías que los estados rotacionales y vibratorios, y no hay alguna regla sencilla que los relacione. Cuando hay una transición entre estados electrónicos, ya no es válida la regla de selección $\Delta n = \pm 1$, para los niveles de vibración.

42.8 Diagrama de niveles de energías de los niveles vibratorios y rotatorios de una molécula diatómica. Para cada nivel de vibración (n) hay una serie de niveles de rotación (l) más cercanos entre sí. Se muestran varias transiciones que corresponden a una sola banda de espectro. Esas transiciones obedecen la regla de selección $\Delta l = \pm 1$.



42.9 Espectro de banda molecular común.

Ejemplo 42.4 Espectro de vibración-rotación del monóxido de carbono

De nuevo consideremos la molécula de CO de los ejemplos 42.2 y 42.3. Determine la longitud de onda del fotón que se emite cuando hay un cambio en su energía vibratoria, y su energía de rotación es *a*) cero inicialmente, y *b*) cero finalmente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la regla de selección para las transiciones de vibración y rotación de una molécula diatómica.

PLANTEAR: En cada caso, la energía del fotón emitido es igual a la diferencia entre las energías inicial y final de la molécula. Como un fotón se emite cuando cambia la energía vibratoria, el número cuántico de vibración disminuye en 1. Para el caso del inciso *a*), el valor inicial de l es cero (sin energía de rotación), por lo que la regla de selección $\Delta l = \pm 1$ indica que el valor *final* de l es 1. Para el caso del inciso *a*), el valor *final* de l es cero, por lo que la misma regla de selección indica que el valor *inicial* de l es 1. Por consiguiente, en el inciso *a*), la energía del fotón E es igual a la diferencia $\hbar\omega$ entre niveles adyacentes de energía vibratoria *menos* la cantidad de energía de rotación que *gana* la molécula; mientras que en el inciso *b*), E es igual a $\hbar\omega$ *más* la cantidad de energía de rotación que *pierde* la molécula. Usaremos los resultados de los ejemplos 42.2 y 42.3 para indicarnos los cambios de energía rotacional y vibratoria, respectivamente, y usaremos $E = hc/\lambda$ para determinar las longitudes de onda (las incógnitas).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con el ejemplo 42.2, la diferencia de energías entre los niveles rotacionales $l = 0$ y $l = 1$ del CO es 0.479 meV = 0.000479 meV, y según el ejemplo 42.3, la diferencia de energías

continúa

entre los niveles vibratorios adyacentes es 0.2690 eV. Por lo tanto, la energía de este fotón emitido es 0.2690 eV − 0.000479 eV = 0.02685 eV, y su longitud de onda es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-16}\,\text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{0.2685\,\text{eV}}$$
$$= 4.618 \times 10^{-6}\,\text{m} = 4.618\,\mu\text{m}$$

b) Ahora el fotón tiene 0.2690 eV por la disminución de energía vibratoria y 0.000479 eV por la disminución de energía de rotación, y la $E = 0.2695$ eV en total para el fotón. Entonces, la longitud de onda del mismo es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-16}\,\text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{0.2695\,\text{eV}}$$
$$= 4.601 \times 10^{-6}\,\text{m} = 4.601\,\mu\text{m}$$

EVALUAR: En el inciso *b*), la molécula pierde más energía que en el inciso *a*), por lo que el fotón emitido debe tener mayor energía y menor longitud de onda. Es precisamente lo que indican nuestros resultados.

Moléculas complejas

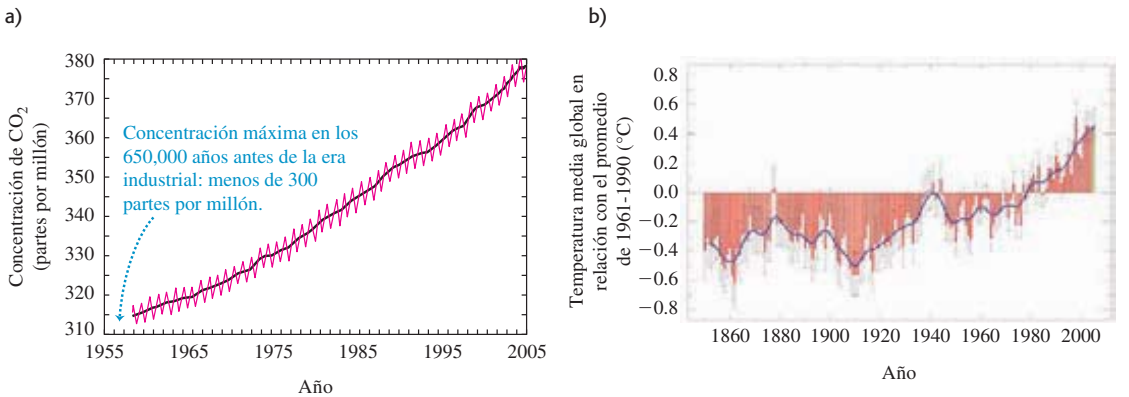
Podemos aplicar los mismos principios a moléculas más complejas. Una molécula con tres átomos o más tiene varias clases distintas de *modos* de movimiento vibratorio. Cada modo tiene su propio conjunto de niveles de energía, relacionados con su frecuencia mediante la ecuación (42.7). En casi todos los casos, la radiación asociada está en la región infrarroja del espectro electromagnético.

La espectroscopia infrarroja ha demostrado ser una herramienta analítica extremadamente valiosa. Brinda información sobre resistencia, rigidez y longitud de los enlaces moleculares, así como la estructura de moléculas complejas. Además, ya que cada molécula (al igual que cada átomo) tiene su espectro característico, con la espectroscopia infrarroja se pueden identificar compuestos desconocidos.

Una molécula que puede fácilmente absorber y emitir radiación infrarroja es el dióxido de carbono (CO_2), que es el cuarto componente más abundante de la atmósfera terrestre (después del nitrógeno, oxígeno y argón). Tiene consecuencias importantes para el clima de nuestro planeta. Al estar en equilibrio térmico, la Tierra —que actúa como un cuerpo negro (véase la sección 38.8)— debe irradiar tanta energía al espacio como la que recibe del Sol. la temperatura de la superficie terrestre es tal que la mayoría de la energía irradiada está en la parte infrarroja del espectro. Sin embargo, en la atmósfera el CO_2 absorbe algo de esta radiación infrarroja y la vuelve a irradiar hacia la tierra, en vez de dejar que escape al espacio. Para mantener el equilibrio térmico, la superficie terrestre debe compensar aumentando su temperatura T y, con ello, su producción total de radiación (que es proporcional a T^4). Esto significa que la temperatura de la superficie de nuestro planeta es mayor que si no hubiera CO_2 atmosférico.

Las mediciones del aire atrapado en hielo de la antigua Antártica muestran que durante los pasados 650,000 años, el CO_2 ha constituido menos de 300 partes por millón de nuestra atmósfera. Desde el inicio de la era industrial, no obstante, la quema de combustibles de origen fósil, como el carbón y el petróleo, ha elevado la concentración del CO_2 atmosférico a niveles sin precedentes (figura 42.10a). En consecuencia, desde la década de 1950, la temperatura superficial global se ha incrementado 0.6 °C

42.10 **a)** La concentración de CO_2 atmosférico ha aumentado 18% debido a las mediciones continuas desde 1958. (Las variaciones anuales se deben al consumo creciente de CO_2 por parte de las plantas, en primavera y en verano.) **b)** El aumento en la temperatura global desde el inicio de la era industrial es un resultado del aumento en la concentración de CO_2.



y la Tierra ha experimentado el año más caliente jamás registrado (figura 42.10b). Si continuamos consumiendo combustibles fósiles al mismo ritmo, para 2050 la concentración de CO_2 atmosférico alcanzará 600 partes por millón, de acuerdo con la escala de la figura 42.10a. El resultado del aumento de la temperatura en las regiones polares causará que se derritan cantidades masivas de hielo y hará que porciones continentales sean cubiertas por el mar, elevando así los niveles de los océanos en todo el mundo, y amenazando los hogares y la vida misma de quienes viven cerca de la costa. Enfrentar tal amenaza constituye uno de los mayores desafíos de la civilización del siglo XXI.

Evalúe su comprensión de la sección 42.2 Una molécula diatómica giratoria emite un fotón cuando hace una transición de un nivel l a un nivel $l - 1$. Si aumenta el valor de l, ¿la longitud de onda del fotón emitido i) aumenta, ii) disminuye, o iii) permanece sin cambio?

42.3 Estructura de los sólidos

El término *materia condensada* incluye tanto los sólidos como los líquidos. En ambos estados, las interacciones entre átomos o moléculas son lo bastante fuertes como para comunicar un volumen definido al material, que cambia relativamente poco al aplicarle un esfuerzo. En la materia condensada, los átomos adyacentes se atraen entre sí, hasta que comienzan a traslapar en forma importante sus nubes de carga electrónica externa. Así, las distancias entre átomos adyacentes de la materia condensada son más o menos iguales que los diámetros de los átomos mismos, comúnmente de 0.1 a 0.5 nm. Además, al hablar de distancias entre átomos, nos referiremos a distancias de centro a centro (de núcleo a núcleo).

En el caso ordinario, uno se imagina que un líquido es un material que puede fluir, y un sólido como un material con forma definida. No obstante, si el lector calienta una varilla horizontal de vidrio en la llama de un mechero, verá que la varilla se comienza a colgar (a fluir) cada vez con más facilidad a medida que aumenta su temperatura. El vidrio no tiene una transición definida de sólido a líquido, ni un punto de fusión definido. Con esta base, se puede considerar que el vidrio a temperatura ambiente es un líquido extremadamente viscoso. El asfalto y la mantequilla muestran comportamientos parecidos.

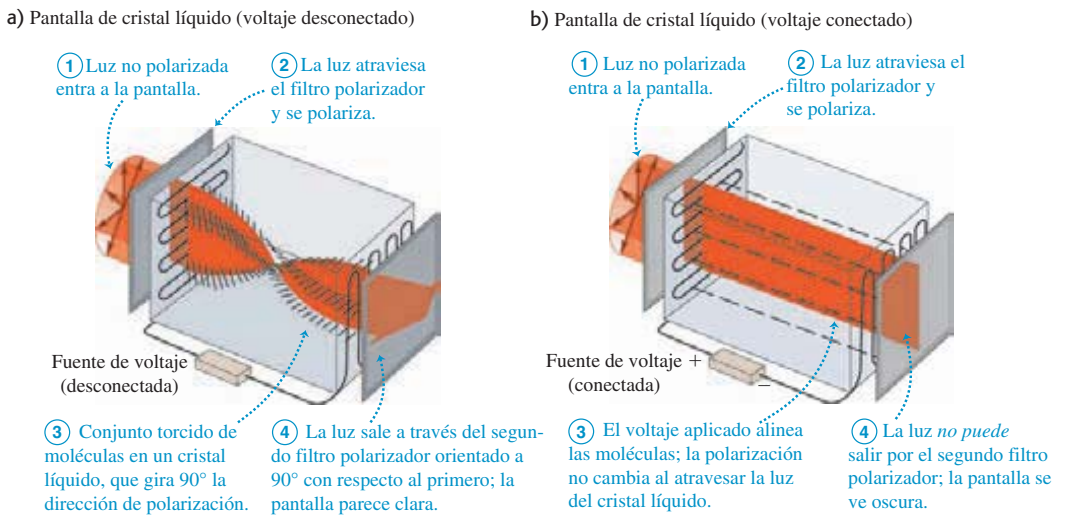
¿Cuál es la diferencia microscópica entre materiales como el vidrio o la mantequilla, y los sólidos como el hielo o el cobre, que sí tienen puntos de fusión definidos? El hielo y el cobre son ejemplos de *sólidos cristalinos*, en que los átomos tienen *orden de largo alcance*, un patrón recurrente de posiciones atómicas que abarca muchos átomos. A este patrón se le llama *estructura cristalina*. En contraste, el vidrio a la temperatura ambiente es un ejemplo de un sólido *amorfo*, el cual no tiene orden de largo alcance, sino *orden de corto alcance* (correlaciones entre átomos o moléculas vecinos). Los líquidos también sólo tienen orden de corto alcance. Las fronteras entre sólido cristalino, sólido amorfo y líquido pueden ser confusas a veces. Algunos sólidos, que son cristalinos cuando son perfectos, pueden formarse con tantas imperfecciones en su estructura que casi no tienen orden de largo alcance. Al revés, algunos líquidos tienen un alto grado de orden de largo alcance; un ejemplo familiar es el tipo de *cristal líquido* que muestra la figura 42.11 (siguiente página).

Casi todo lo que conocemos de la estructura cristalina lo hemos aprendido en experimentos de difracción, al principio con rayos x y, después, con electrones y neutrones. Una distancia normal entre átomos es del orden de 0.1 nm. El lector puede demostrar que los rayos x de 12.4 keV, los electrones de 150 eV y los neutrones de 0.0818 eV tienen todos longitudes de onda $\lambda = 0.1$ nm.

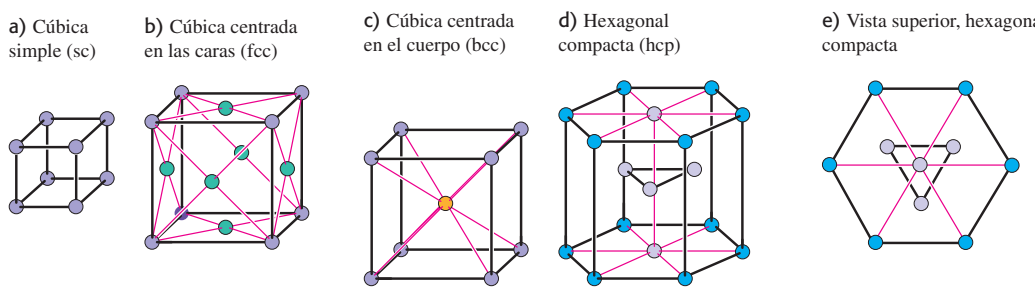
Redes y estructuras cristalinas

Una *red cristalina* es un patrón repetitivo de puntos matemáticos que se prolonga en el espacio. Hay 14 tipos generales de esos patrones; la figura 42.12 (siguiente página) muestra pequeñas partes de algunos ejemplos comunes. La *red cúbica simple* (sc, de *simple cubic*) tiene un punto de red en cada vértice de un arreglo cúbico (figura 42.12a). La *red cúbica centrada en la cara* (fcc, de *face-centered cubic*) es como la cúbica

42.11 Una versión simple de una pantalla de cristal líquido (LCD). Una capa delgada de cristal líquido, que es un compuesto orgánico cuyas moléculas cilíndricas se tienden a alinear paralelas entre sí, se confina entre dos placas de vidrio paralelas, y se colocan entre dos filtros polarizadores cruzados. a) Las moléculas tienden a alinearse con ralladuras finas en las placas de vidrio, retorciéndose de modo tal que la luz puede atravesar el segundo filtro polarizador. b) Cada placa de vidrio también tiene un arreglo de electrones. Cuando se aplica un voltaje entre las placas, las moléculas se alinean con el campo eléctrico y la luz no atraviesa el segundo filtro polarizante. En consecuencia, al conectar el voltaje se cambia la presentación de clara a oscura.



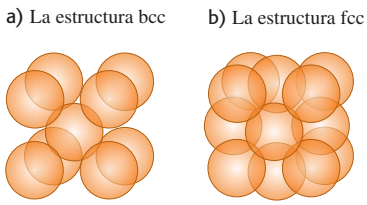
42.12 Partes de algunas clases comunes de red cristalina.



simple, pero con un punto de red adicional en el centro de cada cara del cubo (figura 42.12b). La *red cúbica centrada en el cuerpo* (bcc, de *body-centered cubic*) es como la cúbica simple, pero con un punto de red adicional en el centro de cada cubo (figura 42.12c). La *red hexagonal compacta* tiene capas de puntos de red en arreglo hexagonal, y cada hexágono está formado por seis triángulos equiláteros (figuras 42.12d y 42.12e).

CUIDADO **Una red cristalina perfecta es infinitamente grande** La figura 42.12 muestra sólo los puntos de red suficientes para visualizar con facilidad el orden; la red, que es una abstracción matemática, se prolonga por el espacio. Así, los puntos de red que se muestran se repiten indefinidamente en todas direcciones.

42.13 a) La *estructura* bcc está formada por una *red* bcc con una base de un átomo por cada punto de red. b) La *estructura* fcc está formada por una *red* fcc con una base de un átomo por cada punto de red. Estas estructuras se repiten con precisión para formar cristales perfectos.



En una estructura cristalina, un solo átomo, o un grupo de átomos, están asociados con *cada* punto de red. El grupo puede contener átomos iguales o distintos. Este átomo o grupo de átomos se llama *base*. Así, una descripción completa de una estructura cristalina incluye tanto la red como la base. Al principio manejaremos *cristales perfectos* o *monocristales ideales*, en los que la estructura cristalina se prolonga sin interrupción en el espacio.

Las estructuras bcc y fcc son dos estructuras cristalinas simples y comunes. Los metales alcalinos tienen una estructura bcc, esto es, una red bcc con una base de un átomo en cada punto de red. Cada átomo en una estructura bcc tiene ocho vecinos más próximos (figura 42.13a). Los elementos: Al, Ca, Cu, Ag y Au tienen una estruc-

tura fcc, es decir, una red fcc con una base de un átomo en cada punto de red. En una estructura fcc cada átomo tiene 12 vecinos más próximos (figura 42.13b).

La figura 42.14 muestra una representación de la estructura del cloruro de sodio (NaC1, la sal ordinaria). Parece como una estructura cúbica simple, pero no lo es. Los iones de sodio y de cloro forman cada uno una estructura fcc, por lo que podemos imaginar que aproximadamente la estructura del cloruro de sodio está formada por dos estructuras fcc que se interlazan. En forma más correcta, la estructura cristalina del cloruro de sodio, en la figura 42.14, tiene una red fcc con un ion cloruro en cada punto de red, y un ion sodio a medio cubo de longitud arriba del anterior. Esto es, su base consiste en un ion cloruro y un ion sodio.

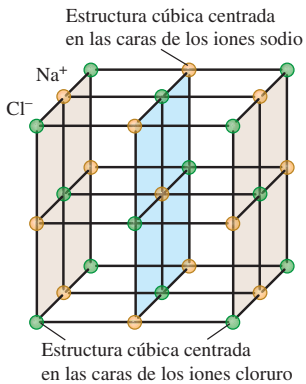
Otro ejemplo es la *estructura del diamante*; así se llama por ser la estructura cristalina del carbono en forma de diamante (figura 42.15). También es la del silicio, germanio y estaño gris (los cuatro son elementos del grupo IV en la tabla periódica). La red del diamante es fcc; la base consiste en un átomo en cada punto de red y un segundo átomo *idéntico* desplazado la cuarta parte de la longitud del cubo en cada una de las tres direcciones de las aristas del cubo. La figura 42.16 ayudará a visualizar esto. El volumen sombreado en la figura 42.16 muestra la octava parte inferior derecha del cubo básico; los cuatro átomos que están en vértices alternados de este cubo están en los vértices de un tetraedro regular, y hay un átomo adicional en el centro. Entonces, cada átomo en la estructura del diamante está en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos vecinos en los vértices.

En la estructura del diamante, las esferas púrpura y verde en la figura 42.16 representan átomos *idénticos*, por ejemplo, dos carbono o dos silicio. En la estructura cúbica del sulfuro de zinc, las esferas púrpuras representan una clase de átomo y las esferas verdes representan una clase *diferente*. Por ejemplo, en el sulfuro de zinc (ZnS), cada átomo de zinc (púrpura en la figura 42.16) está en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos de azufre (verdes en esa figura) en sus vértices, y viceversa. El arseniuro de galio (GaAs) y compuestos similares tienen esta misma estructura.

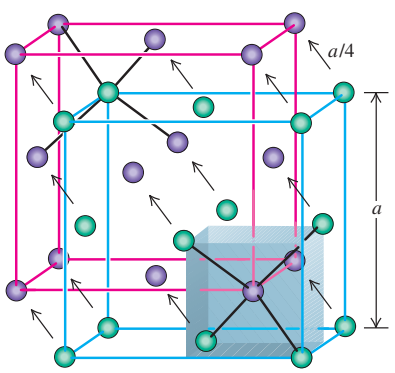
Enlazamiento en los sólidos

Las fuerzas responsables del arreglo regular de átomos en un cristal son las mismas que las que intervienen en los enlaces moleculares, y además hay un tipo adicional. No debe sorprender que los enlaces moleculares *iónicos* y *covalentes* se encuentren en cristales iónicos y covalentes, respectivamente. Los *cristales iónicos* más conocidos son los halogenuros de álcali, como la sal ordinaria (NaCl). Los iones sodio positivos y los iones cloruro negativos ocupan posiciones alternadas en un arreglo cúbico (figura 42.14). Las fuerzas de atracción son las conocidas fuerzas de la ley de Coulomb, entre partículas cargadas. Esas fuerzas no tienen una dirección preferente, y el arreglo para que el material cristalice está determinado en parte por el tamaño relativo de los dos iones. Esa estructura es *estable* en el sentido que tiene menor energía total que los iones separados (véase el siguiente ejemplo). Las energías potenciales negativas de pares de cargas opuestas son mayores en valor absoluto que las energías positivas de pares de cargas iguales, porque los pares de cargas desiguales están más cercanos entre sí, en promedio.

42.14 Representación de parte de la estructura cristalina del cloruro de sodio. Están exageradas las distancias entre los iones.



42.15 La estructura cristalina del diamante se parece a la de muchos otros materiales menos codiciados. Lo que hace único al diamante son sus bellas propiedades ópticas. Un índice de refracción alto hace que el diamante destelle, debido a la reflexión interna total, y una gran dispersión convierte la luz blanca en un arco iris de colores.



42.16 La estructura del diamante, indicada como dos estructuras cúbicas centradas en la cara que se interpenetran o se enlazan con distancias exageradas entre átomos. En relación con el átomo verde correspondiente, cada átomo púrpura está desplazado hacia arriba, atrás y hacia la izquierda una distancia $a/4$.

Ejemplo 42.5 Energía potencial en un cristal iónico

Un cristal iónico unidimensional ficticio consiste en una cantidad muy grande de iones positivos y negativos alternados, con cargas e y $-e$, respectivamente, a distancias iguales a a lo largo de una recta. Demuestre que la energía potencial de interacción total es negativa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideraremos que cada ion es una carga puntual, y luego usaremos nuestro resultado de la sección 23.1 para la energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas puntuales.

PLANTEAR: Las ecuaciones (23.10) y (23.11) nos dicen que hay que tener presente la energía potencial eléctrica U de cada pareja de cargas. La energía potencial total del sistema es la suma de los valores de U para cada pareja posible.

EJECUTAR: Partamos de un ion en algún lugar de la parte media de la serie, y sumemos las energías potenciales de sus interacciones con todos los iones a uno de sus lados. Así, se obtiene la serie

$$\sum U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3a} + \cdots$$
$$= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

El lector notará la semejanza de la serie en el paréntesis con la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cuando $x = 1$, se obtiene la serie entre paréntesis, y

$$\sum U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\ln 2$$

Desde luego, esto es una cantidad negativa. Los átomos en el otro lado del ion del que partimos hacen una contribución igual a la energía potencial. Y si incluimos las energías potenciales de todos los pares de átomos, es evidente que la suma es negativa.

EVALUAR: Llegamos a la conclusión de que dicha estructura es estable: tiene menor energía que la energía potencial cero que se obtiene cuando todos los iones están a distancias infinitas entre sí.

Tipos de cristales

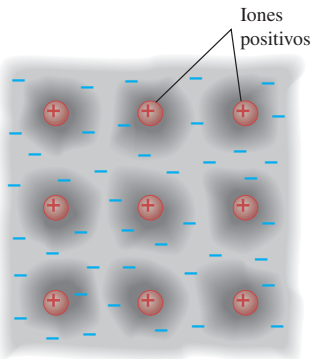
El carbono, silicio, germanio y estaño con la estructura del diamante son ejemplos sencillos de *cristales covalentes*. Esos elementos están en el grupo IV de la tabla periódica, lo cual quiere decir que cada átomo tiene cuatro electrones en su capa externa. Cada átomo forma un enlace covalente con cada uno de los cuatro átomos adyacentes, en los vértices de un tetraedro (figura 42.16). Estos enlaces son muy direccionales, por las distribuciones electrónicas asimétricas que indica el principio de exclusión, y el resultado es la estructura tetraédrica del diamante.

Una tercera clase de cristales, menos relacionada con el enlace químico en comparación con los cristales iónicos o covalentes, es el **cristal metálico**. En tal estructura, uno o más de los electrones externos en cada átomo se desprenden de su átomo (dejando un ion positivo) y tienen libertad de movimiento a través del cristal. Estos electrones no están localizados cerca de los iones individuales. Las funciones de onda de los electrones correspondientes abarcan muchos átomos.

Así, podemos imaginarnos que un cristal metálico es un conjunto de iones positivos inmersos en un mar de electrones liberados, cuya atracción hacia los iones positivos mantiene unido el cristal (figura 42.17). Esos electrones también comunican a los metales sus altas conductividades eléctricas y térmicas. Este mar de electrones tiene muchas de las propiedades de un gas, y en realidad se habla del *modelo del gas de electrones* para los sólidos metálicos. La versión más sencilla de este modelo es el *modelo del electrón libre*, que no tiene en cuenta, en absoluto, las interacciones con los iones (excepto en la superficie). Regresaremos a este modelo en la sección 42.5.

En un cristal metálico, los electrones liberados no están localizados, sino que están compartidos entre *muchos* átomos. Esto produce un enlazamiento que ni está localizado ni es muy direccional. La estructura cristalina está determinada principalmente por consideraciones de *empacamiento compacto*, esto es, la cantidad máxima de átomos que pueden caber en determinado volumen. Las dos redes cristalinas metálicas más comunes son la cúbica centrada en la cara y la hexagonal compacta, que se muestran en las figuras 42.12b, 41.12d y 42.12e. En estructuras formadas con estas redes, con una base de un átomo, cada átomo tiene 12 vecinos inmediatos.

42.17 En un sólido metálico, hay uno o más electrones que se desprenden de cada átomo, y quedan en libertad para vagar por el cristal formando un "gas de electrones". Las funciones de onda de esos electrones se extienden sobre muchos átomos. Los iones positivos vibran con respecto a lugares fijos en el cristal.

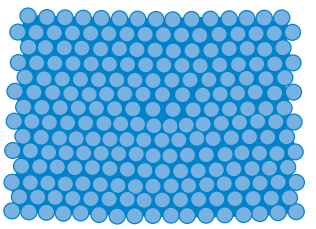


Como mencionamos en la sección 42.1, las interacciones de Van der Waals y los puentes de hidrógeno también juegan un papel importante en la estructura de algunos sólidos. En el polietileno y en los polímeros similares, el enlazamiento covalente de los átomos forma moléculas de cadena larga, y los puentes de hidrógeno forman enlaces cruzados entre cadenas adyacentes. En el agua sólida, tienen importancia tanto las fuerzas de Van der Waals como los puentes de hidrógeno al determinar las estructuras cristalinas del hielo.

Nuestra descripción se ha centrado en los cristales perfectos, o monocristales ideales. Los cristales reales muestran diversas desviaciones de esta estructura idealizada. Con frecuencia, los materiales son *policristalinos*, formados por muchos monocristales pequeños pegados entre sí en sus *límites de grano*. Dentro de un monocristal puede haber defectos puntuales: átomos *intersticiales* en lugares donde no pertenecen; y puede haber *vacantes*, *lagunas* o *intervalos vacíos*, que son posiciones que deberían estar ocupadas por un átomo, pero están vacías. Un defecto puntual de especial interés en los semiconductores, que describiremos en la sección 42.6, es la *impureza de sustitución*; es un átomo diferente que remplaza un átomo normal (por ejemplo, arsénico en un cristal de silicio).

Hay varias clases básicas de defectos extendidos, llamadas *dislocaciones*. Una de ellas es la *dislocación de borde*, que se ve en forma esquemática en la figura 42.18, donde un plano de átomos está deslizado en relación con otro. Las propiedades mecánicas de los cristales metálicos están muy influidas por la presencia de dislocaciones. La ductilidad (plasticidad) y la maleabilidad de algunos metales dependen de la presencia de dislocaciones que se puedan propagar por el cristal, durante deformaciones plásticas. Los físicos de estado sólido centran su atención con frecuencia hacia el hecho que el defecto extendido mayor de todos, presente en *todos* los cristales reales, está en la superficie del material con sus enlaces en agitación y su cambio abrupto de energía potencial.

42.18 Una dislocación de borde en dos dimensiones. En tres dimensiones, la dislocación de borde se vería como un plano adicional de átomos parcialmente introducido en el cristal.



La irregularidad se ve con más facilidad contemplando la figura desde varias direcciones, a un ángulo rasante con la página.

Evalúe su comprensión de la sección 42.3 Si en un cristal de NaCl, a es la una distancia de un ion Na^+ a uno de sus iones Cl^- vecinos más cercanos, ¿cuál es la distancia de un ion Na^+ a uno de sus iones Cl^- vecino *posterior al más cercano*? i) $a\sqrt{2}$; ii) $a\sqrt{3}$; iii) $2a$; iv) ninguna de éstas.

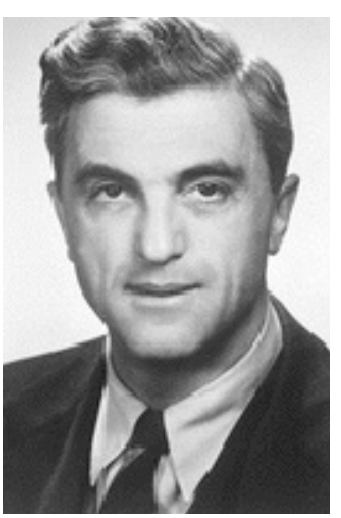
MP

42.4 Bandas de energía

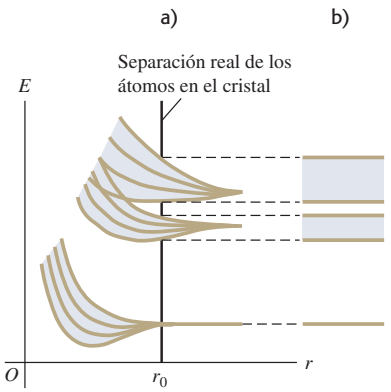
El concepto de **banda de energía**, introducido en 1928 (figura 42.19) es de gran ayuda para comprender varias propiedades de los sólidos. Para presentar esta idea, supongamos que hay una gran cantidad N de átomos idénticos, suficientemente apartados como para que sus interacciones sean despreciables. Cada átomo tiene el mismo diagrama de niveles de energía. Se puede trazar un diagrama de niveles de energía para *todo el sistema*. Se ve justo como el de un sólo átomo, pero el principio de exclusión, aplicado a todo el sistema, permite que cada estado esté ocupado por N electrones, en vez de uno sólo.

Ahora acerquemos entre sí uniformemente a los átomos. Debido a las interacciones eléctricas y al principio de exclusión, las funciones de onda se comienzan a distorsionar, en especial las de los electrones externos o *de valencia*. Las energías correspondientes también se desplazan, algunas hacia arriba y otras hacia abajo, en cantidades variables, a medida que las funciones de onda del electrón de valencia se vuelven menos localizadas y se extienden sobre cada vez más átomos. Entonces, los estados de valencia que antes producían un estado en el *sistema*, con un nivel definido de energía que podía dar cabida a N electrones, ahora producen una *banda* que contiene N niveles muy cercanos (figura 42.20, siguiente página). De ordinario, N es muy grande, del orden del número de Avogadro (10^{24}), por lo que podemos considerar con exactitud que los niveles forman una distribución *continua* de energías dentro de una banda. Entre bandas de energía adyacentes hay espacios o regiones prohibidas, donde *no* hay niveles de energía permitidos. Los electrones internos de un átomo se afectan mucho menos por los átomos cercanos que los electrones de valencia, y sus niveles de energía permanecen relativamente definidos.

42.19 El concepto de bandas de energía fue propuesto por el físico suizo-estadounidense Felix Bloch (1905-1983) en su tesis doctoral. Nuestra comprensión moderna de la conductividad eléctrica parte de ese notable trabajo. El trabajo de Bloch, en física nuclear, le valió (junto con Edward Purcell) el Premio Nobel de Física en 1952.



42.20 Origen de las bandas de energía en un sólido. a) A medida que disminuye la distancia r entre los átomos, los niveles de energía se reparten formando bandas. La línea vertical en r_0 muestra la distancia atómica real en el cristal. b) Representación simbólica de las bandas de energía.



Aislantes, semiconductores y conductores

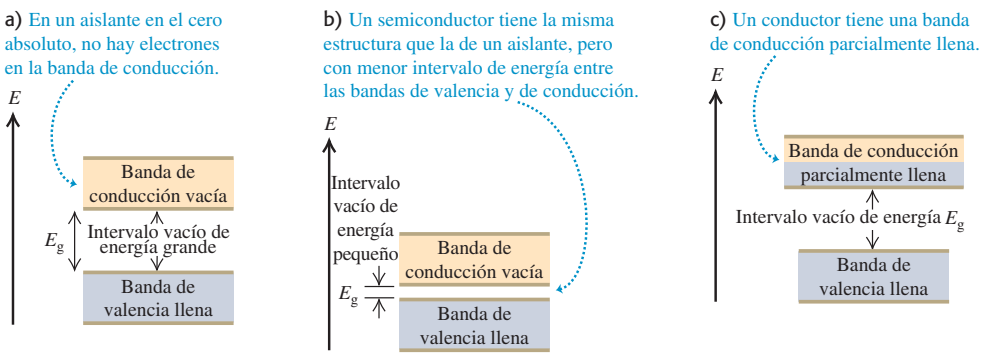
La naturaleza de las bandas de energía determina si el material es aislante eléctrico, semiconductor o conductor. En particular, lo que importa es el grado con que los estados de cada banda estén ocupados, y la distancia, o *intervalo vacío de energía*, que haya entre bandas adyacentes. Un factor crucial es el principio de exclusión (véase la sección 41.4) que establece que sólo un electrón puede ocupar determinado estado mecánico-cuántico.

En un *aislante* a la temperatura del cero absoluto, la banda más alta que está totalmente llena, llamada **banda de valencia**, también es la más alta que tiene *algunos* electrones en ella. La siguiente banda más alta, llamada **banda de conducción**, está totalmente vacía; no hay electrones en sus estados (figura 42.21a). Imagine lo que sucede si un campo eléctrico se aplica a un material de esta clase. Para moverse en respuesta al campo, un electrón debería pasar a un estado cuántico distinto, con una energía un poco distinta. Sin embargo, no lo puede hacer, porque todos los estados vecinos ya están ocupados. La única forma en que ese electrón se puede mover es saltando a través del intervalo vacío de energía y entrando a la banda de conducción, donde hay muchos estados cercanos desocupados. Para cualquier temperatura mayor que el cero absoluto, hay alguna probabilidad de que suceda ese salto, porque el electrón puede adquirir energía por movimientos térmicos. Sin embargo, en un aislante el intervalo vacío de energía entre las bandas de valencia y de conducción pueden ser de 5 eV o más, y de ordinario esa energía térmica no está disponible. Por consiguiente, pasa poca o nada de corriente como respuesta a un campo eléctrico aplicado, y la conductividad eléctrica (sección 25.2) es baja. La conductividad térmica (sección 17.7), que también depende de electrones móviles, también es baja.

En la sección 24.4 vimos que un aislante se vuelve conductor, si se somete a un campo eléctrico suficientemente grande; a esto se le llama *ruptura del dieléctrico*. Si el campo eléctrico es del orden de 10^{10} V/m, hay una diferencia de potencial de algunos volts en una distancia comparable a los tamaños atómicos. En este caso, el campo puede efectuar el trabajo suficiente sobre un electrón de valencia para impulsarlo a cruzar el intervalo vacío de energía y penetrar en la banda de conducción. (En la práctica, la ruptura del dieléctrico se presenta con campos mucho menores que 10^{10} V/m, por las imperfecciones en la estructura de un aislante, que proporcionan estados de energía algo más accesibles *dentro* del intervalo vacío de energía.)

Como en un aislante, un *semiconductor* en el cero absoluto, tiene una banda de conducción vacía arriba de la banda de valencia llena. La diferencia es que en un semiconductor el intervalo vacío de energía entre esas bandas es relativamente pequeño, y los electrones pueden saltar con más facilidad para entrar a la banda de conducción (figura 42.21b). A medida que aumenta la temperatura de un semiconductor, la población en la banda de conducción aumenta con mucha rapidez, y también la conductividad eléctrica. Por ejemplo, en un semiconductor cercano a la temperatura ambiente, con un intervalo vacío de energía de 1 eV, la cantidad de electrones de conducción se duplica cuando la temperatura aumenta sólo 10 °C. Usaremos el concepto de bandas de energía para explorar a los semiconductores con más detalle en la sección 42.6.

42.21 Tres tipos de estructura de bandas de energía.



En un *conductor*, como lo es un metal, hay electrones en la banda de conducción aun en el cero absoluto (figura 42.21c). El sodio metálico es un ejemplo. Un análisis del diagrama de niveles atómicos de energía del sodio (figura 38.10a) muestra que para un átomo aislado de sodio, los seis estados excitados inferiores (todos los estados 3*p*) están a unos 2.1 eV arriba de los dos estados fundamentales 3*s*. Sin embargo, en el sodio sólido, los átomos están tan cercanos entre sí que las *bandas* 3*s* y 3*p* se extienden y se traslapan, formando una sola banda. Cada átomo de sodio aporta un electrón a la banda, que deja atrás un ion Na^+. Cada átomo también aporta ocho *estados* a esa banda (dos 3*s*, seis 3*p*), por lo que la banda sólo está ocupada en una octava parte. A esta estructura se le llama banda de *conducción*, porque sólo está parcialmente ocupada. Los electrones cercanos a la parte superior de la parte llena de la banda tienen muchos estados adyacentes desocupados y disponibles, y pueden ganar o perder con facilidad pequeñas cantidades de energía como respuesta a un campo eléctrico aplicado. Por lo tanto, esos electrones son móviles y comunican al sodio sólido su alta conductividad eléctrica y térmica. Una descripción parecida se aplica a otros materiales conductores.

Ejemplo 42.6 Fotoconductividad del germanio

A una temperatura ambiente, el germanio puro tiene una banda de valencia casi totalmente llena, separada de una banda de conducción casi totalmente vacía por un intervalo vacío de 0.67 eV. Es mal conductor eléctrico, pero su conductividad aumenta bastante cuando se irradia con ondas electromagnéticas de cierta longitud de onda máxima. ¿Qué longitud de onda máxima es adecuada?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La conductividad de un semiconductor aumenta mucho cuando los electrones se trasladan de la banda de valencia a la banda de conducción. En este ejemplo, la transferencia sucede cuando un electrón absorbe un fotón con una energía mínima $E_{\text{mín}}$.

PLANTEAR: Según la ecuación $E = hc/\lambda$ para los fotones, la longitud de onda *máxima* corresponde a la energía de fotón *mínima*.

EJECUTAR: Un electrón en la parte superior de la banda de valencia puede absorber un fotón de 0.67 eV de energía (no menos) y pasar al fondo de la banda de conducción, donde se vuelve carga móvil. Así, la longitud de onda máxima es

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{hc}{E_{\text{mín}}} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.67\ \text{eV}}$$
$$= 1.9 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1.9\ \mu\text{m} = 1900\ \text{nm}$$

EVALUAR: Esta longitud de onda está en la parte infrarroja del espectro, así que los fotones de luz visible (que tienen menor longitud de onda) también inducirán la conductividad en el germanio. Como veremos en la sección 42.7, los cristales de semiconductor se usan mucho como fotoceldas, y también en muchas otras aplicaciones.

Evalúe su comprensión de la sección 42.4 Un tipo de termómetro funciona midiendo la resistividad eléctrica dependiente de la temperatura de una muestra. ¿Cuál de los siguientes tipos de material muestra el mayor cambio en resistividad para un cambio de temperatura? i) aislante; ii) semiconductor; iii) resistor.

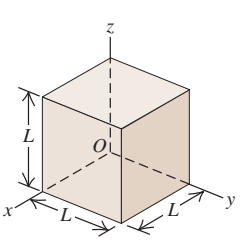
42.5 Modelo de electrones libres para los metales

El estudio de los estados de energía de los electrones en los metales nos puede dar muchas explicaciones de sus propiedades eléctricas y magnéticas, las contribuciones del electrón para las capacidades caloríficas y otros comportamientos. Como vimos en la sección 42.3, una de las propiedades distintivas de un metal es que se desprenden uno o más electrones de valencia de su átomo, y pueden moverse con libertad dentro del metal, con funciones de onda que abarcan muchos átomos.

El **modelo de electrones libres** supone que esos electrones están totalmente libres dentro del material, que no interactúan en absoluto con los iones ni entre sí, pero que en las superficies hay barreras infinitas de potencial. Las funciones de onda y los niveles de energía son, entonces, versiones tridimensionales de las de una partícula en una caja, que ya analizamos en una dimensión en la sección 40.1. Suponga que la caja es un cubo de longitud L (figura 42.22). Entonces, las funciones de onda posibles, análogas a la ecuación (40.10), son

$$\psi(x, y, z) = A \operatorname{sen}\frac{n_x \pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n_y \pi y}{L} \operatorname{sen}\frac{n_z \pi z}{L} \qquad (42.10)$$

42.22 Caja cúbica con paredes rígidas y lado L. Es la versión tridimensional del pozo cuadrado infinito descrito en la sección 40.1. Los niveles de energía de una partícula en esta caja se calculan con la ecuación (42.11).



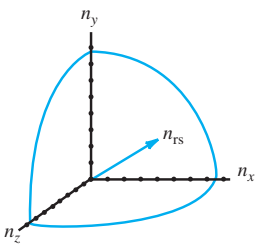
donde (n_x, n_y, n_z) es un conjunto de tres números enteros cuánticos positivos que identifican el estado. Invitamos al lector a verificar que estas funciones son cero en las superficies del cubo, y satisfacen las condiciones en la frontera. También puede sustituir la ecuación (42.10) en la ecuación de Schrödinger tridimensional, ecuación (40.28), con $U = 0$, para demostrar que las energías de los estados son

$$E = \frac{(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{42.11}$$

Esta ecuación es el análogo tridimensional de la ecuación (40.9) para los niveles de energía de una partícula en una caja.

Densidad de los estados

42.23 Los valores permitidos de n_x, n_y y n_z son los enteros positivos para los estados electrónicos en el modelo del gas de electrones libres. Al incluir el espín, hay dos estados por cada volumen unitario en el espacio n.



Después necesitaremos conocer *el número dn* de estados cuánticos que tienen energías en determinado intervalo dE. La cantidad de estados por intervalo unitario de energía, dn/dE, se llama **densidad de los estados**, y se representa con $g(E)$. Comenzaremos deduciendo una ecuación para $g(E)$. Imaginemos un espacio tridimensional con coordenadas (n_x, n_y, n_z) (figura 42.23). El radio n_{rs} de una esfera centrada en el origen, en ese espacio, se define por $n_{rs}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$. Cada punto con coordenadas enteras, en ese espacio, representa un estado cuántico espacial. Así, cada punto corresponde a una unidad de volumen en el espacio, y la cantidad total de puntos con coordenadas enteras dentro de una esfera es igual al volumen de la esfera, $\frac{4}{3}\pi n_{rs}^3$. Ya que todas nuestras n son positivas, sólo debemos considerar un *octante* de la esfera, con $\frac{1}{8}$ del volumen total: $\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{3}\pi n_{rs}^3\right) = \frac{1}{6}\pi n_{rs}^3$. Las partículas son electrones, así que cada punto corresponde a *dos* estados con componentes opuestos de espín $\left(m_s = \pm\frac{1}{2}\right)$, y el número total n de estados electrónicos correspondientes a puntos dentro del octante es el doble de $\frac{1}{6}\pi n_{rs}^3$, es decir,

$$n = \frac{\pi n_{rs}^3}{3} \tag{42.12}$$

La energía E de los estados en la superficie de la esfera se puede expresar en función de n_{rs}. La ecuación (42.11) se convierte en

$$E = \frac{n_{rs}^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{42.13}$$

Se pueden combinar las ecuaciones (42.12) y (42.13) para obtener una relación entre E y n que no contenga n_{rs}. Dejaremos los detalles como ejercicio (ejercicio 42.24); el resultado es

$$n = \frac{(2m)^{3/2}VE^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \tag{42.14}$$

donde $V = L^3$ es el volumen de la caja. La ecuación (42.14) indica el número total de estados con energías E o menores.

Para obtener el número de estados dn en un intervalo de energía dE, consideramos que n y E son variables continuas y diferenciamos ambos lados de la ecuación (42.14). Se obtiene,

$$dn = \frac{(2m)^{3/2}VE^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}\,dE \tag{42.15}$$

La densidad de estados, $g(E)$, es igual a dn/dE, por lo tanto, de la ecuación (42.15) obtenemos

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{2\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \qquad \text{(densidad de estados, modelo de electrones libres)} \tag{42.16}$$

Distribución de Fermi-Dirac

Ahora necesitamos conocer la forma en que están distribuidos los electrones entre los diversos estados cuánticos a cualquier temperatura dada. La *distribución de Maxwell-Boltzmann* establece que el número promedio de partículas en un estado de energía E

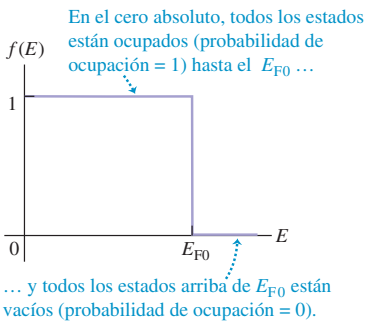
es proporcional a $e^{-E/kT}$ (véase la sección 38.6). Sin embargo, no sería correcto usar la distribución de Maxwell-Boltzmann, por dos razones muy importantes. La primera es el *principio de exclusión.* En el cero absoluto, la distribución de Maxwell-Boltzmann indica que *todos* los electrones pasarían a los dos estados fundamentales del sistema, con $n_x = n_y = n_z = 1$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Pero el principio de exclusión sólo permite que haya un electrón en cada estado. En el cero absoluto, los electrones pueden llenar hasta los estados inferiores *disponibles*, pero no hay espacio suficiente como para que *todos* ellos vayan a esos estados inferiores. Así, una hipótesis razonable acerca de la forma de la distribución sería la figura 42.24. En la temperatura de cero absoluto, los estados se llenan hasta cierto valor E_{F0}, y todos los estados arriba de dicho valor están vacíos.

La segunda razón por la que no podemos usar la distribución de Maxwell-Boltzmann es más sutil. En esa distribución se supone que estamos manejando partículas *distinguibles*. Parecería que se puede colocar una etiqueta en cada electrón, y saber cuál es cuál. Pero los electrones que se traslapan en un sistema como un metal son *indistinguibles*. Suponga que hay dos electrones; un estado en el que el primero está en un nivel de energía E_1 y el segundo está en el nivel E_2; este estado no es distinguible de uno donde los dos electrones están invertidos, porque no podemos decir cuál electrón es cuál.

La función de distribución estadística que se origina en el principio de exclusión y en el requisito de indistinguibilidad se llama **distribución de Fermi-Dirac** (en honor de sus inventores). Debido al principio de exclusión, la probabilidad de que un estado determinado con energía E esté ocupado por un electrón es igual a $f(E)$, la fracción de estados con esa energía, que están ocupados:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \qquad \text{(distribución de Fermi-Dirac)} \qquad (42.17)$$

42.24 Distribución de la probabilidad de ocupación de estados de energía para electrones libres, en el cero absoluto.

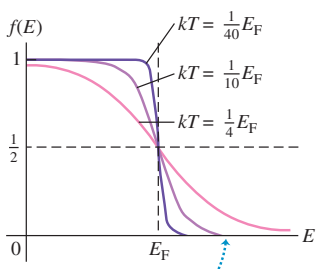


A la energía E_F se le llama **energía de Fermi** o *nivel de Fermi*; más adelante describiremos su importancia. Usaremos E_{F0} para representar su valor en el cero absoluto ($T = 0$) y E_F para otras temperaturas. Se puede hacer, con exactitud, que $E_F = E_{F0}$ para los metales, porque la energía de Fermi no cambia mucho con la temperatura en los conductores sólidos. Sin embargo, no es seguro suponer que $E_F = E_{F0}$ para los semiconductores, en los que la energía de Fermi, por lo general, no cambia con la temperatura.

La figura 42.25 muestra gráficas de la ecuación (42.17) para tres temperaturas. La tendencia de esa función, cuando kT tiende a cero, confirma nuestra hipótesis. Cuando $E = E_F$, el exponente es cero y $f(E_F) = \frac{1}{2}$. Esto es, hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que un estado en la energía de Fermi contenga un electrón. En forma alternativa, en $E = E_F$, la mitad de los estados está llena (y la mitad vacía).

Para $E < E_F$ el exponente es negativo $f(E) > \frac{1}{2}$. Para $E > E_F$ el exponente es positivo y $f(E) < \frac{1}{2}$. La forma depende de la relación E_F/kT. Cuando $T \ll E_F/k$ esta relación es muy grande. Entonces, para $E < E_F$ la curva tiende con mucha rapidez a 1, y para $E > E_F$, tiende a cero con rapidez. Cuando T es mayor, los cambios son más graduales. Cuando T es cero, todos los estados están llenos hasta el nivel de Fermi E_{F0}, y todos los estados arriba de ese nivel están vacíos (figura 42.24).

42.25 Gráficas de la función de distribución de Fermi-Dirac para varios valores de kT, suponiendo que la energía de Fermi E_F es independiente de la temperatura T.



Ejemplo 42.7 Probabilidades en el modelo de electrones libres

Para electrones libres en un sólido, ¿para qué energía la probabilidad de que un determinado estado esté ocupado es igual a *a*) 0.01 y *b*) 0.99?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere explorar cómo la distribución de Fermi-Dirac depende de la temperatura.

PLANTEAR: La ecuación (42.17) nos indica la probabilidad de ocupación $f(E)$ para determinada energía E. Si de esta ecuación despejamos E, obtendremos una ecuación para la energía que corresponde a determinada probabilidad de ocupación, que es justo lo que necesitamos para resolver este problema.

EJECUTAR: Al despejar E de la ecuación (42.17),

$$E = E_F + kT\ln\left(\frac{1}{f(E)} - 1\right)$$

continúa

a) Cuando $f(E) = 0.01$,

$$E = E_F + kT\ln\left(\frac{1}{0.01} - 1\right) = E_F + 4.6kT$$

Un estado $4.6kT$ arriba del nivel de Fermi sólo está ocupado 1% del tiempo.

b) Cuando $f(E) = 0.99$,

$$E = E_F + kT\ln\left(\frac{1}{0.99} - 1\right) = E_F - 4.6kT$$

Un estado $4.6kT$ abajo del nivel de Fermi está ocupado el 99% del tiempo.

EVALUAR: A temperaturas muy bajas, $4.6kT$ se vuelve muy pequeño. Entonces los niveles, aun cuando estén muy poco por debajo de E_F, casi siempre están llenos, y a niveles muy poco por arriba de E_F casi siempre están vacíos (véase la figura 42.25). En general, si hay la probabilidad P de que esté ocupado un estado con una energía ΔE *arriba* de E_F, hay la probabilidad $1 - P$ de que un estado ΔE *abajo* de E_F esté ocupado. Dejaremos la demostración como problema (problema 42.48).

Concentración de electrones y energía de Fermi

La ecuación (42.17) define la probabilidad de que algún estado específico con energía E esté ocupado a una temperatura T. Para obtener la cantidad real de electrones en cualquier intervalo dE de energía, hay que multiplicar esta probabilidad por el número dn de estados en ese intervalo $g(E)\,dE$. Entonces, la cantidad dN de electrones con energías en el intervalo dE es

$$dN = g(E)f(E)\,dE = \frac{(2m)^{3/2}VE^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}\,dE \tag{42.18}$$

La energía de Fermi E_F está determinada por la cantidad total N de electrones; en cualquier temperatura los estados electrónicos se llenan hasta un punto donde todos los electrones estén acomodados. En el cero absoluto, hay una relación sencilla entre E_{F0} y N. *Todos* los estados de menos que E_{F0} están llenos; en la ecuación (42.14) se iguala n a la cantidad N total de electrones, y E a la energía de Fermi en el cero absoluto E_{F0}:

$$N = \frac{(2m)^{3/2}VE_{F0}^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \tag{42.19}$$

Se despeja E_{F0} para obtener

$$E_{F0} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \tag{42.20}$$

La cantidad N/V es el número de electrones libres por unidad de volumen. Se llama *concentración de electrones*, y se suele representar por n.

Si sustituimos N/V por n, la ecuación (42.20) se convierte en

$$E_{F0} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \tag{42.21}$$

CUIDADO **Concentración de electrones y cantidad de electrones** No confunda la concentración de electrones n con algún número cuántico n. Además, en general la cantidad de estados *no* es igual que la cantidad total de electrones N.

Ejemplo 42.8 La energía de Fermi en el cobre

A bajas temperaturas, el cobre tiene una concentración de electrones libres igual a $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Usando el modelo de electrón libre, determine la energía de Fermi del cobre sólido, y calcule la rapidez de un electrón cuya energía cinética sea igual a la energía de Fermi.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre energía de Fermi y la concentración de electrones libres.

PLANTEAR: Como el cobre es un conductor sólido, su energía de Fermi cambia muy poco con la temperatura, y con seguridad se puede usar la ecuación de la energía de Fermi en el cero absoluto: ecuación (42.21). La rapidez v_F que corresponde a la energía cinética E_F se determina usando la conocida fórmula no relativista de la energía cinética.

EJECUTAR: Se usa el valor dado para n:

$$E_F = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2(8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})^{2/3}}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$
$$= 1.126 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.03\ \text{eV}$$

Para determinar la rapidez v_F correspondiente, usaremos $E_F = \frac{1}{2}mv_F^2$:

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.126 \times 10^{-18}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.57 \times 10^6\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Las energías de Fermi características de los metales van de 1.6 a 14 eV; nuestro valor está dentro de este intervalo, como debería.

La cantidad v_F se llama *velocidad de Fermi*. El valor que calculamos para v_F es mucho menor que la rapidez de la luz, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, lo que justifica el uso de las fórmulas no relativistas. Para los metales, las velocidades de Fermi típicas van de 0.8 a 2.2×10^6 m/s.

Nuestros resultados indican que la energía de Fermi es mucho *mayor* que kT a temperaturas ordinarias, por lo que una buena aproximación es suponer que casi todos los estados menores que E_F están totalmente llenos, y casi todos los mayores que E_F están totalmente vacíos (véase la figura 42.24).

También se puede usar la ecuación (42.16) para determinar $g(E)$ si se conocen E y V. El lector puede demostrar que si $E = 7$ eV y $V = 1$ cm^3, $g(E)$ es más o menos igual a 2×10^{22} estados/eV. Este número tan gigantesco muestra por qué era justificado el tratamiento de n y E como variables continuas en nuestra deducción de densidad de estados.

Energía media de los electrones libres

Podemos calcular la energía *media* de los electrones libres en un metal, en el cero absoluto, con los mismos conceptos que usamos para determinar E_{F0}. De acuerdo con la ecuación (42.18), la cantidad dN de electrones cuyas energías estén dentro del intervalo dE es $g(E)f(E)\,dE$. La energía de estos electrones es $E\,dN = Eg(E)f(E)\,dE$. En el cero absoluto, se sustituye $f(E) = 1$ desde $E = 0$ hasta $E = E_{F0}$ y $f(E) = 0$ para todas las demás energías. Entonces, la energía total E_{tot} de todos los N electrones es

$$E_{tot} = \int_0^{E_{F0}} Eg(E)(1)\,dE + \int_{E_{F0}}^{\infty} Eg(E)(0)\,dE = \int_0^{E_{F0}} Eg(E)\,dE$$

La forma más sencilla de evaluar esta ecuación es comparar las ecuaciones (42.16) y (42.20), observando que

$$g(E) = \frac{3NE^{1/2}}{2E_{F0}^{3/2}}$$

Al sustituir esta ecuación en la integral, y usando $E_{med} = E_{tot}/N$, se obtiene

$$E_{med} = \frac{3}{2E_{F0}^{3/2}} \int_0^{E_{F0}} E^{3/2}\,dE = \frac{3}{5}E_{F0} \qquad (42.22)$$

Es decir, en el cero absoluto, la energía media de los electrones libres es igual a $\frac{3}{5}$ de la energía de Fermi correspondiente.

Ejemplo 42.9 Gas de electrones libres en comparación con el gas ideal

a) Determine la energía media de los electrones libres en el cobre, en el cero absoluto (ejemplo 42.8). *b*) Si los electrones se comportaran como un gas ideal (véase la sección 18.3) a temperatura ambiente, ¿cuál sería su energía cinética media? ¿Cuál sería la rapidez de un electrón con esa energía cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En un metal los electrones libres se comportan como una clase de gas. En este ejemplo se nos pide comparar este gas con el gas ideal que examinamos en el capítulo 18.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (42.22) para determinar la energía cinética media de los electrones libres. Si los electrones se comportaran como un gas ideal clásico, con temperatura T, de acuerdo con la ecuación (18.16) la energía cinética media por electrón sería $E_{med} = \frac{3}{2}kT$; usaremos esta relación para determinar la energía y la rapidez pedidas en el inciso *b*).

EJECUTAR: *a*) Según el ejemplo 42.8, la energía de Fermi en el cobre es 1.126×10^{-18} J = 7.03 eV. De acuerdo con la ecuación (42.22), la energía media es $\frac{3}{5}$ de la anterior, es decir, 6.76×10^{-19} J = 4.22 eV.

b) Si los electrones se comportaran como un gas ideal a temperatura ambiente ($T = 20$ °C = 293 K), la energía cinética media por electrón sería

$$E_{med} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})$$
$$= 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0379\ \text{eV}$$

La rapidez de un electrón con esta energía cinética sería

$$v = \sqrt{\frac{2E_{med}}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.07 \times 10^{-21}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.15 \times 10^5\ \text{m/s}$$

EVALUAR: La energía media determinada con el modelo del gas ideal es menos del 1% del valor (correcto) que se obtuvo en el modelo del electrón libre, y la velocidad correspondiente en el modelo de gas ideal sólo es una fracción pequeña de la velocidad de Fermi característica, obtenida con el modelo del electrón libre (véase el ejemplo 42.8). Así, la temperatura juega un papel *muy* pequeño en la determinación de las propiedades de los electrones en los metales; en vez de ello, las energías medias están determinadas casi totalmente por el principio de exclusión.

continúa

Un análisis semejante nos permite determinar las aportaciones de los electrones a las capacidades caloríficas de un metal sólido. Si hay un electrón de conducción por átomo, el principio de la equipartición de la energía (véase la sección 18.4) indicaría que las energías cinéticas de esos electrones aportan $3R/2$ a la capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V. Pero cuando kT es mucho menor que E_F, lo cual suele ser el caso en los metales, sólo los pocos electrones que estén cerca del nivel de Fermi pueden encontrar estados vacíos, y cambiar de energía en forma apreciables cuando cambie la temperatura. La cantidad de esos electrones es proporcional a kT/E_F, por lo que se esperaría que la capacidad calorífica molar de los electrones, a volumen constante, sea proporcional a $(kT/E_F)(3R/2) = (3kT/2E_F)R$. Un análisis más detallado demuestra que la contribución real de los electrones al C_V de un metal sólido es $(\pi^2 kT/2E_F)\,R$, no muy apartada de nuestra estimación. Puede usted comprobar que si $T = 293$ K y $E_F = 7.03$ eV, la contribución de los electrones a C_V es 0.018R, que sólo es 1.2% de la predicción $3R/2$ (incorrecta) basada en el principio de equipartición. Como la contribución de los electrones es tan pequeña, la capacidad calorífica general de la mayoría de los metales sólidos se debe principalmente a la vibración de los átomos en la estructura cristalina (véase la figura 18.18 en la sección 18.4).

Evalúe su comprensión de la sección 42.5 Un gas ideal obedece la ecuación $pV = nRT$ (véase la sección 18.1). Esto es, para determinado volumen V y cantidad de moles n, al bajar la temperatura T, la presión p disminuye en forma proporcional y tiende a cero cuando T tiende al cero absoluto. ¿Sucede lo mismo con el gas de electrones libres en un metal sólido?

42.6 Semiconductores

Un **semiconductor** tiene una resistividad eléctrica intermedia entre las de los buenos conductores y las de los buenos aislantes. La enorme importancia de los semiconductores en la electrónica actual se debe, en parte, al hecho de que sus propiedades eléctricas son muy sensibles a concentraciones muy pequeñas de impurezas. Describiremos los conceptos básicos, usando como ejemplos de elementos semiconductores al silicio (Si) y al germanio (Ge).

El silicio y el germanio están en el grupo IV de la tabla periódica. Ambos tienen cuatro electrones en sus subcapas atómicas externas ($3s^2 3p^2$ para el silicio, $4s^2 4p^2$ para el germanio) y ambos cristalizan en la estructura del diamante, con enlaces covalentes, descrita en la sección 42.3 (figura 42.16). Como los cuatro electrones externos intervienen en los enlaces, en el cero absoluto la estructura de bandas (véase la sección 42.4) tiene una banda de conducción totalmente vacía (figura 42.21b). Como explicamos en la sección 42.4, a temperaturas muy bajas los electrones no pueden saltar desde la banda de valencia llena hasta la banda de conducción, por lo que el silicio y el germanio son aislantes a dichas temperaturas. Tal distribución hace que estos materiales sean aislantes a temperaturas muy bajas; sus electrones no tienen estados cercanos disponibles a los que puedan pasar como respuesta a un campo eléctrico aplicado.

Sin embargo, el intervalo vacío de energía E_g entre las bandas de valencia y de conducción es pequeña, en comparación con el intervalo vacío de 5 eV o más, para muchos aislantes; los valores a temperatura ambiente son 1.12 eV para el silicio y sólo 0.67 eV para el germanio. Así, aun a temperatura ambiente una cantidad apreciable de electrones puede ganar la energía suficiente como para saltar el intervalo y llegar a la banda de conducción, donde se disocian de los átomos a los que pertenecían y quedan en libertad de movimiento por todo el cristal. La cantidad de esos electrones aumenta con rapidez al incrementarse la temperatura.

Ejemplo 42.10 Salto del intervalo vacío de energía

Un material tiene la estructura de bandas que se describió arriba, con su energía de Fermi en la mitad del intervalo vacío (figura 42.26). Calcule la probabilidad de que se ocupe un estado en el fondo de la banda de conducción a una temperatura de 300 K, si el intervalo vacío es *a*) 0.200 eV; *b*) 1.00 eV; *c*) 5.00 eV. Repita los cálculos con una temperatura de 310 K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 42.25 muestra que cuanto mayor sea la temperatura, mayor será la fracción de electrones que tengan energías mayores que la energía de Fermi E_F. Use esta idea para ejecutar los cálculos deseados.

PLANTEAR: La función de distribución de Fermi-Dirac define la probabilidad de que esté ocupado un estado de energía E a la temperatura T. La figura 42.26 muestra que el estado de interés en el fondo de la banda de conducción tiene la energía $E = E_F + E_g/2$, o $E - E_F = E_g/2$.

EJECUTAR: *a*) Cuando $E_g = 0.200$ eV,

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0.100\ \text{eV}}{(8.617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K})} = 3.87$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{3.87} + 1} = 0.0205$$

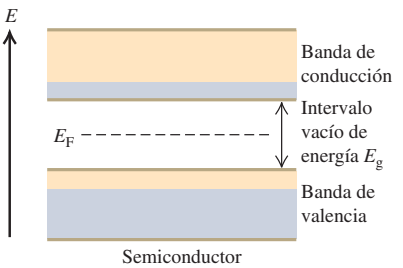
Con $E_g = 0.200$ eV y $T = 310$ K, el exponente es 3.74 y $f(E) = 0.0231$, un aumento del 13% sólo con un aumento de temperatura de 10 K.

b) Cuando $E_g = 1.00$ eV, los dos exponentes son cinco veces mayores que antes, 19.3 y 18.7; los valores de $f(E)$ son 4.0×10^{-9} y 7.4×10^{-9}. En este caso, la probabilidad casi sube al doble con un aumento de temperatura de 10 K.

c) Cuando $E_g = 5.0$ eV, los exponentes son 96.7 y 93.6; los valores de $f(E)$ son 1.0×10^{-42} y 2.3×10^{-41}. La probabilidad aumenta en un factor de 23 con un aumento de temperatura de 10 K, pero sigue siendo extremadamente pequeña. El diamante puro, con un intervalo vacío de 5.47 eV, en esencia no tiene electrones en la banda de conducción, y es un excelente aislante.

EVALUAR: Este ejemplo ilustra dos puntos importantes. Primero, la probabilidad de que un electrón se encuentre en un estado en el fondo de la banda de conducción es en extremo sensible al ancho del intervalo vacío. Cuando el intervalo es 0.20 eV, la probabilidad es 2% aproximadamente, pero cuando es 1.00 eV, la probabilidad es de pocas unidades en mil millones, y para un intervalo vacío de 5.0 eV es cero en esencia. En segundo lugar, para cualquier intervalo vacío dado, la probabilidad depende mucho de la temperatura, más en intervalos grandes que en pequeños.

42.26 Estructura de bandas de un semiconductor. En el cero absoluto, una banda de valencia totalmente llena está separada por un intervalo vacío angosto E_g, de 1 eV más o menos, de una banda de conducción totalmente vacía. A temperaturas ordinarias, varios electrones están excitados y pasan a la banda de conducción.



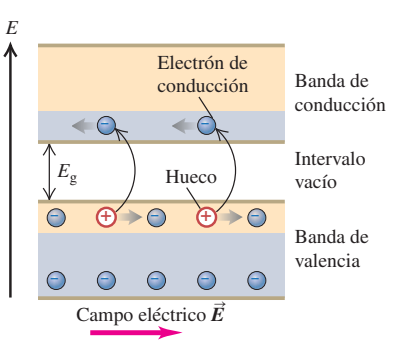
En principio podríamos continuar el cálculo del ejemplo 42.10 para determinar la densidad real, $n = N/V$, de los electrones en la banda de conducción a cualquier temperatura. Para hacerlo, abría que evaluar la integral $\int g(E) f(E)\, dE$ desde el fondo hasta la parte superior de la banda. Primero habría que conocer la función de densidad de estados, $g(E)$. No sería correcto usar la ecuación (42.16), porque la estructura de niveles de energía y la densidad de estados para sólidos reales son más complejas, que las del modelo sencillo de electrones libres. No obstante, hay métodos teóricos para predecir cuál debería ser $g(E)$ cerca del fondo de la banda de conducción, y se han hecho esos cálculos. Conociendo n podemos *comenzar* a determinar la resistividad del material (y su dependencia de la temperatura) con el análisis de la sección 25.2, que podrá repasar el lector. Pero a continuación veremos que los electrones en la banda de conductividad no dicen todo acerca de la conducción en los semiconductores.

Huecos

Cuando un electrón sale de un enlace covalente, deja tras de sí una vacante. Un electrón de un átomo vecino puede pasar a esa vacante y el átomo vecino se queda con la vacante. De esta forma, la vacante, llamada **hueco**, puede viajar por el material y servir como un portador adicional de corriente. Es como describir el movimiento de una burbuja en un líquido. En un semiconductor puro, o *intrínseco*, los huecos en banda de valencia, y los electrones en banda de conducción, siempre existen en cantidades iguales. Cuando se aplica un campo eléctrico, se mueven en direcciones contrarias (figura 42.27). Así, un hueco en la banda de valencia se comporta como una partícula con carga positiva, aun cuando las cargas en movimiento en esa banda sean electrones. La conductividad que acabamos de describir, en un semiconductor puro, se llama *conductividad intrínseca*. Otra clase de conductividad, que describiremos en la siguiente sección, se debe a las impurezas.

Con una analogía nos ayudamos a representar la conducción en un semiconductor intrínseco. La banda de valencia en el cero absoluto es como un piso de un estacionamiento, lleno de vehículos con sus parachoques uno tras otro (que representan los electrones). No se pueden mover, porque no hay dónde puedan ir. Pero si uno se mueve al piso vacío de arriba, puede moverse con libertad, igual que los electrones pueden pasar libremente a la banda de conducción. También, el espacio vacío que deja permite que los demás automóviles se muevan en el piso casi lleno, y de ese modo el espacio vacío se mueve, del mismo modo que los huecos se mueven en la banda de valencia normalmente llena.

42.27 Movimiento de electrones en la banda de conducción, y de huecos en la banda de valencia de un semiconductor, bajo la acción de un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.

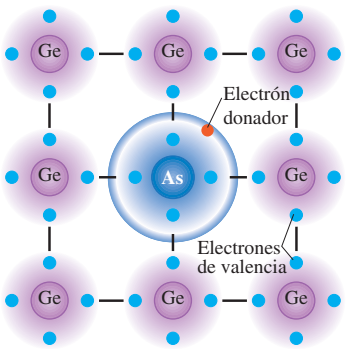


Impurezas

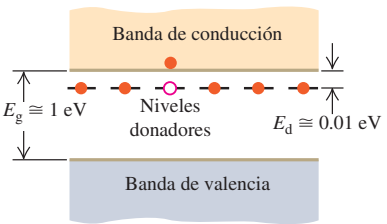
Suponga que en el germanio fundido ($Z = 32$) se incorpora una pequeña cantidad de arsénico ($Z = 33$), el elemento que sigue al germanio en la tabla periódica. Esta

42.28 Un semiconductor tipo *n*.

a) Un átomo de impureza donador (tipo *n*) tiene un quinto electrón de valencia que no participa en el enlazamiento covalente, y está enlazado muy débilmente.



b) Diagrama de bandas de energía para un semiconductor tipo *n* a baja temperatura. Se ha excitado un electrón donador, desde los niveles de donador hasta la banda de conducción.



adición deliberada de elementos de impureza se llama *dopado*. El arsénico está en el grupo V; tiene *cinco* electrones de valencia. Cuando se quita uno de esos electrones, la estructura electrónica restante es esencialmente idéntica a la del germanio. La única diferencia es que es menor; el núcleo del arsénico tiene una carga de $+33e$, y no de $+32e$, y tira un poco más de los electrones. Un átomo de arsénico puede caber en forma confortable en el lugar de un átomo de germanio, como impureza de sustitución. Cuatro de sus cinco electrones de valencia forman los enlaces covalentes necesarios con los vecinos más cercanos.

El quinto electrón de valencia está enlazado muy flojamente (figura 42.28a); no participa en los enlaces covalentes y está apantallado de la carga nuclear de $+33e$ por los 32 electrones, quedando una carga efectiva neta aproximada de $+e$. Podríamos adivinar que la energía de enlace tendría el mismo orden de magnitud que la del nivel $n = 4$ en el átomo de hidrógeno, esto es, $\left(\frac{1}{4}\right)^2(13.6\text{ eV}) = 0.85$ eV. De hecho, es mucho menor, sólo de aproximadamente 0.01 eV, porque la distribución de probabilidad electrónica se extiende en realidad por muchos diámetros atómicos, y la polarización de los átomos que participan brinda un apantallamiento adicional.

El nivel de energía de este quinto electrón corresponde en la representación de bandas a un nivel aislado de energía en el intervalo vacío, a 0.01 eV aproximadamente abajo del fondo de la banda de conducción (figura 42.28b). Este nivel se llama *nivel donador*, y el átomo de impureza responsable del mismo se llama *donador*. Todos los elementos del grupo V, incluyendo N, P, As, Sb y Bi pueden servir como donadores. A temperatura ambiente, kT es de unos 0.025 eV. Esto es bastante mayor que 0.01 eV, por lo que a temperaturas ordinarias, la mayoría de los electrones pueden ganar la energía suficiente como para saltar de los niveles del donador a la banda de conducción, donde quedan en libertad para vagar por el material. El donador ionizado queda en su sitio en la estructura, y no participa en la conducción.

El ejemplo 42.10 muestra que a temperaturas ordinarias, y con un intervalo vacío de 1.0 eV, sólo una pequeña parte (del orden de 10^{-9}) de los estados en el fondo de la banda de conducción, en un semiconductor puro, contiene electrones que participan en la conductividad intrínseca. Entonces, se esperaría que la conductividad de ese semiconductor sea aproximadamente 10^{-9} el valor de la conductividad de los buenos conductores metálicos, y las mediciones confirman esta predicción. Sin embargo, una concentración de donadores tan pequeña como una parte en 10^8 puede aumentar la conductividad en forma tan drástica que la conducción debida a impurezas se vuelve, con mucho, el mecanismo dominante. En este caso, la conductividad se debe casi totalmente a movimiento de cargas *negativas* (electrones). A este material se le llama **semiconductor tipo *n***, con impurezas tipo *n*.

Si se agregan átomos de un elemento del grupo III (Ba, Al, Ga, In, Tl) con sólo *tres* electrones de valencia, se consigue un efecto análogo. Un ejemplo es el galio ($Z = 31$); como una impureza de sustitución en el germanio, el átomo de galio quisiera formar cuatro enlaces covalentes, pero sólo tiene tres electrones externos. Sin embargo, puede robar un electrón de un átomo vecino de germanio, para completar los cuatro enlaces covalentes requeridos (figura 42.29a). El átomo que resulta tiene la misma configuración electrónica que el Ge, pero es algo mayor, porque la carga nuclear del galio es menor, $+31e$ en vez de $+32e$.

Este robo deja al átomo vecino con un *hueco*, o electrón faltante. El hueco funciona como carga positiva que se puede mover a través del cristal, igual que en la conductividad intrínseca. El electrón robado está enlazado al átomo de galio, en un nivel llamado *nivel receptor*, aproximadamente a 0.01 eV arriba de la parte superior de la banda de valencia (figura 42.29b). El átomo de galio, llamado *receptor*, acepta así un electrón para satisfacer su deseo de cuatro enlaces covalentes. Este electrón adicional comunica al átomo de galio, antes neutral, una carga neta de $-e$. El ion de galio que resulta *no* tiene libertad de movimiento. En un semiconductor dopado con receptores, se considera que la conductividad se debe casi por completo al movimiento de cargas *positivas* (huecos). Al material se le llama **semiconductor tipo *p***, con impurezas tipo *p*. Algunos semiconductores se dopan con impurezas de *ambos* tipos, tipo *n* y tipo *p*. A esos materiales se les llama semiconductores *compensados*.

CUIDADO **El significado de "tipo *p*" y "tipo *n*"** Decir que un material es un semiconductor tipo *p* *no* quiere decir que el material tenga una carga positiva; por lo común, sería neutro. Más bien, quiere decir que la *mayoría* de sus *portadores* de corriente son huecos positivos (y, en

consecuencia, la *minoría* de sus portadores son electrones negativos). El mismo concepto es válido para un semiconductor tipo *n*; de ordinario *no* tiene una carga negativa, pero la mayoría de sus portadores son electrones negativos.

Podemos verificar la afirmación de que la corriente, en los semiconductores tipos *n* y *p,* en realidad sí es conducida por electrones y huecos, respectivamente, usando el efecto Hall (véase la sección opcional 27.9). El signo de la fem de Hall es contrario en los dos casos. Los dispositivos de efecto Hall se fabrican con materiales semiconductores en los sensores para medir campos magnéticos y las corrientes que los causan.

Evalúe su comprensión de la sección 42.6 ¿Habría alguna ventaja al agregar impurezas tipo *n* o tipo *p* al cobre? ¿Por qué?

42.7 Dispositivos con semiconductores

Los dispositivos con semiconductores llenan un papel indispensable en la electrónica contemporánea. En los primeros días de la radio y la televisión, el equipo de transmisión y recepción se basaba en tubos al vacío, que han sido sustituidos casi totalmente en las últimas cuatro décadas por dispositivos de estado sólido, como transistores, diodos, circuitos integrados y otros dispositivos con semiconductores. Los únicos tubos al vacío que sobreviven en la electrónica del hogar son los cinescopios en la mayoría de los receptores de TV, y en muchos monitores de computadora, pero aun estos se están sustituyendo con pantallas planas.

Un dispositivo semiconductor sencillo es la *fotocelda* (figura 42.30). Cuando una placa delgada de semiconductor se irradia con una onda electromagnética cuyos fotones tienen, al menos, tanta energía como la banda prohibida entre las bandas de valencia y de conducción, un electrón en la banda de valencia puede absorber un fotón y saltar a la banda de conducción, donde él y el agujero que dejó atrás contribuyen a la conductividad (véase el ejemplo 42.6, sección 42.4). En consecuencia, la conductividad aumenta con la intensidad de la onda, incrementando así la corriente I en el circuito de fotocelda de la figura 42.30. Por lo tanto, la lectura del amperímetro indica la intensidad de la luz.

Los detectores de partículas cargadas funcionan con el mismo principio. Un circuito externo aplica un voltaje a través de un semiconductor. Una partícula con carga eléctrica que pasa por el semiconductor choca en forma inelástica con los electrones de valencia y los excita haciéndolos pasar de la banda de valencia a la de conducción, formando pares de huecos y electrones conductores. La conductividad aumenta en forma momentánea, produciendo un impulso de corriente en el circuito externo. Los detectores de estado sólido se usan mucho en investigación nuclear y en la física de alta energía; sin ellos, no se habrían realizado algunos de los descubrimientos más recientes.

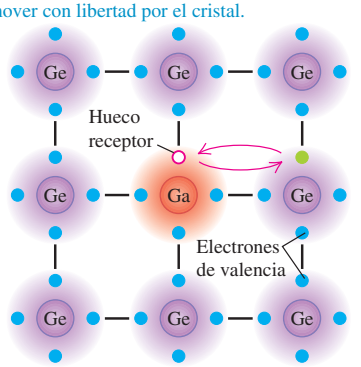
La unión *p-n*

En muchos dispositivos semiconductores, el principio esencial se basa en el hecho que la conductividad del material esté controlada por concentraciones de impurezas, que se pueden variar dentro de amplios límites, de una región de un dispositivo a otra. Un ejemplo de esto es la **unión *p-n*** en la frontera entre una región de un semiconductor con impurezas tipo *p*, y otra región que contiene impurezas tipo *n.* Una forma de fabricar una unión *p-n* es depositar algo de material tipo *n* sobre la superficie *muy* limpia de algún material tipo *p.* (No sólo se trata de pegar piezas de tipo *p* y *n* y esperar que la unión trabaje bien, por la imposibilidad de hacer coincidir sus superficies a escala atómica.)

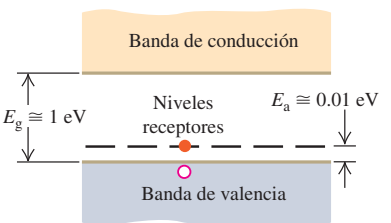
Cuando una unión *p-n* se conecta con un circuito externo, como en la figura 42.31a, y se hace variar la diferencia de potencial $V_p - V_n = V$ a través de la unión, la corriente I varía como se ve en la figura 42.31b. En notable contraste con el comportamiento simétrico de los resistores que obedecen la ley de Ohm y producen una recta en una gráfica *I-V*, una unión *p-n* conduce con mucha mayor facilidad en la dirección de *p* a *n* que a la inversa. A ese dispositivo (casi) unidireccional se le llama **diodo rectificador**.

42.29 Un semiconductor tipo *p*.

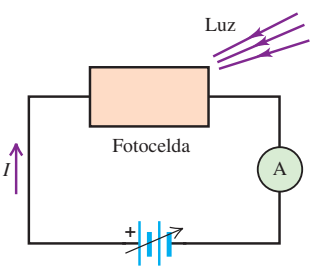
a) Un átomo receptor de impureza (tipo *p*) sólo tiene tres electrones de valencia, por lo que puede pedir prestado un electrón a un átomo vecino. El hueco que resulta se puede mover con libertad por el cristal.

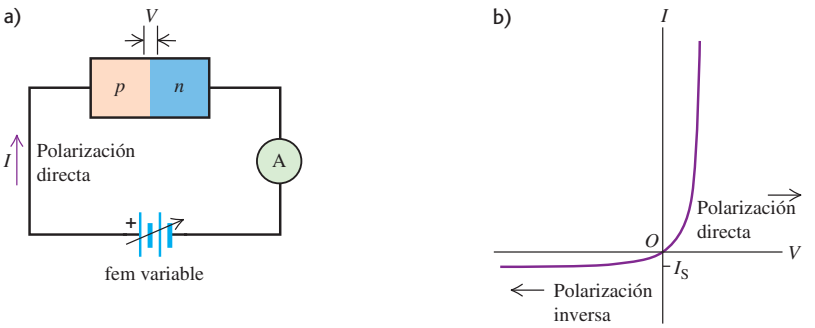


b) Diagrama de bandas de energía para un semiconductor tipo *p* a baja temperatura. Un nivel receptor ha aceptado un electrón de la banda de valencia, dejando atrás un hueco.



42.30 Una fotocelda semiconductora en un circuito. Cuanto más intensa sea la luz que cae en la fotocelda, mayores serán la conductividad de la fotocelda y la corriente medida por el amperímetro (A).





42.31 a) Una unión *p-n* de semiconductores en un circuito. b) Gráfica que muestra la relación asimétrica entre corriente y voltaje. La curva se describe con la ecuación (42.23).

Después describiremos un modelo sencillo de comportamiento de la unión *p-n* que pronostica una relación entre corriente y voltaje de la forma

$$I = I_S\left(e^{eV/kT} - 1\right) \qquad \text{(corriente a través de la unión } p\text{-}n\text{)} \qquad (42.23)$$

En el exponente, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C es el cuanto de carga, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.

CUIDADO **Dos usos diferentes de *e*** En $e^{eV/kT}$, la base del exponente también tiene el símbolo e, que representa la base de los logaritmos naturales, 2.71828. . . Esta e es muy distinta de $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C en el exponente.

La ecuación (42.23) es válida para valores tanto positivos como negativos de V; observe que V e I tienen siempre el mismo signo. Cuando V se vuelve muy negativo, I tiende al valor $-I_S$. La magnitud I_S (siempre positiva) se llama *corriente de saturación*.

Ejemplo 42.11 ¿Un diodo de unión *p-n* siempre es un dispositivo unidireccional?

A una temperatura de 290 K, cierto diodo de unión *p-n* tiene una corriente de saturación $I_S = 0.500$ mA. Calcule la corriente en esta temperatura, cuando el voltaje es 1.00 mV, −1.00 mV, 100 mV y −100 mV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre corriente, corriente de saturación, voltaje y temperatura para un diodo semiconductor.

PLANTEAR: Los datos son los valores de la corriente de saturación I_S y la temperatura T, por lo que podemos aplicar la ecuación (42.23) para determinar la corriente I con distintos valores del voltaje V.

EJECUTAR: A $T = 290$ K, $kT = 0.0250$ eV $= 25.0$ meV. Cuando $V = 1.00$ mV, $eV/kT = e(1.00\text{ mV})/(25.0\text{ meV}) = 0.0400$. De acuerdo con la ecuación (42.23), la corriente es

$$I = (0.500\text{ mA})\left(e^{0.0400} - 1\right) = 0.0204\text{ mA}$$

Cuando $V = -1.00$ mv,

$$I = (0.500\text{ mA})\left(e^{-0.0400} - 1\right) = -0.0196\text{ mA}$$

Los valores de I para los otros dos voltajes se obtienen de la misma manera; cuando $V = 100$ mV, $I = 26.8$ mA, y cuando $V = -100$ mV, $I = -0.491$ mA. Resumiremos los datos y los resultados en la siguiente tabla, donde también calculamos la resistencia $R = V/I$.

V (mV)	I (mA)	R (Ω)
+1.00	+0.0204	49.0
−1.00	−0.0196	51.0
+100	+26.8	3.73
−100	−0.491	204

EVALUAR: Advierta que en $|V| = 1.00$ mV la corriente tiene casi la misma magnitud en ambas direcciones. Esto es, cuando $|V| \ll kT/e$ (cerca del origen en la figura 42.31b), la curva tiende a ser una línea recta, y este diodo de unión funciona más como un resistor de 50.0 Ω que como un rectificador. Sin embargo, al aumentar el voltaje, la asimetría direccional se vuelve cada vez más pronunciada. A $|V| = 100$ V, la corriente negativa es casi igual a su valor de saturación y su magnitud es menor que el 2% de la corriente positiva.

Corrientes a través de una unión *p-n*

Podremos entender el comportamiento de un diodo de unión *p-n* en forma cualitativa, con base en los mecanismos de la conductividad en las dos regiones. Suponga, como en la figura 42.31a, que se conecta la terminal positiva de la batería a la región *p*, y la terminal negativa a la región *n*. Entonces, la región *p* está a mayor potencial que la región *n*, lo que corresponde a una V positiva en la ecuación (42.23) y el campo eléctrico

resultante tiene la dirección de *p* a *n*. A esto se le llama dirección *en sentido directo*, y la diferencia de potencial positiva se le llama *polarización directa*. Los huecos, abundantes en la región *p* atraviesan con facilidad la unión y entran a la región *n*; en tanto que los electrones libres, abundantes en la región *n*, pasan con facilidad a la región *p*; esos movimientos de la carga constituyen una corriente *en sentido directo*. Al conectar la batería con polaridad opuesta se obtiene una *polarización inversa*, y el campo tiende a impulsar los electrones de *p* a *n*, y a los huecos de *n* a *p*. Pero hay muy pocos electrones libres en la región *p*, y muy pocos huecos en la región *n*. El resultado es que la corriente en dirección *inversa* es mucho menor que la que produce el mismo potencial en el sentido directo.

Suponga que hay una caja con una barrera que separa sus lados izquierdo y derecho. El lado izquierdo se llena con oxígeno gaseoso; y el lado derecho, con nitrógeno gaseoso. ¿Qué sucede si la barrera tiene fugas? El oxígeno se difunde hacia la derecha y el nitrógeno se difunde hacia la izquierda. Una difusión parecida sucede a través de una unión *p-n.* Primero examinemos el caso de equilibrio, sin voltaje aplicado (figura 42.32). Los huecos abundantes en la región *p* funcionan como un hueco gaseoso que se difunde atravesando la unión y penetrando en la región *n*. Una vez ahí, los huecos se recombinan con algunos de los muchos electrones libres. Asimismo, los electrones se difunden de la región *n* hacia la región *p*, y caen en algunos de los muchos huecos que hay ahí. Las corrientes de difusión de huecos y electrones producen una carga positiva neta en la región *n* y una carga negativa neta en la región *p*, causando así un campo eléctrico en la unión, con dirección de *n* a *p*. La energía potencial asociada con este campo eleva los niveles de energía de los electrones en la región *p*, en relación con los mismos niveles en la región *n*.

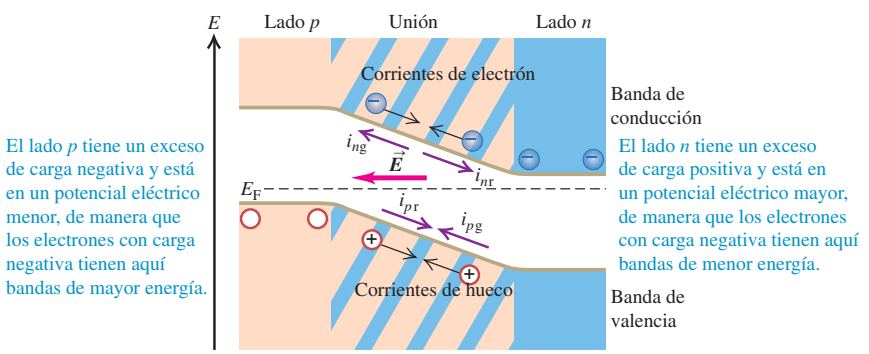
Como se indica, en la unión hay cuatro corrientes que la cruzan. Los procesos de difusión causan las *corrientes de recombinación* de huecos y electrones, identificadas con i_{pr} e i_{nr} en la figura 42.32. Al mismo tiempo, se generan pares de electrón-hueco en la región de la unión, por excitación térmica. El campo eléctrico que describimos arriba barre estos electrones y huecos, y los saca de la unión; los electrones son barridos en dirección contraria al campo, hacia el lado *n*; mientras que los huecos son barridos en la misma dirección que la del campo, hacia el lado *p*. Las corrientes correspondientes, llamadas *corrientes de generación*, se identifican con i_{pg} e i_{ng}. En el equilibrio, las magnitudes de las corrientes de generación y de recombinación son iguales:

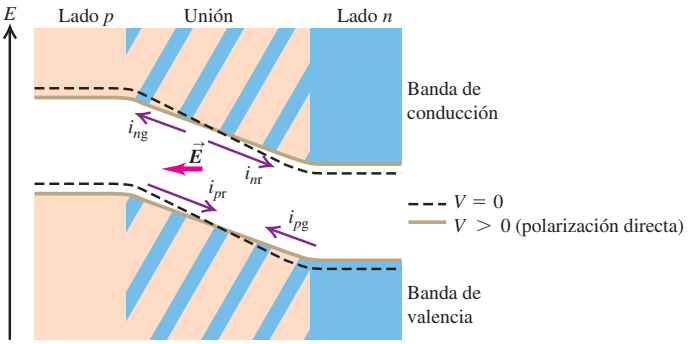
$$|i_{pg}| = |i_{pr}| \quad \text{y} \quad |i_{ng}| = |i_{nr}| \tag{42.24}$$

En el equilibrio térmico, la energía de Fermi es igual en cada punto a través de la unión.

Ahora se aplica una polarización en sentido directo, esto es, una diferencia positiva de potencial *V* a través de la unión. Una polarización directa *disminuye* el campo eléctrico en la región de la unión. También disminuye la diferencia entre los niveles de energía en los lados *p* y *n* (figura 42.33, siguiente página) en una cantidad $\Delta E = -eV$. A los electrones de la región *n* se les facilita la subida de la colina de energía potencial y difundirse en la región *p*; y a los huecos en la región *p*, difundirse en la región *n.* Este efecto aumenta tanto las corrientes de recombinación en el factor de

42.32 Una unión *p-n* en equilibrio, sin campo ni diferencia de potencial externamente aplicados. Las corrientes de generación y recombinación se igualan exactamente. La energía de Fermi E_F es igual en ambos lados de la unión. Hay un exceso de carga positiva en el lado *n*, y de carga negativa en el lado *p*, que causan un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección indicada.





42.33 Una unión *p-n* bajo condiciones de polarización directa. La diferencia de potencial entre las regiones *p* y *n* se reduce, al igual que el campo eléctrico dentro de la unión. Las corrientes de recombinación aumentan, pero las de generación son casi constantes, causando una corriente neta de izquierda a derecha.

Maxwell-Boltzmann $e^{-\Delta E/kT} = e^{eV/kT}$. (No hay que usar la distribución de Fermi-Dirac, porque la mayoría de los estados disponibles para los electrones y los huecos que se difunden están vacíos, por lo que el principio de exclusión tiene poco efecto.) Las corrientes de generación no cambian en forma apreciable, por lo que la corriente de huecos neta es

$$\begin{aligned} i_{p\text{tot}} &= i_{pr} - |i_{pg}| \\ &= |i_{pg}|e^{eV/kT} - |i_{pg}| \\ &= |i_{pg}|\left(e^{eV/kT} - 1\right) \end{aligned} \tag{42.25}$$

La corriente de electrones neta $i_{n\text{tot}}$ se calcula con una ecuación similar, por lo que la corriente total $I = i_{p\text{tot}} + i_{n\text{tot}}$ es

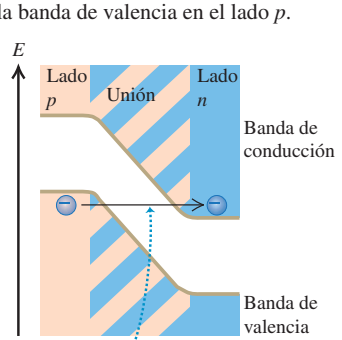
$$I = I_S\left(e^{eV/kT} - 1\right) \tag{42.26}$$

de acuerdo con la ecuación (42.23). Toda esta explicación se puede repetir para la polarización inversa (*V* e *I* negativas) con el mismo resultado. Por consiguiente, la ecuación (42.23) es válida para valores positivos y negativos.

Algunos factores complican el comportamiento de los diodos de unión *p-n* en la práctica más de lo que indica este análisis sencillo. Hay un efecto, la *ruptura por avalancha*, cuando la polarización inversa es grande. El campo eléctrico en la unión es tan grande que los portadores pueden adquirir la energía suficiente, entre choques, para formar pares de electrón-hueco durante choques inelásticos. Entonces, los electrones y los huecos pueden ganar energía y chocar para formar más pares, y así sucesivamente. (Un efecto parecido sucede en la falla o ruptura del dieléctrico en los aislantes, que describimos en la sección 42.4.)

Una segunda clase de falla se inicia cuando la polarización inversa es suficientemente grande como para que la parte superior de la banda de valencia en la región *p* esté apenas arriba en energía, que el fondo de la banda de conducción en la región *n* (figura 42.34). Si la región de la unión es suficientemente delgada, son grandes las probabilidades para que los electrones *atraviesen* o que se filtren cuánticamente de la banda de valencia de la región *p*, a la banda de conducción de la región *n*. A este proceso se le llama *ruptura de Zener*. Se presenta en los diodos Zener, muy usados en regulación de voltaje y protección contra cambios de voltaje repentinos.

42.34 Bajo condiciones de polarización inversa, la diferencia de energía potencial entre los lados *p* y *n* de una unión es mayor que en el equilibrio. Si esta diferencia es suficientemente grande, el fondo de la banda de conducción en el lado *n* puede en realidad estar abajo de la parte superior de la banda de valencia en el lado *p*.



Si la unión *p-n* bajo polarización inversa es suficientemente delgada, los electrones se pueden atravesar desde la banda de valencia hasta la banda de conducción (a este proceso se le llama ruptura de Zener).

Dispositivos semiconductores y luz

Un *diodo emisor de luz* (LED, por *light-emitting diode*) es un diodo de unión *p-n* que emite luz. Cuando la unión se polariza en sentido directo, muchos huecos son impulsados desde su región *p* hacia la región de la unión, y muchos electrones son impulsados desde su región *n* hacia la región de la unión. En la región de la unión, los electrones caen en huecos (se recombinan). Al recombinarse, el electrón puede emitir un fotón de energía aproximadamente igual al intervalo vacío. Esta energía (y por ello la longitud de onda del fotón y el color de la luz) se puede variar, usando materiales con diversos intervalos vacíos. Los diodos emisores de luz se usan mucho en pantallas digitales de relojes, equipos electrónicos, tableros de instrumentos en automóviles y en muchas otras aplicaciones más.

El proceso inverso se llama *efecto fotovoltaico*. En él, el material absorbe fotones y se crean pares de electrón-hueco. Los pares creados en la unión *p-n*, o lo bastante

cercanos para migrar hacia ella sin recombinarse, se separan por el campo eléctrico que describimos anteriormente, que barre los electrones hacia el lado *n*, y a los agujeros hacia el lado *p*. Este dispositivo se puede conectar con un circuito externo, con lo que se transforma en una fuente fem y produce una potencia. A un dispositivo de éstos se le llama con frecuencia *celda solar*, aunque no se requiera la luz solar. *Cualquier* luz con fotón de energía mayor que el intervalo vacío da resultado. Podría ser que el lector tenga una calculadora energizada con esas celdas. La producción de celdas fotovoltaicas de bajo costo para conversión de energía solar en gran escala es un campo de investigación muy activo. Los mismos fenómenos físicos básicos se usan en los detectores de imagen, con dispositivo de carga acoplada (CCD, de *charge-couple device*), cámaras digitales y cámaras de video.

Transistores

Un *transistor de unión bipolar* que contiene dos uniones *p-n* configuradas en un "emparedado", que puede ser *p-n-p* o bien *n-p-n*. El transistor *p-n-p* se muestra en la figura 42.35. Las tres regiones se llaman emisor, base y colector. Cuando no hay corriente en el bucle izquierdo del circuito, sólo hay una corriente muy pequeña que pasa por el resistor *R*, ya que el voltaje a través de la unión entre base y colector tiene dirección en sentido inverso. Pero cuando se aplica una polarización directa entre el emisor y la base, como se muestra, la mayor parte de los huecos que van del emisor a la base *atraviesan* la base (que, por lo general, es angosta y a la vez ligeramente dopada) y van a la segunda unión, donde llegan bajo la influencia de la diferencia de potencial entre colector y base, y pasan por el colector produciendo mayor corriente al resistor.

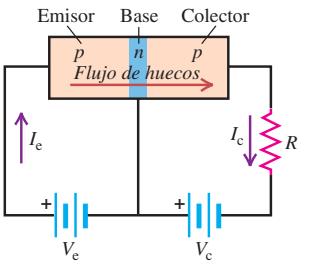
De esta forma, se *controla* la corriente en el circuito del colector, mediante la corriente en el circuito del emisor. Además, V_c puede ser bastante mayor que V_e, por lo que la *potencia* disipada en *R* puede ser mucho mayor que la suministrada al circuito emisor por la batería V_e. Así, el dispositivo funciona como *amplificador de potencia*. Si la caída de potencial a través de *R* es mayor que V_e, también puede ser un amplificador de voltaje.

En esta configuración, la *base* es el elemento común entre los lados de "entrada" y "salida" del circuito. Otro arreglo que se usa mucho es el circuito con *emisor común*, de la figura 42.36. En él, la corriente en el lado del colector es mucho mayor que la del lado de la base en el circuito, y el resultado es la amplificación de corriente.

El *transistor de efecto de campo* (figura 42.37) es muy importante. En una variación, se forma una placa de silicio tipo *p* con dos regiones tipo *n* en la parte superior, llamadas *fuente* y *drenaje*; con cada una se conecta un conductor metálico. Un tercer electrodo, llamado *compuerta*, está separado de la placa, la fuente y la compuerta mediante una capa de SiO_2 aislante. Cuando no hay carga en la compuerta y se aplica una diferencia de cualquier polaridad entre la fuente y el drenaje, hay muy poca corriente porque una de las uniones *p-n* tiene polarización inversa.

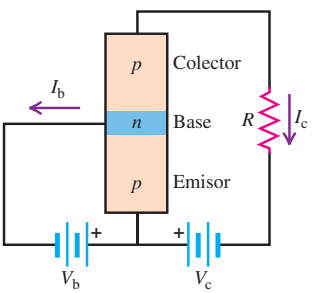
Ahora se conecta una carga positiva a la compuerta. Como tiene dimensiones del orden de 10^{-6} m, necesita poca carga para desarrollar un campo eléctrico apreciable. Así, hay muy poca corriente que entre o salga por la compuerta. No hay muchos electrones libres en el material tipo *p*, aunque hay algunos, y el efecto del campo es atraerlos hacia la compuerta positiva. La concentración de electrones muy amplificada que resulta cerca de la compuerta (y entre las dos uniones) permite que la corriente pase entre la fuente y el drenaje. La corriente es muy sensible a la carga y al potencial de la compuerta, y el dispositivo funciona como amplificador. Al dispositivo que

42.35 Esquema de un transistor *p-n-p* con su circuito.

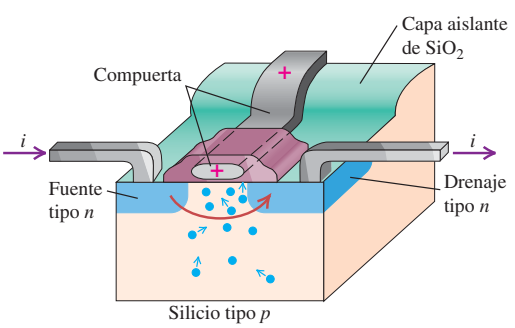


- Cuando $V_e = 0$, la corriente es muy pequeña.
- Cuando se aplica un potencial V_e entre el emisor y la base, los huecos viajan del emisor a la base.
- Cuando V_c es suficientemente grande, la mayoría de los huecos continúa y penetra en el colector.

42.36 Un circuito con emisor común.



- Cuando $V_b = 0$, I_c es muy pequeña, y la mayoría del voltaje V_c aparece en la unión entre base y colector.
- Al aumentar V_b disminuye el potencial entre base y colector, y se pueden difundir más huecos en el colector, por lo que aumenta I_c. De ordinario, I_c es mucho mayor que I_b.

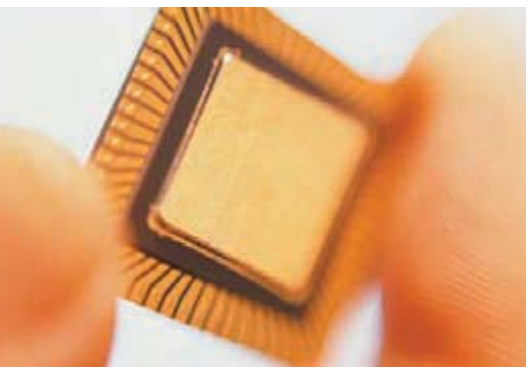


42.37 Un transistor de efecto de campo. La corriente de la fuente al drenaje se controla con la diferencia de potencial entre fuente y drenaje, y por la carga en la compuerta. No pasa corriente por la compuerta.

acabamos de describir se le llama *MOSFET de enriquecimiento* (MOSFET viene de *metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*, que significa transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor).

Circuitos integrados

42.38 Un circuito integrado del tamaño de su pulgar puede contener millones de transistores.



Un refinamiento más en la tecnología de semiconductores es el *circuito integrado*. Al depositar consecutivamente capas de material y figuras de agua fuerte para definir las trayectorias de la corriente, se pueden combinar las funciones de varios MOSFET, capacitores y resistores en un solo cuadro de material semiconductor, que podrá tener unos pocos milímetros por lado. Un desarrollo de este concepto conduce a los *circuitos integrados en gran escala* y a la *integración muy grande* (VLSI, de *very-large-scale integration*). Las obleas o chips resultantes de circuito integrado son el corazón de todas las calculadoras de bolsillo y las computadoras actuales, sean grandes o pequeñas. En la figura 42.38 se presenta un ejemplo.

Los primeros dispositivos semiconductores se inventaron en 1947. Desde entonces, han revolucionado por completo la industria de la electrónica, gracias a su miniaturización, confiabilidad, rapidez, consumo de energía y costo. Han encontrado aplicaciones en las comunicaciones, los sistemas de cómputo, los sistemas de control y muchas otras áreas. Al transformar esas áreas, han cambiado, y continúan cambiando, la civilización misma.

Evalúe su comprensión de la sección 42.7 Suponga que en la compuerta del MOSFET de la figura 42.37 se aplica una carga negativa. ¿Pasará una corriente apreciable entre la fuente y el drenaje?

42.8 Superconductividad

La superconductividad es la desaparición total de la resistencia eléctrica a bajas temperaturas. Ya describimos esta propiedad al terminar la sección 25.2, así como las propiedades magnéticas de los superconductores de tipo I y de tipo II en la sección 29.8. En esta sección, relacionaremos la superconductividad con la estructura y el modelo de bandas de energía de un sólido.

Aunque la superconductividad fue descubierta en 1911, no se comprendió bien en el aspecto teórico sino hasta 1957. En ese año, los físicos estadounidenses John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer publicaron la teoría de la superconductividad, que hoy se llama teoría BCS, y que les valió el Premio Nobel de Física en 1972. (Fue el segundo Premio Nobel para Bardeen; compartió su primero, por sus trabajos sobre el desarrollo del transistor.) La clave de la teoría BCS es una interacción entre *pares* de electrones de conducción, llamados *pares de Cooper*, causada a la vez por una interacción con los iones positivos del cristal. A continuación se describe una burda imagen cualitativa de lo que sucede. Un electrón libre ejerce fuerzas de atracción sobre los iones positivos cercanos, tirando de ellos y acercándolos un poco. La ligera concentración que se produce, de carga positiva, ejerce entonces una fuerza de atracción sobre otro electrón libre, cuya cantidad de movimiento es contraria a la del primero. A temperaturas ordinarias, esta interacción entre el par de electrones es muy pequeña, en comparación con las energías de los movimientos térmicos, pero a temperaturas muy bajas se vuelve importante.

Ligados entre sí de esta forma, los pares de electrones no pueden ganar o perder *en forma individual* cantidades muy pequeñas de energía, como sucede comúnmente en una banda de conducción parcialmente llena. Su apareamiento produce un intervalo vacío en los niveles electrónicos cuánticos permitidos, y a bajas temperaturas no hay la energía de colisión suficiente como para que salten esa banda. En consecuencia, los electrones se pueden mover con libertad a través del cristal, sin intercambiar energía alguna por choques; esto es, se mueven con resistencia cero.

Los investigadores aun no logran un consenso acerca de si alguna modificación de la teoría BCS puede explicar las propiedades de los superconductores con alta T_C, que se han descubierto desde 1986. *Sí* hay pruebas del apareamiento, pero quizá de huecos y no de electrones. Además, el mecanismo original de apareamiento de la teoría BCS parece demasiado débil para explicar este fenómeno a las altas temperaturas de transición y los altos campos críticos de esos nuevos superconductores.

CAPÍTULO 42 RESUMEN

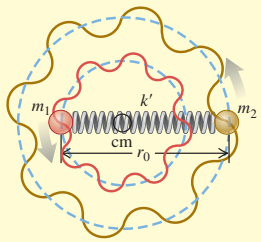
Enlaces y espectros moleculares: Los tipos principales de enlaces moleculares son iónico, covalente, de Van der Waals y puentes de hidrógeno. En una molécula diatómica, los niveles de energía de rotación se definen con la ecuación (42.3), donde I es el momento de inercia de la molécula, m_r es su masa reducida y r_0 es la distancia entre los dos átomos. Los niveles de energía de vibración se definen con la ecuación (42.7), donde k' es la constante de fuerza efectiva de la fuerza interatómica. (Véanse los ejemplos 42.1 a 42.4.)

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42.3}$$

$$I = m_r r_0^2 \tag{42.6}$$

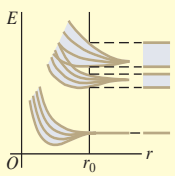
$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{42.4}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42.7}$$



Sólidos y bandas de energía: Los enlaces interatómicos en los sólidos son de los mismos tipos que en las moléculas, con un tipo adicional, el enlace metálico. Al asociar la base con cada punto de red se obtiene la estructura cristalina. (Véase el ejemplo 42.5.)

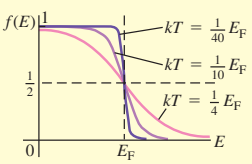
Cuando los átomos se enlazan entre sí en la materia condensada, sus niveles externos de energía se reparten en bandas. En el cero absoluto, los aislantes y los conductores tienen una banda de valencia totalmente llena, separada por un intervalo vacío de energía, de una banda de valencia vacía. Los conductores, incluyendo los metales, tienen bandas de conducción parcialmente llenas. (Véase el ejemplo 42.6.)



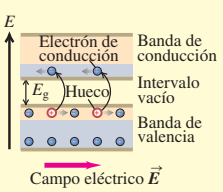
Modelo de los electrones libres de los metales: Para el modelo de los electrones libres en el comportamiento de los conductores, se considera que los electrones son partículas totalmente libres dentro del conductor. En este modelo, la densidad de los estados se determina con la ecuación (42.16). La probabilidad de que un estado de energía E esté ocupado se determina con la distribución de Fermi-Dirac, ecuación (42.17), que es una consecuencia del principio de exclusión. En la ecuación (42.17), E_F es la energía de Fermi. (Véanse los ejemplos 42.7 a 42.9.)

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{2\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \tag{42.16}$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \tag{42.17}$$

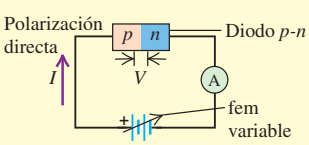


Semiconductor: Un semiconductor tiene un intervalo vacío aproximadamente de 1 eV entre sus bandas de valencia y de conducción. Sus propiedades eléctricas pueden cambiar en forma drástica por la adición de pequeñas concentraciones de impurezas donadoras, obteniéndose así un semiconductor tipo n; o con impurezas receptoras, obteniéndose un semiconductor tipo p. (Véase el ejemplo 42.10.)



Dispositivos semiconductores: Muchos dispositivos semiconductores, que incluyen diodos, transistores y circuitos integrados, usan una o más uniones p-n. La relación entre corriente y voltaje de un diodo de unión p-n ideal se define con la ecuación (42.23). (Véase el ejemplo 42.11.)

$$I = I_S(e^{eV/kT} - 1) \tag{42.23}$$



Términos clave

enlace iónico, *1433*
enlace covalente, *1434*
enlace de Van der Waals, *1435*
puente de hidrógeno, *1435*
cristal metálico, *1444*
banda de energía, *1445*
banda de valencia, *1446*
banda de conducción, *1446*
modelo de electrones libres, *1447*
densidad de los estados, *1448*
distribución Fermi-Dirac, *1449*
energía de Fermi, *1449*
semiconductor, *1452*
hueco, *1453*
semiconductor tipo *n*, *1454*
semiconductor tipo *p*, *1454*
unión *p-n*, *1455*
diodo rectificador, *1455*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La Tierra debe irradiar energía al espacio con la misma tasa con que la recibe de la luz solar. Sin embargo, en la atmósfera las moléculas (CO_2) de dióxido de carbono absorben la radiación infrarroja emitida por la superficie terrestre y la vuelven a emitir hacia el suelo. Para compensar esto y mantener el equilibrio entre la energía emitida y la recibida, se incrementa la temperatura de la superficie terrestre y, con ello, aumenta la tasa de radiación de cuerpo negro desde la superficie.

Respuestas a las preguntas Evalúe su comprensión

42.1 Respuesta: i) El principio de exclusión establece que sólo puede haber un electrón en determinado estado. Los electrones reales tienen espín, por lo que dos electrones (uno con espín arriba y uno con espín abajo) pueden estar en determinado estado *espacial* y, en consecuencia, pueden participar dos en determinado enlace covalente entre dos átomos. Si los electrones obedecieran el principio de exclusión pero no tuvieran espín, ese estado de un electrón estaría descrito totalmente por su distribución espacial y sólo podría participar *un* electrón en un enlace covalente. (En el capítulo 44 veremos que este caso es totalmente imaginario: hay partículas subatómicas sin espín, pero *no* obedecen el principio de exclusión.)

42.2 Respuesta: ii) La figura 42.5 muestra que la diferencia en energía entre niveles de rotación adyacentes aumenta al incrementarse l. Por lo tanto, al aumentar l, también se incrementa la energía E del fotón emitido, en tanto que disminuye la longitud de onda $\lambda = hc/E$.

42.3 Respuesta: ii) En la figura 42.14 considere a la distancia entre iones adyacentes Na^+ y Cl^-. Esta figura muestra que el ion Cl^- siguiente al vecino más cercano de un ion Na^+ está en la esquina opuesta de un cubo de lado a. La distancia entre estos dos iones es $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

42.4 Respuesta: ii) Un pequeño cambio de temperatura provoca un aumento significativo en la población de electrones en la banda de conducción de un semiconductor y un incremento sustancialmente comparable en la conductividad. La conductividad de conductores y aislantes varía más gradualmente con la temperatura.

42.5 Respuesta: no El modelo cinético-molecular de un gas ideal (véase la sección 18.3) muestra que la presión del gas es proporcional a la energía cinética de translación media E_{med} de las partículas que forman el gas. En un gas ideal clásico, E_{med} es directamente proporcional a la temperatura T media, por lo que la presión disminuye cuando T disminuye. En un gas de electrones libres, la energía cinética media por electrón *no* se relaciona directamente con T; como indica el ejemplo 42.9, para el gas de electrones libres en un metal, E_{med} es casi totalmente una consecuencia del principio de exclusión a temperatura ambiente, o más fría. Por consiguiente, la presión de un gas de electrones libres en un metal sólido *no* cambia en forma apreciable entre la temperatura ambiente y el cero absoluto.

42.6 Respuesta: no El cobre puro ya es un excelente conductor, porque tiene una banda de conducción parcialmente llena (figura 42.21c). Además, el cobre forma un cristal metálico (figura 42.17), en contraste con los cristales covalentes del silicio o del germanio, por lo que el esquema de usar una impureza para donar o aceptar un electrón no funciona para el cobre. De hecho, al agregar impurezas al cobre *disminuye* la conductividad, ya que una impureza tiende a dispersar los electrones, lo cual estorba el paso de la corriente.

42.7 Respuesta: no Una carga negativa en la compuerta repele los electrones en el silicio tipo p, no los atrae. Entonces, la concentración de electrones en la región intermedia de las dos uniones p-n será más pequeña todavía. Con tan pocos portadores de carga presentes en esta región, pasará muy poca corriente entre la fuente y el drenaje.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P42.1. Los enlaces iónicos se deben a la atracción eléctrica de partículas con carga opuesta. ¿Hay otras clases de enlaces moleculares, también de naturaleza eléctrica o interviene alguna otra interacción? Explique su respuesta.

P42.2. En los enlaces iónicos, un electrón es transferido de un átomo a otro, por lo que ya no "pertenece" al átomo de donde partió. ¿Hay transferencias parecidas de propiedad de electrones en otras clases de enlaces moleculares? Explique su respuesta.

P42.3. Los enlaces de Van der Waals se forman en muchas moléculas, pero los puentes de hidrógeno sólo se forman en materiales que contienen hidrógeno. ¿Por qué esta clase de enlace es exclusivo del hidrógeno?

P42.4. Se dice que el enlace del arseniuro de galio (GaAs) es 31% iónico y 69% covalente. Explique su respuesta.

P42.5. La molécula H_2^+ consiste en dos núcleos de hidrógeno y un solo electrón. ¿Qué clase de enlace molecular cree usted que mantiene unida esta molécula? Explique su respuesta.

P42.6. El momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa de una molécula diatómica, calculado a partir de la longitud de onda emitida en una transición $l = 19 \rightarrow l = 18$, es diferente del calculado con el fotón emitido en una transición $l = 1 \rightarrow l = 0$. Explique esta diferencia. ¿Qué transición corresponde al momento de inercia mayor?

P42.7. El análisis del espectro de absorción de fotones de una molécula diatómica muestra que los niveles de energía vibratoria, para pequeños valores de n, están a distancias casi iguales, pero que los niveles para n grande no están a distancias iguales. Describa la causa de esta observación. ¿Espera usted que los niveles adyacentes se acerquen o se alejen cuando n aumenta? Explique su respuesta.

P42.8. Describa las diferencias entre los niveles de energía de rotación y de vibración de la molécula de deuterio ("hidrógeno pesado") D_2, y los de la molécula de hidrógeno ordinario H_2. Un átomo de deuterio tiene doble masa que la de un átomo de hidrógeno ordinario.

P42.9. Se han descubierto varias moléculas orgánicas en el espacio interestelar. ¿Por qué tales descubrimientos se lograron con radiotelescopios en vez de usar telescopios ópticos?
P42.10. El aire que usted respira contiene principalmente nitrógeno (N_2) y oxígeno (O_2). Muchas de esas moléculas se encuentran en niveles excitados de energía rotatoria ($l = 1, 2, 3, \ldots$), pero casi todas están en el nivel vibratorio fundamental ($n = 0$). Explique esta diferencia en el comportamiento rotatorio y vibratorio de las moléculas.
P42.11. ¿En qué formas algunos átomos de una molécula diatómica se comportan como si estuvieran unidos por un resorte? ¿En qué aspectos es mala esta descripción de la interacción entre los átomos?
P42.12. Los átomos individuales tienen niveles de energía discretos, pero ciertos sólidos (que sólo están formados por átomos individuales) muestran bandas de energía e intervalos vacíos. ¿Qué provoca que los sólidos se comporten de manera tan diferente de los átomos de que están compuestos?
P42.13. ¿Qué factores determinan si un material es conductor o aislante de electricidad? Explique su respuesta.
P42.14. A menudo los cristales iónicos son transparentes, mientras que los cristales metálicos siempre son opacos. ¿Por qué?
P42.15. Las rapideces de las moléculas en un gas varían con la temperatura, mientras que las de los electrones en la banda de conducción de un metal son casi independientes de la temperatura. ¿Por qué son tan distintos tales comportamientos?
P42.16. Use el modelo de las bandas para explicar cómo es posible que ciertos materiales sufran una transición de semiconductor a metal al variar la temperatura o la presión.
P42.17. Un átomo aislado de zinc tiene una configuración electrónica de estado fundamental con subcapas $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ y $4s$ llenas. ¿Cómo puede ser conductor el zinc si su subcapa de valencia está llena?
P42.18. La suposición de que el *modelo del electrón libre* de los metales quizá parezca ilógica, ya que los electrones ejercen entre sí fuerzas eléctricas poderosas. Mencione algunas razones de porqué dichas suposiciones en realidad tienen sentido físico.
P42.19. ¿Porqué los materiales que son buenos conductores de calor también son buenos conductores de electricidad? ¿Qué clase de problemas causa esto en el diseño de electrodomésticos como planchas de ropa y calentadores eléctricos? ¿Hay materiales que no sigan esta regla general?
P42.20. ¿Cuál es la característica esencial para que un elemento sirva como impureza donadora en un semiconductor, como el Si o el Ge? ¿Y para que sirva como impureza receptora? Explique su respuesta.
P42.21. Hay varios métodos para sacar electrones de la superficie de un semiconductor. ¿Pueden sacarse huecos de la superficie? Explique su respuesta.
P42.22. Un estudiante asegura que el silicio y el germanio se vuelven buenos aislantes a temperaturas muy bajas, y buenos conductores a temperaturas muy altas. ¿Está usted de acuerdo? Explique su razonamiento.
P42.23. Las conductividades eléctricas de la mayoría de los metales disminuye en forma gradual al aumentar la temperatura, pero la conductividad intrínseca de los semiconductores *aumenta* siempre y con rapidez al incrementarse la temperatura. ¿Cuál es la causa de esta diferencia?
P42.24. ¿Cómo podría fabricar silicio compensado que tuviera doble cantidad de receptores que de donadores?
P42.25. Para partes electrónicas como los amplificadores, ¿cuáles son algunas ventajas de los transistores, en comparación con los tubos de vacío? ¿Cuáles son algunas desventajas? ¿Hay muchos casos en los cuales los tubos de vacío *no se pueden* sustituir por dispositivos de estado sólido? Explique su respuesta.
P42.26. ¿Por qué el tunelamiento limita la miniaturización de los MOSFET?
P42.27. La corriente de saturación I_S de una unión *p-n* [ecuación (42.23)] depende mucho de la temperatura. Explique por qué.

Ejercicios

Sección 42.1 Clases de enlaces moleculares

42.1. En el capítulo 18 vimos que la energía cinética media de un átomo o molécula de gas ideal a la temperatura T Kelvin es $\frac{3}{2}kT$. ¿Para qué valor de T esta energía corresponde a *a*) la energía del enlace de Van der Waals en el He_2 (7.9×10^{-4} eV)? y *b*) la energía del enlace covalente del H_2 (4.48 eV)? *c*) La energía cinética en un choque entre moléculas puede emplearse para disociar a una o a ambas moléculas, siempre que sea mayor que la energía de enlace. A temperatura ambiente (300 K), ¿es probable que las moléculas de He_2 queden intactas después de un choque? ¿Y las moléculas de H_2? Explique su respuesta.
42.2. Un enlace iónico. *a*) Calcule la energía potencial eléctrica de un ion K^+ y un ion Br^- separados una distancia de 0.29 nm, que es la separación de equilibrio en la molécula de KBr. Considere que los iones son cargas puntuales. *b*) La energía de ionización del átomo de potasio es 4.3 eV. El bromo atómico tiene una afinidad electrónica de 3.5 eV. Con estos datos y los resultados del inciso *a*) estime la energía de enlace de la molécula de KBr. ¿Espera que la energía real de enlace sea mayor o menor que su estimación? Explique su razonamiento.

Sección 42.2 Espectros moleculares

42.3. Una molécula hipotética de NH efectúa una transición de nivel rotacional de $l = 3$ a $l = 1$, y produce un fotón con longitud de onda de 1.780 nm al hacerlo. ¿Cuál es la separación entre los dos átomos en esta molécula, si los modelamos como masas puntuales? La masa del hidrógeno es de 1.67×10^{-27} kg, y la masa del nitrógeno es 2.33×10^{-26} kg.
42.4. La molécula de agua tiene un nivel rotacional $l = 1$ de 1.01×10^{-5} eV arriba del nivel fundamental $l = 0$. Calcule la longitud de onda y la frecuencia del fotón absorbido por el agua, cuando sufre una transición de nivel rotacional de $l = 0$ a $l = 1$. El oscilación de un magnetrón en un horno de microondas genera microondas con frecuencia de 2450 MHz. ¿Esto tiene sentido, en vista de la frecuencia calculada en este problema? Explique su respuesta.
42.5. En el ejemplo 42.2, se calculó el momento de inercia del CO con la ecuación (42.6). *a*) En el CO ¿a qué distancia está cada átomo del centro de masa de la molécula? *b*) Use $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$ para calcular el momento de inercia del CO con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la recta que une los centros de los dos átomos. ¿Concuerda su resultado con el valor obtenido en el ejemplo 42.2?
42.6. Dos átomos de cesio (Cs) pueden formar una molécula de Cs_2. La distancia de equilibrio entre los núcleos de una molécula de Cs_2 es 0.447 mn. Calcule el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masa de los dos núcleos, y sea perpendicular a la línea que los une. La masa de un átomo de cesio es 2.21×10^{-25} kg.
42.7. Los niveles de energía rotacional del CO se calculan en el ejemplo 42.2. Si la energía de la molécula giratoria se describe con la ecuación clásica $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, para el nivel $l = 1$, ¿cuáles son *a*) la rapidez angular de la molécula en rotación, *b*) la rapidez lineal de cada átomo? (use el resultado del ejercicio 42.5) y *c*) el periodo de rotación (el tiempo de una rotación)?
42.8. Si una molécula de cloruro de sodio (NaCl) pudiera sufrir una transición vibratoria $n \rightarrow n - 1$ sin cambiar número cuántico rotacional, se emitiría un fotón de 20.0 μm de longitud de onda. La masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg, y la masa de un átomo de cloro es 5.81×10^{-26} kg. Calcule la constante de fuerza k' para la fuerza interatómica en el NaCl.
42.9. Un átomo de litio tiene la masa de 1.17×10^{-26} kg; y uno de hidrógeno, de 1.67×10^{-27} kg. La separación de equilibrio entre los dos núcleos en la molécula de LiH es 0.159 nm. *a*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre los niveles de rotación $l = 3$ y $l = 4$? *b*) ¿Cuál es la

longitud de onda del fotón emitido en una transición del nivel $l = 4$ al $l = 3$?

42.10. Cuando una molécula diatómica hipotética que tiene átomos separados 0.8860 nm sufre una transición rotacional del estado $l = 2$ al siguiente estado inferior, cede un fotón con energía de 8.841×10^{-4} eV. Cuando la molécula sufre una transición vibratoria de un estado de energía al siguiente estado de energía inferior, cede 0.2560 eV. Determine la constante de fuerza de esta molécula.

42.11. *a*) Demuestre que la diferencia de energía entre los niveles rotatorios con números cuánticos cantidad de movimiento angular l y $l - 1$ es $l\hbar^2/I$. *b*) En términos de l, $\hbar$ e I, ¿cuál es la frecuencia del fotón emitido en la transición de rotación pura $l \rightarrow l - 1$?

42.12. Los niveles de energía de rotación de la molécula de CO se calculan en el ejemplo 42.2, y las diferencias de niveles de energía vibratoria se mencionan en el ejemplo 42.3. Las energías de vibración-rotación se determinan con la ecuación (42.9). Calcule la longitud de onda del fotón absorbido por el CO, en cada una de las siguientes transiciones de vibración-rotación: *a*) $n = 0$, $l = 1 \rightarrow n = 1$, $l = 2$; *b*) $n = 0$, $l = 2 \rightarrow n = 1$, $l = 1$; *c*) $n = 0$, $l = 3 \rightarrow n = 1$, $l = 2$.

42.13. La frecuencia de vibración de la molécula de HF es 1.24×10^{14} Hz. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, y la de un átomo de flúor es 3.15×10^{-26} kg. *a*) ¿Cuál es la constante de fuerza interatómica k'? *b*) ¿Cuál es la distancia entre los niveles adyacentes de energía vibratoria, en joules y en electrón volts? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda de un fotón con energía igual a la diferencia de energía entre dos niveles vibratorios adyacentes? ¿En qué región del espectro está?

Sección 42.3 Estructura de los sólidos

42.14. El bromuro de potasio (KBr) tiene una densidad de 2.75×10^3 kg/m^3 y la misma estructura cristalina que el NaCl. La masa de un átomo de potasio es 6.49×10^{-26} kg, y la de un átomo de bromo es 1.33×10^{-25} kg. *a*) Calcule la distancia media entre átomos adyacentes en un cristal de KBr. *b*) ¿Cómo se compara el valor calculado en el inciso *a*) con las distancias en el NaCl (ejercicio 42.15)? ¿Es la relación entre los dos valores lo que usted esperaría cualitativamente? Explique su respuesta.

42.15. Densidad del NaCl. La distancia de los átomos adyacentes en un cristal de cloruro de sodio es 0.282 nm. La masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg, y la de un átomo de cloro es 5.89×10^{-26} kg. Calcule la densidad del cloruro de sodio.

42.16. Calcule la longitud de onda de *a*) un rayo x de 6.20 keV; *b*) un electrón de 37.6 eV; *c*) un neutrón de 0.0205 eV.

Sección 42.4 Bandas de energía

42.17. La longitud de onda máxima de la luz que puede detectar cierta fotocelda de silicio es 1.11 μm. *a*) ¿Cuál es el intervalo vacío de energía (en electrón volts) entre las bandas de conducción y de valencia para esta fotocelda? *B*) Explique por qué el silicio puro es opaco.

42.18. La distancia entre la banda de valencia y la de conducción en un diamante es 5.47 eV. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un fotón para que pueda excitar un electrón desde la parte superior de la banda de valencia hasta el fondo de la banda de conducción? ¿En qué región del espectro electromagnético está ese fotón? *b*) Explique por qué el diamante puro es transparente e incoloro. *c*) La mayoría de los diamantes en joyería tiene un color amarillo. Explique cómo las impurezas del diamante pueden causar este color.

42.19. El espacio entre las bandas de valencia y de conducción en el silicio es 1.12 eV. Un núcleo de níquel, en un estado excitado, emite un fotón de rayo gamma con 9.31×10^{-4} nm de longitud de onda. ¿Cuántos electrones pueden excitarse desde la parte superior de la banda de valencia, hasta el fondo de la banda de conducción al absorber este rayo gamma?

Sección 42.5 Modelo de electrones libres para los metales

42.20. ¿Cuál es el valor de la constante A en la ecuación (42.10) que normaliza a $\psi(x, y, z)$?

42.21. Calcule la densidad de los estados $g(E)$ para el modelo de electrones libres en un metal, si $E = 7.0$ eV y $V = 1.0$ cm^3. Exprese su respuesta en estados por electrón volt.

42.22. Calcule v_{rms} para electrones libres con energía cinética media $\frac{3}{2}kT$ a una temperatura de 300 K. ¿Cómo se compara su resultado con la rapidez de un electrón con energía cinética igual a la energía de Fermi del cobre, calculada en el ejemplo 42.9? ¿Por qué hay tanta diferencia entre esas velocidades?

42.23. *a*) Demuestre que la función de onda ψ de la ecuación (42.10) es una solución de la ecuación de Schrödinger tridimensional [ecuación (40.29)] con la energía definida por la ecuación (42.11). *b*) ¿Cuáles son las energías del estado fundamental y los dos niveles excitados más bajos? (Incluya el factor 2 en la degeneración, debido a los dos estados de espín posibles.)

42.24. Describa los detalles en la deducción de la ecuación (42.14), a partir de las ecuaciones (42.13) y (42.12).

42.25. La plata tiene una energía de Fermi de 5.48 eV. Calcule la contribución electrónica a la capacidad calorífica molar a volumen constante de la plata, C_V, a 300 K. Exprese su resultado *a*) como múltiplo de R y *b*) como fracción del valor real para la plata, $C_V = 25.3$ J/mol · K. *c*) ¿El valor de C_V se debe principalmente a los electrones? Si no es así, ¿a qué se debe? (*Sugerencia:* véase la sección 18.4.)

42.26. La energía de Fermi del sodio es 3.23 eV. *a*) Calcule la energía media E_{med} de los electrones en el cero absoluto. *b*) ¿Cuál es la rapidez de un electrón con energía E_{med}? *c*) ¿A qué temperatura kelvin T es kT igual a E_F? (A ésta se le llama *temperatura de Fermi* del metal. Es, aproximadamente, la temperatura a la cual las moléculas de un gas ideal clásico tendrían la misma energía cinética que el electrón más rápido en el metal.)

42.27. Para un metal sólido con energía de Fermi de 8.500 eV, ¿cuál es la probabilidad, a temperatura ambiente, de que un estado que tenga una energía de 8.520 eV esté ocupado por un electrón?

Sección 42.6 Semiconductores

42.28. El germanio puro tiene un intervalo vacío de 0.67 eV. La energía de Fermi está a la mitad de esa banda. *a*) Para temperaturas de 250 K, 300 K y 350 K, calcule la probabilidad $f(E)$ de que esté ocupado un estado en el fondo de la banda de conducción. *b*) Para cada temperatura del inciso *a*), calcule la probabilidad de que esté vacío un estado en la parte superior de la banda de valencia.

42.29. El germanio tiene un intervalo vacío de 0.67 eV. Al doparlo con arsénico, se agregan niveles donadores en la banda a 0.01 eV abajo del fondo de la banda de conducción. A una temperatura de 300 K, hay una probabilidad de 4.4×10^{-4} para que un estado electrónico esté ocupado en el fondo de la banda de conducción. ¿Dónde está el nivel de Fermi en relación con la banda de conducción en este caso?

Sección 42.7 Dispositivos con semiconductores

42.30. Para cierto diodo de unión *p-n*, la corriente de saturación a temperatura ambiente (20 °C) es de 0.750 mA. ¿Cuál es la resistencia de este diodo, cuando el voltaje que pasa por él es de *a*) 85.0 mV y *b*) −50.0 mV?

42.31. *a*) Un voltaje de polarización directa de 15.0 mV produce una corriente positiva de 9.25 mA a través de una unión *p-n* a 300 K. ¿En

qué se transforma la corriente positiva, si el voltaje de polarización directa se reduce a 10.0 mV? *b*) Para voltajes de polarización inversa de -15.0 mV y -10.0 mV, ¿cuál es la corriente negativa de polarización inversa?

42.32. Una unión *p-n* tiene una corriente de saturación de 3.60 mA. *a*) A la temperatura de 300 K, ¿qué voltaje se necesita para producir una corriente positiva de 40.0 mA? *b*) Para un voltaje igual al negativo del valor calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la corriente negativa?

Problemas

42.33. Una molécula diatómica de oxígeno hipotética (masa $= 2.656 \times 10^{-26}$ kg) e hidrógeno (masa $= 1.67 \times 10^{-27}$ kg) emite un fotón con longitud de onda de 2.39 μm cuando hace una transición de un estado vibratorio al siguiente estado inferior. Si modelamos esta molécula como dos masas puntuales en los extremos opuestos de un resorte sin masa, *a*) ¿cuál es la constante de fuerza de este resorte? *b*) ¿Cuántas vibraciones por segundo efectúa la molécula?

42.34. Cuando una molécula diatómica sufre una transición del estado rotacional $l = 2$ al $l = 1$, se emite un fotón de 63.8 μm de longitud de onda. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula para un eje que pase por su centro de masa y sea perpendicular a la línea que une los núcleos?

42.35. *a*) La separación de equilibrio de los dos núcleos en una molécula de NaCl es 0.24 nm. Si la molécula se considera como cargas $+e$ y $-e$ separadas 0.24 nm, ¿cuál es el momento dipolar eléctrico de la molécula (véase la sección 21.7)? *b*) El momento dipolar eléctrico de la molécula de NaCl medido es 3.0×10^{-29} C · m. Si este momento dipolar se debe a cargas puntuales $+q$ y $-q$ separadas 0.24 nm, ¿cuánto es q? *c*) Una definición del *carácter iónico fraccionario* del enlace es q/e. Si el átomo de sodio tiene la carga $+e$ y el de cloro la tiene $-e$, el carácter iónico fraccionario sería igual a 1. ¿Cuál es el carácter iónico fraccionario real para el enlace en el NaCl? *d*) La distancia de equilibro entre núcleos de la molécula de yoduro de hidrógeno (HI) es 0.16 nm, y el momento dipolar eléctrico medido de la molécula es 1.5×10^{-30} C · m. ¿Cuál es el carácter iónico fraccionario del enlace en el HI? ¿Cómo se compara su resultado con el del NaCl calculado en el inciso *c*)? Describa las razones de la diferencia en esos resultados.

42.36. La energía de enlace de una molécula de cloruro de potasio (KCl) es 4.43 eV. La energía de ionización de un átomo de potasio es 4.3 eV, y la afinidad electrónica del cloro es 3.6 eV. Con estos datos estime la separación de equilibrio entre los dos átomos de la molécula de KCl. Explique por qué su resultado sólo es una estimación y no un valor preciso.

42.37. *a*) Para la molécula de cloruro de sodio (NaCl) descrita al principio de la sección 42.1, ¿cuál es la separación máxima de los iones, para que tengan estabilidad, si se consideran como cargas puntuales? Esto es, ¿cuál es la máxima separación para la cual la energía de un ion Na^+ y uno Cl^-, calculada en este modelo, es menor que la energía de los dos átomos separados, Na y Cl? *b*) Calcule esta distancia en la molécula de bromuro de potasio, descrita en el ejercicio 42.2.

42.38. El espectro rotacional del HCl contiene las siguientes longitudes de onda (entre otras): 60.4 μm, 69.0 μm, 80.4 μm, 96.4 μm y 120.4 μm. Con este espectro determine el momento de inercia de la molécula de HCl con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la línea que une los dos núcleos.

42.39. *a*) Use el resultado del problema 42.38 para calcular la separación de equilibrio de los átomos en una molécula de HCl. La masa de un átomo de cloro es 5.81×10^{-26} kg y la de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. *b*) El valor de l cambia en ± 1, en las transiciones de rotación. ¿Cuál es el valor de l para el nivel superior de la transición que causa cada una de las longitudes de onda mencionadas en el problema 42.38? *c*) ¿Cuál es la línea de mayor longitud de onda en el espectro rotacional del HCl? *d*) Calcule las longitudes de onda de la luz emitida, para las transiciones correspondientes en la molécula de cloruro de deuterio (DCl). En esta molécula, el átomo de hidrógeno del HCl se sustituye por un átomo de deuterio, isótopo del hidrógeno cuya masa es 3.34×10^{-27} kg. Suponga que la separación de equilibrio entre los átomos es igual que en el HCl.

42.40. Cuando una molécula de NaF hace una transición del nivel de rotación $l = 3$ al $l = 2$ sin cambiar de número cuántico vibratorio ni el estado electrónico, se emite un fotón de 3.83 mm de longitud de onda. Un átomo de sodio tiene 3.82×10^{-26} kg de masa; y uno de flúor, 3.15×10^{-26} kg. Calcule la separación de equilibrio entre los núcleos en una molécula de NaF. ¿Cómo se compara su respuesta con el valor para el NaCl que aparece en la sección 42.1? ¿Es razonable este resultado? Explique su respuesta.

42.41. Un gas de moléculas diatómicas (con momento de inercia I) está a una temperatura absoluta T. Si E_g es la energía de estado fundamental y E_{ex} es la energía de un estado excitado, entonces, la distribución de Maxwell-Boltzmann (sección 38.6) indica que la relación de las cantidades de moléculas en los dos estados es

$$\frac{n_{ex}}{n_g} = e^{-(E_{ex} - E_g)/kT}$$

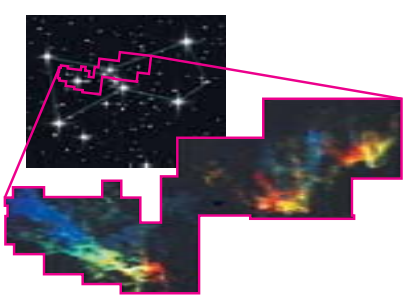
a) Explique por qué la relación de la cantidad de moléculas en el l-ésimo *nivel* de energía de rotación, entre la cantidad de moléculas en el nivel de rotación fundamental ($l = 0$) es

$$\frac{n_l}{n_0} = (2l + 1)e^{-[l(l+1)\hbar^2]/2IkT}$$

(*Sugerencia:* para cada valor de l, ¿cuántos estados hay con distintos valores de m_l?) *b*) Determine la relación n_l/n_0 para un gas de moléculas de CO a 300 K en los casos con i) $l = 1$; ii) $l = 2$; iii) $l = 10$; iv) $l = 20$; v) $l = 50$. El momento de inercia de la molécula de CO está en el ejemplo 42.2 (sección 42.2). *c*) Sus resultados del inciso *b*) demuestran que cuando aumenta l, la relación n_l/n_0 aumenta primero y después disminuye. Explique por qué.

42.42. Nuestra galaxia contiene numerosas *nubes moleculares*, regiones que se extienden por muchos años luz, en las que la densidad es suficientemente alta, y la temperatura suficientemente baja como para que los átomos formen moléculas. La mayoría de las moléculas son H_2, pero una pequeña fracción son de monóxido de carbono (CO). En la figura 42.39 se ve una de esas nubes moleculares en la constelación de Orión. La imagen de la izquierda se logró con un telescopio ordinario de luz visible, y la de la derecha muestra la nube molecular de Orión obtenida con un radiotelescopio sintonizado a una longitud de onda

Figura **42.39** Problema 42.42.



emitida por CO en una transición de rotación. Los diversos colores en la imagen de radio indican regiones de la nube que se mueven hacia nosotros (al azul) o se alejan de nosotros (al rojo) en relación con el movimiento de la totalidad de la nube, determinado por el corrimiento Doppler de la radiación. (Debido a que una nube molecular tiene unas 10,000 moléculas de hidrógeno por cada molécula de CO, parecería más razonable sintonizar un radiotelescopio a emisiones de H_2, en vez de a emisiones de CO. Por desgracia, sucede que las moléculas de H_2 en las nubes moleculares no irradian en las partes de radio ni visibles del espectro electromagnético.) *a*) Con los datos del ejemplo 42.2 (sección 42.2), calcule la energía y la longitud de onda del fotón emitido por un molécula de CO, en una transición de rotación $l = 1 \rightarrow 1 = 0$. *b*) Por regla, las moléculas a una temperatura T del gas se encontrarán en cierto nivel excitado de energía de rotación, siempre y cuando la energía de ese nivel no sea mayor que kT (véase el problema 42.41). Aplique esta regla para explicar por qué los astrónomos pueden detectar la radiación del CO en nubes moleculares, aunque la temperatura característica de ellas sea muy baja, de sólo 20 K.

42.43. Líneas espectrales de isótopos. La separación de equilibrio para el NaCl es 0.2361 nm. La masa de un átomo de sodio es 3.8176×10^{-26} kg. El cloro tiene dos isótopos estables, el ^{35}C1 y el ^{37}Cl, que tienen masas distintas, pero propiedades químicas idénticas. La masa atómica del ^{35}C1 es 5.8068×10^{-26} kg, y la del ^{37}Cl es 6.1384×10^{-26} kg. *a*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en las transiciones $l = 2 \rightarrow l = 1$ y $l = 1 \rightarrow l = 0$, para el $Na^{35}Cl$. *b*) Repita el inciso *a*) para el $Na^{37}Cl$. ¿Cuáles son las diferencias en las longitudes de onda de los dos isótopos?

42.44. Cuando una molécula OH sufre una transición del nivel vibratorio $n = 0$ al $n = 1$, su energía vibratoria interna aumenta 0.463 eV. Calcule la frecuencia de vibración y la constante de la fuerza interatómica. (La masa de un átomo de oxígeno es 2.66×10^{-26} kg, y la de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg.)

42.45. La constante de la fuerza internuclear en una molécula de hidrógeno (H_2) es $k' = 576$ N/m. Un átomo de hidrógeno tiene 1.67×10^{-27} kg de masa. Calcule la energía vibratoria de punto cero para el H_2 (esto es, la energía vibratoria que tiene la molécula en el nivel fundamental vibratorio $n = 0$). ¿Cómo se compara la magnitud de esta energía con la energía de enlace del H_2, que es -4.48 eV?

42.46. Suponga que el átomo de hidrógeno en el HF (véase el ejercicio 42.13) se sustituye por un átomo de deuterio, que es un isótopo del hidrógeno de 3.34×10^{-27} kg de masa. La constante de fuerza se determina por la configuración electrónica, por lo que es igual que para la molécula normal de HF. *a*) ¿Cuál es la frecuencia vibratoria de esta molécula? *b*) ¿Qué longitud de onda de luz corresponde a la diferencia de energía entre los niveles $n = 1$ y $n = 0$? ¿En qué región del espectro se encuentra esta longitud de onda?

42.47. La molécula de yoduro de hidrógeno (HI) tiene una separación de equilibrio de 0.160 nm, y su frecuencia de vibración es 6.93×10^{13} Hz. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg y la de un átomo de yodo es 2.11×10^{-25} kg. *a*) Calcule el momento de inercia del HI con respecto a un eje perpendicular que pase por su centro de masa. *b*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en cada caso de las siguientes transiciones de vibración y rotación: i) $n = 1$, $l = 1 \rightarrow n = 0$, $l = 0$; ii) $n = 1$, $l = 2 \rightarrow n = 0$, $l = 1$; iii) $n = 2$, $l = 2 \rightarrow n = 1$, $l = 3$.

42.48. Demuestre la siguiente afirmación: para los electrones libres en un sólido, si un estado que está a una energía ΔE mayor que E_F tiene probabilidad P de estar ocupado y, entonces, la probabilidad de que un estado a una energía ΔE menor que E_F esté ocupado es $1 - P$.

42.49. Calcule la energía de Fermi del potasio, haciendo la sencilla aproximación que cada átomo aporta un electrón libre. La densidad del potasio es 851 kg/m^3 y la masa de un solo átomo de potasio es 6.49×10^{-26} kg.

42.50. El hidrógeno se encuentra en dos isótopos que se presentan en forma natural: hidrógeno normal (que contiene un solo protón en su núcleo) y deuterio (que tiene un protón y un neutrón). Suponiendo que ambas moléculas son del mismo tamaño, y que el protón y el neutrón tienen la misma masa (lo cual casi siempre sucede), calcule la razón de *a*) la energía de cualquier estado de rotación dado en una molécula diatómica de hidrógeno con la energía del mismo estado en la molécula diatómica de deuterio; y *b*) la energía de cualquier estado vibratorio dado en el hidrógeno con el mismo estado en el deuterio (suponiendo que la constante de fuerza es la misma para ambas moléculas). ¿Por qué es físicamente lógico que la constante de fuerza fuera la misma para las moléculas de hidrógeno y de deuterio?

42.51. El litio metálico tiene una estructura cristalina bcc. Cada celda unitaria es un cubo de lado $a = 0.35$ nm. *a*) Para una red bcc, ¿cuántos átomos hay por unidad de volumen? Exprese su respuesta en función de a. (*Sugerencia:* ¿cuántos átomos hay por celda unitaria?) *b*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular la energía de Fermi E_{F0} a temperatura cero para el litio metálico. Suponga que hay un electrón libre por átomo.

42.52. El cálculo unidimensional del ejemplo 42.5 (sección 42.3) se puede ampliar a tres dimensiones. Para la red fcc tridimensional del NaCl, el resultado para la energía potencial de un par de iones Na^+ y Cl^- se debe a la interacción electrostática con todos los iones en el cristal, por lo tanto, $U = -\alpha e^2/4\pi\epsilon_0 r$, donde $\alpha = 1.75$ es la *constante de Madelung*. Otra contribución a la energía potencial es una interacción de repulsión a corta separación iónica r, debida al traslape de las nubes de electrones. Esta contribución se puede expresar mediante A/r^8, donde A es una constante positiva, así que la ecuación de la energía potencial total es

$$U_{\text{tot}} = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{A}{r^8}$$

a) Sea r_0 el valor de la separación iónica r para la que U_{tot} es mínima. Use esta definición para deducir una ecuación que relacione a r_0 y A, y úsela para escribir U_{tot} en función de r_0. Para el NaCl, $r_0 = 0.281$ nm. Obtenga un valor numérico (en electrón volts) de U_{tot} para el NaCl. *b*) La cantidad $-U_{\text{tot}}$ es la energía necesaria para sacar un ion Na^+ y un ion Cl^- del cristal. Para formar un par de átomos neutros a partir de este par de iones, se requiere un desprendimiento de 5.14 eV (la energía de ionización del Na), y de 3.61 eV (la afinidad electrónica del Cl). Use el resultado del inciso *a*) para calcular la energía necesaria para quitar un par de átomos neutros Na y Cl del cristal. El valor experimental de esta cantidad es 6.39 eV. ¿Qué tan bien concuerda su cálculo?

42.53. Hay un sistema de N electrones libres dentro de un volumen V. Aun en el cero absoluto, ese sistema ejerce una presión p sobre sus alrededores, debido al movimiento de los electrones. Para calcular esa presión, imagine que el volumen aumenta una pequeña cantidad dV. Los electrones efectuarán una cantidad de trabajo pdV sobre sus alrededores, lo cual equivale a que la energía total E_{tot} de ellos cambiará en una cantidad $dE_{\text{tot}} = -pdV$. Por consiguiente, $dE_{\text{tot}} = -pdV$. *a*) Demuestre que la presión de los electrones, en el cero absoluto, es

$$p = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{5m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

b) Evalúe esta presión para el cobre, cuya concentración de electrones libres es 8.45×10^{28} m^{-3}. Exprese su resultado en pascales y en atmósferas. *c*) La presión que calculó en el inciso *b*) es extremadamente alta. Entonces, ¿por qué los electrones que hay en un trozo de cobre no hacen explotar al metal?

42.54. Cuando la presión p en un material aumenta una cantidad Δp, el volumen del material deberá cambiar de V a $V + \Delta V$, donde ΔV es ne-

gativo. El *módulo volumétrico B* del material se define como la relación del cambio de presión Δp entre el valor absoluto del cambio fraccionario de volumen $|\Delta V/V|$. Cuanto mayor sea el módulo volumétrico, se necesitará mayor aumento de presión para alcanzar determinado cambio de volumen fraccionario, y el material es más incompresible (véase la sección 11.4). Como $\Delta V < 0$, se puede expresar el módulo volumétrico como $B = -\Delta p/(\Delta V/V_0)$. En el límite en que los cambios de presión y volumen son muy pequeños, esto se transforma en

$$B = -V\frac{dp}{dV}$$

a) Use el resultado del problema 42.53 para demostrar que el módulo volumétrico para un sistema de N electrones libres en un volumen V a bajas temperaturas es $B = \frac{5}{3}p$. [*Sugerencia:* la cantidad p en la ecuación $B = -V(dp/dV)$ es la presión *externa* sobre el sistema. ¿Puede usted explicar por qué es igual a la presión *interna* del sistema mismo, determinada en el problema 42.53?] *b*) Evalúe el módulo volumétrico para los electrones en el cobre, cuya concentración de electrones libres es $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Exprese su resultado en pascales. *c*) El módulo real de volumen del cobre es 1.4×10^{11} Pa. Con base en su resultado del inciso *b*), ¿qué fracción de él se debe a los electrones libres en el cobre? (Este resultado demuestra que los electrones libres en un metal juegan un papel principal haciendo que el metal sea resistente a la compresión.) ¿Cuál cree usted que sea el causante de la fracción restante del módulo de volumen?

42.55. En la descripción de los electrones libres, en la sección 42.5, supusimos que se pueden pasar por alto los efectos de la relatividad. Esta hipótesis no es segura si la energía de Fermi es mayor que aproximadamente $\frac{1}{100}mc^2$ (esto es, más de 1% de la energía en reposo de un electrón). *a*) Suponga que la energía de Fermi en el cero absoluto, obtenida con la ecuación (42.20) es igual a $\frac{1}{100}mc^2$. Demuestre que la concentración de electrones es

$$\frac{N}{V} = \frac{2^{3/2}m^3c^3}{3000\pi^2\hbar^3}$$

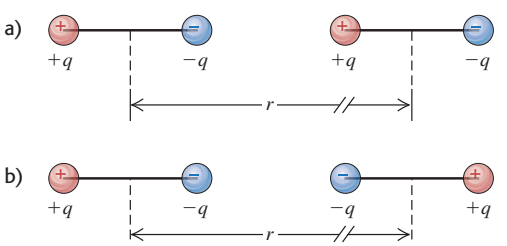
y determine el valor numérico de N/V. *b*) ¿Es buena la aproximación cuando no se tienen en cuenta los efectos relativistas para electrones en un metal, como el cobre, para el que la concentración de electrones es $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$? Explique su respuesta. *c*) Una *estrella enana blanca* es lo que queda cuando una estrella como el Sol cesa de producir energía mediante reacciones nucleares. (Nuestro Sol se transformará en una enana blanca dentro de 6×10^9 años, más o menos.) Una enana blanca normal tiene una masa de 2×10^{30} (comparable con la del Sol) y un radio de 6000 km (comparable con el de la Tierra). La atracción gravitacional mutua de distintas partes de la enana blanca tiende a comprimirla; lo que evita la compresión es la presión de los electrones libres dentro de ella (véase el problema 42.53). Estime la concentración de electrones dentro de una enana blanca normal haciendo las siguientes hipótesis: i) la enana blanca es de carbono, cuya masa es 1.99×10^{-26} kg por átomo; y ii) los seis electrones de cada átomo de carbono pueden moverse libremente por la estrella. *d*) ¿Una buena aproximación es no tener en cuenta los efectos relativistas en la estructura de una estrella enana blanca? Explique su respuesta.

42.56. Una batería DC variable que se conecta en serie se conecta con un resistor de 125 Ω y un diodo de unión *p-n* que tiene una corriente de saturación de 0.625 mA a temperatura ambiente (20 °C). Cuando un voltímetro se pasa por el resistor de 125 Ω y marca 35.0 V, ¿cuáles son *a*) el voltaje que pasa por el diodo y *b*) la resistencia del diodo?

Problemas de desafío

42.57. Los enlaces de Van der Waals se producen por la interacción entre dos momentos dipolares eléctricos permanentes o inducidos en un par de átomos o moléculas. *a*) Imagine dos dipolos idénticos, cada uno formado por cargas $+q$ y $-q$, separados una distancia d y orientados como se ve en la figura 42.40a. Calcule la energía potencial eléctrica, expresada en función del momento dipolar eléctrico $p = qd$, para el caso en el que $r \gg d$. ¿La interacción es de atracción o de repulsión? ¿Cómo varía esta energía potencial en función de r, la separación entre los centros de los dos dipolos? *b*) Repita el inciso *a*) para la orientación de los dipolos que muestra la figura 42.40b. La interacción de dipolos es más complicada cuando hay que promediar sobre orientaciones relativas de los dos dipolos, debido al movimiento térmico, o cuando los dipolos son inducidos en vez de permanentes.

Figura **42.40** Problema de desafío 42.57.



42.58. *a*) Imagine que la molécula de hidrógeno (H_2) es un oscilador armónico simple con una distancia de equilibrio de 0.074 nm, y estime las distancias entre niveles de energía vibratoria para el H_2. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. (*Sugerencia:* estime la constante de fuerza igualando el cambio de repulsión de Coulomb entre los protones, cuando los átomos se acercan un poco más que r_0, con la fuerza del "resorte". Esto es, suponga que la fuerza del enlazamiento químico permanece aproximadamente constante cuando r disminuye un poco con respecto a r_0.) *b*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular las distancias entre niveles de energía vibratoria para la molécula de deuterio, D_2. Suponga que la constante de resorte es igual para el D_2 que para el H_2. La masa de un átomo de deuterio es 3.34×10^{-27} kg.

43 FÍSICA NUCLEAR

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Algunas propiedades clave de los núcleos atómicos, incluidos radios, densidades, espines y momentos magnéticos.
- Cómo la energía de enlace de un núcleo depende de los números de protones y neutrones que contiene.
- Las maneras más importantes en que los núcleos inestables experimentan decaimiento radiactivo.
- Cómo la tasa de decaimiento de una sustancia radiactiva depende del tiempo.
- Algunos de los daños biológicos y usos médicos de la radiación.
- Cómo analizar algunos tipos importantes de reacciones nucleares.
- Qué sucede en una reacción de fisión nuclear en cadena y cómo puede controlarse.
- La secuencia de reacciones nucleares que permiten que el Sol y las estrellas brillen.

? Estas piezas dentales pertenecieron al paciente dental más antiguo que se conoce, a quien se limaron los dientes superiores hace 4500 años, con fines rituales. ¿Qué principios físicos hacen posible fechar especímenes biológicos como éste?

Durante el siglo pasado, las aplicaciones de la física nuclear han tenido efectos inmensos sobre la especie humana; algunos fueron benéficos y otros catastróficos. Muchas personas tienen opiniones muy firmes sobre ciertas aplicaciones como bombas y reactores. En el caso ideal, esas opiniones deberían basarse en la comprensión y no en los prejuicios o en las emociones, por lo que esperamos que este capítulo le ayude a alcanzar ese ideal.

Cada átomo contiene en su centro un *núcleo* extremadamente denso con carga positiva, que es mucho más pequeño que el tamaño general del átomo, pero que contiene la mayor parte de su masa. Describiremos algunas propiedades generales importantes de los núcleos y de la fuerza nuclear que los mantiene unidos. La estabilidad o inestabilidad de un núcleo en particular está determinada por la competencia entre la fuerza nuclear de atracción entre protones y neutrones, y las interacciones eléctricas de repulsión entre los protones. Los núcleos inestables *decaen o se desintegran,* transformándose en forma espontánea en otras estructuras, a través de diversos procesos de decaimiento. Las reacciones nucleares que alteran las estructuras pueden inducirse también mediante el impacto de una partícula o de algún núcleo sobre otro núcleo. Hay dos clases de reacciones de interés especial: la *fisión* y la *fusión.* No podríamos sobrevivir sin los 3.90×10^{26} de watts que produce un reactor cercano de fusión, que es nuestro Sol.

43.1 Propiedades de los núcleos

Como describimos en la sección 38.4, Rutherford encontró que el núcleo tiene un radio que es decenas de miles de veces menor que el del átomo mismo. Desde los experimentos iniciales de Rutherford se han hecho muchos más de dispersión, usando protones, electrones y neutrones de alta energía, así como partículas alfa (núcleos de helio 4 uma). Esos experimentos demuestran que un núcleo se puede modelar como una esfera de radio R que depende de la cantidad total de *nucleones* (neutrones y

protones) que hay en el núcleo. A esa cantidad se le llama **número nucleónico**, A. Los radios de la mayoría de los núcleos se representan bastante bien con la ecuación

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad \text{(radio de un núcleo)} \qquad (43.1)$$

donde R_0 es una constante determinada en forma experimental:

$$R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1.2\ \text{fm}$$

El número nucleónico A de la ecuación (43.1) también se conoce como **número de masa**, porque es el entero más cercano a la masa del núcleo, medida en unidades de masa atómica unificada (u). (La masa del protón y la del neutrón son ambas aproximadamente iguales a 1 u.) El mejor factor de conversión hasta la fecha es

$$1\ \text{u} = 1.66053886(28) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

En la sección 43.2 describiremos con más detalle las masas de los núcleos. Observe que cuando hablamos de masas de núcleos y partículas, nos referimos a sus masas *en reposo*.

Densidad nuclear

El volumen V de una esfera es igual a $4\pi R^3/3$, por lo que la ecuación (43.1) indica que el *volumen* de un núcleo es proporcional a A. Al dividir A (la masa aproximada en u) entre el volumen se obtiene la densidad aproximada y A se cancela. Por consiguiente, *todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad.* Este hecho tiene importancia básica para comprender la estructura nuclear.

Ejemplo 43.1 Cálculo de las propiedades nucleares

La clase más común de núcleos de hierro tiene un número de masa de 56. Calcule el radio, la masa aproximada y la densidad aproximada del núcleo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nos basamos en dos ideas clave: el radio y la masa de un núcleo dependen del número de masa A, y la densidad es igual a la masa dividida entre el volumen.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (43.1) para determinar el radio del núcleo. La masa del núcleo, en unidades de masa atómica, es aproximadamente igual al número de masa.

EJECUTAR: El radio es

$$R = R_0 A^{1/3} = (1.2 \times 10^{-15}\ \text{m})(56)^{1/3}$$
$$= 4.6 \times 10^{-15}\ \text{m} = 4.6\ \text{fm}$$

Como $A = 56$, la masa del núcleo es aproximadamente 56 u, es decir,

$$m \approx (56)(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}) = 9.3 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

El volumen es

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(4.6 \times 10^{-15}\ \text{m})^3 = 4.1 \times 10^{-43}\ \text{m}^3$$

y la densidad aproximada ρ es aproximadamente

$$\rho = \frac{m}{V} \approx \frac{9.3 \times 10^{-26}\ \text{kg}}{4.1 \times 10^{-43}\ \text{m}^3} = 2.3 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

EVALUAR: La densidad del hierro sólido es aproximadamente de 7000 kg/m^3, y se ve entonces que el núcleo es unas 10^{13} veces más denso que el material total. Densidades de esta magnitud también se encuentran en las *estrellas de neutrones,* parecidas a núcleos gigantes formados casi totalmente por neutrones. Un cubo que mide 1 cm de lado, elaborado del material con esta densidad tendría una masa de 2.3×10^{11} kg, unas ¡230 millones de toneladas métricas!

Núclidos e isótopos

Los bloques constructivos básicos del núcleo son el protón y el neutrón. En un átomo neutro, el núcleo está rodeado por un electrón por cada protón que tenga. Presentamos estas partículas en la sección 21.1; en el capítulo 44 volveremos a reseñar el descubrimiento del neutrón. Las masas de estas partículas son

Protón:	$m_p = 1.007276\ \text{u} = 1.672622 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Neutrón:	$m_n = 1.008665\ \text{u} = 1.674927 \times 10^{-27}\ \text{kg}$
Electrón:	$m_e = 0.000548580\ \text{u} = 9.10938 \times 10^{-31}\ \text{kg}$

La cantidad de protones en un núcleo es el **número atómico** Z. La cantidad de neutrones es el **número neutrónico** o **número de neutrones**, N. El número nucleónico o número de masa A es la suma de la cantidad de protones Z y la cantidad de neutrones N:

$$A = Z + N \tag{43.2}$$

A una sola especie nuclear que tenga valores específicos tanto de Z como de N se le llama **núclido** o **nucleido**. La tabla 43.1 presenta una lista de valores de A, Z y N para algunos núclidos. La estructura electrónica de un átomo, que es la responsable de sus propiedades químicas, está determinada por la carga Ze del núcleo. La tabla muestra algunos núclidos que tienen la misma Z pero distinta N. A estos núclidos se les llama **isótopos** de ese elemento; tienen masas distintas porque tienen distintas cantidades de neutrones en sus núcleos. Un ejemplo conocido es el cloro (Cl, $Z = 17$). Un 76% de los núcleos de cloro tienen $N = 18$, y el otro 24% tiene $N = 20$. Los diversos isótopos de un elemento suelen tener propiedades físicas un poco diferentes, como sus puntos de fusión y de ebullición, y sus velocidades de difusión. Los dos isótopos comunes del uranio, con $A = 235$ y 238, se separan a escala industrial aprovechando las distintas velocidades de difusión del hexafluoruro de uranio (UF_6), que es gaseoso, cuando contiene los dos isótopos del uranio.

La tabla 43.1 muestra también la notación usual para los núclidos individuales: el símbolo del elemento con un subíndice igual a Z y un superíndice igual al número de masa A. El formato general de un elemento "El" es ${}^{A}_{Z}\mathrm{El}$. Los isótopos de cloro que mencionamos arriba, con $A = 35$ y 37 se representan con ${}^{35}_{17}\mathrm{Cl}$ y ${}^{37}_{17}\mathrm{Cl}$ y se denominan "cloro 35" y "cloro 37", respectivamente. Este nombre del elemento determina el número atómico Z, por lo que se omite a veces el subíndice Z, como en ${}^{35}\mathrm{Cl}$.

La tabla 43.2 muestra las masas de algunos átomos comunes, y también sus electrones. Esta tabla muestra las masas de los átomos *neutros* (con Z electrones) y no las masas de los núcleos *desnudos,* porque es mucho más difícil medir las masas de éstos con gran precisión. La masa de un átomo neutro de carbono 12 es exactamente 12 u; es la forma en que se define la masa atómica unificada. Las masas de otros átomos son *aproximadamente* iguales a A unidades de masa atómica, como indicamos antes. De hecho, las masas atómicas son *menores* que la suma de sus partes (los Z protones, los Z electrones y los N neutrones). En la siguiente sección explicaremos esta diferencia de masa, que es muy importante.

Tabla 43.1 Composiciones de algunos núclidos comunes

Núcleo	Número de masa (número total de nucleones), A	Número atómico (número de protones), Z	Número de neutrones, $N = A - Z$
${}^{1}_{1}\mathrm{H}$	1	1	0
${}^{2}_{1}\mathrm{D}$	2	1	1
${}^{4}_{2}\mathrm{He}$	4	2	2
${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$	6	3	3
${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$	7	3	4
${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$	9	4	5
${}^{10}_{5}\mathrm{B}$	10	5	5
${}^{11}_{5}\mathrm{B}$	11	5	6
${}^{12}_{6}\mathrm{C}$	12	6	6
${}^{13}_{6}\mathrm{C}$	13	6	7
${}^{14}_{7}\mathrm{N}$	14	7	7
${}^{16}_{8}\mathrm{O}$	16	8	8
${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$	23	11	12
${}^{65}_{29}\mathrm{Cu}$	65	29	36
${}^{200}_{80}\mathrm{Hg}$	200	80	120
${}^{235}_{92}\mathrm{U}$	235	92	143
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$	238	92	146

Tabla 43.2 Masas de átomos neutros, para algunos núclidos ligeros

Elemento e isótopo	Número atómico, Z	Número de neutrones, N	Masa atómica (u)	Número de masa, A
Hidrógeno ($^{1}_{1}$H)	1	0	1.007825	1
Deuterio ($^{2}_{1}$H)	1	1	2.014102	2
Tritio ($^{3}_{1}$H)	1	2	3.016049	3
Helio ($^{3}_{2}$He)	2	1	3.016029	3
Helio ($^{4}_{2}$He)	2	2	4.002603	4
Litio ($^{6}_{3}$Li)	3	3	6.015122	6
Litio ($^{7}_{3}$Li)	3	4	7.016004	7
Berilio ($^{9}_{4}$Be)	4	5	9.012182	9
Boro ($^{10}_{5}$B)	5	5	10.012937	10
Boro ($^{11}_{5}$B)	5	6	11.009305	11
Carbono ($^{12}_{6}$C)	6	6	12.000000	12
Carbono ($^{13}_{6}$C)	6	7	13.003355	13
Nitrógeno ($^{14}_{7}$N)	7	7	14.003074	14
Nitrógeno ($^{15}_{7}$N)	7	8	15.000109	15
Oxígeno ($^{16}_{8}$O)	8	8	15.994915	16
Oxígeno ($^{17}_{8}$O)	8	9	16.999132	17
Oxígeno ($^{18}_{8}$O)	8	10	17.999160	18

Fuente: A. H. Wapstra y G. Audi, *Nuclear Physics* **A595**, 4 (1995).

Espines y momentos magnéticos nucleares

Al igual que los electrones, también los protones y los neutrones son partículas de espín-$\frac{1}{2}$ con una cantidad de movimiento angular espín definido por las mismas ecuaciones que las de la sección 41.3. La magnitud de la cantidad de movimiento angular espín $\vec{\boldsymbol{S}}$ de un nucleón es

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar \tag{43.3}$$

y la componente z es

$$S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar \tag{43.4}$$

Además de la cantidad de movimiento angular espín de los nucleones, puede existir la cantidad de movimiento angular *orbital* asociada con sus movimientos dentro del núcleo. La cantidad de movimiento angular orbital de los nucleones se cuantiza de la misma manera que la de los electrones en los átomos.

La cantidad de movimiento angular *total* $\vec{\boldsymbol{J}}$ del núcleo es la suma vectorial de las cantidades de movimiento angulares espín y orbital individuales de todos los nucleones. Su magnitud es

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \tag{43.5}$$

y su componente z es

$$J_z = m_j\hbar \qquad (m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j) \tag{43.6}$$

Cuando el número total de nucleones A es *par*, j es un entero; cuando es *impar*, j es semientero. Todos los núclidos para los cuales tanto Z como N son pares tienen $J = 0$, lo cual sugiere que un apareamiento de partículas con componentes de espín opuestos puede ser importante en la estructura nuclear. El número cuántico de la cantidad de movimiento angular total nuclear j se llama normalmente *espín nuclear,* aunque en general se refiere a una combinación de las cantidades de movimiento angulares orbitales y espín de los nucleones que forman el núcleo.

Asociado con la cantidad de movimiento angular nuclear está un *momento magnético.* Cuando describimos los momentos magnéticos *electrónicos* en la sección 41.2, presentamos el magnetón de Bohr $\mu_B = e\hbar/2m_e$, como unidad natural de momento

magnético. Encontramos que la magnitud de la componente z del momento magnético del espín del electrón es casi exactamente igual a μ_B. Esto es, $|\mu_{sz}|_{\text{electrón}} \approx \mu_B$. Al describir momentos magnéticos *nucleares,* se puede definir una cantidad análoga, el **magnetón nuclear** μ_n:

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05078 \times 10^{-27}\,\text{J/T} = 3.15245 \times 10^{-8}\,\text{eV/T} \tag{43.7}$$

(magnetón nuclear)

donde m_p es la masa del protón. Ya que la masa del protón m_p es 1836 veces mayor que la masa del electrón m_e, el magnetón nuclear μ_n es 1836 veces menor que el magnetón de Bohr μ_B.

Cabe esperar que la magnitud de la componente z del momento magnético espín del protón sea aproximadamente μ_n. Sin embargo, resulta que es

$$|\mu_{sz}|_{\text{protón}} = 2.7928\mu_n \tag{43.8}$$

Lo que es más sorprendente todavía es que el neutrón, que carece de carga, tenga una magnitud correspondiente de

$$|\mu_{sz}|_{\text{neutrón}} = 1.9130\mu_n \tag{43.9}$$

El protón tiene una carga positiva; como era de esperarse, su momento magnético espín $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ es paralelo a su cantidad de movimiento angular espín $\vec{\boldsymbol{S}}$. Sin embargo, $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ y $\vec{\boldsymbol{S}}$ son opuestos para un neutrón, como cabría esperar para una distribución de carga negativa. Estos momentos magnéticos *anómalos* se deben a que en realidad el protón y el neutrón no son partículas fundamentales, sino que están hechos de partículas más simples llamadas *quarks.* En el siguiente capítulo describiremos a los quarks con detalle.

El momento magnético de un núcleo completo suele ser de unos cuantos magnetones nucleares. Cuando un núcleo se coloca en un campo magnético externo $\vec{\boldsymbol{B}}$, hay una energía de interacción $U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = -\mu_z B$ igual que con los momentos magnéticos atómicos. Las componentes μ_z del momento magnético en la dirección del campo están cuantizadas, por lo que se produce una serie de niveles de energía con esta interacción.

Ejemplo 43.2 Giros del espín del protón

Unos protones se colocan en un campo magnético con dirección z y 2.30 T de magnitud. *a*) ¿Cuál es la diferencia de energías entre un estado con la componente z de un protón de cantidad de movimiento angular espín paralela al campo, y uno con la componente antiparalela al campo? *b*) Un protón puede hacer una transición de uno a otro de esos estados, emitiendo o absorbiendo un fotón de energía igual a la diferencia de energías entre los dos estados. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de ese fotón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El protón es una partícula de espín $\frac{1}{2}$ con un momento magnético, de manera que su energía depende de la orientación de su espín en relación con un campo magnético aplicado.

PLANTEAR: Se supone que el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ tiene la dirección de z positiva, y que el momento magnético $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ del protón tiene la misma dirección que su espín. Si la componente z del espín está alineada con $\vec{\boldsymbol{B}}$, μ_z es igual al valor positivo obtenido en la ecuación (43.8); si la componente z del espín es opuesta a $\vec{\boldsymbol{B}}$, entonces μ_z es el negativo de ese valor. La energía de interacción en cualquier caso es $U = -\mu_z B$, y la diferencia de energía [lo que buscamos en el inciso *a*)] es la diferencia entre los valores de U para las dos orientaciones de espín. La frecuencia y la longitud de onda del fotón se determinan con las ecuaciones $E = hf = hc/\lambda$.

EJECUTAR: *a*) Cuando la componente z de $\vec{\boldsymbol{S}}$ (y de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$) es paralela al campo, la energía de interacción es

$$\begin{aligned} U &= -|\mu_z|B = -(2.7928)(3.152 \times 10^{-8}\,\text{eV/T})(2.30\,\text{T}) \\ &= -2.025 \times 10^{-7}\,\text{eV} \end{aligned}$$

Cuando las componentes son antiparalelas al campo, la energía es $+2.025 \times 10^{-7}$ eV, y la *diferencia* de energía entre los dos estados es

$$\Delta E = 2(2.025 \times 10^{-7}\,\text{eV}) = 4.05 \times 10^{-7}\,\text{eV}$$

b) La frecuencia y la longitud de onda del fotón correspondiente son

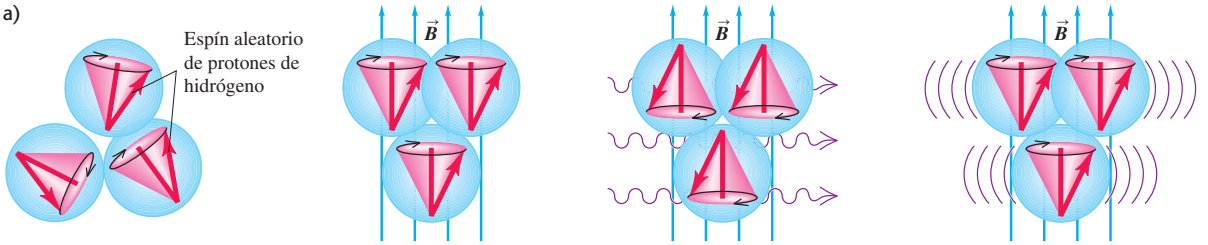
$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{4.05 \times 10^{-7}\,\text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV} \cdot \text{s}} = 9.79 \times 10^{7}\,\text{Hz} = 97.9\,\text{MHz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s}}{9.79 \times 10^{7}\,\text{s}^{-1}} = 3.06\,\text{m}$$

EVALUAR: Esta frecuencia queda a la mitad de la banda FM de radio. Cuando una muestra de hidrógeno se coloca en un campo magnético de 2.30 T y se irradia con esta frecuencia, pueden detectarse *giros de espín* de los protones por la absorción de la energía de la radiación.

43.1 Obtención de imágenes por resonancia magnética (IRM).

a)



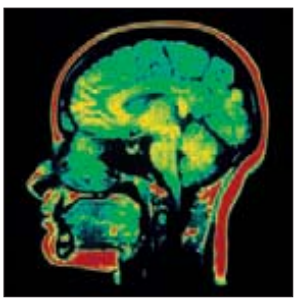
Los protones, ncleos de átomos de hidrógeno en el tejido que se estudia, tienen normalmente orientaciones aleatorias de espín.

En presencia de un campo magnético intenso, los espines se alinean con una componente paralela al campo $\vec{B}$.

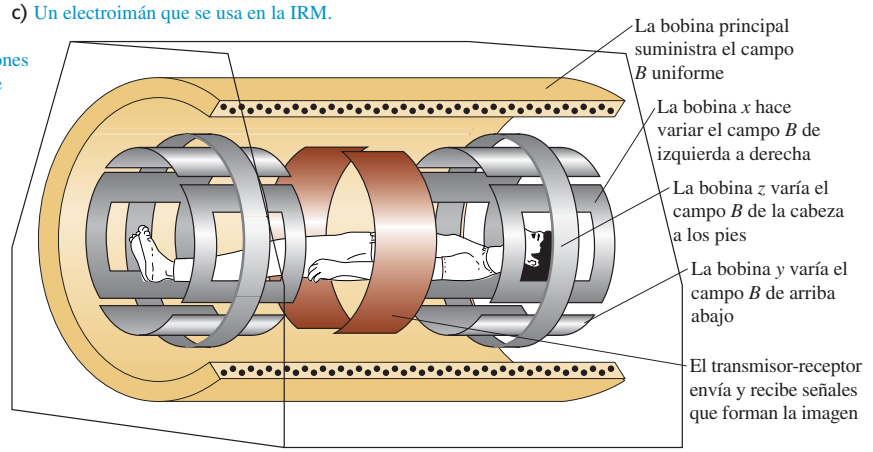
Una breve señal de radio hace girar los espines.

Cuando los protones se reorientan con el campo $\vec{B}$, emiten señales que son captadas por detectores sensibles.

b) Como $\vec{B}$ tiene un valor diferente en las diversas regiones del tejido, las ondas de radio provenientes de distintas ubicaciones tienen diferentes frecuencias. Esto permite reconstruir una imagen.



c) Un electroimán que se usa en la IRM.



Resonancia magnética nuclear e IRM

Los experimentos de giro de espín como el que se describió en el ejemplo 43.2 se llaman *resonancia magnética nuclear* (RMN). Se han hecho con muchos núclidos diferentes. Las frecuencias y los campos magnéticos se pueden medir con mucha precisión, por lo que con esta técnica se pueden hacer mediciones exactas de los momentos magnéticos nucleares. Una elaboración de esta idea básica lleva a la obtención de *imágenes de resonancia magnética nuclear* (IMR), una técnica no invasiva de obtención de imágenes, que discrimina entre diversos tejidos corporales con base en los diversos ambientes de los protones en los tejidos. Los principios de la IMR se ilustran en la figura 43.1.

El momento magnético de un núcleo también es la *fuente* de un campo magnético. En un átomo, la interacción del momento magnético de un electrón con el campo del momento magnético del núcleo causa desdoblamientos adicionales en los niveles y los espectros atómicos de energía. A este efecto lo llamamos *estructura hiperfina* en la sección 41.3. Las mediciones de la estructura hiperfina se pueden usar para determinar el espín nuclear en forma directa.

Evalúe su comprensión de la sección 43.1 *a*) ¿En qué factor debe aumentarse el número de masa de un núcleo para que su volumen aumente al doble? i) $\sqrt[3]{2}$; ii) $\sqrt{2}$; iii) 2; iv) 4; v) 8. *b*) ¿En qué factor debe aumentarse el número de masa para que el radio del núcleo sea el doble? i) $\sqrt[3]{2}$; ii) $\sqrt{2}$; iii) 2; iv) 4; v) 8.

43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear

Puesto que se debe agregar energía a un núcleo para separarlo en los protones y neutrones que lo forman, la energía total en reposo E_0 de los nucleones separados es mayor que la energía en reposo del núcleo unido. La energía que se debe agregar para separar

Activ Physics ONLINE
19.2 Energía de enlace nuclear

los nucleones se llama **energía de enlace** E_B; es la magnitud de la energía con la que se unen entre sí los nucleones. Entonces, la energía en reposo del núcleo es $E_0 - E_B$. Si se usa la equivalencia entre masa en reposo y energía (véase la sección 37.8), se puede ver que la masa total de los nucleones siempre es mayor que la masa del núcleo, en una cantidad E_B/c^2, que se llama *defecto de masa* (o *defecto másico*). La energía de enlace de un núcleo que contiene Z protones y N neutrones se define como sigue:

$$E_B = (ZM_H + Nm_n - {}^A_ZM)c^2 \qquad \text{(energía de enlace nuclear)} \qquad (43.10)$$

donde ${}^A_ZM$ es la masa del átomo *neutro* que contiene al núcleo; la cantidad entre paréntesis es el defecto de masa y $c^2 = 931.5\ \text{MeV/u}$. Observe que la ecuación (43.10) no incluye a Zm_p, la masa de Z protones. Más bien contiene ZM_H, la masa de Z protones y Z electrones combinados en Z átomos neutros de ${}^1_1\text{H}$, para balancear los Z electrones que se incluyen en ${}^A_ZM$, la masa del átomo neutro.

El núcleo más simple es el del hidrógeno, que es un protón. Después viene el núcleo de ${}^2_1\text{H}$, el isótopo del hidrógeno con número de masa 2, que se llama por lo general *deuterio*. Su núcleo consiste en un protón y un neutrón enlazados para formar una partícula llamada *deuterón*. Si se usan los valores de la tabla 43.2 en la ecuación (43.10), la energía de enlace del deuterón es

$$\begin{aligned} E_B &= (1.007825\ \text{u} + 1.008665\ \text{u} - 2.014102\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 2.224\ \text{MeV} \end{aligned}$$

Esta energía se necesitaría para separar el deuterón y obtener un protón y un neutrón. Una medida importante de lo fuertemente unido que está enlazado un núcleo es la *energía de enlace por nucleón*, E_B/A. Con (2.224 MeV)(2 nucleones) = 1.112 MeV por nucleón, el ${}^2_1\text{H}$ tiene la mínima energía de enlace por nucleón de todos los núclidos.

Estrategia para resolver problemas 43.1 Propiedades nucleares

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Entre las propiedades clave de cualquier núcleo están la masa, el radio, la energía de enlace, el defecto másico, la energía de enlace por nucleón y la cantidad de movimiento angular.

PLANTEAR *el problema:* Una vez identificada la variable que se busca, reúna las ecuaciones que necesite para resolver el problema. Una cantidad relativamente pequeña de ecuaciones en esta sección y en la sección 43.1 es todo lo que necesita, pero asegúrese de comprender sus significados.

EJECUTAR *la solución:* Resuelva las ecuaciones para obtener las variables deseadas. Al hacer cálculos de energía donde intervengan energías de enlace y energías de enlace por nucleón, observe que las tablas de masa muestran casi siempre las masas de átomos *neutros,* que incluyen su juego completo de electrones. Para compensar esto use la masa M_H de un átomo de ${}^1_1\text{H}$ en la ecuación (43.10), y no la masa de un protón aislado. Las energías de enlace de los electrones en los átomos neutros son mucho menores, y tienden a anularse en la resta de la ecuación (43.10), por lo que no nos debemos ocupar de ellas. Como indica la ecuación (43.10), los cálculos de energía de enlace consisten con frecuencia en restar dos cantidades casi iguales. Para alcanzar la precisión suficiente en la diferencia, con frecuencia se deberán manejar siete, ocho o nueve cifras significativas, si es que están disponibles. Si no, deberá contentarse con un resultado aproximado.

EVALUAR *su respuesta:* Es muy útil estar familiarizado con algunas magnitudes características, al comprobar sus resultados. Muchas de estas magnitudes son bastante diferentes en física nuclear y en física atómica. Las masas de los protones y neutrones son 1840 veces mayores que la masa del electrón. El radio de un núcleo es del orden de 10^{-15} m; la energía potencial eléctrica de dos protones es del orden de 10^{-13} J o 1 MeV. Estas energías de interacción nuclear características son del orden de unos cuantos MeV, y no del orden de unos cuantos eV, como en los átomos. La energía de enlace típica por nucleón es aproximadamente el 1% de la masa en reposo del nucleón. En comparación, la energía de ionización del átomo de hidrógeno sólo es el 0.003% de la energía en reposo del electrón.

La cantidad de movimiento angular es del mismo orden de magnitud en los núcleos y en los átomos, porque está determinada por el valor de $\hbar$. Sin embargo, los momentos magnéticos de los núcleos son unas 1000 veces *menores* que los de los electrones en los átomos, porque los núcleos son más masivos que los electrones, en este factor.

Ejemplo 43.3 El núclido más fuertemente enlazado

Como el ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ tiene la máxima energía potencial por nucleón de todos los núclidos, se puede decir que es el más fuertemente enlazado. Su masa atómica neutra es 61.928349 u. Calcule su defecto másico, su energía de enlace total y su energía de enlace por nucleón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El defecto másico es la diferencia entre la masa del núcleo y la masa combinada de los nucleones que lo forman. La energía

de enlace E_B es esta cantidad multiplicada por c^2, y la energía de enlace por nucleón es E_B dividida entre el número de masa A.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (43.10) para determinar la energía de enlace.

EJECUTAR: Se usarán $Z = 28$, $M_H = 1.007825$ u, $N = A - Z = 62 - 38 = 34$, $m_n = 1.008665$ u, y ${}^{A}_{Z}M = 61.928349$ u, usando la ecuación (43.10), se determina un defecto másico de 0.585361 u. Entonces

$$E_B = (0.585361\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 545.3\ \text{MeV}$$

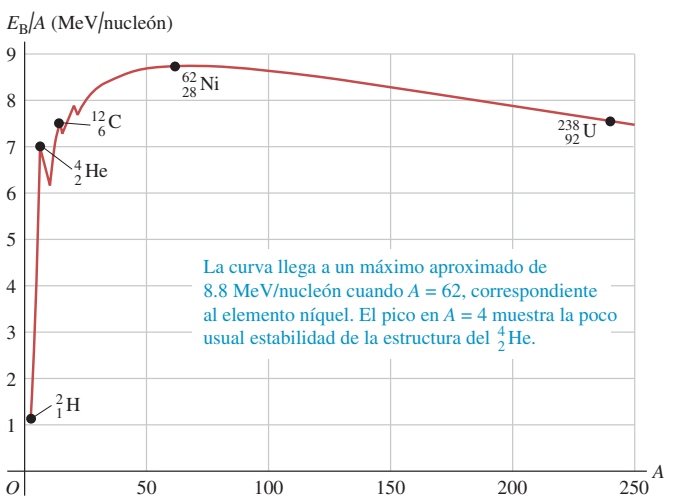
Se necesitaría un mínimo de 545.3 MeV para separar totalmente un núcleo de ${}^{62}_{28}$Ni en sus 62 nucleones independientes. La energía de enlace *por nucleón* es $\frac{1}{62}$ de este valor, es decir, 8.795 MeV por nucleón.

EVALUAR: El defecto de masa del ${}^{62}_{28}$Ni es aproximadamente el 1% de la masa del átomo: (0.585361 u)/(61.928349 u) = 0.00945223 = 0.945223%. Como la masa del átomo es casi igual a la masa del núcleo, ello significa que la energía de enlace (déficit de masa por c^2) es más o menos el 1% de la energía en reposo del núcleo, y la energía de enlace por nucleón es aproximadamente el 1% de la energía en reposo del nucleón. Se esperaba este resultado. Advierta que el defecto de masa es más de la mitad de la masa de un neutrón o de un protón, lo que parece indicar lo fuertemente que están enlazados los núcleos.

Casi todos los núclidos estables, desde los más ligeros hasta los más masivos, tienen energías de enlace del orden de 7 a 9 MeV por nucleón. La figura 43.2 es una gráfica de la energía de enlace por nucleón, en función del número de masa A. Observe el pico en $A = 4$, que indica una energía de enlace por nucleón excepcionalmente alta del núcleo ${}^{4}_{2}$He (partícula alfa) en relación con sus vecinos. Para explicar esta curva se debe tener en cuenta las interacciones entre los nucleones.

La fuerza nuclear

La fuerza que une a los protones y neutrones en el núcleo, a pesar de la repulsión eléctrica de los protones, es un ejemplo de la *interacción fuerte* que mencionamos en la sección 5.5. En el contexto de la estructura nuclear, a esta interacción se le llama *fuerza nuclear.* A continuación veremos algunas de sus características. En primer lugar, no depende de la carga; los neutrones y los protones se enlazan y el enlace es igual para los dos. En segundo lugar, tiene corto alcance, del orden de las dimensiones nucleares, esto es, de 10^{-15} m. (Si no fuera así, el núcleo crecería atrayendo más protones y neutrones.) Pero dentro de este alcance, la fuerza nuclear es mucho más intensa que las fuerzas eléctricas; si no fuera así, el núcleo nunca sería estable. Resultaría ventajoso poder escribir una sola ecuación, como la ley de Newton de la gravitación o la ley de Coulomb, para describir esta fuerza, pero todavía los físicos están determinando su dependencia en función de la separación r. En tercer lugar, la densidad casi constante de la materia nuclear y la energía de enlace por nucleón casi constante de núclidos más grandes demuestran que determinado nucleón no puede interactuar en forma simultánea con *todos* los demás nucleones de un núcleo, sino sólo con los que tiene en su cercanía inmediata. Esto es distinto de las fuerzas eléctricas, en donde *cada* protón en el núcleo repele a todos los demás. Esta cantidad limitada de interacciones



43.2 Energía de enlace aproximada por nucleón, en función del número de masa A (la cantidad total de nucleones) para núclidos estables.

se llama *saturación*; es análoga al enlace covalente en las moléculas y en los sólidos. Por último, la fuerza nuclear favorece el enlace de *pares* de protones o neutrones con espines opuestos, y de *pares depares,* esto es, un par de protones y un par de neutrones, cada uno con espín opuesto. Por consiguiente, la partícula alfa, formada por dos protones y dos neutrones, es un núcleo de estabilidad excepcional para su número de masa. En el siguiente apartado veremos otras pruebas de los efectos de apareamiento en los núcleos. (En la sección 42.8 describimos un apareamiento análogo que enlaza electrones de espín opuesto para formar pares de Cooper, en la teoría BCS de la superconductividad.)

El análisis de la estructura nuclear es más complicado que el de átomos con muchos electrones. Intervienen dos clases distintas de interacción (eléctrica y nuclear) y todavía no se comprende por completo la fuerza nuclear. Aun así, podemos adquirir cierta imagen de la estructura nuclear usando modelos sencillos. Describiremos en forma breve dos modelos distintos que han tenido éxito: el *modelo de gota líquida* y el *modelo de capas.*

El modelo de gota líquida

El **modelo de gota líquida**, propuesto por primera vez en 1928 por George Gamow, físico estadounidense de origen ruso, y desarrollado después por Niels Bohr, es resultado de la observación de que todos los núcleos tienen casi la misma densidad. Los nucleones individuales son análogos a las moléculas de un líquido, mantenidas juntas por interacciones de corto alcance y por efectos de tensión superficial. Esta imagen sencilla se puede usar para deducir una fórmula que pretende estimar la energía total de enlace de un núcleo. Incluiremos cinco aportaciones:

1. Ya hemos indicado que las fuerzas nucleares presentan *saturación*; un nucleón individual sólo interacciona con algunos de sus vecinos más cercanos. Este efecto da por resultado un término de energía de blindaje que es proporcional a la cantidad de nucleones. Escribiremos este término en la forma C_1A, donde C_1 es una constante determinada en forma experimental.
2. Los nucleones de la superficie del núcleo están menos fuertemente enlazados que los del interior, porque no tienen vecinos fuera de la superficie. Esta disminución de energía de enlace produce un término de energía *negativo,* proporcional al área $4\pi R^2$ de la superficie. Como R es proporcional a $A^{1/3}$, este término es proporcional a $A^{2/3}$; lo escribiremos como $-C_2A^{2/3}$, donde C_2 es otra constante.
3. Cada uno de los Z protones repele a todos los demás $(Z - 1)$ protones. La energía potencial total de repulsión eléctrica es proporcional a $Z(Z - 1)$, e inversamente proporcional al radio R y, por consiguiente, a $A^{1/3}$. Este término de energía es negativo, porque los nucleones están menos fuertemente enlazados de lo que estarían si no hubiera repulsión eléctrica. Escribiremos esta corrección en la forma $-C_3Z(Z - 1)/A^{1/3}$.
4. Para estar en un estado estable, de baja energía, el núcleo debe tener un equilibrio entre las energías asociadas con los neutrones y los protones. Esto quiere decir que N es cercano a Z para A pequeña, y que N es mayor que Z (pero no mucho mayor) cuando A es más grande. Se necesita un término negativo de energía, que corresponda a la diferencia $|N - Z|$. La mejor correlación con las energías de enlace observadas se obtiene si este término es proporcional a $(N - Z)^2/A$. Si usamos $N = A - Z$ para expresar esta energía en función de A y de Z, esta corrección es $-C_4(A - 2Z)^2/A$.
5. Por último, la fuerza nuclear favorece el *apareamiento* de protones y neutrones. Este término de energía es positivo (hay más enlace) si tanto Z como N son pares, y negativo (menos enlace) si tanto Z como N son impares, y cero en cualquier otro caso. El mejor ajuste a los datos se obtiene con la forma $\pm C_5A^{-4/3}$ para este término.

La energía de enlace estimada E_B total es la suma de estos cinco términos:

$$E_B = C_1A - C_2A^{2/3} - C_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4\frac{(A-2Z)^2}{A} \pm C_5A^{-4/3} \qquad (43.11)$$

(energía de enlace nuclear)

Las constantes C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, elegidas para que esta fórmula se ajuste mejor a las energías de enlace observadas, son:

$$C_1 = 15.75 \text{ MeV}$$
$$C_2 = 17.80 \text{ MeV}$$
$$C_3 = 0.7100 \text{ MeV}$$
$$C_4 = 23.69 \text{ MeV}$$
$$C_5 = 39 \text{ MeV}$$

La constante C_1 es la energía de enlace por nucleón debida a la fuerza nuclear saturada. Esta energía es casi de 16 MeV por nucleón, más o menos el doble de la energía *total* de enlace por nucleón en la mayor parte de los nucleidos.

Si se estima la energía de enlace E_B usando la ecuación (43.11) se puede resolver la ecuación (43.10) y usarla para estimar la masa de cualquier átomo neutro:

$$^A_ZM = ZM_H + Nm_n - \frac{E_B}{c^2} \quad \text{(fórmula semiempírica de la masa)} \qquad (43.12)$$

A la ecuación (43.12) se le llama *fórmula semiempírica de la masa.* El nombre es adecuado; es *empírica* porque hubo que determinar las C en forma empírica (experimental), aunque sí tiene una base teórica sólida.

Ejemplo 43.4 Estimación de la energía y la masa de enlace

Para el núclido $^{62}_{28}$Ni del ejemplo 43.3 *a*) calcule los cinco términos de la energía de enlace y la energía total estimada de enlace. *b*) Determine su masa atómica neutra, usando la fórmula semiempírica de la masa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el modelo de gota líquida del núcleo y sus cinco contribuciones a la energía de enlace.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (43.11) para calcular los términos individuales de energía de enlace, y también la energía total de enlace; usaremos la ecuación (43.12) para calcular la masa atómica neutral.

EJECUTAR: *a*) Al sustituir $Z = 28$, $A = 62$ y $N = 34$ en la ecuación (43.11), los términos individuales que resultan son:

1. $C_1A = (15.75 \text{ MeV})(62) = 976.5 \text{ MeV}$
2. $-C_2A^{2/3} = -(17.80 \text{ MeV})(62)^{2/3} = -278.8 \text{ MeV}$
3. $$-C_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = -(0.7100 \text{ MeV})\frac{(28)(27)}{(62)^{1/3}} = -135.6 \text{ MeV}$$
4. $$-C_4\frac{(A-2Z)^2}{A} = -(23.69 \text{ MeV})\frac{(62-56)^2}{62} = -13.8 \text{ MeV}$$
5. $+C_5A^{-4/3} = (39 \text{ MeV})(62)^{-4/3} = 0.2 \text{ MeV}$

La corrección por apareamiento (término 5) es positiva, porque tanto Z como N son pares. Observe que, por mucho, es el menor de todos los términos; la energía total estimada de enlace es la suma de estos cinco término, es decir, 548.5 MeV.

b) Ahora usaremos el valor $E_B = 548.5$ MeV en la ecuación (43.12) para calcular

$$M = 28(1.007825 \text{ u}) + 34(1.008665 \text{ u}) - \frac{548.5 \text{ MeV}}{931.5 \text{ MeV/u}}$$
$$= 61.925 \text{ u}$$

EVALUAR: La energía de enlace del $^{62}_{28}$Ni calculada en el inciso *a*) sólo es un 0.6% mayor que el valor real de 545.3 MeV determinado en el ejemplo 43.3, y la masa calculada en el inciso *b*) sólo es un 0.005% menor que el valor medido de 61.928349 u. Estos resultados indican lo exacta que puede ser la fórmula semiempírica de la masa.

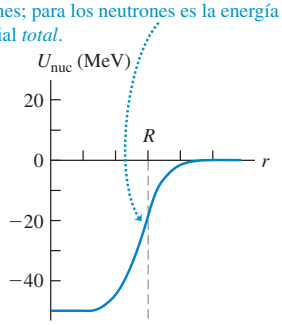
El modelo de gota líquida y la fórmula de la masa deducida con éste son bastante buenos para correlacionar masas nucleares, y veremos después que son de gran ayuda para comprender los procesos de decaimiento de los núclidos inestables. Algunos otros aspectos de los núcleos, como la cantidad de movimiento angular y los estados excitados, se obtienen mejor con distintos modelos.

El modelo de capas

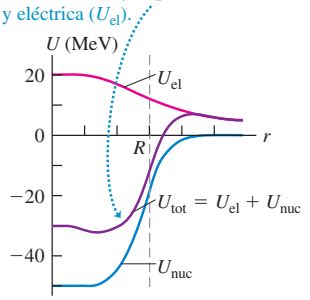
El **modelo de capas** de la estructura nuclear es análogo a la aproximación del campo central en física atómica (sección 41.4). Se exhibe a cada nucleón moviéndose en un potencial que representa el efecto promediado de todos los demás nucleones. Tal vez parezca que éste no es un método muy prometedor; la fuerza nuclear es muy fuerte,

43.3 Funciones aproximadas de energía potencial de un nucleón en un núcleo. El radio nuclear aproximado es R.

a) La energía potencial U_{nuc} se debe a la fuerza nuclear. Es igual para los protones y los neutrones; para los neutrones es la energía potencial *total*.



b) La energía potencial total U_{tot} para un protón es la suma de las energías potenciales nuclear (U_{nuc}) y eléctrica (U_{el}).



de muy corto alcance y en consecuencia muy dependiente de la distancia. Sin embargo, en algunos aspectos, funciona bastante bien.

La función para la energía potencial de la fuerza nuclear es igual para los protones que para los neutrones. Una hipótesis razonable de la forma de esta función se ve en la figura 43.3a. Es una versión tridimensional del pozo cuadrado que describimos en la sección 40.2. Las esquinas están algo redondeadas, porque el núcleo no tiene una superficie definida con precisión. Para los protones hay una energía potencial adicional asociada con la repulsión eléctrica. Consideraremos que cada protón interactúa con una esfera de densidad de carga uniforme, de radio R y carga total $(Z - 1)e$. La figura 43.3b muestra las energías nuclear, eléctrica y potencial para un protón, en función de la distancia r al centro del núcleo.

En principio, podríamos resolver la ecuación de Schrödinger para un protón o un neutrón moviéndose en ese potencial. Para cualquier energía potencial con simetría esférica, los estados de cantidad de movimiento angular son los mismos para los electrones en la aproximación de campo central, de la física atómica. En especial, se puede usar el concepto de *capas y subcapas llenas* y su relación con la estabilidad. En la estructura atómica encontramos que los valores de $Z = 2$, 10, 18, 36, 54 y 86 (los números atómicos de los gases nobles) corresponden a arreglos electrónicos especialmente estables.

Un efecto semejante sucede en la estructura nuclear. Los números son distintos, porque la función de energía potencial es diferente, y la interacción nuclear espín-órbita es mucho más fuerte y de signo contrario que en los átomos, así que las subcapas se llenan en orden distinto que para un átomo con electrones. Se ha encontrado que cuando la cantidad de neutrones *o bien* la cantidad de protones es 2, 8, 20, 28, 50, 82 o 126, la estructura que resulta tiene estabilidad excepcional, esto es, tiene una energía de enlace excepcionalmente grande. (No se han observado en la naturaleza núclidos con $Z = 126$.) A estos números se les llama *números mágicos.* Los núclidos con Z igual a un número mágico tienden a tener una cantidad de isótopos estables mayor que el promedio. Hay varios núclidos para los que tanto Z como N son mágicos, como:

$$^{4}_{2}\text{He} \qquad ^{16}_{8}\text{O} \qquad ^{40}_{20}\text{Ca} \qquad ^{48}_{20}\text{Ca} \qquad ^{208}_{82}\text{Pb}$$

Todos estos núclidos tienen energías de enlace por nucleón bastante mayores que los núclidos con valores cercanos de N o de Z. Además, todos tienen cero espín nuclear. Los números mágicos corresponden a configuraciones con capa o subcapa llena, de niveles de energía nucleónica con un salto relativamente grande de energía hasta el siguiente nivel permitido.

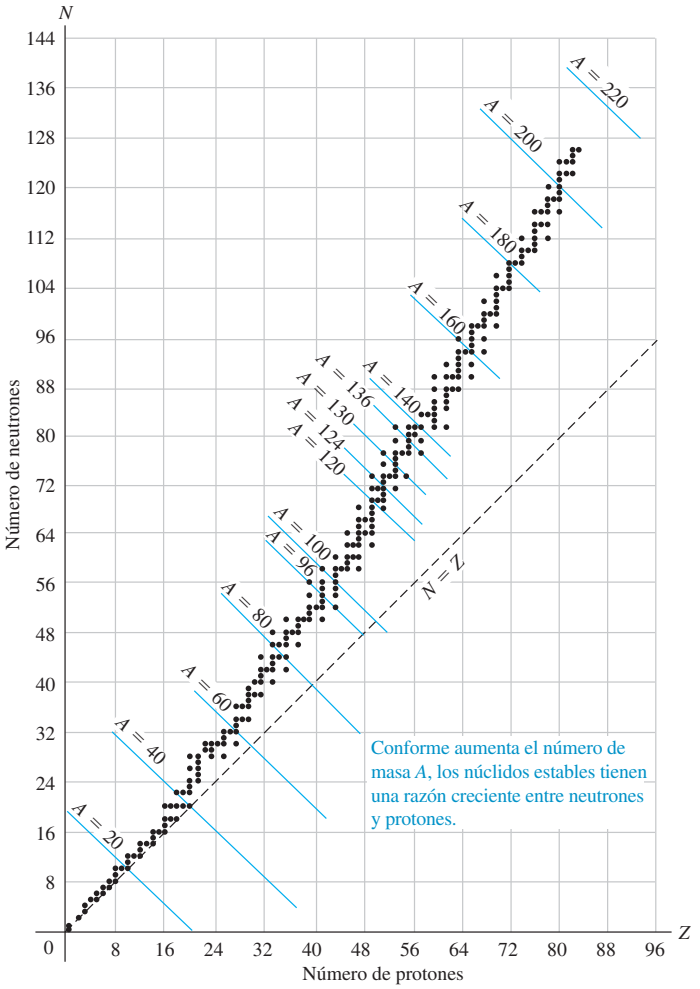
Evalúe su comprensión de la sección 43.2 Clasifique los siguientes núcleos en orden decreciente de su energía de enlace por nucleón. i) $^{4}_{2}$He; ii) $^{52}_{24}$Cr; iii) $^{152}_{62}$Sm; iv) $^{200}_{80}$Hg; v) $^{252}_{92}$Cf.

43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad

Activ Online Physics
19.2 Energía de enlace nuclear
19.4 Radiactividad

Entre unos 2500 núclidos conocidos, menos de 300 son estables. Los demás son estructuras inestables que se desintegran para formar otros núclidos, emitiendo partículas y radiación electromagnética mediante un proceso llamado **radiactividad**. La escala de tiempos de esos procesos de decaimiento va desde una pequeña fracción de microsegundo hasta miles de millones de años. Los núclidos *estables* se indican con puntos en la gráfica de la figura 43.4, donde el número de neutrones N y el número de protones (o número atómico) Z se grafican para cada núclido. Esa gráfica se llama *gráfica de Segré,* por su inventor, el físico ítalo-estadunidense Emilio Segré (1905-1989).

Cada línea azul perpendicular a la línea $N = Z$ representa un valor específico del número de masa $A = Z + N$. La mayor parte de las líneas de A constante sólo pasan por uno o dos núclidos estables; esto es, en general hay un intervalo muy pequeño de estabilidad para determinado número de masa. Las líneas en $A = 20$, $A = 40$, $A = 60$



43.4 Gráfica de Segré que muestra el número de neutrones y el número de protones para núclidos estables.

y $A = 80$ son unos ejemplos. En cuatro casos, las líneas pasan por *tres* núclidos estables, que son con $A = 96$, 124, 130 y 136.

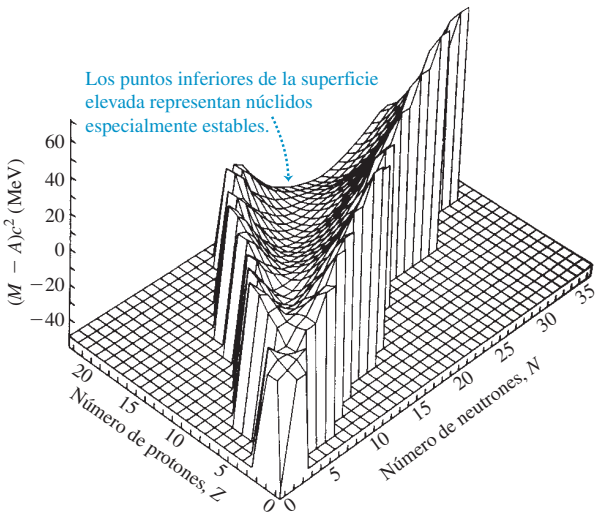
Nuestros cuatro núclidos estables tienen Z impar y N impar, al mismo tiempo:

$$^{2}_{1}\text{H} \qquad ^{6}_{3}\text{Li} \qquad ^{10}_{5}\text{B} \qquad ^{14}_{7}\text{N}$$

Se llaman *núclidos impar-impar*. La ausencia de otros núclidos impar-impar demuestra la influencia del apareamiento. Además, *no* hay núclido estable con $A = 5$ o $A = 8$. El núcleo doblemente mágico $^{4}_{2}$He, con un par de protones y un par de neutrones, no tiene interés en aceptar una quinta partícula en su estructura. Los conjuntos de ocho nucleones decaen a núclidos menores, y un núcleo $^{8}_{4}$Be decae de inmediato, dividiéndose en dos núcleos de $^{4}_{2}$He.

Los puntos de la gráfica de Segré que representan núclidos estables definen una región relativamente delgada de estabilidad. Para bajos números de masa, las cantidades de protones y neutrones son aproximadamente iguales, $N \approx Z$. La relación N/Z aumenta en forma gradual al aumentar A, hasta aproximadamente 1.6 a números de masa grandes, debido a la influencia creciente de la repulsión eléctrica de los protones. Los puntos a la derecha de la región de estabilidad representan núclidos que tienen demasiados protones en relación con los neutrones, para ser estables. En esos casos gana la repulsión, y el núcleo se divide. A la izquierda están los núclidos con demasiados neutrones en relación con los protones. En esos casos, la energía asociada con los neutrones está desbalanceada con la asociada a los protones, y los núclidos decaen en un proceso que convierte los neutrones en protones. La gráfica muestra también que no hay un núclido con $A > 209$ o con $Z > 83$ que sea estable. Un núcleo es inestable

43.5 Gráfica tridimensional de Segré para núclidos ligeros hasta $Z = 22$ (titanio). La cantidad graficada en el tercer eje es $(M - A)c^2$, donde M es la masa del núclido expresada en u. Esta cantidad se relaciona con la energía de enlace con una constante distinta para cada núclido.



si es demasiado grande. También se observa que no hay núclido estable con $Z = 43$ (tecnecio) o 61 (prometio). La figura 43.5, una versión tridimensional de la gráfica de Segré, muestra el "valle de estabilidad" para los núclidos ligeros (hasta $Z = 22$).

Decaimiento alfa

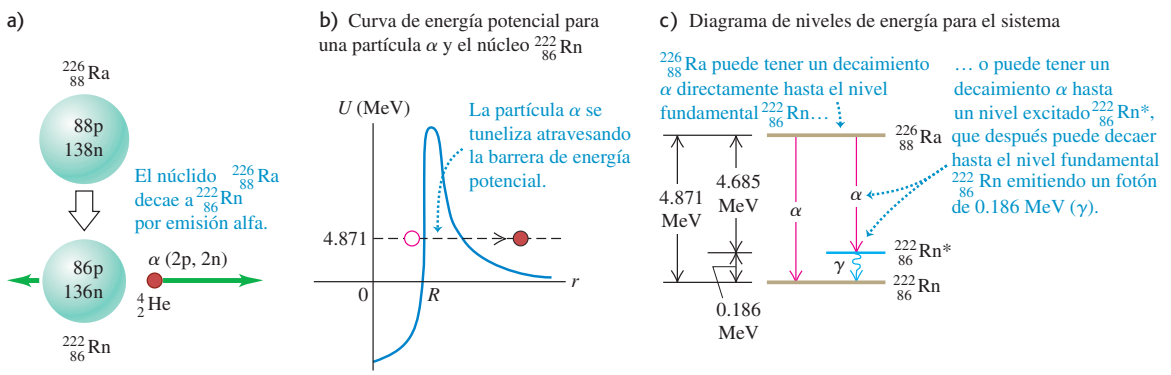
Casi el 90% de los 2500 núclidos conocidos son *radiactivos*; no son estables, sino que se desintegran y forman otros núclidos. Cuando los núclidos inestables decaen y forman diferentes núclidos, suelen emitir partículas alfa (α) o beta (β). Una **patícula alfa** es un núcleo ^{4}He, con dos protones y dos neutrones enlazados entre sí, con espín total cero. La emisión alfa se presenta principalmente en núcleos que son demasiado grandes para ser estables. Cuando un núcleo emite una partícula alfa, sus valores de N y Z disminuyen cada uno en dos, y A disminuye en cuatro, acercándose al territorio estable en la gráfica de Segré.

Un ejemplo conocido de los emisores alfa es el radio, $^{226}_{88}$Ra [figura 43.6a]. La velocidad de la partícula alfa emitida, determinada a partir de la curvatura de su trayectoria en un campo magnético transversal, es de 1.52×10^7 m/s. Esta rapidez, aunque es elevada, sólo es el 5% de la rapidez de la luz, por lo que podemos usar la ecuación no relativista de energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$K = \frac{1}{2}(6.64 \times 10^{-27}\,\text{kg})(1.52 \times 10^7\,\text{m/s})^2 = 7.7 \times 10^{-13}\,\text{J} = 4.8\,\text{MeV}$$

Las partículas alfa siempre se emiten con energías cinéticas definidas, determinadas por la conservación de la cantidad de movimiento y la energía. Por su carga y su masa,

43.6 Decaimiento alfa del núclido inestable de radio $^{226}_{88}$Ra.



las partículas alfa sólo pueden recorrer algunos centímetros en el aire, o algunos décimos o centésimos de milímetro en los sólidos antes de quedar en reposo debido a las colisiones.

Algunos núcleos pueden decaer en forma espontánea emitiendo partículas α, porque se libera energía en esta desintegración. Puede usted aplicar la conservación de masa-energía para demostrar que

el decaimiento alfa es posible siempre que la masa del átomo neutro original sea mayor que la suma de las masas del átomo neutro final y el átomo neutro de helio 4.

En el decaimiento alfa, la partícula α mediante tunelamiento pasa a través de una barrera de energía potencial, como se ve en la figura 43.6b. Sería bueno que repasara la descripción del tunelamiento en la sección 40.3.

Ejemplo 43.5 Decaimiento alfa del radio

Se tienen las siguientes masas atómicas neutrales:

$^{226}_{88}$Ra: 226.025403 u

$^{222}_{86}$Rn: 222.017571 u

Demuestre que la emisión alfa es energéticamente posible, y que la energía cinética calculada de la partícula α coincide con el valor medido experimentalmente, de 4.78 MeV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La emisión alfa es posible si la masa del átomo de $^{226}_{88}$Ra es mayor que la suma de las masas atómicas del $^{222}_{86}$Rn y $^{4}_{2}$He.

PLANTEAR: La diferencia de masa entre el átomo inicial de radio, y los átomos finales de radón y de helio corresponden (usando $E = mc^2$) a la energía E liberada en el decaimiento. Ya que se conservan la cantidad de movimiento y también la energía, *tanto* la partícula alfa como el átomo de $^{222}_{86}$Rn están en movimiento, después de la desintegración; tendremos en cuenta esto para determinar la energía cinética de la partícula alfa.

EJECUTAR: De acuerdo con la tabla 43.2, la masa del átomo de $^{4}_{2}$He es 4.002603 u. La diferencia de masas entre el núcleo original y los productos de decaimiento es

$$226.025403\ \text{u} - (222.017571\ \text{u} + 4.002603\ \text{u}) = +0.005229\ \text{u}$$

Como es positiva, el decaimiento alfa es posible desde el punto de vista de la energía.

El equivalente de 0.005229 u en energía es

$$E = (0.005229\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 4.871\ \text{MeV}$$

Así, cabe esperar que los productos del decaimiento salgan con una energía cinética total de 4.871 MeV. También se conserva la cantidad de movimiento; si el núcleo predecesor estaba en reposo, el derivado y la partícula α tienen cantidades de movimiento de igual magnitud p, pero dirección opuesta. La energía cinética es $K = p^2/2m$. Como p es igual para las dos partículas, la energía cinética se divide en proporción inversa a sus masas. A la partícula α le corresponde el $222/(222 + 4)$ del total, o 4.78 MeV, que es igual a la energía observada de la partícula α.

EVALUAR: Una forma excelente de comprobar sus resultados es verificar que la partícula alfa y el núcleo de $^{222}_{86}$Rn producidos en el decaimiento tengan cantidad de movimiento $p = mv$ de la misma magnitud. Puede usted calcular la velocidad v de cada uno de los productos de decaimiento a partir de su energía cinética respectiva. Encontrará que la partícula alfa se mueve vivamente, a $0.0506c = 1.52 \times 10^7$ m/s; si se conserva la cantidad de movimiento debería llegar a que el núcleo de $^{222}_{86}$Rn se mueve 4/222 de la velocidad anterior. ¿Lo hace?

Decaimiento beta

Hay tres clases distintas y sencillas de *decaimiento beta: beta menos, beta más* y *captura de electrón.* Una **partícula beta menos** (β^-) es un electrón. No es obvio cómo puede un núcleo emitir un electrón, si en el núcleo no hay electrones. La emisión de una β^- implica la *transformación* de un neutrón en un protón, un electrón y una tercera partícula, llamada *antineutrino.* De hecho, si usted libera un neutrón de un núcleo, decaerá en un protón, un electrón y un antineutrino, en un tiempo promedio de 15 minutos.

Las partículas beta se pueden identificar, y sus velocidades se pueden medir con técnicas parecidas a los experimentos de Thomson que describimos en la sección 27.5. Las velocidades de las partículas beta llegan hasta a 0.9995 de la velocidad de la luz, por lo que su movimiento es muy relativista. Son emitidas con un espectro continuo de energías. Eso no sería posible si las únicas dos partículas fueran la β^- y el núcleo en retroceso, ya que en ese caso la conservación de la energía y la cantidad de movimiento indicarían una velocidad definida de la β^-. Así, debe haber una *tercera* partícula implicada. De acuerdo con la conservación de la carga, esa partícula debe ser neutra, y de acuerdo con la conservación de la cantidad de movimiento angular, debe ser una con espín-$\frac{1}{2}$.

Esta tercera partícula es un antineutrino, la *antipartícula* de un **neutrino**. El símbolo asignado del neutrino es ν_e (la letra griega "nu"). Tanto el neutrino como el antineutrino tienen carga cero y masa cero (o muy pequeña) y, en consecuencia, producen muy pocos efectos observables al atravesar la materia. Ambas evadieron su detección hasta 1953, cuando Frederick Reines y Clyde Cowan pudieron observar en forma directa al antineutrino. Ahora sabemos que hay al menos tres variedades de neutrinos, cada una con su antineutrino correspondiente; una se asocia con el decaimiento beta, y las otras dos se asocian con el decaimiento de dos partículas inestables, el muón y la partícula tau. Describiremos esas partículas con más detalle en el capítulo 44. El antineutrino que se emite en el decaimiento β^- se representa con $\bar{\nu}_e$. El proceso básico del decaimiento β^- es

$$n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e \tag{43.13}$$

El decaimiento beta menos suele presentarse con núclidos para los que la relación de neutrones a protones N/Z es muy grande para tener estabilidad. En el decaimiento β^-, N disminuye en uno, Z aumenta en uno y A no cambia. Puede usted aplicar la conservación de la masa-energía para demostrar que

el decaimiento beta menos puede ocurrir siempre que la masa atómica neutra del átomo original sea mayor que la del átomo final.

Ejemplo 43.6 Por qué el cobalto 60 es un emisor beta menos

El núclido $^{60}_{27}$Co, es núcleo impar-impar inestable, y se usa en aplicaciones médicas de radiación. Demuestre que es inestable en relación con el decaimiento β^-. Los datos son las masas siguientes:

$^{60}_{27}$Co: 59.933822 u

$^{60}_{28}$Ni: 59.930791 u

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El decaimiento beta menos es posible si la masa del átomo neutro original es mayor que la del átomo final.

PLANTEAR: Primero debemos decidir cuál núclido resulta si el $^{60}_{27}$Co original experimenta decaimiento β^- y luego comparar su masa atómica neutra con la del $^{60}_{27}$Co.

EJECUTAR: El núclido original es $^{60}_{27}$Co. En el decaimiento β^-, Z aumenta uno, de 27 a 28, y A queda en 60, por lo que el núclido final es $^{60}_{28}$Ni. Su masa es menor que la del $^{60}_{27}$Co en 0.003031 u, por lo que el decaimiento β^- sí puede suceder.

EVALUAR: Como en el decaimiento alfa, este decaimiento beta menos cumple las leyes de conservación, tanto de cantidad de movimiento como de energía. Pero con tres productos de decaimiento en el proceso β^- (el núcleo $^{60}_{28}$Ni, el electrón y el antineutrino), la energía se puede compartir de muchas maneras distintas, todas congruentes con las leyes de conservación. Es imposible predecir con precisión cómo se compartirá la energía en el decaimiento de determinado núcleo de $^{60}_{27}$Co. En contraste, en el decaimiento alfa sólo hay dos productos de decaimiento, y sus energías y cantidades de movimiento se determinan en forma única (véase el ejemplo 43.5).

Hemos notado que el decaimiento β^- sucede con núclidos que tienen una relación N/Z, de neutrones a protones, muy grande. Los núclidos en los que N/Z es muy *pequeña* para tener estabilidad pueden emitir un *positrón,* la antipartícula del electrón, que es idéntica al electrón pero tiene carga positiva. (Mencionamos al positrón en relación con el positronio, en la sección 38.5, y lo describiremos con más detalle en el capítulo 44.) El proceso básico se llama *decaimiento beta más* (β^+), y es

$$p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e \tag{43.14}$$

donde β^+ es un positrón, y ν_e es el neutrino del electrón, o neutrino electrónico.

El decaimiento beta puede presentarse siempre que la masa atómica neutra del átomo original es al menos dos masas de electrón mayor que la del átomo final.

Usted puede demostrar esto aplicando la conservación de la masa-energía.

El tercer tipo de decaimiento beta es la *captura de electrón.* Hay unos núclidos para los que la emisión β^+ no es posible desde el punto de vista de la energía, pero en los que un electrón orbital (normalmente en la capa K) se puede combinar con un protón en el núcleo, formando un neutrón y un neutrino. El neutrón se queda en el núcleo, y se emite el neutrino. El proceso básico es

$$p + \beta^- \rightarrow n + \nu_e \tag{43.15}$$

Usted puede aplicar la conservación de la masa-energía para demostrar que

la captura de electrón puede presentarse siempre que la masa atómica neutra del átomo original sea mayor que la del átomo final.

En todos los tipos de decaimiento beta, A permanece constante. Sin embargo, en el decaimiento beta más y en la captura de electrón, N aumenta en uno y Z disminuye en uno, y la razón neutrones/protones aumenta hacia un valor más estable. La reacción de la ecuación (43.15) ayuda también a explicar la formación de una estrella de neutrones, que se mencionó en el ejemplo 43.1.

CUIDADO **Decaimiento beta dentro y fuera de los núcleos** Las reacciones de decaimiento beta, representadas por las ecuaciones (43.13), (43.14) y (43.15), suceden *dentro* de un núcleo. Aunque el decaimiento de un neutrón fuera del núcleo se efectúa por la reacción de la ecuación (43.13), la de la ecuación (43.14) está prohibida por la conservación de la masa-energía para un protón afuera del núcleo. La reacción de la ecuación (43.15) puede ocurrir afuera del núcleo sólo si se agrega cierta energía, como en una colisión.

Ejemplo 43.7 Por qué el cobalto 57 no es emisor beta más

El núclido $^{57}_{27}$Co es un núcleo inestable impar-par, y se usa con frecuencia como fuente de radiación en un proceso nuclear llamado *efecto Mössbauer.* Demuestre que este núclido es estable en relación con el decaimiento β^+, pero puede decaer por captura de electrón. Las masas siguientes son los datos:

$^{57}_{27}$Co: 56.936296 u

$^{57}_{26}$Fe: 56.935399 u

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El decaimiento beta más es posible si la masa del átomo neutro original es mayor que la del átomo final más dos masas de electrón.

PLANTEAR: Primero se debe decidir qué núclido resulta si $^{57}_{27}$Co experimenta decaimiento β^+, y a continuación comparar la masa del átomo neutro con la del $^{57}_{27}$Co.

EJECUTAR: El núclido original es $^{57}_{27}$Co. En el decaimiento β^+ y en la captura de electrón, Z disminuye en uno, de 27 a 26, y A queda en 57. Así, el núclido final es $^{57}_{26}$Fe. Su masa es menor que la del $^{57}_{27}$Co en 0.000897 u, un valor menor que 0.001097 u (dos masas de electrón), por lo que el decaimiento β^+ *no puede* ocurrir. Sin embargo, la masa del átomo original es mayor que la masa del átomo final, por lo que la captura de electrón *sí* puede ocurrir. En la sección 43.4 veremos cómo relacionar la probabilidad de que suceda una captura de electrón con la *vida media* de este núclido.

EVALUAR: En la captura de electrón sólo hay dos productos de decaimiento: el núcleo final y el neutrino emitido. A diferencia del decaimiento β^- (ejemplo 43.6), pero igual que en el decaimiento alfa (ejemplo 43.5), los productos de decaimiento de una captura de electrón tienen energías y cantidades de movimiento únicas.

Decaimiento gamma

La energía del movimiento interno en un núcleo está cuantizada. Un núcleo normal tiene un conjunto de niveles permitidos de energía, que incluyen un *estado fundamental* (estado de mínima energía) y varios *estados excitados.* Debido a la gran fuerza de las interacciones nucleares, las energías de excitación de los núcleos son, en forma característica, del orden de 1 MeV, en comparación con algunos eV de los niveles atómicos de energía. En las transformaciones físicas y químicas ordinarias el núcleo siempre permanece en su estado fundamental. Cuando un núcleo se pone en un estado excitado, ya sea por bombardeo con partículas de alta energía o por una transformación radiactiva, puede decaer al estado fundamental emitiendo uno o más fotones, llamados **rayos gamma** o *fotones de rayo gamma,* comúnmente con energías entre 10 keV y 5 MeV. A este proceso se le llama *decaimiento gamma* (γ). Por ejemplo, las partículas alfa emitidas por el ^{226}Ra tienen dos energías cinéticas posibles: o bien 4.784 MeV o 4.602 MeV. Incluyendo la energía de retroceso del núcleo de ^{222}Rn resultante, corresponden a una energía total liberada de 4.871 MeV o 4.685 MeV, respectivamente. Cuando se emite una partícula alfa con la menor energía, el núcleo de ^{222}Rn queda en un estado excitado. Entonces decae a su estado fundamental, con un fotón de rayo gamma con energía

$$(4.871 - 4.685)\ \text{MeV} = 0.186\ \text{MeV}$$

Un fotón con esta energía se observa durante este decaimiento (figura 43.6c).

CUIDADO **Decaimiento γ contra decaimiento α y β** Tanto en el decaimiento α como en el β, el valor de Z de un núcleo cambia, y el núcleo de un elemento se transforma en el núcleo de un elemento diferente. En el decaimiento γ, el elemento *no* cambia; sólo el núcleo pasa de un estado excitado a uno menos excitado.

Radiactividad natural

En la naturaleza existen muchos elementos radiactivos. Por ejemplo, usted es ligeramente radiactivo por los núclidos inestables presentes en su organismo, como el carbono 14 y el potasio 40. El estudio de la radiactividad natural se inició en 1896, un año después de que Röntgen descubrió los rayos x. Henri Becquerel descubrió una radiación procedente de sales de uranio, que se parecía a los rayos x. Con investigaciones intensivas en las dos décadas siguientes, a cargo de Marie y Pierre Curie, Ernest Rutherford y muchos otros más, revelaron que las emisiones consisten en partículas con carga positiva y negativa, y en rayos neutros. Se les asignaron los nombres de *alfa, beta* y *gamma* por sus distintas características de penetración.

43.7 Los sismos se deben en parte al decaimiento radiactivo del ^{238}U en el interior de la Tierra. Los decaimientos liberan energía que contribuye a producir corrientes de convección en el interior. Esas corrientes provocan movimientos en la corteza terrestre, incluyendo las sacudidas fuertes y súbitas que llamamos sismos (como el que provocó este daño).

Al núcleo que decae se le llama *núcleo precursor (núcleo padre)*, y al núcleo producido se le llama *núcleo derivado (núcleo hijo).* Cuando un núcleo radiactivo decae, es posible que el núcleo derivado (núcleo hijo) también sea inestable. En este caso se produce una *serie* de decaimientos sucesivos, hasta alcanzar una configuración estable. En la naturaleza se encuentran varias series de ésas. El núclido radiactivo más abundante en la Tierra es el isótopo del uranio ^{238}U, que sufre una serie de 14 desintegraciones, incluyendo ocho emisiones α y seis emisiones β^-, y termina en un isótopo estable del plomo, ^{206}Pb (figura 43.7).

Una serie de desintegraciones radiactivas se puede representar en una gráfica de Segré, como en la figura 43.8. El número de neutrones N se grafica verticalmente y el número atómico Z horizontalmente. En una emisión alfa, tanto N como Z disminuyen en dos. En una emisión β^-, N disminuye en uno y Z aumenta en uno. Las desintegraciones también se pueden representar en forma de ecuación. Los dos primeros decaimientos en la serie se escriben como sigue:

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + \alpha$$

$$^{234}\text{Th} \rightarrow {}^{234}\text{Pa} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

o de forma más abreviada como

$$^{238}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}\text{Th}$$

$$^{234}\text{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{234}\text{Pa}$$

En el segundo proceso, el decaimiento beta produce el núcleo derivado ^{234}Pa en un estado excitado, desde donde decae al estado fundamental emitiendo un fotón de rayo gamma. Un estado excitado se indica con un asterisco, por lo que la emisión gamma γ se puede representar como sigue:

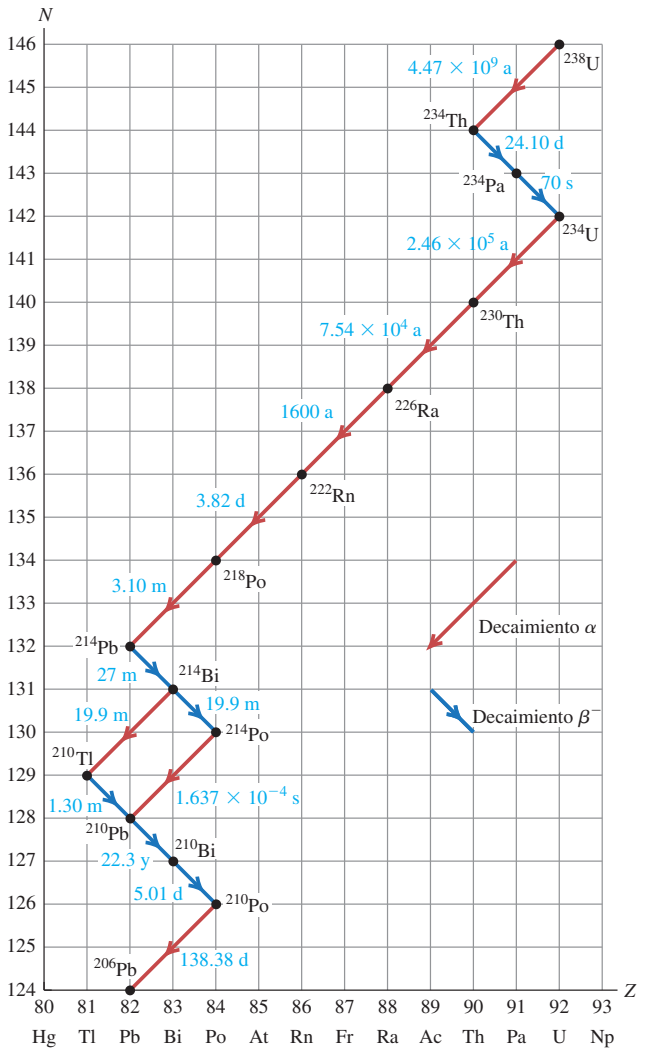
$$^{234}\text{Pa}^* \rightarrow {}^{234}\text{Pa} + \gamma$$

o bien,

$$^{234}\text{Pa}^* \xrightarrow{\gamma} {}^{234}\text{Pa}$$

Una propiedad importante de la serie de decaimiento del ^{238}U es la ramificación que se presenta en el ^{214}Bi. Este núclido decae a ^{210}Pb emitiendo una α y una β^-, lo cual puede suceder en cualquier orden. También se observa que en la serie hay isótopos inestables de varios elementos que también tienen isótopos estables, como el talio (TI), plomo (Pb) y bismuto (Bi). Los isótopos inestables de esos elementos que hay en la serie del ^{238}U tienen todos demasiados neutrones para ser estables.

Se conocen muchas otras series de desintegración. Dos de ellas existen en la naturaleza: una comienza con el raro isótopo ^{235}U y termina en ^{207}Pb; la otra comienza con el torio (^{232}Th) y termina en el ^{208}Pb.



43.8 Gráfica de Segré que muestra la serie de desintegración del ^{238}U, que termina en el núclido estable ^{206}Pb. Los tiempos son vidas medias (se describen en la siguiente sección) expresadas en años (a), días (d), horas (h), minutos (m) o segundos (s).

Evalúe su comprensión de la sección 43.3 Un núcleo con número atómico Z y número de neutrones N experimenta dos procesos de decaimiento. El resultado es un núcleo con número atómico $Z - 3$ y número de neutrones $N - 1$. ¿Qué procesos de decaimiento tuvieron lugar? i) Dos decaimientos β^-; ii) dos decaimientos β^+; iii) dos decaimientos α; iv) un decaimiento α y un decaimiento β^-; v) un decaimiento α y un decaimiento β^+.

43.4 Actividades y vidas medias

Suponga que debe desechar algo de residuo radiactivo que contiene cierta cantidad de un núclido radiactivo. Si no se produce más, la cantidad disminuye en forma sencilla, a medida que los núcleos se desintegran. Esta disminución es un proceso estadístico; no hay forma de predecir cuándo se desintegrará determinado núcleo. Ningún cambio en el ambiente físico o químico —por ejemplo, reacciones químicas, calentamiento o enfriamiento— afecta la rapidez de decaimiento. La tasa de decaimiento varía dentro de un margen extremadamente amplio, para diferentes núclidos.

Tasas de decaimiento radiactivo

Sea $N(t)$ el número (muy grande) de núcleos radiactivos en una muestra, en el momento t, y sea $dN(t)$ el cambio (negativo) en ese número durante un corto intervalo de tiempo dt. [Usaremos $N(t)$ para minimizar la confusión con el número de neutrones N.]

La cantidad de decaimientos durante el intervalo dt es $-dN(t)$. La tasa de cambio de $N(t)$ es el negativo de $dN(t)/dt$; entonces, $-dN(t)/dt$ se llama *tasa de decaimiento, rapidez de decaimiento, velocidad de decaimiento* o **actividad** del espécimen. Cuanto mayor sea la cantidad de núcleos en la muestra, más núcleos decaen durante cualquier intervalo de tiempo. Es decir, la actividad es directamente proporcional *a* $N(t)$; entonces es igual a una constante λ multiplicada por $N(t)$:

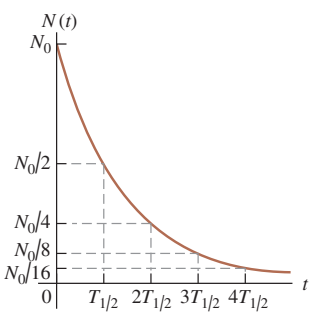
$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \tag{43.16}$$

A la constante λ se le llama **constante de decaimiento**, **constante radiactiva** o **coeficiente de decaimiento**, y tiene distintos valores para núclidos diferentes. Un valor grande de λ corresponde a un decaimiento rápido, y uno pequeño, a un decaimiento más lento. Al despejar λ de la ecuación (43.16) se ve que λ es la razón entre la cantidad de decaimientos por unidad de tiempo y la cantidad de los núcleos radiactivos restantes; así, λ se puede interpretar como la *probabilidad por unidad de tiempo* para que cualquier núcleo en particular se desintegre.

Esta situación recuerda a la descarga de un capacitor, que estudiamos en la sección 26.4. La ecuación (43.16) tiene la misma forma que el negativo de la ecuación (26.15), sustituyendo q y $1/RC$ por $N(t)$ y λ. Luego, podemos hacer las mismas sustituciones en la ecuación (26.16), con el número inicial de núcleos $N(0) = N_0$, para definir la función exponencial:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{(cantidad de núcleos restantes)} \tag{43.17}$$

43.9 Cantidad de núcleos en una muestra de un elemento radiactivo, en función del tiempo. La actividad de la muestra tiene una curva de decaimiento exponencial, con la misma forma.



La figura 43.9 es una gráfica de esta función, donde se muestra el número de núcleos restantes $N(t)$ en función del tiempo.

La **vida media** o "semivida" $T_{1/2}$ es el tiempo necesario para que la cantidad de núcleos radiactivos disminuya hasta la mitad del número original N_0. Así, la mitad de los núcleos radiactivos que restan se desintegrará durante un segundo intervalo $T_{1/2}$, y así sucesivamente. Las cantidades restantes después de las vidas medias sucesivas son $N_0/2$, $N_0/4$, $N_0/8$, . . .

Para obtener la relación entre la vida media $T_{1/2}$ y la constante de decaimiento λ, se iguala $N(t)/N_0 = \frac{1}{2}$, y $t = T_{1/2}$ en la ecuación (43.17), y el resultado es

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Sacamos logaritmos de ambos lados y despejamos $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \tag{43.18}$$

La duración promedio, o vida media T_{media}, que en general se llama *tiempo de vida* de un núcleo o partícula inestable es proporcional a la vida media $T_{1/2}$:

$$T_{\text{media}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693} \qquad \begin{array}{l}\text{(tiempo de vida } T_{\text{media}}\text{, constante de}\\ \text{decaimiento } \lambda \text{ y vida media } T_{1/2}\text{)}\end{array} \tag{43.19}$$

En la física de partículas, la vida de una partícula inestable se describe en general por el tiempo de vida, y no por la vida media.

Debido a que la actividad $-dN(t)/dt$ en cualquier momento es igual a $\lambda N(t)$, y la ecuación (43.17) indica que la actividad también depende del tiempo, en función de $e^{-\lambda t}$. Así, la gráfica de actividad en función del tiempo tiene la misma forma que la figura 43.9. Además, después de algunas vidas medias sucesivas, la actividad es la mitad, un cuarto, un octavo, etcétera, de la actividad original.

CUIDADO **Una vida media tal vez no es suficiente** A veces se entiende que cualquier muestra radiactiva será segura después de haber transcurrido una vida media. Eso no es cierto. Si al principio su residuo radiactivo tiene diez veces la actividad necesaria para ser segura, no es segura después de una vida media, cuando todavía tiene cinco veces demasiada actividad. Aun

después de tres vidas medias, todavía tiene 25% más actividad que la actividad segura. La cantidad de núcleos radiactivos y la actividad sólo tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Una unidad común de actividad es el **curie**, con el símbolo Ci, que se define como 3.70×10^{10} decaimientos por segundo. Es aproximadamente igual a la actividad de un gramo de radio. La unidad del SI de actividad es el *becquerel,* con el símbolo Bq. Un becquerel es un decaimiento por segundo, por lo que

$$1\ \text{Ci} = 3.70 \times 10^{10}\ \text{Bq} = 3.70 \times 10^{10}\ \text{decaimientos/s}$$

Ejemplo 43.8 Actividad del ^{57}Co

El isótopo radiactivo ^{57}Co se desintegra por captura de electrón, con una vida media de 272 días. *a*) Calcule la constante de decaimiento y la vida promedio. *b*) Si usted tiene una fuente de radiación que contiene ^{57}Co y su actividad es 2.00 μCi, ¿cuántos núcleos radiactivos contiene? *c*) ¿Cuál será la actividad de su fuente después de un año?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las relaciones entre la constante de decaimiento λ, la vida promedio T_{media} y la actividad $-dN(t)/dt$.

PLANTEAR: Determinaremos la constante de decaimiento λ y la vida promedio T_{media} a partir de la vida media $T_{1/2}$ usando la ecuación (43.19). Una vez determinada λ calcularemos la cantidad $N(t)$ de núcleos a partir de la actividad (que es igual a la tasa de decaimiento $-dN(t)/dt$) con la ecuación (43.16). A continuación, con la ecuación (43.17) determinaremos el número de núcleos que quedan después de un año, y con este valor determinaremos la actividad en ese momento, usando de nuevo la ecuación (43.16).

EJECUTAR: *a*) Para simplificar las unidades expresaremos la vida media en segundos:

$$T_{1/2} = (272\ \text{días})(86{,}400\ \text{s/día}) = 2.35 \times 10^7\ \text{s}.$$

De acuerdo con la ecuación (43.19), el tiempo de vida es

$$T_{\text{media}} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{2.35 \times 10^7\ \text{s}}{0.693} = 3.39 \times 10^7\ \text{s}$$

La constante de decaimiento es

$$\lambda = \frac{1}{T_{\text{media}}} = 2.95 \times 10^{-8}\ \text{s}^{-1}$$

b) La actividad $-dN(t)/dt$ es un dato, 2.00 μCi, así que

$$-\frac{dN(t)}{dt} = 2.00\ \mu\text{Ci} = (2.00 \times 10^{-6})(3.70 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1})$$
$$= 7.40 \times 10^4\ \text{decaimientos/s}$$

Según la ecuación (43.16), eso es igual a $\lambda N(t)$, por lo que

$$N(t) = -\frac{dN(t)/dt}{\lambda} = \frac{7.40 \times 10^4\ \text{s}^{-1}}{2.95 \times 10^{-8}\ \text{s}^{-1}} = 2.51 \times 10^{12}\ \text{núcleos}$$

Si siente usted que no le gustan las "unidades" decaimientos y núcleos, puede usar decaimientos/(núcleos · s) como unidad de λ.

c) De acuerdo con la ecuación (43.17), la cantidad $N(t)$ de núcleos restantes después de un año (3.156×10^7 s) es

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-(2.95\times10^{-8}\ \text{s}^{-1})(3.156\times10^7\ \text{s})} = 0.394 N_0$$

La cantidad de núcleos ha bajado hasta 0.394 de la cantidad original. La ecuación (43.16) indica que la actividad es proporcional a la cantidad de núcleos, por lo que la actividad ha bajado en este mismo factor a (0.394) (2.00 μCi) = 0.788 μCi.

EVALUAR: La cantidad de núcleos que se calculó en el inciso *b*) equivale a 4.17×10^{-12} moles, con una masa de 2.38×10^{-10} g. Es una masa mucho menor que la que puede medir hasta la balanza más sensible.

Después de una vida media de 272 días, la cantidad de núcleos de ^{57}Co ha bajado hasta $N_0/2$; después de 2(272 d) = 544 d, baja a $N_0/2^2 = N_0/4$. Este resultado concuerda con su respuesta en el inciso *c*), que dice que después de 365 d, el número de núcleos queda entre $N_0/2$ y $N_0/4$.

Fechado radiactivo

Una aplicación interesante de la radiactividad es el fechado o datación de muestras arqueológicas y geológicas, midiendo la concentración de isótopos radiactivos. La técnica más conocida es el *fechado con carbono.* El isótopo inestable ^{14}C se produce durante reacciones nucleares en la atmósfera, causadas por bombardeo de rayos cósmicos, y produce una pequeña proporción de ^{14}C en e1CO_2 de la atmósfera. Las plantas que obtienen su carbono de esta fuente contienen la misma proporción de ^{14}C que la atmósfera. Cuando muere la planta, cesa de absorber carbono y su ^{14}C decae por β^- a ^{14}N, que tiene vida media de 5730 años. Al medir la proporción de ^{14}C en los restos, es posible determinar hace cuánto tiempo murió el organismo.

Una de las dificultades con el fechado mediante radiocarbono es que la concentración de ^{14}C en la atmósfera cambia a lo largo de grandes intervalos de tiempo. Se pueden hacer correcciones con base en otros datos, como mediciones de los anillos en los árboles, que presentan ciclos anuales de crecimiento. Se usan técnicas radiactivas parecidas con otros isótopos para fechar muestras geológicas. Por ejemplo, algunas rocas contienen el isótopo inestable ^{40}K, que es emisor beta y decae al núclido estable

^{40}Ar, con una vida media de 2.4×10^8 años. La edad de la roca se determina comparando las concentraciones de ^{10}K y ^{40}Ar.

Ejemplo 43.9 Fechado con radiocarbono

Antes de 1900, la actividad del carbono atmosférico, por unidad de masa, debida a la presencia de ^{14}C, era de unos 0.255 Bq por gramo de carbono, en promedio. *a*) ¿Qué fracción de los átomos de carbono eran de ^{14}C? *b*) Al analizar una muestra arqueológica que contiene 500 mg de carbono, usted observa 174 decaimientos en una hora. ¿Cuál es la edad del espécimen, suponiendo que su actividad por unidad de masa de carbón, al morir, tenía el mismo valor promedio que la del aire?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La idea clave es que la actividad actual de una muestra biológica que contiene ^{14}C está relacionada tanto con el tiempo transcurrido desde que dejó de tomar carbono atmosférico como con su actividad en ese momento.

PLANTEAR: En el inciso *a*) determinamos la cantidad de átomos de ^{14}C $N(t)$ de la actividad $-dN(t)/dt$ usando la ecuación (43.16). Encontramos que el número total de átomos de carbono en 500 mg, usando la masa molar del carbono (12.011 g/mol, que aparece en el Apéndice D), y usaremos el resultado para calcular la fracción de átomos de carbono que son ^{14}C. La actividad disminuye con la misma razón que el número de núcleos de ^{14}C; aprovecharemos esto, junto con la ecuación (43.17), para obtener la edad t de la muestra.

EJECUTAR: *a*) Para usar la ecuación (43.16) debemos calcular primero λ, con la ecuación (43.18):

$$T_{1/2} = 5730 \text{ años} = (5730 \text{ años})(3.156 \times 10^7 \text{ s/años}) = 1.808 \times 10^{11} \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{1.808 \times 10^{11} \text{ s}} = 3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

O también

$$\lambda = \frac{0.693}{5730 \text{ años}} = 1.209 \times 10^{-4} \text{ años}^{-1}$$

Entonces, de la ecuación (43.16),

$$N(t) = \frac{-dN/dt}{\lambda} = \frac{0.255 \text{ s}^{-1}}{3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} = 6.66 \times 10^{10} \text{ átomos}$$

La cantidad *total* de átomos de C en un gramo (1/12.011 mol) es $(1/12.011)(6.022 \times 10^{23}) = 5.01 \times 10^{22}$. La razón entre átomos de ^{14}C y todos los átomos de C es

$$\frac{6.66 \times 10^{10}}{5.01 \times 10^{22}} = 1.33 \times 10^{-12}$$

Sólo cuatro átomos de cada 3 millones de millones son de ^{14}C.

b) Suponiendo que la actividad por gramo de carbono en la muestra, al morir, era $0.255 \text{ Bq/g} = (0.255 \text{ s}^{-1} \cdot \text{g}^{-1})(3600 \text{ s/h}) = 918 \text{ h}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$, la actividad de 500 mg de carbono era entonces $(0.500 \text{ g}) \times (918 \text{ h}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}) = 459 \text{ h}^{-1}$. La actividad observada ahora, en tiempo t más tarde, es de 174 h^{-1}. Como la actividad es proporcional al número de núcleos radiactivos, la razón de actividad $174/459 = 0.379$ es igual a la razón de los números $N(t)/N_0$.

Ahora despejaremos t de la ecuación (43.17), e insertaremos los valores de $N(t)/N_0$ y λ:

$$t = \frac{\ln (N(t)/N_0)}{-\lambda} = \frac{\ln 0.379}{-1.209 \times 10^{-4} \text{ años}^{-1}} = 8020 \text{ años}$$

EVALUAR: Después de 8020 años, la actividad del ^{14}C ha disminuido de 459 a 174 decaimientos por hora. El espécimen murió y cesó de absorber CO_2 del aire hace unos 8000 años.

Radiación en el hogar

Un riesgo serio para la salud en algunas áreas es la acumulación del ^{222}Rn en las casas; es un gas inerte, incoloro, inodoro y radiactivo. Al examinar la cadena de desintegración del ^{238}U (figura 43.8), vemos que la vida media del ^{222}Rn es 3.82 días. Si es así, ¿por qué no salimos de la casa durante un rato y lo dejamos decaer y desaparecer? La respuesta es que el ^{222}Rn se *produce* en forma continua, por el decaimiento del ^{226}Ra, que existe en cantidades diminutas en las rocas y el suelo sobre los que se construyen las casas. Es un caso de equilibrio dinámico, donde la cantidad de producción es igual a la cantidad de decaimiento. La razón por la que el ^{222}Rn constituye un mayor riesgo que los demás elementos de la serie de desintegración del ^{238}U es que es un gas. Durante su corta vida media de 3.82 días puede migrar del suelo y penetrar en su casa. Si un núcleo de ^{222}Rn se desintegra en sus pulmones, emite una partícula α dañina, y su núcleo derivado, el ^{218}Po, que *no* es químicamente inerte y probablemente permanezca en sus pulmones hasta que se desintegre, emite otra partícula α dañina recorriendo la serie radiactiva del ^{238}U.

¿Qué tan peligroso es el radón? Aunque los informes indican valores hasta de 3500 pCi/L, la actividad promedio por unidad de volumen en el interior de los hogares estadounidenses, debida al ^{222}Rn, es 1.5 pCi/L (más de mil decaimientos cada segundo,

en una habitación de tamaño mediano). Se ha estimado que *si* el ambiente que le rodea tiene este nivel de actividad, una exposición durante toda la vida reduciría su expectativa de vida en unos 40 días. Para comparar, fumar una cajetilla de cigarrillos al día reduce la expectativa de vida de 6 años, y se estima que la emisión promedio de todas las plantas nucleares en el mundo reduce la expectativa de vida entre 0.01 y 5 días. Estas cifras incluyen las catástrofes como el desastre del reactor nuclear de Chernobyl en 1986, para el cual el efecto *local* sobre la expectativa de vida es mucho mayor.

Evalúe su comprensión de la sección 43.4 ¿Cuál muestra contiene mayor número de núcleos: una de 5.00 μCi de ^{240}Pu (vida media de 6560 años) o una muestra con 4.45 μCi de ^{243}Am (vida media de 7370 años)? i) La muestra de ^{240}Pu; ii) la muestra de ^{243}Am; iii) ambas tienen el mismo número de núcleos.

43.5 Efectos biológicos de la radiación

La descripción anterior del radón presentó la interacción de radiación con organismos vivos, un tema de vital interés e importancia. Bajo el término *radiación* se incluyen la radiactividad (alfa, beta, gamma y neutrones) y la radiación electromagnética, como los rayos x. Conforme esas partículas atraviesan la materia, pierden energía rompiendo enlaces moleculares y formando iones (de aquí el término *radiación ionizante*). Las partículas cargadas interactúan en forma directa con los electrones en el material. Los rayos x y los rayos γ interaccionan mediante el efecto fotoeléctrico, en el que un electrón absorbe un fotón y sale despedido de su lugar, o por dispersión de Compton (véase la sección 38.7). Los neutrones causan ionización en forma indirecta por choques con núcleos o mediante la absorción en núcleos y el decaimiento posterior de los núcleos que resultan.

Estas interacciones son extremadamente complejas. Se sabe bien que demasiada exposición a la radiación —lo que incluye la luz solar, los rayos x y todas las radiaciones nucleares— puede destruir tejidos. En los casos benignos causa una quemadura, como las quemaduras comunes por la exposición a la luz solar. Con más exposición se pueden causar enfermedades muy graves o la muerte, a través de diversos mecanismos, como la destrucción masiva de las células tisulares, alteraciones del material genético y la destrucción de los componentes de la médula ósea que producen los glóbulos rojos.

Cálculo de dosis de radiación

La *dosimetría de radiación* es la descripción cuantitativa del efecto de la radiación sobre los tejidos vivos. La *dosis absorbida* de radiación se define como la energía entregada a la unidad de masa del tejido. La unidad del SI de dosis absorbida es el joule por kilogramo, y se llama *gray* (Gy); 1 Gy = 1 J/kg. Otra unidad, de uso más frecuente en la actualidad, es el *rad,* que se define como 0.01 J/kg:

$$1 \text{ rad} = 0.01 \text{ J/kg} = 0.01 \text{ Gy}$$

La dosis absorbida por sí misma no es una medida adecuada de los efectos biológicos, porque energías iguales de distintas clases de radiación causan distintos grados de efecto biológico. Esta variación se describe con un factor numérico llamado **eficacia biológica relativa (EBR)**, que también se conoce como *factor de calidad* (FQ), para cada radiación específica. Los rayos x de 200 keV de energía tienen una EBR igual a la unidad, por definición, y los efectos de otras radiaciones pueden compararse por vía experimental. La tabla 43.3 indica los valores aproximados de EBR para varias radiaciones. Todos esos valores dependen algo tanto de la clase de tejido donde se absorbe la radiación, como de la energía de la radiación.

El efecto biológico se describe por el producto de la dosis absorbida y la EBR de la radiación; esta cantidad se llama *dosis biológicamente equivalente*, o simplemente dosis equivalente. La unidad del SI de dosis equivalente en humanos es el sievert (Sv):

$$\text{Dosis equivalente (Sv)} = \text{EBR} \times \text{dosis absorbida (Gy)} \qquad (43.20)$$

Tabla 43.3 Eficacia biológica relativa (EBR) de varias clases de radiación

Radiación	EBR (Sv/Gy o rem/rad)
Rayos x y rayos γ	1
Electrones	1.0–1.5
Neutrones lentos	3–5
Protones	10
Partículas α	20
Iones pesados	20

Una unidad más común, derivada del rad, es el rem (*röntgen equivalente para el hombre*):

$$\text{Dosis equivalente (rem)} = \text{EBR} \times \text{dosis absorbida (rad)} \tag{43.21}$$

Así, la unidad de EBR es 1 Sv/Gy o 1 rem/rad, y 1 rem = 0.01 Sv.

Ejemplo 43.10 Un examen médico con rayos x

Durante un examen de diagnóstico con rayos x, una parte de 1.2 kg de una pierna rota recibe una dosis equivalente de 0.40 mSv. *a*) ¿Cuál es la dosis equivalente en mrem? *b*) ¿Cuál es la dosis absorbida, en mrad y mGy? *c*) Si la energía de los rayos x es 50 keV ¿cuántos fotones de rayos x se absorben?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos pide relacionar la dosis equivalente (el efecto biológico de la radiación, medido en sieverts o en rems) con la dosis absorbida (la energía absorbida por masa, medida en grays o rads).

PLANTEAR: En el inciso *a*) usaremos el factor de conversión 1 rem = 0.01 Sv, de dosis equivalente. La tabla 43.3 muestra el EBR para los rayos x; usaremos este valor en el inciso *b*) para determinar la dosis absorbida usando las ecuaciones (43.20) y (43.21). Por último, en el inciso *c*) usaremos la masa y la definición de dosis absorbida para calcular la energía total absorbida y la cantidad total de fotones absorbidos.

EJECUTAR: *a*) La dosis equivalente en mrem es

$$\frac{0.40\ \text{mSv}}{0.01\ \text{Sv/rem}} = 40\ \text{mrem}$$

b) Para los rayos x, EBR = 1 rem/rad, o 1 Sv/Gy, por lo que la dosis absorbida es

$$\frac{40\ \text{mrem}}{1\ \text{rem/rad}} = 40\ \text{mrad}$$

$$\frac{0.40\ \text{mSv}}{1\ \text{Sv/Gy}} = 0.40\ \text{mGy} = 4.0 \times 10^{-4}\ \text{J/kg}$$

c) La energía total absorbida es

$$(4.0 \times 10^{-4}\ \text{J/kg})(1.2\ \text{kg}) = 4.8 \times 10^{-4}\ \text{J} = 3.0 \times 10^{15}\ \text{eV}$$

La cantidad de fotones de rayos x es

$$\frac{3.0 \times 10^{15}\ \text{eV}}{5.0 \times 10^{4}\ \text{eV/fotones}} = 6.0 \times 10^{10}\ \text{fotones}$$

EVALUAR: La dosis absorbida es relativamente grande, porque los rayos x tienen una EBR baja. Si la radiación ionizante hubiera sido un haz de partículas α, para las cuales EBR = 20, la dosis absorbida necesaria para una dosis equivalente de 0.40 mSv sería 0.020 mGy, que corresponde a una energía absorbida total de 2.4×10^{-5} J.

Riesgos de la radiación

Presentaremos algunos números para tener una perspectiva. Para convertir de Sv a rem, sólo se multiplica por 100. Una radiografía ordinaria del tórax entrega aproximadamente de 0.20 a 0.40 mSv a unos 5 kg de tejido. La exposición a la radiación de los rayos cósmicos y la radiactividad natural del suelo, materiales de construcción, etcétera, es del orden de 2 a 3 mSv por año, a nivel del mar, y el doble a una altura de 1500 m (5000 pies). Una dosis de cuerpo entero hasta de aproximadamente 0.20 Sv no causa efecto detectable de inmediato. Una exposición corta con dosis de 5 Sv o más suele causar la muerte en algunos días o semanas. Una dosis localizada de 100 Sv causa la destrucción completa de los tejidos expuestos.

A menudo se difunde información sobre los riesgos por exposición a la radiación, a largo plazo, como causa de diversos cánceres y defectos genéticos, y se ha debatido ampliamente el asunto de si hay algún nivel "seguro" de exposición a la radiación. Los reglamentos del gobierno de Estados Unidos se basan en exposición *anual* máxima permitida, debida a todas las fuentes de 2 a 5 mSv por año, excepto las naturales. Los trabajadores con exposición a la radiación por causa de su ocupación pueden alcanzar 50 mSv por año. Estudios recientes sugieren que estos límites son demasiado altos, y que las exposiciones, aunque sean extremadamente pequeñas, causan riesgos; pero es muy difícil reunir estadísticas confiables sobre los efectos de dosis bajas. Se ha aclarado que todo uso de rayos x para diagnóstico en medicina debe estar precedido por una estimación muy cuidadosa del riesgo en relación con el posible beneficio.

Otro asunto muy debatido es el de los riesgos de radiación por las centrales eléctricas nucleares. El nivel de radiación causado por ellas *no es* despreciable. Sin embargo, para hacer una evaluación racional de los riesgos, debemos comparar esos niveles con las alternativas, como las centrales eléctricas alimentadas por carbón. Los riesgos a la salud por el humo del carbón son graves y están bien documentados, y se cree que la radiactividad natural en ese humo es unas 100 veces mayor que el de una central

nuclear que funcione en forma correcta, de igual capacidad. Pero la comparación no es tan simple; también hay que considerar la posibilidad de un accidente nuclear y el grave problema de desechar de manera segura los residuos radiactivos de las plantas nucleares. Es claramente imposible eliminar *todos* los riesgos para la salud. La meta debería ser tratar de adoptar una actitud racional hacia el problema de *minimizar* el riesgo de todas las fuentes. La figura 43.10 muestra una estimación de las diversas fuentes de exposición a la radiación para la población en Estados Unidos. La radiación ionizante es una espada de dos filos: impone riesgos muy graves para la salud, pero también brinda muchos beneficios a la humanidad, incluyendo diagnósticos y tratamientos de enfermedades y una gran variedad de técnicas analíticas.

Usos benéficos de la radiación

La radiación se usa mucho en medicina, para destrucción selectiva intencional de tejidos, como tumores. Los riesgos son considerables, pero si la enfermedad resulta mortal sin tratamiento, todo riesgo es preferible. Los isótopos producidos en forma artificial se usan con frecuencia como fuentes de radiación. Esos isótopos tienen varias ventajas sobre los isótopos radiactivos naturales. Pueden tener vidas medias más cortas, y una actividad mayor, en forma correspondiente. Se pueden elegir isótopos que emitan la clase de radiación que se desee. Algunos isótopos artificiales se han sustituido por haces de fotones y electrones producidos en aceleradores lineales.

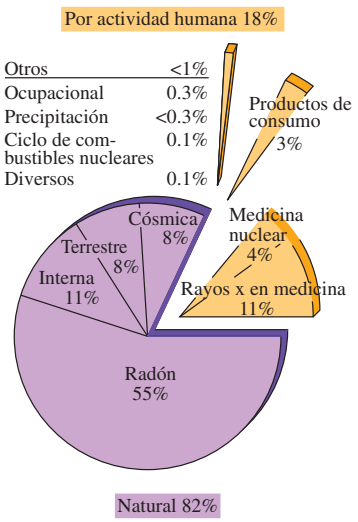
La *medicina nuclear* es un campo de aplicación en expansión. Los isótopos radiactivos tienen casi las mismas configuraciones electrónicas y el comportamiento químico que los isótopos estables del mismo elemento. Pero la ubicación y concentración de los isótopos radiactivos se puede detectar fácilmente con mediciones de la radiación que emiten. Un ejemplo conocido es el uso de yodo radiactivo en estudios de tiroides. Casi todo el yodo que se ingiere se elimina o se almacena en la tiroides, y las reacciones químicas en el organismo no discriminan entre el isótopo inestable ^{131}I y el estable ^{127}I. Una cantidad diminuta de ^{131}I se alimenta o inyecta en el paciente, y la rapidez con que se concentra en la tiroides es una medida de la función de ella. La vida media es 8.02 días, por lo que no hay riesgos duraderos de radiación. Al usar detectores de barrido más complicados también se puede obtener una imagen de la tiroides, que revela agrandamientos y otras anormalidades. Este procedimiento, es una clase de *autorradiografía*, comparable a fotografiar el filamento incandescente de una bombilla eléctrica usando la luz emitida por el mismo filamento. Si este proceso descubre nódulos cancerosos en la tiroides, se pueden destruir usando cantidades mucho mayores de ^{131}I.

Otro núclido útil en la medicina nuclear es el tecnecio 99 (^{99}Tc), formado en un estado excitado por el decaimiento β^- del molibdeno (^{99}Mo). El tecnecio decae a su estado fundamental emitiendo un fotón de rayo γ con 143 keV de energía. La vida media es 6.01 horas, excepcionalmente larga para una emisión γ. (El estado fundamental del ^{99}Tc también es inestable y su vida media es 2.11×10^5 años; decae por emisión β^- al núclido estable de rutenio ^{99}Ru.) La química del tecnecio es tal que se puede fijar con facilidad a moléculas orgánicas que se absorben en diversos órganos del cuerpo. Una pequeña cantidad de esas moléculas portadoras del tecnecio se inyecta a un paciente, y para producir una imagen se usa un detector de barrido, *o cámara gamma*; la imagen producida se llama *scintigrama o escintilograma*, y revela qué partes del cuerpo absorben esta molécula emisora γ. Esta técnica, en la cual el ^{99}Tc funciona como *trazador* radiactivo, desempeña un papel importante en la localización de cánceres, embolias y otros cuadros patológicos (figura 43.11).

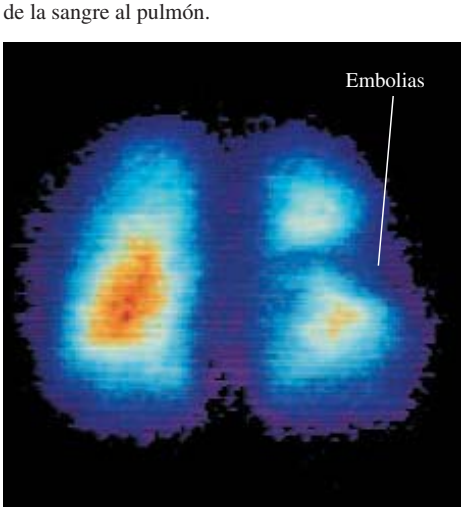
Las técnicas de trazador tienen muchas otras aplicaciones. El tritio (^{3}H), un isótopo radiactivo del hidrógeno, se usa para marcar moléculas en reacciones orgánicas complejas; las marcas radiactivas en moléculas de plaguicida, por ejemplo, pueden usarse para rastrear su paso en las cadenas alimenticias. En el mundo de la maquinaria se puede usar hierro radiactivo para estudiar el desgaste de pistones. Hasta los fabricantes de detergentes para lavandería han probado la eficacia de sus productos usando mugre radiactiva.

También hay muchos efectos de la radiación que son útiles, como el fortalecimiento de polímeros por enlazamientos cruzados, esterilización de utensilios quirúrgicos,

43.10 Contribución de las diversas fuentes al total de exposición promedio a la radiación, de la población de Estados Unidos, expresada en porcentajes del total.



43.11 Este escintilograma iluminado muestra dónde se absorbió una sustancia que contiene ^{99}Tc radiactivo, en los pulmones de un paciente. El color anaranjado en el pulmón de la izquierda indica una fuerte emisión de rayos γ del ^{99}Tc, lo que demuestra que la sustancia pudo pasar a este pulmón a través de la corriente sanguínea. El pulmón derecho muestra emisión más débil, lo que indica la presencia de una embolia (un coágulo sanguíneo u otra obstrucción en una arteria) que está restringiendo el flujo de la sangre al pulmón.



dispersión de electricidad estática indeseable en el aire, así como ionización intencional del aire en detectores de humo. También se están usando los rayos gamma para esterilizar y preservar algunos productos alimenticios.

Evalúe su comprensión de la sección 43.5 Las partículas alfa tienen una efectividad biológica relativa 20 veces mayor que los 200 keV de los rayos x. ¿Qué es mejor para enviar radiación al tejido profundo del cuerpo? i) Un haz de partículas alfa; ii) un haz de 200 keV de rayos x; iii) ambos son igualmente efectivos.

43.6 Reacciones nucleares

En las secciones anteriores estudiamos el decaimiento de núcleos inestables, y en especial la emisión espontánea de una partícula α o β seguida a veces por una emisión γ. No se hizo nada para iniciar este decaimiento, y nada se puede hacer para controlarlo. En esta sección se examinan algunas *reacciones nucleares*, que son el resultado de los componentes nucleares causados al bombardear con una partícula, y no por un proceso natural espontáneo. En 1919 Rutherford sugirió que una partícula masiva con energía cinética suficiente podría penetrar en un núcleo. El resultado sería un nuevo núcleo con mayor número atómico y número de masa, o una desintegración del núcleo original. Rutherford bombardeó nitrógeno (^{14}N) con partículas α y obtuvo un núcleo de oxígeno (^{17}O) y un protón:

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \qquad (43.22)$$

Rutherford usó partículas alfa procedentes de fuentes radiactivas naturales. En el capítulo 44 describiremos algunos de los aceleradores de partículas que hoy se usan para iniciar las reacciones nucleares.

Las reacciones nucleares están sujetas a varias *leyes de conservación.* Los principios clásicos de conservación de carga, cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular y energía (incluyendo energías de reposo) son válidos en todas las reacciones nucleares. Una ley más de conservación, que no estaba prevista en la física clásica, es la conservación de la cantidad total de nucleones. Los números de protones y neutrones no necesitan conservarse por separado; hemos visto que en el decaimiento β 1os neutrones y los protones se transforman uno en el otro. Estudiaremos la base de la conservación del número nucleónico en el capítulo 44.

Cuando dos núcleos interactúan, la conservación de la carga establece que la suma de los números atómicos iniciales debe ser igual a la suma de los números atómicos finales. En virtud de la conservación del número nucleónico, la suma de los números de masa iniciales también debe ser igual a la suma de los números de masa finales. En general, ésas *no son* colisiones elásticas y, en consecuencia, la masa total inicial *no* es igual a la masa total final.

Energía de reacción

La diferencia entre las masas antes y después de la reacción corresponde a la **energía de reacción**, de acuerdo con la relación entre masa y energía $E = mc^2$. Si las partículas iniciales A y B interactúan y producen las partículas finales C y D, la energía de reacción Q se define como

$$Q = (M_A + M_B - M_C - M_D)c^2 \qquad \text{(energía de reacción)} \qquad (43.23)$$

Para equilibrar los electrones se usan masas atómicas neutras en la ecuación (43.23). Esto es, se usa la masa de $^{1}_{1}$H como la de un protón, $^{2}_{1}$H como la de un deuterón, $^{4}_{2}$He como la de una partícula α, y así sucesivamente. Cuando Q es positiva, la masa total disminuye y la energía cinética total aumenta. A esa reacción se le llama *reacción exoérgica.* Cuando Q es negativa, la masa aumenta y la energía cinética disminuye; se trata de una *reacción endoérgica.* También se usan los términos *exotérmica* y *endotérmica*, que se toman prestados de la química. En una reacción endoérgica, la reacción no puede efectuarse a menos que la energía cinética en el marco de referencia del

centro de masa sea cuando menos tan grande como $|Q|$. Esto es, hay una **energía de umbral**, que es la energía cinética mínima para iniciar una reacción endoérgica.

Ejemplo 43.11 Reacciones exoérgica y endoérgica

a) Cuando se bombardea litio (^{7}Li) con un protón, se producen dos partículas alfa (^{4}He). Calcule la energía de reacción. *b*) Calcule la energía de reacción para una reacción nuclear representada mediante la ecuación (43.22).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La energía de reacción para cualquier reacción nuclear es la masa total inicial menos la masa total final, multiplicada por c^2.

PLANTEAR: En cada caso determinaremos la energía de reacción usando la ecuación (43.23). Las masas necesarias están en la tabla 43.2.

EJECUTAR: *a*) Se puede escribir la reacción como sigue:

$$^1_1\text{H} + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$$

Las masas iniciales y finales son:

A: $^1_1$H	1.007825 u	C: $^4_2$He	4.002603 u
B: $^7_3$Li	7.016004 u	D: $^4_2$He	4.002603 u
	8.023829 u		8.005206 u

Se ve que

$$M_A + M_B - M_C - M_D = 0.018623 \text{ u}$$

Entonces, con la ecuación (43.23) se obtiene una energía de reacción de

$$Q = (0.018623 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 17.35 \text{ MeV}$$

b) Las masas de las diversas partículas son

A: $^4_2$He	4.002603 u	C: $^{17}_8$O	16.999132 u
B: $^{14}_7$N	14.003074 u	D: $^1_1$H1.	007825 u
	18.005677 u		18.006957 u

Vemos que la masa se incrementa en 0.001280 u y que la energía de reacción correspondiente es

$$Q = (-0.001280 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = -1.192 \text{ MeV}$$

EVALUAR: La reacción en *a*) es una reacción *exoérgica*: la energía cinética total de las dos partículas alfa separadas es 17.35 MeV mayor que la energía cinética total del protón y del núcleo de litio. En contraste, la reacción en *b*) es *endoérgica*: en el sistema del centro de masa (esto es, en un choque de frente con cero cantidad de movimiento total), la energía cinética total inicial mínima para que esta reacción ocurra es 1.192 MeV.

Consecuentemente, la reacción endoérgica del inciso *b*) del ejemplo 43.11 se produciría bombardeando núcleos estacionarios de ^{14}N con partículas alfa de un acelerador. En este caso, la energía cinética de una partícula alfa debe ser *mayor que* 1.191 MeV. Si toda la energía cinética de la partícula alfa sólo se empleara en aumentar la energía en reposo, la energía cinética final sería cero, y no se conservaría la cantidad de movimiento. Cuando una partícula de masa m y energía cinética K choca con una partícula estacionaria con masa M, la energía cinética total K_{cm} en el sistema de coordenadas del centro de masa (es decir, la energía disponible para causar reacciones nucleares) es

$$K_{\text{cm}} = \frac{M}{M+m}K \tag{43.24}$$

En esta ecuación se supone que las energías cinéticas de las partículas y los núcleos son mucho menores que sus energías en reposo. Dejamos al lector la deducción de la ecuación (43.24) (véase el problema 43.75). En este ejemplo, $K_{\text{cm}} = (14.00/18.01)K$, por lo que K debe ser al menos $(18.01)/14.00) \times (1.192 \text{ MeV}) = 1.533 \text{ MeV}$.

Para que una partícula cargada, como un protón o una partícula α, penetre en el núcleo de otro átomo y cause una reacción, en general debe tener una energía cinética inicial suficiente para superar la barrera de energía potencial causada por las fuerzas electrostáticas de repulsión. En la reacción del inciso *a*) del ejemplo 43.11, si consideramos que el protón y el núcleo de ^{7}Li son cargas con simetría esférica y radios definidos por la ecuación (43.1), sus centros estarán a una distancia de 3.5×10^{-15} m cuando se toquen. La energía potencial de repulsión del protón (carga $+e$) y del núcleo de ^{7}Li (carga $+3e$) a esta distancia de separación r es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(e)(3e)}{r} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{3.5 \times 10^{-15} \text{ m}}$$
$$= 2.0 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.2 \text{ MeV}$$

Aun cuando la reacción es exoérgica, el protón debe tener una energía cinética mínima aproximada de 1.2 MeV para que suceda la reacción, a menos que el protón *se tunelice* o *atraviese* la barrera (véase la sección 40.3).

Absorción de neutrones

La absorción de *neutrones* por los núcleos forma una clase importante de reacciones nucleares. Los núcleos pesados bombardeados por neutrones en una reacción nuclear pueden sufrir una serie de absorciones de neutrones, alternadas con decaimientos beta, en los que el número de masa A puede aumentar hasta 25. Algunos de los *elementos transuránicos,* que tienen Z mayor que 92, se producen de esta forma. Esos elementos no se han encontrado en la naturaleza. Se han identificado muchos elementos transuránicos, con Z hasta de 118.

La técnica analítica de *análisis por activación con neutrones* usa reacciones parecidas. Muchos núclidos estables, al ser bombardeados por neutrones, absorben un neutrón y se vuelven inestables al sufrir entonces un decaimiento β^-. Las energías de las emisiones β^- y γ dependen del núclido inestable y constituyen un medio para identificarlo, a él y al núclido estable original. De esta forma se pueden detectar cantidades de elementos muy pequeñas como para ser detectadas con análisis químicos convencionales.

Evalúe su comprensión de la sección 43.6 La reacción descrita en el inciso *a*) del ejemplo 43.11 es exoérgica. ¿Podría ocurrir naturalmente cuando una muestra de litio sólido se coloca en un matraz con hidrógeno gaseoso?

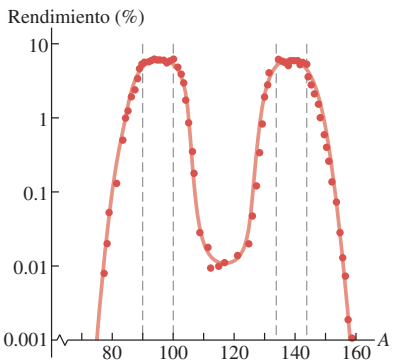
43.7 Fisión nuclear

La **fisión nuclear** es un procedimiento de desintegración en el que un núcleo inestable se divide en dos fragmentos de masa comparable. La fisión nuclear fue descubierta en 1938, gracias a los experimentos de Otto Hahn y Fritz Strassman en Alemania. Al continuar los trabajos anteriores de Fermi, bombardearon uranio ($Z = 92$) con neutrones. La radiación que resultaba no coincidió con la de algún núclido radiactivo conocido. Animados por su colega Lise Meitner, usaron análisis químicos meticulosos para llegar a la asombrosa pero inevitable conclusión de que habían encontrado un isótopo radiactivo del bario ($Z = 56$). Después también se encontró kriptón radiactivo ($Z = 36$). Meitner y Otto Frisch interpretaron estos resultados, en forma correcta, como la demostración de que los núcleos de uranio se estaban dividiendo en dos fragmentos masivos, llamados *fragmentos de fisión.* Dos o tres neutrones aparecen, normalmente, junto con los fragmentos de fisión, y sólo en ocasiones aparece un núclido ligero, como el ^{3}H.

Tanto el isótopo común (99.3%) ^{238}U como el poco común isótopo (0.7%) ^{235}U (así como algunos otros núclidos) se pueden dividir con facilidad por bombardeo con neutrones: el ^{235}U con neutrones lentos (con energía cinética menor que 1 eV), pero el ^{238}U sólo con neutrones rápidos con una energía mínima aproximada de 1 MeV. La fisión resultante de la absorción de neutrones se llama *fisión inducida*. Algunos núclidos también pueden experimentar *fisión espontánea* sin absorción inicial de neutrones, lo cual es bastante raro. Cuando el ^{235}U absorbe un neutrón, el núclido que resulta ^{236}U* está en un estado muy excitado y se divide en dos fragmentos, casi en forma instantánea. En sentido estricto, es $_{el}$ ^{236}U* y no el ^{235}U el que sufre la fisión, pero se acostumbra hablar de la fisión del ^{235}U.

Más de 100 núclidos distintos, que representan a más de 20 elementos, se han encontrado entre los productos de fisión. La figura 43.12 muestra la distribución de números de masa de los fragmentos de la fisión del ^{235}U. La mayor parte de los fragmentos tienen números de masa de 90 a 100 y de 135 a 145; es improbable la fisión en dos fragmentos de masa casi igual.

43.12 Distribución de las masas de los fragmentos de la fisión del ^{236}U* (un estado excitado del ^{236}U), que se produce cuando el ^{235}U absorbe un neutrón. La escala vertical es logarítmica.



Reacciones de fisión

El lector debería comprobar dos reacciones de fisión características, para ver que se conserve el número nucleónico y la carga:

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{144}_{56}\text{Ba} + {}^{89}_{36}\text{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\text{n}$$

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{94}_{38}\text{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}\text{n}$$

La energía cinética total de los fragmentos de la fisión es enorme, unos 200 MeV (en comparación con las energías típicas α y β de unos cuantos MeV). La razón es que los núclidos en el extremo elevado del espectro de masa (cercanos a $A = 240$) están menos firmemente enlazados que los cercanos a la mitad (A de 90 a 145). Observando la figura 43.2 vemos que la energía de enlace promedio por nucleón es de unos 7.6 MeV cuando $A = 240$, pero de unos 8.5 MeV cuando $A = 120$. En consecuencia, una estimación aproximada del *aumento* esperado en la energía de enlace durante la fisión es 8.5 MeV − 7.6 MeV = 0.9 MeV por nucleón, aproximadamente, o un total de (235)(0.9 MeV) ≈ 200 MeV.

CUIDADO **Energía de enlace y energía en reposo** Tal vez parezca que tener un aumento en la energía de enlace y también de la energía cinética durante una reacción de fisión es una violación de la conservación de la energía. Pero en relación con la energía total en reposo E_0 de los nucleones separados, la energía en reposo del núcleo es E_0 *menos* E_B. Así, un *aumento* de la energía de enlace corresponde a una *disminución* de la energía en reposo, ya que la energía en reposo se convierte en la energía cinética de los fragmentos de la fisión.

Los fragmentos de la fisión siempre tienen demasiados neutrones para ser estables. En la sección 43.3 indicamos que la razón entre neutrones y protones (N/Z) de los núclidos estables es aproximadamente 1 en los núclidos ligeros, pero casi 1.6 en los núclidos más pesados, por la influencia creciente de la repulsión eléctrica de los protones. El valor N/Z para los núclidos estables cuando $A = 100$ es aproximadamente 1.3, y cuando $A = 150$ es 1.4. Los fragmentos tienen más o menos la misma N/Z que el ^{235}U, más o menos 1.55. En general responden a este exceso de neutrones sufriendo una serie de decaimientos β^- (cada uno de los cuales aumenta la Z en 1 y disminuye N en 1) hasta que se llega a un valor estable de N/Z. Un ejemplo característico es

$$^{140}_{54}\text{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{55}\text{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\text{Ce}$$

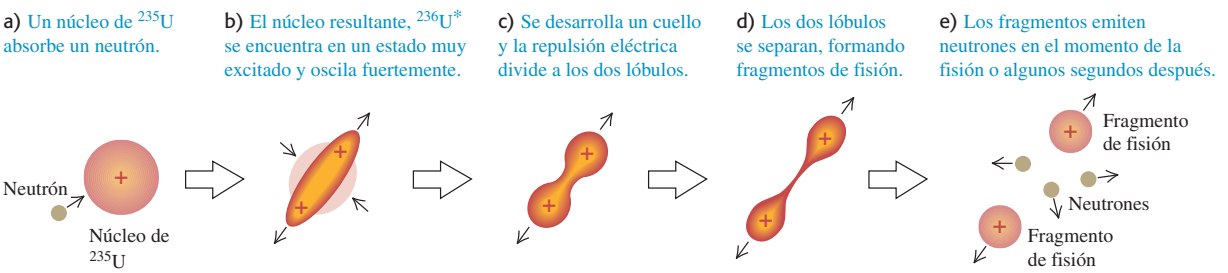
El núclido ^{140}Ce es estable. Esta serie de decaimientos β^- produce, en promedio, unos 15 MeV de energía cinética adicional. El exceso de neutrones en los fragmentos de fisión también explica por qué se desprenden dos o tres neutrones durante la fisión.

Parece que la fisión establece un límite superior en la producción de núcleos transuránicos, mencionados en la sección 43.6, que sean relativamente estables. Hay razones teóricas para esperar que los núcleos cercanos a $Z = 114$, $N = 184$ o 196 sean estables con respecto a la fisión espontánea. En el modelo de capas (sección 43.2) esos números corresponden a las capas y subcapas llenas en la estructura de niveles nucleares de energía. Esos *núcleos superpesados* seguirían siendo inestables con respecto a la emisión alfa, pero podrían durar lo suficiente como para poder identificarlos. En el momento de escribir esto, hay pruebas de que se han producido núcleos con $Z = 114$ en el laboratorio.

Modelo de la gota líquida

Se puede comprender la fisión en forma cualitativa con base en el modelo de gota líquida para el núcleo (sección 43.2). El proceso se ve en la figura 43.13, en términos de una gota líquida con carga eléctrica. Aunque no se deben tomar estos esquemas en forma demasiado literal, pueden ayudar a desarrollar la intuición acerca de la fisión. Un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón (figura 43.13a) y se transforma en un núcleo de ^{236}U* con exceso de energía (figura 43.13b). Este exceso de energía causa oscilaciones

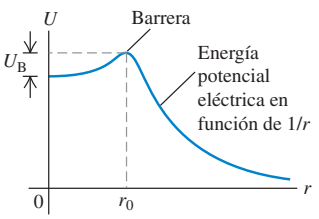
43.13 Modelo de la gota líquida para la fisión.



violentas, durante las que se forma un cuello entre dos lóbulos (figura 43.13c). La repulsión eléctrica de esos dos lóbulos estira más el cuello (figura 43.13d) y al final se forman dos gotas más pequeñas (figura 43.13e) que se separan con rapidez.

Esta imagen cualitativa ha evolucionado hacia una teoría más cuantitativa, para explicar por qué algunos núcleos sufren la fisión y otros no. La figura 43.14 muestra una función hipotética de energía potencial para dos fragmentos posibles de fisión. Si la absorción de neutrones causa una energía de excitación mayor que la altura de la barrera de energía U_B, la fisión sucede de inmediato. Aun cuando no haya la energía suficiente para atravesar la barrera, la fisión se puede efectuar por *tunelamiento*, proceso que se describió en la sección 40.3. En principio, muchos núcleos estables se pueden fisionar por tunelamiento. Pero la probabilidad depende, en forma muy crítica, de la altura y el ancho de la barrera. Para la mayor parte de los núcleos este proceso es tan improbable que nunca se observa.

43.14 Función hipotética de energía potencial para dos fragmentos de fisión en un núcleo fisionable. A distancias r fuera del alcance de la fuerza nuclear, la energía potencial varía aproximadamente en función de $1/r$. La fisión se produce si hay una energía de excitación mayor que U_B o una probabilidad apreciable de tunelamiento a través de la barrera de energía potencial.



Reacciones en cadena

La fisión de un núcleo de uranio, iniciada por bombardeo de neutrones, libera otros neutrones que pueden iniciar más fisiones, sugiriendo la posibilidad de una **reacción en cadena** (figura 43.15). Puede hacerse que la reacción en cadena proceda lentamente y en forma controlada en un reactor nuclear, o en forma explosiva y sin control en una bomba. La liberación de energía en una reacción nuclear en cadena es enorme, mucho mayor que en cualquier reacción química. (En cierto sentido, el *fuego* es una reacción química en cadena.) Por ejemplo, cuando el uranio se "quema" y forma dióxido de uranio en la reacción química

$$U + O_2 \rightarrow UO_2$$

el calor de combustión aproximado es 4500 J/g. Expresada como energía por átomo, esto es unos 11 eV por átomo. En contraste, la fisión libera unos 200 MeV por átomo, unas 20 millones de veces más energía.

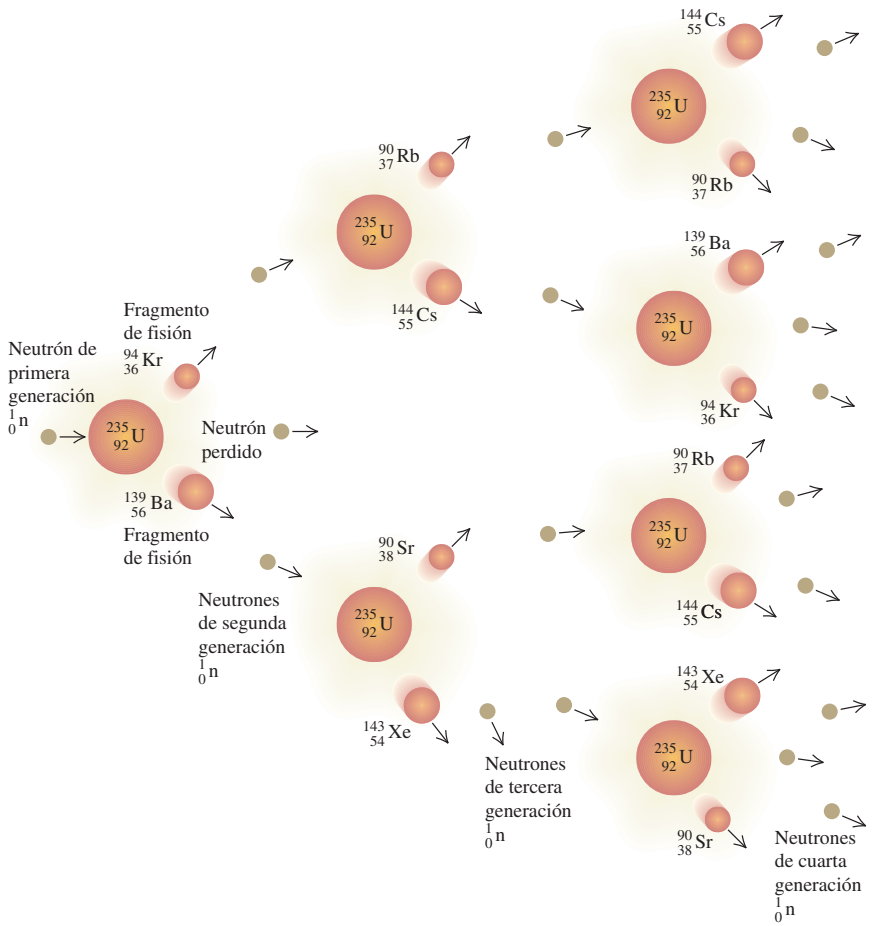
Reactores nucleares

Un *reactor nuclear* es un sistema en el que se usa una reacción nuclear en cadena y controlada para liberar energía. En una central nuclear, esta energía se usa para generar vapor, el cual hace trabajar una turbina, que la vez hace girar un generador eléctrico.

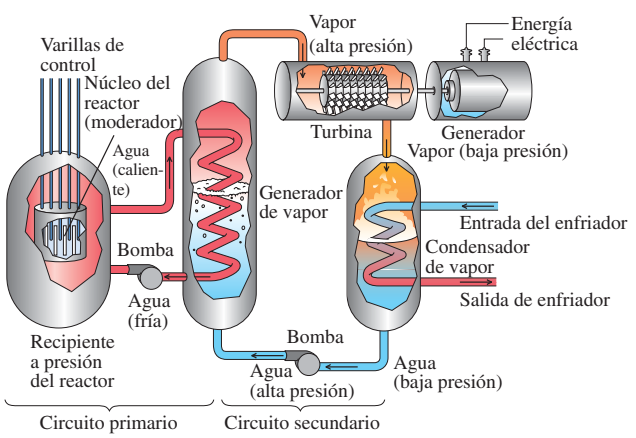
En promedio, cada fisión de un núcleo de ^{235}U produce unos 2.5 neutrones libres, por lo que se necesita el 40% de esos neutrones para sostener una reacción en cadena. Es mucho más probable que un núcleo de ^{235}U absorba un neutrón de baja energía (menor que 1 eV) que uno de los neutrones de mayor energía (1 MeV, más o menos) que se liberan durante la fisión. En un reactor nuclear, los neutrones de mayor energía son desacelerados por choques con núcleos del material vecino, llamado *moderador*, por lo que es mucho más probable que sigan causando fisiones. En las centrales eléctricas nucleares, el moderador generalmente es agua y a veces grafito. La *tasa* de la reacción se controla introduciendo o sacando *varillas de control*, hechas de elementos como boro o cadmio, cuyos núcleos *absorben* neutrones sin sufrir reacciones adicionales. El isótopo ^{238}U también puede absorber neutrones, transformándose en $^{239}U^*$, pero no con una probabilidad suficientemente alta para sostener por sí una reacción en cadena. Así, el uranio que se usa en los reactores se "enriquece" con frecuencia aumentando la proporción del ^{235}U con respecto al valor natural del 0.7%. En forma característica se llega más o menos al 3%, mediante procesamiento por separación de isótopos.

La aplicación más conocida de los reactores nucleares es la generación de energía eléctrica. Como se dijo antes, la energía de fisión aparece como energía cinética de los fragmentos de la fisión, y su resultado inmediato es aumentar la energía interna de los elementos de combustible y del moderador que los rodea. Este aumento de energía cinética se transfiere en forma de calor, para generar vapor que impulsa turbinas, las cuales, a la vez, hacen girar a los generadores eléctricos. La figura 43.16 es un esquema de una central nuclear. Los fragmentos energéticos de la fisión y los neutrones liberados calientan el agua que rodea al núcleo del reactor. El generador de vapor es un intercambiador de calor que retira el calor de esta agua altamente radiactiva y genera vapor no radiactivo para hacer funcionar las turbinas.

43.15 Esquema de una reacción en cadena de fisión nuclear



Una planta nuclear típica tiene una capacidad de generación eléctrica de 1000 MW (o 10^9 W). Las turbinas son máquinas térmicas y están sujetas a las limitaciones de eficiencia que impone la segunda ley de la termodinámica, descrita en el capítulo 20. En las plantas nucleares modernas, la eficiencia general aproximada es de un tercio, por lo que se deben generar 3000 MW de potencia térmica mediante la reacción de fisión para generar 1000 MW de potencia eléctrica.



43.16 Esquema de una central eléctrica nuclear.

Ejemplo 43.12 Consumo de uranio en un reactor nuclear

¿Qué masa de ^{235}U se debe fisionar cada día para dar 3000 MW de potencia térmica?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La información estimada sobre la fisión establece que se libera más o menos 200 MeV por átomo.

PLANTEAR: Usaremos esto, junto con la masa del átomo de ^{235}U, para determinar la cantidad necesaria de uranio.

EJECUTAR: Cada segundo se necesitan 3000 MJ o 3000×10^6 J. Cada fisión produce 200 MeV, que son

$$(200\ \text{MeV})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}) = 3.2 \times 10^{-11}\ \text{J}$$

La cantidad de fisiones necesarias cada segundo es

$$\frac{3000 \times 10^6\ \text{J}}{3.2 \times 10^{-11}\ \text{J}} = 9.4 \times 10^{19}$$

Cada átomo de ^{235}U tiene una masa de $(235\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 3.9 \times 10^{-25}$ kg, por lo que la masa de ^{235}U necesaria cada segundo es

$$(9.4 \times 10^{19})(3.9 \times 10^{-25}\ \text{kg}) = 3.7 \times 10^{-5}\ \text{kg} = 37\ \mu\text{g}$$

En un día (86,400 s) el consumo total de ^{235}U es

$$(3.7 \times 10^{-5}\ \text{kg/s})(86{,}400\ \text{s}) = 3.2\ \text{kg}$$

EVALUAR: En comparación, una central eléctrica de 1000 MW alimentada con carbón quema 10,600 toneladas (unos diez millones de kg) de carbón ¡cada día!

Los reactores de fisión nuclear tienen muchos otros usos prácticos. Entre ellos están la producción de isótopos radiactivos artificiales para investigaciones médicas y otras aplicaciones; la producción de haces de neutrones de gran intensidad se usan para investigar la estructura nuclear y la producción de núclidos fisionables, como el ^{239}Pu a partir del isótopo común ^{238}U. Esta última es la función de *los reactores de cría*, que pueden producir más combustible del que usan.

Ya mencionamos que se liberan unos 15 MeV de energía en la fisión de un núcleo de ^{235}U, debido a los decaimientos β^- de los fragmentos de la fisión. Este hecho causa un grave problema con respecto al control y la seguridad de los reactores. Aun cuando se haya detenido por completo la reacción en cadena, por inserción de varillas de control en el núcleo, los decaimientos β^- continúan desprendiendo calor, que no se puede detener. Para un reactor de 3000 MW esta potencia calorífica es muy grande, al principio de unos 200 MW. En el caso de una pérdida total del agua de enfriamiento, esta potencia es más que la suficiente para causar una fusión catastrófica del núcleo del reactor, y la posible ruptura del recipiente de contención. La dificultad de alcanzar un "paro frío" después de un accidente en la planta nuclear de Three Mile Island, en Pennsylvania, en marzo de 1979, fue causada por el continuo desprendimiento de calor debido a los decaimientos β^-.

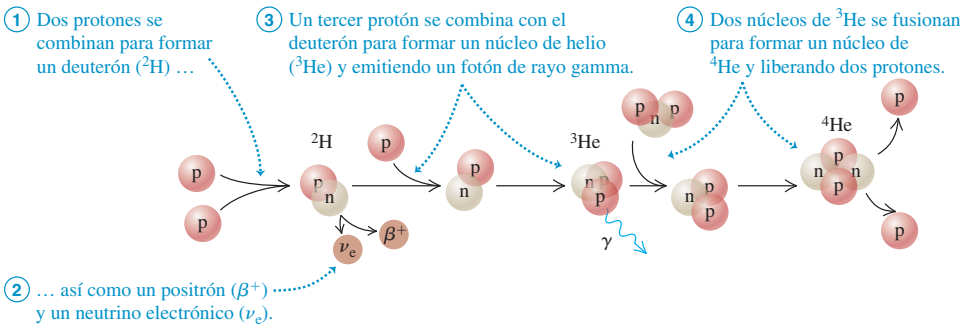
La catástrofe del 26 de abril de 1986 en el reactor número 4 de Chernobyl, en Ucrania, fue causada por una combinación de un diseño inherentemente inestable y varios errores humanos cometidos durante una prueba del sistema de enfriamiento de emergencia del núcleo. Se retiraron demasiadas varillas de control para compensar una disminución de potencia causada por acumulación de absorbedores de neutrones, como ^{135}Xe. El nivel de potencia subió del 1% de lo normal a 100 veces la normal en cuatro segundos; una explosión de vapor rompió los tubos en el sistema de enfriamiento e hizo volar la pesada cubierta de concreto sobre el reactor. El moderador de grafito se encendió y se quemó durante varios días, y hubo una fusión del núcleo del reactor. Se estima que la actividad total del material radiactivo liberado a la atmósfera fue de unos 10^8 Ci.

Evalúe su comprensión de la sección 43.7 La fisión del ^{235}U se puede iniciar por absorción de un neutrón lento en un núcleo. ¿Se podría usar un *protón* lento para iniciar la fisión del ^{235}U?

43.8 Fusión nuclear

En una **fusión nuclear**, se unen, o *se funden*, dos o más núcleos pequeños para formar un núcleo mayor. Las reacciones de fusión liberan energía por la misma razón que las reacciones de fisión: la energía de enlace por nucleón, después de la reacción, es mayor que antes. Al examinar la figura 43.2, se ve que la energía de enlace por nucleón

43.17 La cadena protón-protón.



aumenta en función de A, hasta más o menos $A = 60$, por lo que es probable que la fusión de dos núcleos ligeros para formar un núcleo con A menor que 60 sea una reacción exoérgica. En comparación con la fisión, estamos moviéndonos hacia el máximo de esta curva, desde el lado contrario. Otra forma de expresar las relaciones de energía es que la masa total de los productos es menor que la de las partículas iniciales.

Veamos tres ejemplos de reacciones de fusión que liberan energía, escritas en términos de átomos neutrales:

$$^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^2_1\mathrm{H} + \beta^+ + \nu_e$$
$$^2_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma$$
$$^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H}$$

En la primera reacción se combinan dos neutrones para formar un deuterón (^{2}H) con la emisión de un positrón (β^+) y un neutrino electrónico. En la segunda se combinan un protón y un deuterón para formar el núcleo del isótopo ligero del helio, ^{3}He, con la emisión de un rayo gamma. Ahora se multiplican por dos las dos primeras reacciones para suministrar los dos núcleos de ^{3}He que se fusionan en la tercera reacción y forman una partícula alfa (^{4}He) y dos protones. En conjunto, las reacciones forman el proceso llamado *cadena protón-protón* (figura 43.17).

El efecto neto de la cadena es la conversión de cuatro protones en una partícula α, dos positrones, dos neutrinos electrónicos y dos γ. Podemos calcular la liberación de energía en esta parte del proceso: la masa de una partícula α más dos positrones es la masa del ^{4}He neutro; los neutrinos tienen masa cero (o muy pequeña) y los gamma tienen masa cero.

Masa de cuatro protones	4.029106 u
Masa de ^{4}He	4.002603 u
Diferencia de masa y energía liberada	0.026503 u y 24.69 MeV

Los dos positrones que se producen durante el primer paso de la cadena protón-protón chocan con dos electrones; se produce la aniquilación mutua de las cuatro partículas y su energía de reposo se convierte en $4(0.511\ \mathrm{MeV}) = 2.044\ \mathrm{MeV}$ de radiación gamma. Así, la liberación total de energía es $(24.69 + 2.044)\ \mathrm{MeV} = 26.73\ \mathrm{MeV}$. Esta cadena protón-protón sucede en el interior del Sol y otras estrellas (figura 43.18). Cada gramo de la masa del Sol contiene más o menos 4.5×10^{23} protones. Si todos ellos se combinaran para formar helio, la energía liberada sería de unos 130,000 kWh. Si el Sol continuara irradiando a su tasa actual, tardaría unos 75×10^9 años para agotar sus protones. Como veremos más adelante, las reacciones de fusión sólo pueden efectuarse a temperaturas extremadamente altas; en el Sol, esas temperaturas sólo se encuentran en el interior, a gran profundidad. Por consiguiente el Sol no puede fusionar *todos* sus protones y sólo lo puede hacer durante unos 10×10^9 años en total. La edad actual del Sistema Solar (incluyendo el Sol) es de 4.6×10^9 años, por lo que el Sol está más o menos a la mitad de su abasto disponible de protones.

43.18 La energía liberada como luz estelar proviene de reacciones de fusión en las profundidades del interior de la estrella. Cuando se forma una estrella, y durante la mayor parte de su vida, convierte el hidrógeno de su núcleo en helio. A medida que envejece la estrella, la temperatura del núcleo puede elevarse lo suficiente para que se efectúen otras reacciones de fusión, que convierten al helio en carbono, oxígeno y otros elementos.

Ejemplo 43.13 Una reacción de fusión

Dos deuterones se fusionan para formar un *tritón* (un núcleo de tritio, o ^{3}H) y un protón. ¿Cuánta energía se libera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Es una reacción nuclear de la clase descrita en la sección 43.6.

PLANTEAR: Con la ecuación (43.23) calcularemos la energía liberada.

EJECUTAR: Al sumar un electrón a cada partícula se obtiene un átomo neutro en cada caso; sus masas están descritas en la tabla 43.2. Al sustituirlas en la ecuación (43.23) se ve que

$$\begin{aligned} Q &= [2(2.014102\ \text{u}) - 3.016049\ \text{u} - 1.007825\ \text{u}] \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 4.03\ \text{MeV} \end{aligned}$$

EVALUAR: En consecuencia, en la reacción se liberan 4.03 MeV; el tritón y el protón juntos tienen 4.03 MeV más energía cinética que la que tenían juntos los dos deuterones.

Obtención de la fusión

Para que dos núcleos se fusionen, deben acercarse a una distancia menor del alcance de la fuerza nuclear, generalmente del orden de 2×10^{-15} m. Para hacerlo, deben superar la repulsión eléctrica de sus cargas positivas. Para dos protones a esta distancia, la energía potencial correspondiente es más o menos 1.2×10^{-13} J, o 0.7 MeV; esto representa la energía *cinética* inicial que deben tener los núcleos que se fusionan; por ejemplo, de 0.6×10^{-13} J cada uno si el choque es de frente.

Los átomos sólo tienen esta energía a temperaturas extremadamente altas. La descripción de la sección 18.3 mostraba que la energía cinética media de traslación de una molécula de gas a la temperatura T es $\frac{3}{2}kT$, donde k la constante de Boltzmann. La temperatura a la cual eso es igual a $E = 0.6 \times 10^{-13}$ J se calcula con la ecuación

$$E = \frac{3}{2}kT$$

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2(0.6 \times 10^{-13}\ \text{J})}{3(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})} = 3 \times 10^9\ \text{K}$$

Las reacciones de fusión son posibles a menores temperaturas, porque la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (sección 18.5) indica que existe una pequeña fracción de protones con energías cinéticas mucho mayores que el valor promedio. La reacción protón-protón se efectúa "sólo" a 1.5×10^7 K en el centro del Sol, lo que la hace un proceso de probabilidad extremadamente baja a menores temperaturas; pero es la causa de que se espere que el Sol dure tanto. A esas temperaturas, las reacciones de fusión se llaman reacciones *termonucleares.*

Se están haciendo esfuerzos intensivos para obtener reacciones controladas de fusión, que potencialmente representan una fuente novedosa y enorme de energía (véase la figura 24.11). A las temperaturas mencionadas los átomos ligeros están totalmente ionizados, y el estado resultante de la materia se llama *plasma.* En un tipo de experimento que se basa en *confinamiento magnético*, un plasma se calienta a una temperatura extremadamente alta mediante una descarga eléctrica, mientras se confina con campos magnéticos de la forma adecuada. En otro arreglo experimental, con *confinamiento inercial*, pastillas del material que se va a fusionarse se calientan con un rayo láser de gran intensidad (figura 43.19). Algunas de las reacciones que se estudian son

$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + 4.0\ \text{MeV} \qquad (1)$$

$$^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17.6\ \text{MeV} \qquad (2)$$

$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 3.3\ \text{MeV} \qquad (3)$$

$$^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H} + 18.3\ \text{MeV} \qquad (4)$$

Ya describimos la primera reacción en el ejemplo 43.13; dos deuterones se fusionan para formar un tritón y un protón. En la segunda reacción un tritón se combina con otro deuterón para formar una partícula alfa y un neutrón. El resultado de ambas reac-

43.19 Esta cámara de bombardeo del National Ignition Facility, California, tiene aberturas para 192 rayos láser potentes. Cuando esté en funcionamiento en 2010, los láseres proporcionarán 5×10^{14} W de potencia, en unos cuantos nanosegundos a un gránulo milimétrico de deuterio y tritio, en el centro de la cámara, lo cual desencadenará fusión termonuclear.

ciones juntas es la conversión de tres deuterones en una partícula alfa, un protón y un neutrón, con la liberación de 21.6 MeV de energía. Las reacciones (3) y (4) juntas obtienen la misma conversión. En un plasma que contiene deuterones, los dos pares de reacciones se efectúan casi con igual probabilidad. Hasta ahora nadie ha tenido éxito en producir esas reacciones en condiciones controladas, en forma tal que se obtenga un exceso neto de energía útil.

También se estudian métodos para lograr la fusión, que no necesitan altas temperaturas; se llaman *fusión fría* o *fusión en frío.* Un esquema que funciona usa un ion de molécula de hidrógeno, bastante raro. El ion normal H_2^+ consiste en dos protones enlazados por un electrón compartido; la distancia nuclear es de 0.1 nm, aproximadamente. Si los protones se sustituyen por un deuterón (^{2}H) y un tritón (^{3}H), y el electrón por un *muón,* que tiene 208 veces la masa del electrón, se reduce la distancia en un factor de 208. La probabilidad se vuelve apreciable para que los dos núcleos tunelicen a través de la delgada barrera de energía potencial de repulsión y se fusionen en la reacción (2) de arriba. El prospecto de llevar a cabo este proceso, llamado *fusión catalizada por muones,* y obtener una fuente práctica de energía, todavía está lejano.

Evalúe su comprensión de la sección 43.8 ¿*Todas* las reacciones de fusión son exoérgicas?

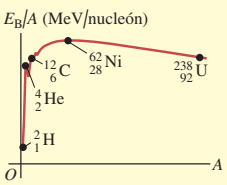
CAPÍTULO 43 RESUMEN

Propiedades nucleares: Un núcleo está formado por A nucleones (Z protones y N neutrones). Todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad. El radio de un núcleo de número de masa A se determina aproximadamente con la ecuación (43.1). Una sola especie nuclear de Z y N dados se llama núclido. Los isótopos son núclidos del mismo elemento (con igual Z) que tienen distintos números de neutrones. Las masas nucleares se miden en unidades de masa atómica. Los nucleones tienen cantidad de movimiento angular y momento magnético. (Véanse los ejemplos 43.1 y 43.2.)

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad (R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m}) \tag{43.1}$$

Enlace y estructura nuclear: La masa de un núcleo siempre es menor que la masa de los protones y los neutrones que contiene. La diferencia de masas, multiplicada por c^2, determina la energía de enlace E_B. La energía de enlace para un núclido dado se determina por la fuerza nuclear, que es de corto alcance y favorece a pares de partículas, y por la repulsión eléctrica entre protones. Un núcleo es inestable si A o Z son demasiado grandes, o si la razón N/Z no es correcta. Dos modelos muy usados para el núcleo son el de gota líquida y el de capas; este último es análogo a la aproximación de campo central de la estructura atómica. (Véanse los ejemplos 43.3 y 43.4.)

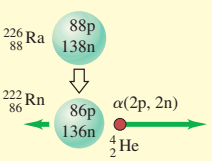
$$E_B = (ZM_H + Nm_n - {}^A_Z M)c^2 \tag{43.10}$$



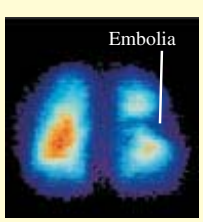
Decaimiento radiactivo: Los núclidos inestables suelen emitir una partícula alfa (un núcleo de $^4_2$He) o una partícula beta (un electrón) en el proceso de transformarse en otro núclido, a veces seguido de un fotón de rayo gamma. La tasa de decaimiento de un núcleo inestable se describe por la constante de decaimiento λ, la vida media $T_{1/2}$ o el tiempo de vida T_{media}. Si la cantidad de núcleos en el momento $t = 0$ es N_0, y no se producen más, la cantidad en el momento t se determina con la ecuación (43.17). (Véanse los ejemplos 43.5 a 43.9.)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{43.17}$$

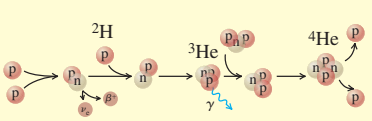
$$T_{\text{media}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693} \tag{43.19}$$



Efectos biológicos de la radiación: El efecto biológico de cualquier radiación depende del producto de la energía absorbida por unidad de masa y la eficacia biológica relativa (EBR), que es distinta para diferentes radiaciones. (Véase el ejemplo 43.10.)



Reacciones nucleares: En una reacción nuclear, dos núcleos o partículas chocan y producen dos nuevos núcleos o partículas. Las reacciones pueden ser exoérgicas o endoérgicas. Se obedecen varias leyes de conservación, incluyendo las de carga, energía, cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular y número nucleónico. Se desprende energía por la fisión de un núcleo pesado en dos más ligeros, que siempre son núcleos inestables. También se desprende energía por la fusión de dos núcleos ligeros para formar uno más pesado. (Véanse los ejemplos 43.11 a 43.13.)



Términos clave

número nucleónico, *1469*
número de masa, *1469*
número atómico, *1470*
número neutrónico, *1470*
núclido, *1470*
isótopo, *1470*
magnetón nuclear, *1472*
energía de enlace, *1474*
modelo de gota líquida, *1476*
modelo de capas, *1477*
radiactividad, *1478*
partícula alfa, *1480*
partícula beta menos, *1481*
neutrino, *1482*
rayos gamma, *1483*
actividad, *1486*
constante de decaimiento, *1486*
vida media, *1486*
curie, *1487*
eficacia biológica relativa (EBR), *1489*
energía de reacción, *1492*
energía de umbral, *1493*
fisión nuclear, *1494*
reacción en cadena, *1496*
fusión nuclear, *1498*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Cuando muere un organismo cesa de absorber carbono del CO_2 atmosférico. Algo de este carbono es el ^{14}C radiactivo, que decae con una vida media de 5730 años. Al medir la proporción de ^{14}C que queda en el espécimen, los científicos pueden determinar hace cuánto tiempo murió el organismo (véase la sección 43.4).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

43.1 Respuestas: a) iii) b) v) El radio R es proporcional a la raíz cúbica del número de masa A, mientras que el volumen es proporcional a R^3 y, por consiguiente, a $(A^{1/3})^3 = A$. Por eso, al elevar al doble el volumen se requiere aumentar el número de masa en un factor de 2, mientras que para elevar al doble el radio se debe aumentar tanto el volumen como el número de masa en un factor de $2^3 = 8$.

43.2 Respuestas: ii), iii), iv), v), i) Se pueden encontrar las respuestas observando la figura 43.2. La energía de enlace por nucleón es la menor para los núcleos muy ligeros como el ^4_2He, es máxima alrededor de $A = 60$, y luego disminuye conforme A aumenta.

43.3 Respuesta: v) Se pierden dos protones y dos neutrones en un decaimiento α, de manera que Z y N disminuyen, cada uno, en 2. Un decaimiento β^+ transforma un protón en un neutrón, de manera que Z disminuye en 1 y N aumenta en 1. El resultado neto es que Z disminuye en 3 y N disminuye en 1.

43.4 Respuesta: iii) La actividad $-dN(t)/dt$ de una muestra es el producto de la cantidad de núcleos en la muestra, $N(t)$, por la constante de desintegración $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$. Por consiguiente, $N(t) = (-dN(t)/dt)T_{1/2}/(\ln 2)$. Tomando la razón entre esta ecuación para el ^{240}Pu y esta misma ecuación para el ^{243}Am, se simplifican los factores de ln 2 y se obtiene

$$\frac{N_{Pu}}{N_{Am}} = \frac{(-dN_{Pu}/dt)\,T_{1/2\text{–}Pu}}{(-dN_{Am}/dt)\,T_{1/2\text{–}Am}} = \frac{(5.00\mu\text{Ci})\,(6560\text{ años})}{(4.45\mu\text{Ci})\,(7370\text{ años})} = 1.00$$

Las dos muestras contienen cantidades *iguales* de núcleos. La muestra de ^{243}Am tiene mayor vida media y, en consecuencia, menor rapidez de desintegración, por lo que tiene menor actividad que la muestra de ^{240}Pu.

43.5 Respuesta: ii) En la sección 43.3 vimos que las partículas alfa sólo pueden recorrer una distancia muy corta antes de detenerse. En contraste, los fotones de rayos x son muy penetrantes, por lo que pueden atravesar el cuerpo.

43.6 Respuesta: no La reacción $^1_1H + {}^7_3Li \rightarrow {}^4_2He + {}^4_2He$ es una reacción *nuclear,* que sólo se puede efectuar si un protón (núcleo de hidrógeno) se pone en contacto con un núcleo de litio. Si el hidrógeno está en forma atómica, la interacción entre su nube electrónica y la del átomo de litio evita que los dos núcleos se acerquen. Aun si se usan protones aislados, deben dispararse hacia los átomos de litio con la energía cinética suficiente para superar la repulsión eléctrica entre los protones y los núcleos de litio. Decir que la reacción es exoérgica indica que se libera más energía por la reacción que la que se tuvo que suministrar para que sucediera la reacción.

43.7 Respuesta: no Como el neutrón no tiene carga eléctrica, no sufre repulsión eléctrica de un núcleo de ^{235}U. Por consiguiente, un neutrón de movimiento lento puede acercarse y entrar a un núcleo de ^{235}U, suministrando la excitación necesaria para iniciar la fisión. En contraste, un *protón* de movimiento lento (carga $+e$) experimenta una repulsión eléctrica intensa desde el núcleo de ^{235}U (carga $+92e$). Nunca se acerca al núcleo y no puede iniciar la fisión.

43.8 Respuesta: no Las reacciones de fusión entre núcleos suficientemente ligeros son exoérgicas, porque la energía de enlace por nucleón, E_B/A, aumenta. Sin embargo, si los núcleos son demasiado masivos, E_B/A disminuye y la fusión es *endoérgica* (toma energía, y no la libera). Por ejemplo, imagine que se fusionan dos núcleos de $A = 100$ para formar un solo núcleo con $A = 200$. En la figura 43.2 se ve que E_B/A es más de 8.5 MeV para los núcleos con $A = 100$, pero es menor que 8 MeV para el núcleo con $A = 200$. Es posible esa reacción de fusión, pero requiere una adición apreciable de energía.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P43.1. Los neutrones poseen momento dipolar magnético, y pueden sufrir giros de espín absorbiendo radiación electromagnética. Entonces, ¿por qué se usan protones y no neutrones en IRM de los tejidos corporales? (Véase la figura 43.1.)

P43.2. En la ecuación (43.11), conforme el número total de nucleones se hace más grande, la importancia del segundo término de la ecuación disminuye en relación con la del primer término. ¿Tiene esto significado físico? Explique.

P43.3. ¿Por qué las masas de todos los núcleos no son múltiplos enteros de la masa de un solo nucleón?

P43.4. A partir del valor del número de masa A, ¿puede usted decir si se usa un valor positivo, un valor negativo o cero en el quinto término de la ecuación (43.11)? Explique por qué.

P43.5. ¿Cuáles son los seis elementos conocidos para los que Z es un número mágico? Analice qué propiedades tienen estos elementos como consecuencia de sus valores especiales de Z.

P43.6. La energía de enlace por nucleón, para la mayoría de los núclidos, no varía mucho (véase la figura 43.2). ¿Hay una consistencia similar en la energía *atómica* de los átomos, en una base de "energía por electrón"? ¿Por qué?
P43.7. Los núcleos pesados inestables se desintegran normalmente emitiendo una partícula α o β. ¿Por qué normalmente no emiten un solo protón o neutrón?
P43.8. Los dos únicos núclidos estables que tienen más protones que neutrones son el ${}_1^1\text{H}$ y el ${}_2^3\text{He}$. ¿Por qué es tan raro que $Z > N$?
P43.9. Ya que el plomo es un elemento estable, ¿por qué la serie radiactiva del ${}^{238}\text{U}$ de la figura 43.8 no se detiene en el plomo ${}^{214}\text{Pb}$?
P43.10. En la cadena radiactiva del ${}^{238}\text{U}$ de la figura 43.8, algunos núclidos existen en la naturaleza con mucha mayor abundancia que otros, aun cuando el núcleo de ${}^{238}\text{U}$ pasa por cada uno de los pasos de la cadena antes de transformarse finalmente en ${}^{206}\text{Pb}$. ¿Por qué los núclidos intermedios no existen con la misma abundancia?
P43.11. En comparación con las partículas α con la misma energía, las partículas β pueden atravesar la materia con mucha mayor facilidad. ¿Por qué?
P43.12. Si ${}_Z^A\text{El}_\text{i}$ representa el núclido inicial, ¿cuál es el proceso o procesos para que el núclido final sea *a)* ${}_{Z+1}^{A}\text{El}_\text{f}$; *b)* ${}_{Z-2}^{A-4}\text{El}_\text{f}$; *c)* ${}_{Z-1}^{A}\text{El}_\text{f}$?
P43.13. En una ecuación de decaimiento nuclear, ¿por qué se puede representar un electrón por ${}_{-1}^{0}\beta^{-}$? ¿Cuáles son las representaciones equivalentes de un positrón, un neutrino y un antineutrino?
P43.14. ¿Por qué el decaimiento alfa, beta o gamma de un núcleo inestable no se afecta por el estado *químico* del átomo, como por ejemplo, por la naturaleza de la molécula o del sólido en que está enlazado? Sin embargo, la situación química del átomo sí puede tener un efecto sobre la vida media en la captura de electrón. ¿Por qué?
P43.15. En el proceso de *conversión interna,* un núcleo decae de un estado excitado a un estado fundamental cediendo la energía de excitación directamente a un electrón del átomo, en lugar de emitir un fotón de rayo gamma. ¿Por qué este proceso también puede producir fotones de rayo x?
P43.16. En el ejemplo 43.9 (sección 43.4), la actividad del carbono atmosférico *antes* de 1900 fue el dato que se proporcionó. Describa por qué esta actividad puede haber cambiado desde 1900.
P43.17. Un problema en el fechado con radicarbono de muestras biológicas, especialmente de las muy antiguas, es que fácilmente pueden contaminarse con material biológico moderno durante el proceso de medición. ¿Qué efecto tendría tal contaminación sobre la edad estimada? ¿Por qué tal contaminación es un problema más serio en el caso de las muestras de material más antiguo que en el de las muestras de material más reciente?
P43.18. El isótopo más común del radio en la Tierra es el ${}^{226}\text{Ra}$, con vida media de casi 1600 años. Si la Tierra se formó mucho antes que hace 10^9 años, ¿por qué ahora queda radio?
P43.19. Las reacciones de fisión sólo se efectúan con núcleos de grandes números nucleónicos, mientras que las reacciones exoérgicas de fusión sólo se efectúan con núcleos de pequeño número nucleónico. ¿Por qué sucede así?
P43.20. Cuando un núcleo grande se divide durante la fisión nuclear, los núcleos derivados de la fisión se separan con enorme energía cinética. ¿Por qué?
P43.21. Conforme las estrellas envejecen, consumen su provisión de hidrógeno y finalmente comienzan a producir energía mediante una reacción que implica la fusión de tres núcleos de helio para formar un núcleo de carbono. ¿Esperaría usted que el interior de estas estrellas viejas fuera más caliente o más frío que el interior de estrellas más jóvenes? Explique.

Ejercicios

Sección 43.1 Propiedades de los núcleos

43.1. ¿Cuántos protones y cuántos neutrones hay en un núcleo del isótopo más común del *a)* silicio, ${}_{14}^{28}\text{Si}$; *b)* rubidio, ${}_{37}^{85}\text{Rb}$; *c)* talio, ${}_{81}^{205}\text{Tl}$?
43.2. Para los tres núcleos del ejercicio 43.1, estime *a)* el radio, *b)* la superficie y *c)* el volumen de cada núcleo. Determine *d)* la densidad de masa (en kg/m^3) y *e)* la densidad nucleónica (en nucleones por metro cúbico) para cada núcleo. Suponga que la masa de cada núcleo es A unidades de masa atómica.
43.3. Se colocan átomos de hidrógeno en un campo magnético externo. Los protones pueden hacer transiciones entre los estados en los que la componente de espín nuclear es paralela y antiparalela al campo, absorbiendo y emitiendo un fotón. ¿Qué magnitud de campo magnético se requiere para inducir esta transición por fotones con una frecuencia de 22.7 MHz?
43.4. Se colocan neutrones en un campo magnético de 2.30 T de magnitud. *a)* ¿Cuál es la diferencia de energía entre los estados con componentes de cantidad de movimiento angular espín nuclear paralelas y antiparalelas al campo? ¿Qué estado tiene menor energía, el de componente de espín paralela al campo, o el de componente de espín antiparalela al campo? ¿Cómo se comparan sus resultados con los estados de energía de un protón en el mismo campo (véase el ejemplo 43.2)? *b)* Los neutrones pueden hacer transiciones de uno a otro de estos estados, emitiendo o absorbiendo un fotón de energía igual a la diferencia de energía entre los dos estados. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de ese fotón.
43.5. Se colocan átomos de hidrógeno en un campo magnético externo de 1.65 T de magnitud. *a)* Los *protones* pueden hacer transiciones entre estados donde la componente del espín nuclear es paralela y antiparalela al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Cuál estado es el de menor energía, el que tiene su componente de espín nuclear paralela o antiparalela al campo? ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético está? *b)* Los *electrones* pueden hacer transiciones entre estados donde la componente del espín electrónico es paralela y antiparalela al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Qué estado tiene menor energía, el de componente de espín electrónico paralela o antiparalela al campo? ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético está?

Sección 43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear

43.6. El isótopo más común del uranio es ${}_{92}^{238}\text{U}$, cuya masa atómica es 238.050783 u. Calcule *a)* el defecto de masa; *b)* la energía de enlace (en MeV); *c)* la energía de enlace por nucleón.
43.7. ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un rayo γ que pueda dividir un deuterón en un protón y un neutrón? (A este proceso se le llama fotodesintegración.)
43.8. Calcule *a)* la energía total de enlace y *b)* la energía de enlace por nucleón del ${}^{12}\text{C}$. *c)* ¿Qué porcentaje de la masa en reposo de este núcleo es su energía total de enlace?
43.9. Un fotón con una longitud de onda de 3.50×10^{-13} m choca con un deuterón, dividiéndolo en un protón y un neutrón. *a)* Calcule la energía cinética liberada en esta interacción. *b)* Suponiendo que las dos partículas comparten equitativamente la energía y considerando que sus masas son 1.00 u, calcule su rapidez después de la fotodesintegración.
43.10. Calcule el defecto de masa, la energía total de enlace (en MeV) y la energía de enlace por nucleón de *a)* el núcleo de nitrógeno ${}_7^{14}\text{N}$ y *b)* el núcleo de helio, ${}_2^4\text{He}$. *c)* ¿Cómo se comparan los resultados de los incisos *a)* y *b)*?
43.11. El isótopo más común del boro es ${}_5^{11}\text{B}$. *a)* Determine la energía total de enlace del ${}_5^{11}\text{B}$, con la tabla 43.2, sección 43.1. *b)* Calcule esta energía de enlace con la ecuación (43.11). (¿Por qué el quinto término es cero?) Compárela con el resultado que obtuvo en el inciso *a)*. ¿Cuál es la diferencia porcentual? Compare la exactitud de la ecuación (43.11) para el ${}_5^{11}\text{B}$ con su exactitud para ${}_{28}^{62}\text{Ni}$ (véase el ejemplo 43.4).

43.12. El isótopo más común del cobre es el $^{63}_{29}$Cu. La masa medida del átomo neutro es 62.929601 u. *a*) Con la masa medida, determine el defecto de masa y úselo para calcular la energía total de enlace y la energía de enlace por nucleón. *b*) Calcule la energía de enlace con la ecuación (43.11). (¿Por qué el quinto término es cero?) Compárela con el resultado que obtuvo en el inciso *a*). ¿Cuál es la diferencia porcentual? ¿Qué puede concluir acerca de la exactitud de la ecuación (43.11)?

Sección 43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad

43.13. ¿Qué núclido se produce en las siguientes desintegraciones radiactivas? *a*) Decaimiento α del $^{239}_{4}$Pu; *b*) decaimiento β^- del $^{24}_{11}$Na; *c*) decaimiento β^+ del $^{15}_{8}$O.

43.14. *a*) Desde el punto de vista de energía, ¿es posible el decaimiento $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e$? Si no es posible, explique por qué. Si es posible, calcule la energía total liberada. *b*) ¿Es energéticamente posible el decaimiento $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e$. Si no es, explique por qué. Si es posible, calcule la energía total liberada.

43.15. El decaimiento α del ^{238}U va acompañado de un rayo γ cuya longitud de onda es 0.0248 nm. Este decaimiento se debe a la transición del núcleo entre dos niveles de energía. ¿Cuál es la diferencia en energía (en MeV) entre estos dos niveles?

43.16. El ^{238}U decae espontáneamente por emisión α a ^{234}Th. Calcule *a*) la energía total liberada por este proceso y *b*) la velocidad de retroceso del núcleo de ^{234}Th. Las masas atómicas son 238.050788 u para el ^{238}U y 234.043601 u para el ^{234}Th.

43.17. La masa atómica del ^{14}C es 14.003242 u. Demuestre que el decaimiento β^- del ^{14}C es energéticamente posible y calcule la energía liberada en la desintegración.

43.18. ¿Qué partícula (α, electrón o positrón) se emite en los siguientes decaimientos radiactivos? *a*) $^{27}_{14}\text{Si} \rightarrow {}^{27}_{13}\text{Al}$; *b*) $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$; *c*) $^{74}_{33}\text{As} \rightarrow {}^{74}_{34}\text{Se}$.

43.19. *a*) Calcule la energía desprendida por el decaimiento del $^{57}_{27}$Co por captura de electrón (véase el ejemplo 43.7). *b*) Una cantidad mínima de esta energía se queda con el átomo resultante de $^{57}_{26}$Fe en forma de energía cinética. Aproximadamente el 90% de las veces, el núcleo de $^{57}_{26}$Fe emite dos fotones de rayo gamma sucesivos después del proceso de captura de electrón, y sus energías son 0.122 MeV y 0.014 MeV, respectivamente; el hierro pasa a su estado fundamental. ¿Cuál es la energía del neutrino emitida en este caso?

Sección 43.4 Actividades y vidas medias

43.20. El isótopo ^{90}Sr sufre decaimiento β^- con una vida media de 28 años. *a*) ¿Qué núcleo se produce en este decaimiento? *b*) Si una central nuclear está contaminada con ^{90}Sr, ¿cuánto tiempo tardará el nivel de radiación en bajar hasta el 1.0% de su valor inicial?

43.21. Si una muestra de 6.13 g de un isótopo, que tiene un número de masa de 124, decae a una tasa de 0.350 Ci, ¿cuál es su vida media?

43.22. Los isótopos radiactivos que se usan en la terapia del cáncer tienen una "vida en anaquel", igual que los productos farmacéuticos que se usan en quimioterapia. Justo después de haber sido producida en un reactor nuclear, la actividad de una muestra de ^{60}Co es 5000 Ci. Cuando su actividad baja de 3500 Ci se considera una fuente muy débil para usarla en el tratamiento. Usted trabaja en el departamento de radiología de un gran hospital. Una de esas fuentes de ^{60}Co en su inventario fue fabricada el 6 de octubre de 2004. Hoy es 6 de abril de 2007. ¿Todavía se puede usar esa fuente? La vida media del ^{60}Co es de 5.271 años.

43.23. Una muestra de 12.0 g de carbón procedente de materia viviente decae a una tasa de 180.0 decaimientos por minuto, debido al ^{14}C radiactivo que contiene. ¿Cuál será la rapidez de decaimiento de esta muestra dentro de *a*) 1000 años y *b*) 50,000 años?

43.24. Trazadores radiactivos. Los isótopos radiactivos a menudo se introducen en el cuerpo a través de la corriente sanguínea. Su dispersión dentro del cuerpo puede monitorearse detectando la aparición de radiación en diferentes órganos. El ^{131}I, un emisor β^- con vida media de 8.0 días, es uno de esos trazadores. Suponga que un científico introduce una muestra con una actividad de 375 Bq y observa su dispersión en los órganos. *a*) Suponiendo que toda la muestra llegó a la glándula tiroides, ¿cuál será la tasa de decaimiento en esa glándula 24 días (aproximadamente dos semanas y media) después? *b*) Si se mide la tasa de decaimiento en la tiroides 24 días después y resulta que es 17.0 Bq, ¿qué porcentaje del trazador llegó a esa glándula? *c*) ¿Qué isótopo permanece después de que el I-131 decae?

43.25. El tritio (^{3}H) sufre decaimiento β^- con una vida media de 12.3 años. También es muy tóxico para los organismos vivos. *a*) ¿Qué núcleo se produce en el decaimiento β^- del tritio? *b*) Suponga que por accidente escapa algo de tritio gaseoso a la atmósfera, en una central nuclear. ¿Cuánto tiempo pasará para que el 90.0% del tritio se convierta en no radiactivo?

43.26. Como médico, se le consulta acerca de un derrame en un laboratorio de radioquímica. El isótopo derramado fue ^{131}Ba con una actividad de 500 μCi, cuya vida media es 12 días. *a*) ¿Qué masa de ^{131}Ba se derramó? *b*) Su recomendación es salir del laboratorio hasta que el nivel de radiación baje a 1.00 μCi. ¿Cuánto tiempo deberá estar cerrado el laboratorio?

43.27. Las mediciones de cierto isótopo indican que la rapidez de decaimiento baja de 8318 decaimientos/min a 3091 decaimientos/min en 4.00 días. ¿Cuál es la vida media de este isótopo?

43.28. El isótopo ^{226}Ra sufre decaimiento α con una vida media de 1620 años. ¿Cuál es la actividad de 1.00 g de ^{226}Ra? Exprese su respuesta en Bq y en Ci.

43.29. La razón entre ^{14}C y ^{12}C en la materia viva se mide y resulta ser $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 1.3 \times 10^{-12}$ en este momento. Una muestra de 12.0 g de carbón produce 180 decaimientos/min, por la pequeña concentración de ^{14}C que contiene. Con esta información, calcule la vida media del ^{14}C.

43.30. Si usted tiene una masa promedio, aproximadamente 360 millones de núcleos en su cuerpo experimentan decaimiento radiactivo cada día. Exprese su actividad en curies.

43.31. El núclido radiactivo ^{199}Pt tiene una vida media de 30.8 minutos. Se prepara una muestra con una actividad inicial de 7.56×10^{11} Bq. *a*) ¿Cuántos núcleos de ^{199}Pt hay en un principio en la muestra? *b*) ¿Cuántos hay después de 30.8 minutos? ¿Cuál es la actividad en ese momento? *c*) Repita el inciso *b*) cuando el tiempo es 92.4 minutos después de preparar la muestra.

43.32. Fechamiento con radiocarbono. Una muestra de madera procedente de un sitio arqueológico contiene 500 g de carbón, y produce 3070 decaimientos por minuto. ¿Cuál es la edad de la muestra?

43.33. El isótopo inestable ^{40}K se usa para fechar muestras de roca. Su vida media es 1.28×10^9 años. *a*) ¿Cuántos decaimientos por segundo hay en una muestra que contiene 1.63×10^{-6} g de K^{40}? *b*) ¿Cuál es la actividad de la muestra, en curies?

Sección 43.5 Efectos biológicos de la radiación

43.34. Una persona expuesta a neutrones rápidos recibe una dosis de radiación de 200 rem en parte de su mano, que afectan 25 g de tejido. La EBR de esos neutrones es 10. *a*) ¿Cuántos rad recibió? *b*) ¿Cuántos joules de energía recibió esa persona? *c*) Suponga que la persona recibiera la misma dosis en rad, pero de partículas beta con una EBR de 1.0, en vez de neutrones. ¿Cuántos rem habría recibido?

43.35. Un químico nuclear recibe una dosis accidental de radiación de 5.0 Gy, de neutrones lentos (EBR = 4.0). ¿Qué recibió en rad, rem y J/kg?

43.36. ¿Escanear o no escanear? Se ha convertido en una práctica común para algunas personas someterse a escaneos anuales de todo el

cuerpo (escaneos TC, anteriormente conocidos como CAT) usando rayos x, sólo para saber si se detecta algo sospechoso. Muchos médicos han cuestionado recientemente la pertinencia de esos estudios, en parte por la radiación que implican. Comúnmente, uno de esos escaneos imparte una dosis de 12 mSv, aplicados a *todo el cuerpo*. En contraste, una radiografía torácica administra 0.20 mSv a sólo 5.0 kg de tejido. ¿Cuántas radiografías torácicas entregarían la misma cantidad *total* de energía al cuerpo de una persona de 75 kg que un escaneo de todo el cuerpo?

43.37. Radiación de alimentos. Los alimentos a menudo son radiados ya sea con rayos x o con haces de electrones para ayudar a prevenir la putrefacción. Una dosis baja de 5 a 75 kilorads (krad) ayuda a reducir y a exterminar los parásitos inactivos; una dosis media de 100 a 400 krad extermina microorganismos y agentes patógenos como el que transmite la salmonelosis; y una dosis alta de 2300 a 5700 krad esteriliza los alimentos de manera que puedan almacenarse sin refrigeración. *a*) Una dosis de 175 krad extermina microorganismos de putrefacción en el pescado. Si se utilizan rayos x, ¿cuál sería la dosis en Gy, Sv y rem, y cuánta energía absorbería una porción de 150 g de pescado? (Véase la tabla 43.3.) *b*) Repita el inciso *a*) si se utilizan electrones con EBR de 1.50 en vez de rayos x.

43.38. En un accidente industrial, una persona de 65 kg recibe una dosis equivalente letal de cuerpo entero, de 5.4 Sv, por rayos x. *a*) ¿Cuál es la dosis equivalente en rem? *b*) ¿Cuál es la dosis absorbida en rad? *c*) ¿Cuál es la energía total absorbida por el cuerpo de esa persona? ¿Cómo se compara esta cantidad de energía con la necesaria para elevar 0.010 °C la temperatura de 65 kg de agua?

43.39. Una persona de 50 kg ingiere por accidente 0.35 Ci de tritio. *a*) Suponga que el tritio se reparte uniformemente por el organismo, y que cada decaimiento produce en promedio la absorción de 5.0 keV de energía de los electrones emitidos en el decaimiento. La vida media del tritio es de 12.3 años, y la EBR de los electrones es 1.0. Calcule la dosis absorbida en rad, y la dosis equivalente en rem, durante una semana. *b*) El decaimiento β^- del tritio libera más de 5.0 keV de energía. ¿Por qué la energía absorbida promedio es menor que la energía liberada en el decaimiento?

43.40. Una persona aspira una fuente radiactiva en estado gaseoso que tiene una vida muy larga y una actividad de 0.72 μCi. El material radiactivo se aloja en los pulmones, donde todas las partículas α de 4.0 MeV que se emiten son absorbidas en 0.50 kg de tejidos. Calcule la dosis absorbida y la dosis equivalente durante un año.

Secciones 43.6 Reacciones nucleares; 43.7 Fisión nuclear y 43.8 Fusión nuclear

43.41. Considere la reacción nuclear

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow \mathrm{X} + {}^{10}_{5}\mathrm{B}$$

donde X es un núclido. *a*) ¿Cuáles son los valores de Z y A para el núclido X? *b*) Calcule la energía de reacción Q (en MeV). *c*) Si el núcleo de $^{2}_{1}$H incide sobre un núcleo estacionario de $^{14}_{7}$N, ¿qué energía cinética mínima debe tener para que se efectúe la reacción?

43.42. Energía de la fusión nuclear. Calcule la energía liberada en la reacción de fusión

$$^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

43.43. Considere la reacción nuclear

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow \mathrm{X} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

donde X es un núclido. *a*) ¿Cuáles son los valores de Z y A para el núclido X? *b*) ¿Cuánta energía se libera? *c*) Estime la energía de umbral para esta reacción.

43.44. Estados Unidos consume 1.0×10^{19} J por año. Si toda esta energía proviene de la fisión de ^{235}U, que libera 200 MeV por evento de fisión, *a*) ¿cuántos kilogramos de ^{235}U se utilizarían al año y *b*) ¿cuántos kilogramos de uranio tendrían que extraerse al año para suministrar esas cantidad de ^{235}U? (Recuerde que sólo el 0.70% del uranio natural es ^{235}U.)

43.45. Al principio de la sección 43.7 se presenta la ecuación de un proceso de fisión en donde ^{235}U es golpeado por un neutrón y experimenta fisión para producir ^{144}Ba, ^{89}Kr y tres neutrones. Las masas medidas de estos isótopos son 235.043930 u (^{235}U), 143.922953 u (^{144}Ba), 88.917630 u (^{89}Kr) y 1.0086649 u (neutrón). *a*) Calcule la energía (en MeV) liberada por cada reacción de fisión. *b*) Calcule la energía liberada por gramo de ^{235}U, en MeV/g.

43.46. Considere la reacción nuclear

$$^{28}_{14}\mathrm{Si} + \gamma \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \mathrm{X}$$

donde X es un núclido. *a*) ¿Cuáles son A y Z del núclido X? *b*) Sin tener en cuenta los efectos del retroceso, ¿qué energía mínima debe tener el fotón para que suceda esta reacción? La masa de un átomo de $^{28}_{14}$Si es 27.976927 u, y la de un átomo de $^{24}_{12}$Mg es 23.985042 u.

43.47. La segunda reacción en la cadena protón-protón (véase la figura 43.17) produce un núcleo $^{3}_{2}$He. El núcleo de $^{3}_{2}$He producido así se puede combinar con un núcleo de $^{4}_{2}$He:

$$^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + \gamma$$

Calcule la energía liberada en este proceso. (Es la energía que se comparte entre la del fotón y la energía cinética de retroceso del núcleo de berilio.) La masa de un átomo de $^{7}_{4}$Be es 7.016929 u.

43.48. Considere la reacción nuclear

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow \mathrm{X} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

donde X es un núclido. *a*) ¿Cuáles son Z y A del núclido X? *b*) ¿Se absorbe o se libera energía? ¿Cuánta?

Problemas

43.49. Use la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía desprendida en el decaimiento alfa es positiva siempre que la masa del átomo neutro original es mayor que la suma de las masas del átomo neutro final y el átomo neutro de ^{4}He. (*Sugerencia:* sea el núcleo precursor con número atómico Z y número nucleónico A. Escriba primero la reacción en términos de los núcleos y las partículas que intervienen, y después agregue Z masas de electrón en ambos lados de la reacción, y asígnelas donde sea necesario para obtener átomos neutros.)

43.50. Use la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía desprendida en el decaimiento β^- es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original es mayor que la del átomo final. (Véase la *sugerencia* en el problema 43.49.)

43.51. Aplique la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía liberada en el decaimiento β^+ es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original es cuando menos dos masas de electrón mayor que la del átomo final. (Véase la *sugerencia* en el problema 43.49.)

43.52. Comparación de energía liberada por gramo de combustible. *a*) Cuando la gasolina se quema, libera 1.3×10^{8} J de energía por galón (3.788 L). Dado que la densidad de la gasolina es 737 kg/m^3, exprese la cantidad de energía liberada en J/g de combustible. *b*) Durante la fisión, cuando un neutrón es absorbido por un núcleo de ^{235}U, aproximadamente 200 meV de energía se libera por cada núcleo que experimenta fisión. Exprese esta cantidad en J/g de combustible. *c*) En la cadena protón-protón que tiene lugar en las estrellas como nuestro Sol, la reacción total de fusión puede resumirse como seis protones que se fusionan para formar un núcleo de ^{4}He dejando dos protones remanentes y liberando 26.7 MeV de energía. El combustible está constituido por los seis protones. Exprese la energía producida aquí en

unidades de J/g de combustible. Advierta la enorme diferencia entre las dos formas de energía nuclear, por un lado, y la energía química de la gasolina, por el otro. *d*) Nuestro Sol produce energía a una tasa de 3.86×10^{26} W. Si su masa es de 1.99×10^{30} kg fuera por completo gasolina, ¿cuánto tiempo pasaría antes de consumirse todo el combustible? (*Nota histórica:* antes del descubrimiento de la fusión nuclear y las vastas cantidades de energía que libera, los científicos estaban confundidos. Sabían que la Tierra tenía por lo menos varios millones de años, pero no podían explicar cómo el Sol podía sobrevivir ese tiempo si su energía provenía de la combustión química.)

43.53. La masa del átomo del ^{24}Na, determinada experimentalmente, es 23.990963 u. Calcule la masa con la fórmula semiempírica de la masa, ecuación (43.12). ¿Qué porcentaje de error tiene el resultado en comparación con el valor experimental? ¿Qué error porcentual se comete si se pasa totalmente por alto el término E_B?

43.54. El torio $^{230}_{90}$Th decae a radio $^{226}_{88}$Ra por emisión α. Las masas de los átomos neutros son 230.033127 u del $^{230}_{90}$Th y 226.025403 u del $^{226}_{88}$Ra. Si el núcleo precursor del torio está en reposo, ¿cuál es la energía cinética de la partícula α emitida? (Asegúrese de tener en cuenta el retroceso del núcleo derivado.)

43.55. La masa atómica del $^{25}_{12}$Mg es 24.985837 u, y la del $^{25}_{13}$Al es 24.990429 u. *a*) ¿Cuál de esos núcleos decae en el otro? *b*) ¿Qué clase de decaimiento sucederá? Explique cómo lo determinó. *c*) ¿Cuánta energía (en MeV) se desprende en el decaimiento?

43.56. El isótopo de polonio $^{210}_{84}$Po tiene masa atómica 209.982857 u. Otras masas atómicas son $^{206}_{82}$Pb, 205.974449 u; $^{209}_{83}$Bi, 208.980383 u; $^{210}_{83}$Bi, 209.984105 u; $^{209}_{84}$Po, 208.982416 u y $^{210}_{85}$At, 209.987131 u. *a*) Demuestre que el decaimiento alfa del $^{210}_{84}$Po es energéticamente posible, y determine la energía de la partícula α emitida. *b*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po con respecto a la emisión de un protón? ¿Por qué? *c*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po con respecto a la emisión de un neutrón? ¿Por qué? *d*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po con respecto al decaimiento β^-? ¿Por qué? *e*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}$Po con respecto al decaimiento β^+? ¿Por qué?

43.57. ¡Radiación de nosotros mismos! El radiocarbono en nuestros cuerpos es una de las fuentes naturales de radiación. Veamos qué tan grande es la dosis que recibimos. El ^{14}C decae por emisión β^-, y el 18% de la masa de nuestro cuerpo es carbono. *a*) Elabore el esquema de decaimiento del carbono 14 e indique el producto final. (También se produce un neutrino.) *b*) Si se ignoran los efectos del neutrino, ¿cuánta energía cinética (en MeV) se libera por decaimiento? La masa atómica del C-14 es 14.003242 u. (Véase la tabla 43.2.) *c*) ¿Cuántos gramos de carbono hay en una persona de 75 kg? ¿Cuántos decaimientos por segundo produce este carbono? *d*) Suponiendo que toda la energía liberada en estos decaimientos es absorbida por el cuerpo, ¿cuántos MeV/s y J/s libera el C-14 en el cuerpo de esa persona? *e*) Consulte la tabla 43.3 y utilice la EBR más grande apropiada para las partículas implicadas. ¿Qué dosis de radiación entrega esa persona a sí misma cada año, en Gy, rad, Sv y rem?

43.58. Terapia de radiación con piones. Un pión neutro (π^0) tiene una masa de 264 veces la masa del electrón y decae con un tiempo de vida de 8.4×10^{-17} s a dos fotones. Esos piones se utilizan en el tratamiento con radiación de algunos tipos de cáncer. *a*) Calcule la energía y la longitud de onda de esos fotones. ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentran? ¿Cuál es la EBR de esos fotones? *b*) Si usted desea impartir una dosis de 200 rem (como es común) en un solo tratamiento a 25 g de un tejido tumoral, ¿cuántos mesones π^0 se necesitan?

43.59. El oro $^{198}_{79}$Au, sufre decaimiento β^- y pasa a un estado excitado del $^{198}_{80}$Hg. Si el estado excitado decae por emisión de un fotón γ con 0.412 MeV de energía, ¿cuál es la energía cinética máxima del electrón emitido en la desintegración? Este máximo se presenta cuando el antineutrino tiene una energía despreciable. (La energía de retroceso del núcleo de $^{198}_{80}$Hg se puede pasar por alto. Las masas de los átomos neutros en sus estados fundamentales son 197.968225 u den el caso del $^{198}_{79}$Au, y 197.966752 u para el $^{198}_{80}$Hg.)

43.60. Calcule el defecto de masa para el decaimiento β^+ del $^{11}_{6}$C. ¿Es energéticamente posible este decaimiento? ¿Por qué? La masa atómica del $^{11}_{6}$C es 11.0 11434 u.

43.61. Calcule el defecto de masa para el decaimiento β^+ del $^{13}_{7}$N. ¿Es energéticamente posible este decaimiento? ¿Por qué? La masa atómica del $^{13}_{7}$N es 13.005739 u.

43.62. En la siguiente tabla se presentan los resultados de mediciones de la actividad de una muestra radiactiva. *a*) Calcule la vida media. *b*) ¿Cuántos núcleos radiactivos había en la muestra cuando $t = 0$? *c*) ¿Cuántos había después de 7.0 h?

Tiempo (h)	Decaimientos/s
0	20,000
0.5	14,800
1.0	11,000
1.5	8,130
2.0	6,020
2.5	4,460
3.0	3,300
4.0	1,810
5.0	1,000
6.0	550
7.0	300

43.63. Si $A(t)$ es la actividad de una muestra en el momento t, y A_0 es la actividad cuando $t = 0$, demuestre que $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

43.64. Demuestre que la ecuación (43.17) se puede escribir en la forma $N(t) = N_0(\frac{1}{2})^n$, donde $n = t/T_{1/2}$ es la cantidad de vidas medias que han transcurrido desde que $t = 0$. (Esta ecuación es válida aun cuando n no sea un entero.)

43.65. Somos polvo de estrellas. En 1952 se descubrieron las líneas espectrales del elemento tecnecio-99 (^{99}Tc) en una estrella gigante roja. Las gigantes rojas son estrellas muy antiguas, a menudo de 10 mil millones de años de antigüedad, y se encuentran al final de sus vidas. El tecnecio *no* tiene isótopos estables, y la vida media del ^{99}Tc es de 200,000 años. *a*) ¿Cuántas vidas medias ha estado el ^{99}Tc en la gigante roja si la edad de ésta es de 10 mil millones de años? *b*) ¿Qué fracción del ^{99}Tc original quedaría al final de ese tiempo? Este descubrimiento fue sumamente importante porque brindó evidencia convincente para la teoría (ahora reconocida como verdadera) de que la mayoría de los átomos más pesados que el hidrógeno y el helio se crearon en el interior de las estrellas por fusión termonuclear y otros procesos nucleares. Si el ^{99}Tc hubiera sido parte de la estrella desde que ésta nació, la cantidad restante después de 10 mil millones de años sería tan minúscula que no sería detectable. Este conocimiento condujo más tarde al astrónomo Carl Sagan a afirmar que "somos polvo de estrellas".

43.66. Medición de vidas medias muy largas. Algunos radioisótopos como el samario (^{149}Sm) y el gadolinio (^{152}Gd) tienen vidas medias que son mucho más largas que la edad del Universo, de manera que no es posible medir sus vidas medias observando cómo disminuye su tasa de decaimiento. Por fortuna, existe otra forma de calcular la vida media, usando la ecuación (43.16). Suponga que una muestra de 12.0 g de ^{149}Sm se observa decaer a una tasa de 2.65 Bq. Calcule la vida media de la muestra en años. (*Sugerencia:* pregúntese cuántos núcleos hay en una muestra de 12.0 g.)

43.67. Las mediciones indican que el 27.83% de todos los átomos de rubidio que hay ahora en la Tierra son del isótopo radiactivo ^{87}Rb. El resto son del isótopo estable ^{85}Rb. La vida media del ^{87}Rb es de 4.75×10^{10} años. Suponiendo que no se hayan formado átomos de rubidio desde entonces, ¿qué porcentaje de átomos de rubidio eran ^{87}Rb cuando se formó nuestro Sistema Solar hace 4.6×10^9 años?

43.68. Una persona de 70.0 kg sufre una exposición de cuerpo entero a radiación α de 4.77 MeV. Absorbe un total de 6.25×10^{12} partículas α. *a*) ¿Cuál es la dosis absorbida, en rad? *b*) ¿Cuál es la dosis equivalente en

rem? *c*) Si la fuente es 0.0320 g de ^{226}Ra (vida media de 1600 años) en alguna parte del organismo, ¿cuál es la actividad de esta fuente? *d*) Si se absorben todas las partículas alfa producidas, ¿qué tiempo se requiere para absorber esa dosis?

43.69. Una fuente de ^{60}C con 2.6×10^{-4} Ci está embebida en un tumor de 0.500 kg de masa. La fuente emite fotones γ con energía promedio 1.25 MeV. La mitad de los fotones se absorbe en el tumor, y la mitad escapa. *a*) ¿Qué energía se entrega en el tumor, por segundo? *b*) ¿Qué dosis absorbida (en rad) se entrega por segundo? *c*) ¿Qué dosis equivalente (en rem) se entrega por segundo, si la EBR es 0.70 para esos rayos γ? *d*) ¿Qué tiempo de exposición se requiere para que la dosis equivalente sea 200 rem?

43.70. El núcleo $^{15}_{8}$O tiene una vida media de 122.2 s; el $^{19}_{8}$O tiene una vida media de 26.9 s. Si en determinado momento una muestra contiene cantidades iguales de $^{15}_{8}$O y $^{19}_{8}$O, ¿cuál es la razón entre $^{15}_{8}$O y $^{19}_{8}$O *a*) después de 4.0 minutos y *b*) después de 15.0 minutos?

43.71. Un fragmento de hueso se encontró en una cueva que se cree estuvo habitada por los primeros humanos, y contiene 0.21 veces el ^{14}C que una cantidad igual de carbón en la atmósfera cuando murió el organismo poseedor del hueso. (Véase el ejemplo 43.9, sección 43.4.) Calcule la edad aproximada del fragmento.

43.72. Un trazador oceanográfico. Las pruebas con armas nucleares en las décadas de 1950 y 1960 liberaron cantidades significativas de tritio radiactivo ($^{3}_{1}$H, vida media de 12.3 años) en la atmósfera. Los átomos de tritio se unieron rápidamente a moléculas de agua que se condensaron en el aire, la mayor parte de las cuales terminaron en el océano. Para esta agua unida al tritio que se hunde bajo la superficie, la cantidad de tiempo durante el cual ha estado aislada de la superficie puede calcularse midiendo la razón entre el producto de decaimiento, $^{3}_{2}$He, y el tritio restante en el agua. Por ejemplo, si la razón entre el $^{3}_{1}$He y el $^{3}_{1}$H en una muestra de agua es 1:1, el agua ha estado debajo de la superficie durante una vida media, o aproximadamente 12 años. Este método ofrece a los oceanógrafos una forma práctica de trazar los movimientos de las corrientes debajo de la superficie en regiones del océano. Suponga que en una muestra particular de agua, la razón entre el $^{3}_{2}$He y el $^{3}_{1}$H es de 4.3 a 1.0. ¿Hace cuántos años que esta agua se hundió debajo de la superficie?

43.73. Considere la reacción de fusión

$$^{2}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + {}^{1}_{0}\text{n}$$

a) Estime la barrera de energía calculando la energía potencial electrostática de repulsión de los dos núcleos $^{2}_{1}$H cuando se tocan. *b*) Calcule la energía liberada en esta reacción, en MeV y en joules. *c*) Calcule la energía liberada *por mol* de deuterio, recordando que el gas es diatómico, y compárela con el calor de combustión del hidrógeno, que es de unos 2.9×10^{5} J/mol.

43.74. En el desastre del reactor de Chernobyl, en 1986, en la Unión Soviética (hoy Ucrania), aproximadamente $\frac{1}{8}$ del ^{137}Cs presente en el reactor escapó. El isótopo ^{137}Cs tiene una vida media por decaimiento β de 30.07 a, y decae emitiendo un total de 1.17 MeV de energía por desintegración. De esa energía, 0.51 MeV van con el electrón emitido, y los 0.66 MeV restantes con un rayo γ. El ^{137}Cs radiactivo es absorbido por las plantas, que son ingeridas por el ganado y por los humanos. ¿Cuántos átomos de ^{137}Cs se necesitarían para que en cada kilogramo de tejido corporal haya una dosis equivalente de 3.5 Sv durante una semana? Suponga que toda la energía del decaimiento se queda en ese 1.0 kg de tejido, y que la EBR de los electrones es 1.5.

43.75. *a*) Demuestre que cuando una partícula con masa m y energía cinética K choca con una partícula estacionaria de masa M, la energía cinética total K_{cm} en el sistema de coordenadas del centro de masa (la energía disponible para causar reacciones) es

$$K_{\text{cm}} = \frac{M}{M + m}K$$

Suponga que las energías cinéticas de las partículas y los núcleos son mucho menores que sus energías en reposo. *b*) Si K_{th} es la energía cinética mínima, o de umbral (*threshold* en inglés), para causar una reacción endoérgica en el caso del inciso *a*), demuestre que

$$K_{\text{th}} = -\frac{M + m}{M}Q$$

43.76. Un núcleo de $^{186}_{76}$Os en reposo decae por emisión de una partícula α de 2.76 MeV. Calcule la masa atómica del núclido derivado producido por este decaimiento, suponiendo que se produce en su estado fundamental. La masa atómica del $^{186}_{76}$Os es 185.953838 u.

43.77. Calcule la energía liberada en la reacción de fisión

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{94}_{38}\text{Sr} + 2{}^{1}_{0}\text{n}$$

Puede ignorar la energía cinética inicial del neutrón absorbido. Las masas atómicas son: $^{235}_{92}$U, 235.043923 u; $^{140}_{54}$Xe, 139.921636 u y $^{94}_{38}$Sr, 93.915360 u.

Problemas de desafío

43.78. A continuación se presentan los resultados de mediciones de actividad para una muestra mezclada de elementos radiactivos. *a*) ¿Cuántos núclidos distintos hay en la mezcla? *b*) ¿Cuáles son sus vidas medias? *c*) ¿Cuántos núcleos de cada tipo hay inicialmente en la muestra? *d*) ¿Cuántos de cada tipo hay cuando $t = 5.0$ h?

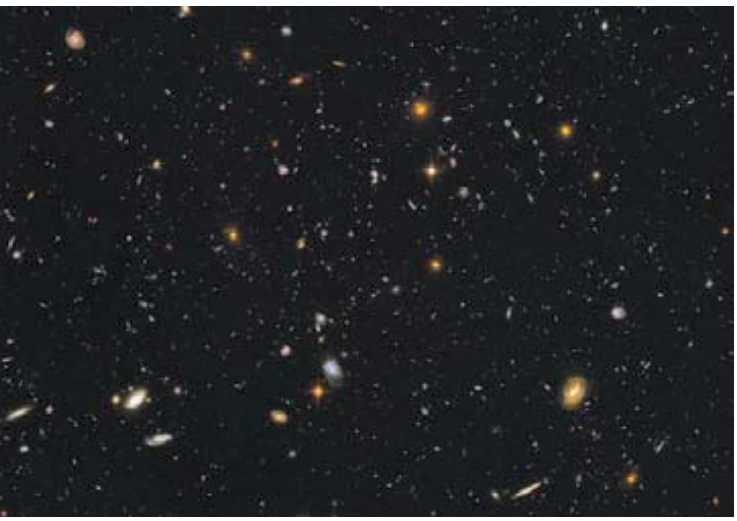
Tiempo (h)	Decaimientos/s
0	7500
0.5	4120
1.0	2570
1.5	1790
2.0	1350
2.5	1070
3.0	872
4.0	596
5.0	414
6.0	288
7.0	201
8.0	140
9.0	98
10.0	68
12.0	33

43.79. En un experimento, el isótopo ^{128}I se produce por irradiación de ^{127}I con un haz de neutrones, que forma 1.5×10^{6} núcleos de ^{128}I por segundo. Al principio no hay núcleos de ^{128}I. La vida media del ^{128}I es de 25 minutos. *a*) Elabore una gráfica de la cantidad de núcleos presentes de ^{128}I en función del tiempo. *b*) ¿Cuál es la actividad de la muestra a los 1, 10, 25, 50, 75 y 180 minutos después de iniciar la irradiación? *c*) ¿Cuál es la cantidad máxima de átomos de ^{128}I que se pueden formar en la muestra después de irradiarla durante largo tiempo? (A este caso de estado estable se le llama *saturación*.) *d*) ¿Cuál es la actividad máxima que se puede producir?

43.80. Radiactividad industrial. Los radioisótopos se usan en diversas técnicas de manufactura y prueba. Se pueden hacer mediciones de desgaste con el método siguiente. Se produce un motor de automóvil usando anillos de pistón con una masa total de 100 g, que contiene 9.4 μCi de ^{59}Fe, cuya vida media es 45 días. El motor de prueba trabaja durante 1000 horas, después de lo cual se vacía su aceite y se mide la actividad de éste. Si la actividad del aceite del motor es 84 decaimientos/s, ¿cuánta masa se desprendió de los anillos de pistón, por hora de funcionamiento?

FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA

44



? Esta imagen del Telescopio Espacial Hubble muestra las galaxias —enormes concentraciones de estrellas, gases y polvo— que se esparcen en el Cosmos como granos de arena. ¿Aproximadamente qué fracción de toda la masa y energía en el Universo está en la forma de dicha materia "normal"?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Las principales variedades de las partículas subatómicas fundamentales y cómo se descubrieron.
- De qué manera los físicos usan aceleradores y detectores para demostrar las propiedades de las partículas subatómicas.
- Las cuatro formas en que las partículas subatómicas interactúan entre sí.
- Cómo la estructura de los protones, neutrones y otras partículas pueden explicarse en términos de quarks.
- De qué manera los físicos demuestran los límites del modelo estándar de partículas e interacciones.
- La evidencia de que el Universo está en expansión y de que la expansión se está acelerando.
- La historia de los primeros 380,000 años después del Big Bang.

¿De qué está hecho el mundo? ¿Cuáles son los constituyentes más importantes de la materia? Los filósofos y los científicos se lo han preguntando cuando menos durante 2500 años. Y todavía no sabemos lo que pudiera considerarse una respuesta definitiva; sin embargo, ya hemos recorrido un largo trecho. Este último capítulo es un resumen del avance de lo descrito, de dónde estamos y adónde esperamos llegar.

Quizá el título de este capítulo, "Física de partículas y cosmología", le parecerá algo extraño. Las partículas fundamentales son los objetos *más pequeños* en el Universo, y la cosmología describe la estructura *más grande* que existe: el Universo mismo. No obstante, en este capítulo veremos que la física, en la escala microscópica, juega un papel esencial en la determinación de la naturaleza del Universo en la escala máxima.

Veremos que las partículas fundamentales no son entidades permanentes, ya que pueden crearse y destruirse. El desarrollo de aceleradores de alta energía para partículas, y los detectores correspondientes, han desempeñado un papel esencial en nuestra incipiente comprensión de las partículas. Es posible clasificar las partículas y sus interacciones en varias formas, en términos de las leyes de conservación y las simetrías, algunas de las cuales son absolutas, en tanto otras de ellas sólo rigen en ciertas clases de interacciones. En este último capítulo intentaremos proporcionar una idea de las fronteras que restan en esta área vital y emocionante de la investigación fundamental. Terminaremos describiendo lo que sabemos actualmente de la naturaleza y la evolución del Universo en su conjunto.

44.1 Partículas fundamentales y su historia

La idea de que el mundo está formado por *partículas fundamentales* tiene una larga historia. Aproximadamente en el año 400 a.C., los filósofos griegos Demócrito y Leucipo sugirieron que la materia estaba hecha de partículas indivisibles a las que llamaron *átomos*, una palabra derivada de *a-* (no) y *tomos* (cortado o dividido). Esta idea quedó latente hasta 1804, aproximadamente, cuando el científico inglés John Dalton (1766-1844), a quien con frecuencia se le conoce como padre de la química moderna, descubrió que se podían explicar muchos fenómenos químicos, si a los átomos de cada elemento se les consideraban como los bloques de construcción básicos e indivisibles de la materia.

El electrón y el protón

Hacia finales del siglo XIX, se aclaró que los átomos *no* son indivisibles. La existencia de espectros atómicos característicos parecía indicar que los átomos tenían estructura interna, y el descubrimiento del *electrón* en 1897, por J. J. Thompson, demostró que los átomos se podían desintegrar en partículas cargadas. El núcleo del hidrógeno se identificó como un *protón*; mientras que en 1911 Rutherford con sus experimentos midió los tamaños de los núcleos. La mecánica cuántica, con la ecuación de Schrödinger, floreció durante los siguientes 15 años. Los científicos ya estaban en el camino de entender los principios sobre los que se basa la estructura atómica, aunque quedaban muchos detalles por resolver.

El fotón

En 1905 Einstein explicó el efecto fotoeléctrico al suponer que la energía de las ondas electromagnéticas está cuantizada; es decir, que viene en pequeños paquetes llamados *fotones* de energía $E = hf$. Los átomos y los núcleos pueden emitir (crear) y absorber (destruir) fotones. Considerados como partículas los fotones tienen carga cero y masa en reposo cero. (Advierta que en este capítulo todas las descripciones de la masa de una partícula se referirán a su masa en reposo.) En la física de partículas, un fotón se representa con el símbolo γ, la letra griega gamma.

El neutrón

El descubrimiento del neutrón fue un acontecimiento importante. En 1930 los físicos alemanes Walther Bothe y Herbert Becker observaron que cuando se bombardeaba el berilio, el boro o el litio, con partículas α procedentes del polonio radiactivo, el material emitía una radiación con mucho mayor poder de penetración que las partículas α originales. En 1932 los experimentos del físico inglés James Chadwick demostraron que las partículas emitidas eran eléctricamente neutras, y que su masa era aproximadamente igual a la del protón. Chadwick bautizó con el nombre de *neutrones* a esas partículas. Una reacción característica, del tipo estudiado por Bothe y Becker con un blanco de berilio, es la siguiente:

$$ {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \qquad (44.1) $$

Fue difícil detectar los neutrones en forma directa, porque no tienen carga. Por lo tanto, producen poca ionización cuando atraviesan la materia, y no son desviados por campos eléctricos o magnéticos. Casi siempre los neutrones sólo interaccionan con los núcleos; pueden desacelerarse por dispersión y penetrar en el núcleo. Los neutrones lentos pueden detectarse mediante una reacción nuclear en donde se absorbe un neutrón y se emite una partícula α. Por ejemplo,

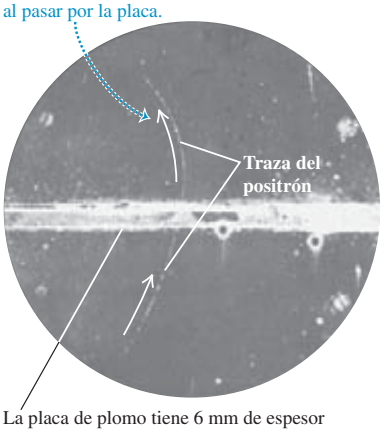
$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{10}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \qquad (44.2) $$

Es fácil detectar la partícula α expulsada porque tiene carga. Experimentos posteriores demostraron que los neutrones, como los protones y los electrones, son partículas con espín $\frac{1}{2}$ (véase la sección 43.1).

El neutrón fue un descubrimiento trascendental porque aclaró un misterio acerca de la composición del núcleo. Antes de 1930, se creía que la masa de un núcleo sólo se debía a los protones, aunque nadie comprendía por qué la relación de carga a masa no era igual para todos los núclidos. Pronto se aclaró que todos los núclidos (excepto el ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$) contienen tanto protones como neutrones. De hecho, el protón, el neutrón y el electrón son los bloques de construcción de los átomos. Se pensó que ése sería el fin de la historia pero, al contrario, apenas era el principio. No son las únicas partículas y pueden hacer más que formar átomos.

El positrón

En 1932 el físico estadounidense Carl D. Anderson descubrió el electrón positivo, o *positrón*, cuando investigaba las partículas que bombardean la Tierra desde el espacio. La figura 44.1 muestra una fotografía histórica, tomada con una *cámara de niebla*,



44.1 Fotografía de la traza dejada, en una cámara de niebla, por el primer positrón que se haya identificado. La fotografía fue tomada por Carl D. Anderson, en 1932.

instrumento con el que se visualizan las trayectorias de las partículas cargadas. La cámara contenía un vapor sobreenfriado; los iones formados al paso de las partículas cargadas al atravesar el vapor sirven como centros de agrupamiento y se forman gotitas de líquido en tomo a ellas, dejando una trayectoria visible.

La cámara de niebla de la figura 44.1 está en un campo magnético en dirección hacia el plano de la fotografía. La partícula ha atravesado una placa delgada de plomo (que va de izquierda a derecha en la figura) dentro de la cámara. La curvatura de la trayectoria es mayor arriba de la placa que abajo de ella, lo cual demuestra que la rapidez es menor arriba que abajo. Por consiguiente, la partícula debería moverse hacia arriba; no podía ganar energía al atravesar el plomo. El grosor y la curvatura de la huella parecían indicar que su masa y la magnitud de la carga eran iguales a las del electrón. Sin embargo, las direcciones del campo magnético y de la velocidad, en la ecuación de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ demostraban que la partícula tenía carga *positiva.* Anderson bautizó a esta partícula con el nombre de *positrón*.

Para los teóricos, la aparición del positrón fue un descubrimiento más que importante. En 1928 el físico inglés Paul Dirac había desarrollado una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger para el electrón. En la sección 41.3 describimos cómo la generalización de Dirac ayudó a explicar el momento magnético del espín del electrón.

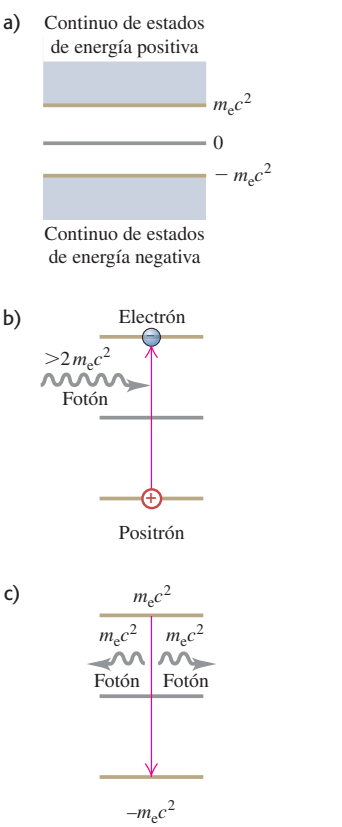
Una de las propiedades intrigantes de la ecuación de Dirac era que, para un electrón *libre*, predecía no sólo un continuo de estados de energía mayores que su energía en reposo $m_e c^2$, como era de esperarse, sino también un continuo de estados de energía *negativa menor que* $-m_e c^2$ (figura 44.2a). Esto constituía un problema. ¿Qué iba a evitar que un electrón emitiera un fotón de energía $2m_e c^2$ o mayor, y saltara de un estado positivo a un estado negativo? No estaba claro lo que significaban esos estados de energía negativa, y no había una forma evidente de eliminarlas. La interpretación ingeniosa de Dirac fue que todos los estados de energía negativa estaban llenos con electrones, y que éstos por alguna razón eran inobservables. El principio de exclusión prohibiría entonces una transición a un estado que ya estaba ocupado.

Una vacante o laguna en un estado de energía negativa actuaría como una carga positiva, igual que un hueco en la banda de valencia de un semiconductor (véase la sección 42.6) actúa como una carga positiva. Al principio, Dirac trató de argumentar que esas vacantes eran protones. Pero después del descubrimiento de Anderson se aclaró que las vacantes se observaban físicamente como *positrones*. Además, la representación de estados de energía de Dirac ofrece un mecanismo para *crear* positrones. Cuando un electrón de un estado de energía negativa absorbe un fotón de energía mayor que $2m_e c^2$, pasa a un estado positivo (figura 44.2b), en el cual se vuelve observable. El lugar vacío que deja se observa como positrón; el resultado es la creación de un par electrón-positrón. Asimismo, cuando un electrón en un estado de energía positiva cae en la vacante, desaparecen tanto el electrón como la vacante (esto es, el positrón) y se emiten fotones (figura 44.2c). Así, la teoría de Dirac lleva en forma natural a la conclusión de que, al igual que los fotones, los *electrones pueden crearse* y *destruirse.* Mientras que los fotones pueden crearse y destruirse en forma independiente, los electrones se pueden producir o destruir sólo en forma de pares electrón-positrón, o en asociación con otras partículas. Más adelante veremos por qué.

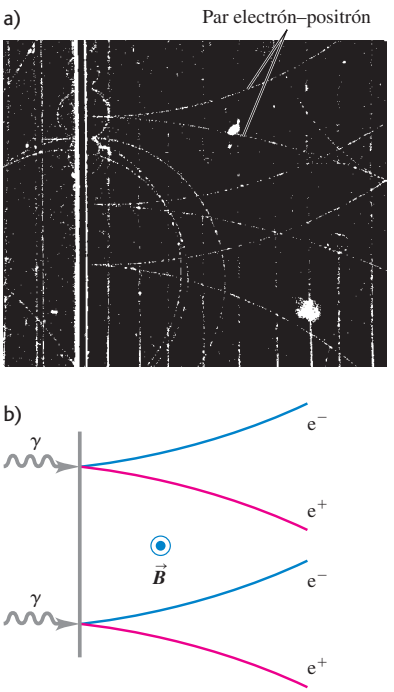
En 1949 el físico estadounidense Richard Feynman demostró que un positrón se puede describir matemáticamente como un electrón que se mueve hacia atrás en el tiempo. La reformulación que hizo de la teoría de Dirac eliminó los difíciles cálculos que implicaban al mar infinito de estados de energía negativa, y colocó los electrones y positrones sobre la misma base. Pero permanece la creación y la destrucción de los pares electrón-positrón. La teoría de Dirac es, en forma inherente, una teoría de *muchas partículas* y es el inicio de un marco teórico para la creación y la destrucción de todas las partículas fundamentales.

Los experimentos y la teoría nos indican que las masas del positrón y del electrón son idénticas, y que sus cargas tienen igual magnitud, pero signo contrario. La cantidad de movimiento angular del espín del positrón $\vec{S}$ y el momento magnético $\vec{\mu}$ son paralelos; y para el electrón son opuestos. Sin embargo, $\vec{S}$ y $\vec{\mu}$ tienen la misma magnitud para ambas partículas, porque tienen el mismo espín. Utilizaremos el término

44.2 a) Estados de energía de un electrón libre, predichos por la ecuación de Dirac. b) Subir a un electrón desde un estado $E < 0$ a uno $E > 0$ corresponde a la producción de un par electrón-positrón. c) Un electrón que baja de un estado $E > 0$ a un estado $E < 0$ vacío (vacante) corresponde a una aniquilación de par electrón-positrón.



44.3 a) Fotografía de las trazas dejadas por pares electrón-positrón en una cámara de niebla, que fueron producidas al chocar fotones de 300 MeV con una lámina de plomo. Un campo magnético dirigido hacia fuera de la fotografía hizo que las trayectorias de electrones y positrones se curvaran en direcciones opuestas. b) Diagrama que muestra el proceso de producción de pares para dos de los fotones.



antipartícula para señalar una partícula que se relaciona con otra como el positrón con el electrón. Cada clase de partícula tiene una antipartícula correspondiente. Para unas cuantas clases de partículas (todas neutras, por necesidad), la partícula y la antipartícula son idénticas, y se puede decir que son sus propias antipartículas. El fotón es un ejemplo, no hay forma de distinguir un fotón de un antifotón. Usaremos los símbolos normales e^- para el electrón y e^+ para el positrón; mientras que el término genérico *electrón* incluirá con frecuencia tanto a los electrones como a los positrones. Otras antipartículas a menudo se indican con una raya sobre el símbolo de la partícula; por ejemplo, un antiprotón es $\bar{p}$. Más adelante veremos otros ejemplos de antipartículas.

Los positrones no se encuentran en la materia ordinaria. Se producen pares electrón-positrón durante los choques de partículas cargadas de alta energía, o de rayos γ contra la materia, un ejemplo del proceso llamado *producción de pares* e^+e^- (figura 44.3). Se conserva la carga eléctrica, y debe haber la energía E suficiente para tener en cuenta la energía en reposo $2m_ec^2$ de las dos partículas. La energía mínima para producir un par electrón-positrón es

$$E_{\text{mín}} = 2m_ec^2 = 2(9.109 \times 10^{-31}\,\text{kg})(2.998 \times 10^8\,\text{m/s})^2$$
$$= 1.637 \times 10^{-13}\,\text{J} = 1.022\,\text{MeV}$$

El proceso inverso, la *aniquilación del par* e^+e^-, se produce cuando chocan un positrón y un electrón. Ambas partículas desaparecen y pueden aparecer dos (o a veces tres) fotones con una energía total mínima $2m_ec^2 = 1.022$ MeV. El decaimiento a un *solo* fotón es imposible, porque ese proceso no conservaría tanto la energía como la cantidad de movimiento. Es más fácil analizar los procesos de aniquilación e^+e^- en el marco de referencia llamado *sistema de centro de masas*, en el que la cantidad total de movimiento es cero. Es la generalización relativista del sistema de centro de masa que describimos en la sección 8.5.

Ejemplo 44.1 Aniquilación de un par

Un electrón y un positrón están muy alejados entre sí, y se mueven uno hacia el otro con la misma rapidez. Chocan de frente, se aniquilan entre sí y producen dos fotones. Calcule las energías, longitudes de onda y frecuencias de los dos fotones, si las energías cinéticas iniciales del e^- y el e^+ son *a*) extremadamente pequeñas, y *b*) 5.000 MeV ambas. Considere la energía en reposo para un electrón como 0.511 MeV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que los choques ordinarios que estudiamos en el capítulo 8, en este proceso se conservan cantidad de movimiento y energía.

PLANTEAR: Como al principio el electrón y el positrón están muy alejados, la energía inicial potencial eléctrica es cero, y toda la energía inicial es cinética. La energía final es la suma de las energías de los dos fotones. Antes del choque, las cantidades de movimiento del electrón y del positrón tienen la misma magnitud, y direcciones contrarias, por lo que la cantidad total de movimiento es cero y estamos en el sistema del centro de masas; asimismo, la cantidad total de movimiento de los dos fotones después de la colisión debe ser de cero. Despejamos la energía E de cada fotón usando la conservación de la energía, la conservación de la cantidad de movimiento, y la relación $E = pc$ para cada fotón (véase la sección 38.2). Luego calcularemos las longitudes de onda y las frecuencias con la ecuación $E = hc/\lambda = hf$.

EJECUTAR: Para que se conserve la cantidad de movimiento, los dos fotones deben tener cantidades de movimiento de igual magnitud p y direcciones contrarias. Ya que $E = pc = hc/\lambda = hf$, los dos fotones también deben tener las mismas energía E, longitud de onda λ y frecuencia f.

Antes del choque, la energía de cada electrón es $K + mc^2$, donde K es su energía cinética y $mc^2 = 0.511$ MeV. Por consiguiente, la ecuación de la conservación de la energía es

$$(K + mc^2) + (K + mc^2) = E + E$$

Por lo tanto, la energía de cada fotón es $E = K + mc^2$.

a) Si la energía cinética K del electrón es despreciable en comparación con su energía en reposo mc^2, entonces cada fotón tiene la energía $E = mc^2 = 0.511$ MeV. La longitud de onda y la frecuencia de cada fotón son

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{0.511 \times 10^6\,\text{eV}}$$
$$= 2.43 \times 10^{-12}\,\text{m} = 2.43\,\text{pm}$$

$$f = \frac{E}{h} = \frac{0.511 \times 10^6\,\text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s}} = 1.24 \times 10^{20}\,\text{Hz}$$

b) Ahora $K = 5.000$ MeV para cada electrón, por lo que cada fotón tiene energía $E = 5.000$ MeV + 0.511 MeV = 5.511 MeV. La longitud de onda y la frecuencia de cada fotón son 0.2250 pm y 1.333×10^{21} Hz, respectivamente.

EVALUAR: Para comprobar nuestros resultados, recuerde que en la sección 38.2 un fotón de luz visible de 2 eV de energía tiene una longitud de onda de 600 nm y una frecuencia de 5×10^{14} Hz. Cada fotón del inciso *a*) tiene una energía unas 2.5×10^5 veces mayor; como se esperaría, la longitud de onda del fotón es menor y la frecuencia mayor que las de un fotón de luz visible, por el mismo factor. Puede comprobar los resultados del inciso *b*) en la misma forma.

Los positrones también se producen en el decaimiento de algunos núcleos inestables, en los que se llaman partículas beta más (β^+). Ya describimos el decaimiento β^+ en la sección 43.3.

Con frecuencia conviene representar las masas de partículas en términos de la energía equivalente en reposo, usando $m = E/c^2$. Entonces, las unidades normales de masa están en MeV/c^2; por ejemplo, $m = 0.511$ MeV/c^2 para un electrón o un positrón. A menudo utilizaremos estas unidades en las siguientes descripciones.

Partículas como mediadores de fuerza

En física clásica se describe la interacción de partículas cargadas en términos de fuerzas de la ley de Coulomb. En mecánica cuántica se puede describir esta interacción en términos de emisión y absorción de fotones. Dos electrones se repelen entre sí cuando uno emite un fotón y el otro lo absorbe, del mismo modo que dos patinadores pueden empujarse uno al otro por medio de una pelota grande entre ambos (figura 44.4a). Para un electrón y un protón, en los que las cargas son opuestas y la fuerza es de atracción, imaginamos que los patinadores intentan atrapar la pelota cuando están lejos entre sí (figura 44.4b). La interacción electromagnética entre dos partículas cargadas es *mediada* o transmitida por fotones.

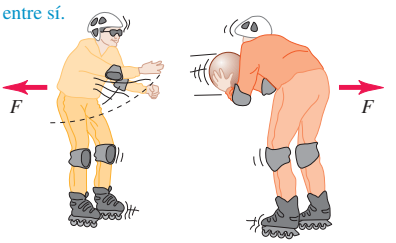
Si las interacciones entre partículas cargadas están mediadas por fotones, ¿de dónde proviene la energía para crear los fotones? Recuerde, de nuestra descripción del principio de incertidumbre (véase la sección 39.3), que un estado que existe durante un corto tiempo Δt tiene una incertidumbre ΔE en su energía, tal que

$$\Delta E\, \Delta t \geq \hbar \tag{44.3}$$

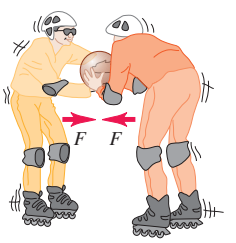
Esta incertidumbre permite la creación de un fotón con energía ΔE, siempre y cuando no dure más que el tiempo Δt definido por la ecuación (44.3). Un fotón que puede existir durante corto tiempo, debido a esta incertidumbre de energía, se llama *fotón virtual*. Es como si hubiera un banco de energía; uno puede pedir prestada energía siempre y cuando se pague dentro del límite de tiempo. De acuerdo con la ecuación (44.3), cuanto más se pida prestado, habrá que pagar más pronto. Después veremos otras partículas virtuales que existen durante un corto tiempo debido a energía *prestada.*

44.4 Una analogía de cómo las partículas actúan como mediadores de fuerza.

a) Dos patinadores ejercen fuerzas de repulsión mutuas lanzándose una pelota de ida y vuelta entre sí.



b) Dos patinadores ejercen fuerzas de atracción entre sí cuando uno trata de quitar la pelota de las manos del otro.



Mesones

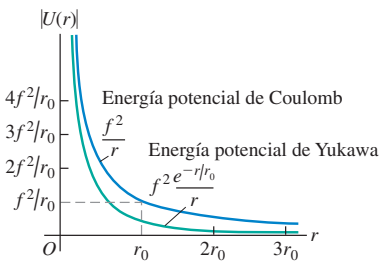
¿Hay alguna partícula intermediaria de la fuerza *nuclear*? A mediados de la década de 1930, parecía que la fuerza nuclear entre dos nucleones (neutrones o protones) se podía describir con una energía potencial $U(r)$ de la forma general

$$U(r) = -f^2 \frac{e^{-r/r_0}}{r} \qquad \text{(energía potencial nuclear)} \tag{44.4}$$

La constante f caracteriza la fuerza de la interacción, y r_0 describe su alcance. La figura 44.5 muestra una gráfica del valor absoluto de esta función, y la compara con la función f^2/r, que sería análoga a la interacción *eléctrica* de dos protones:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad \text{(energía potencial eléctrica)} \tag{44.5}$$

44.5 Gráfica de la magnitud de la función de energía potencial de Yukawa para las fuerzas nucleares, $|U(r)| = f^2 e^{-r/r_0}/r$. También se muestra la función $U(r) = f^2/r$, que es proporcional a la energía potencial de la ley de Coulomb. Las dos funciones se parecen cuando r es pequeña, pero la energía potencial de Yukawa baja con mucho mayor rapidez cuando r es grande.



En 1935 el físico japonés Hideki Yukawa sugirió que una partícula hipotética, a la que llamó **mesón**, podría actuar como mediador de la fuerza nuclear. Demostró que el intervalo de la fuerza se relacionaba con la masa de la partícula. Su argumento era más o menos como sigue: la partícula debe vivir durante un tiempo Δt suficiente para recorrer una distancia comparable al alcance de la fuerza nuclear. Se conocía ese alcance, por los tamaños de los núcleos y otras informaciones, y debía ser del orden de $r_0 = 1.5 \times 10^{-15}\,\text{m} = 1.5\,\text{fm}$. Si suponemos que la rapidez de la partícula es comparable con c, su vida Δt debería ser del orden de

$$\Delta t = \frac{r_0}{c} = \frac{1.5 \times 10^{-15}\,\text{m}}{3.0 \times 10^{8}\,\text{m/s}} = 5.0 \times 10^{-24}\,\text{s}$$

De acuerdo con la ecuación (44.3), la incertidumbre mínima necesaria ΔE en la energía es

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{5.0 \times 10^{-24}\,\text{s}} = 2.1 \times 10^{-11}\,\text{J} = 130\,\text{MeV}$$

La masa equivalente Δm de esta energía es

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{2.1 \times 10^{-11}\,\text{J}}{(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})^2} = 2.3 \times 10^{-28}\,\text{kg} = 130\,\text{MeV}/c^2$$

Es unas 250 veces la masa del electrón, y Yukawa postuló que una partícula con esta masa sirve como mensajero de la fuerza nuclear. Fue un acto arriesgado, porque en esa época no había prueba experimental de que existiera esa partícula.

Un año después, Carl Anderson y su colega Seth Neddermeyer descubrieron, en la radiación cósmica, dos nuevas partículas, que hoy se llaman **muones**. La μ^- tiene la carga igual a la del electrón, y su antipartícula, la μ^+, tiene una carga positiva de igual magnitud. Las dos partículas tienen masa igual, unas 207 veces la masa del electrón. No obstante, pronto se aclaró que los muones *no* eran las partículas de Yukawa, porque sólo interaccionaban débilmente con los núcleos.

En 1947 se descubrió una familia de tres partículas llamadas *mesones* π o **piones**. Sus cargas son: $+e$, $-e$ y cero, y sus masas aproximadas son 270 veces la masa del electrón. Los piones interaccionan fuertemente con los núcleos y *son* las partículas predichas por Yukawa. Hay otros mesones más pesados, los ω y los ρ, que en forma evidente también funcionan como mensajeros de la fuerza nuclear de alcances más cortos. La complejidad de esta explicación sugiere que tiene bases más sencillas; implican a los quarks y los gluones que describiremos en la sección 44.4. Antes de seguir estudiando los mesones, describiremos algunos aceleradores y detectores de partículas, para saber cómo se crean y observan en forma controlada los mesones y otras partículas.

Evalúe su comprensión de la sección 44.1 Cada una de las siguientes partículas puede intercambiarse entre dos protones, dos neutrones, o un neutrón y un protón como parte de la fuerza nuclear. Ordene de mayor a menor las partículas, según el intervalo de interacción que median. i) el mesón π^+ (pi más) de masa 140 MeV/c^2; ii) el mesón ρ^+ (rho más) de masa 776 MeV/c^2; iii) el mesón η^0 (eta cero) de masa 548 MeV/c^2; iv) el mesón ω^0 (omega cero) de masa 783 MeV/c^2.

44.2 Aceleradores y detectores de partículas

En sus experimentos, los primeros físicos nucleares usaban partículas alfa y beta procedentes de elementos radiactivos naturales; sin embargo, la energía estaba restringida a algunos MeV, disponibles en tales decaimientos aleatorios. Los aceleradores de partículas actuales pueden producir haces de partículas controlados con precisión, desde electrones y positrones hasta iones pesados, con una gran variedad de energías. Esos

haces tienen tres usos principales. Primero, las partículas de alta energía pueden chocar para producir nuevas partículas, así como el choque de un electrón con un positrón puede producir fotones. En segundo lugar, una partícula de alta energía tiene una longitud de onda de De Broglie corta, por lo que puede explorar la estructura interna, de pequeña escala, de otras partículas, de la misma manera que los microscopios electrónicos (sección 39.4) pueden alcanzar mejor resolución que los microscopios ópticos. En tercer lugar, se pueden usar para producir reacciones nucleares para aplicaciones científicas o médicas.

Aceleradores lineales

Los aceleradores de partículas usan campos eléctricos y magnéticos para acelerar y direccionar haces de partículas cargadas. Un *acelerador lineal* acelera las partículas en una línea recta. Los primeros ejemplos fueron los tubos de rayos catódicos de J. J. Thompson y los tubos de rayos x de William Coolidge. Los aceleradores lineales más sofisticados usan una serie de electrodos con intervalos, para dar una serie de impulsos al haz de partículas. La mayoría de los aceleradores lineales de alta energía actuales usan una onda electromagnética viajera; las partículas cargadas "se montan" en la onda, más o menos del mismo modo que un *surfista* se monta en una ola de mar. En la actualidad, el acelerador lineal de mayor energía de todo el mundo se encuentra en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC), donde los electrones y los positrones se aceleran a 50 GeV en un tubo de 3 km de longitud. A esta energía, sus longitudes de onda de De Broglie son 0.025 fm, mucho menores que el tamaño de un protón o un neutrón.

El ciclotrón

Muchos aceleradores usan imanes para desviar las partículas cargadas por trayectorias circulares. El primero de ellos fue el *ciclotrón*, inventado en 1931 por E. O. Lawrence y M. Stanley Livingston, en la Universidad de California. En el ciclotrón, cuyo esquema se presenta en la figura 44.6a, las partículas con masa m y carga q se mueven dentro de una cámara de vacío en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que es perpendicular al plano de sus trayectorias. En la sección 27.4 demostramos que en ese campo, una partícula con rapidez v describe una trayectoria circular de radio r definido por

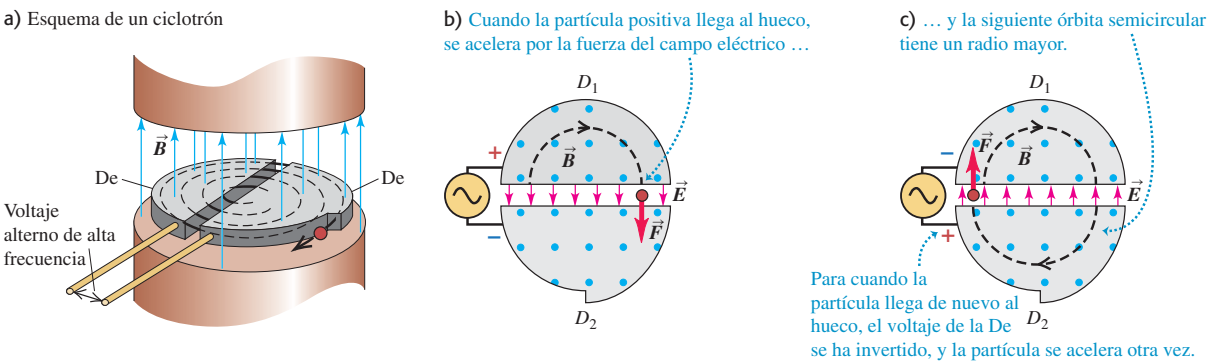
$$r = \frac{mv}{|q|B} \tag{44.6}$$

y su rapidez angular (frecuencia angular) ω es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m} \tag{44.7}$$

Una diferencia de potencial alternativa se aplica entre los dos electrodos huecos D_1 y D_2 (llamados *des,* de la letra D) creando un campo eléctrico en el espacio que hay entre ellos. La polaridad de la diferencia de potencial y del campo eléctrico se cambian exactamente dos veces cada revolución (figuras 44.6b y 44.6c), de tal modo

44.6 Disposición y funcionamiento de un ciclotrón.



que las partículas tengan un impulso cada vez que crucen el hueco. Los impulsos aumentan su rapidez y su energía cinética, impulsándolos por trayectorias de radios mayores. La rapidez máxima $v_{máx}$ y la energía cinética máxima $K_{máx}$ están determinadas por el radio R de la mayor trayectoria posible. Al despejar v de la ecuación (44.6) se ve que $v = |q|Br/m$ y $v_{máx} = |q|BR/m$. Suponiendo que las rapideces no son relativistas, se obtiene

$$K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \tag{44.8}$$

Ejemplo 44.2 Un ciclotrón para protones

Un ciclotrón construido durante la década de 1930 tiene una trayectoria de radio máximo de 0.500 m, y un campo magnético de 1.50 T de magnitud. Si se usa para acelerar protones, *a*) calcule la frecuencia del voltaje alterno aplicado a las des; *b*) calcule la energía máxima de la partícula.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La frecuencia del voltaje del ciclotrón debe ser igual a la frecuencia del movimiento orbital del protón. La partícula alcanza su energía máxima cuando el radio de su órbita es igual al radio de las des.

PLANTEAR: La ecuación (44.7) define la frecuencia angular del movimiento orbital del protón. La incógnita del inciso *a*) es la frecuencia ordinaria $f = \omega/2\pi$. La energía cinética máxima de los protones se obtiene con la ecuación (44.8).

EJECUTAR: *a*) Para los protones, $q = 1.60 \times 10^{-19}\,\text{C}$ y $m = 1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$. Al usar la ecuación (44.7), vemos que

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})(1.50\,\text{T})}{2\pi(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})}$$
$$= 2.3 \times 10^7\,\text{Hz} = 23\,\text{MHz}$$

b) De acuerdo con la ecuación (44.8), la energía cinética máxima es

$$K_{máx} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})^2(1.50\,\text{T})^2(0.50\,\text{m})^2}{2(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})}$$
$$= 4.3 \times 10^{-12}\,\text{J} = 2.7 \times 10^7\,\text{eV} = 27\,\text{MeV}$$

Esta energía, mucho mayor que las energías disponibles en la radiactividad natural, puede originar diversas reacciones nucleares interesantes.

EVALUAR: De acuerdo con la ecuación (44.6) o la (44.7), la rapidez del protón es $v = 7.2 \times 10^7\,\text{m/s}$, un 25% de la rapidez de la luz. A esas velocidades comienzan a importar los efectos relativistas. Ya que en nuestros cálculos no los tuvimos en cuenta, el resultado anterior de f y $K_{máx}$ tiene un error de unos cuantos puntos porcentuales; es la razón por la que sólo conservamos dos cifras significativas.

La energía máxima que se puede alcanzar con un ciclotrón está limitada por los efectos relativistas. La versión relativista de la ecuación (44.7) es

$$\omega = \frac{|q|B}{m}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

A medida que aceleran las partículas, su frecuencia angular ω *decrece* y su movimiento sale de fase con respecto al voltaje alterno en la de. En el *sincrociclotrón*, las partículas son aceleradas a impulsos. Para cada impulso, la frecuencia del voltaje alterno disminuye a medida que las partículas aceleran, manteniendo la relación correcta de fase con el movimiento de las partículas.

Otra limitación del ciclotrón es la dificultad de construir grandes electroimanes. El sincrociclotrón más grande que se haya construido tiene una cámara de vacío de unos 8 m de diámetro, que acelera los protones a energías de unos 600 MeV.

El sincrotrón

Para alcanzar mayores energías hay otro aparato, llamado *sincrotrón*, que es más práctico. Las partículas se mueven en una cámara de vacío con la forma de una rosca o dona delgada, llamada *anillo de aceleración*. El haz de partículas se desvía para seguir al anillo, con una serie de electroimanes colocados en torno a éste. Al acelerar las partículas, el campo magnético aumenta de tal manera que las partículas vuelven a recorrer una y otra vez la misma trayectoria. El tevatrón en el Laboratorio Nacional del Acelerador Fermi (Fermilab) en Batavia, Illinois, es en la actualidad el acelerador de mayor energía en el mundo; puede acelerar protones hasta una energía máxima cercana a 1 TeV (10^{12} eV). El anillo acelerador tiene 2 km de diámetro, y usa electroimanes

superconductores (figura 44.7). En cada ciclo de la máquina, que dura pocos segundos, el tevatrón acelera unos 10^{13} protones.

Como hicimos notar en la sección 38.5, las cargas aceleradas irradian energía electromagnética. Como ejemplos de este fenómeno están las transmisiones de las antenas de radio y TV. En un acelerador en el que las partículas se mueven en trayectorias curvas, a esta radiación comúnmente se le llama *radiación sincrotrónica*. Los aceleradores de alta energía se suelen construir bajo tierra, para protegernos de esta radiación. Desde el punto de vista de un acelerador, la radiación sincrotrónica es indeseable, ya que la energía cedida a una partícula acelerada se irradia de inmediato hacia afuera. Se puede minimizar haciendo que el radio r del acelerador sea grande, para que la aceleración centrípeta v^2/r sea pequeña. En los aspectos positivos, la radiación sincrotrónica se usa como fuente de ondas electromagnéticas de alta frecuencia bien controladas.

Energía disponible

Cuando un haz de partículas de alta energía choca contra un blanco estacionario, no está *disponible* toda la energía cinética de las partículas incidentes, para formar nuevos estados de partícula. Como se debe conservar la cantidad de movimiento, las partículas que surgen de la colisión deben tener cierto movimiento neto y, por lo tanto, cierta energía cinética. La descripción después del ejemplo 43.11 (sección 43.6) presentaba un ejemplo no relativista de este principio. La energía máxima disponible es la energía cinética, en el marco de referencia en el cual la cantidad total de movimiento es cero. A éste lo llamamos *sistema de centro de masas* en la sección 44.1. En este sistema, la energía cinética total después del choque puede ser cero, por lo que la cantidad máxima de energía cinética inicial está disponible para provocar la reacción que se estudia.

Imagine el *sistema del laboratorio*, en el que una partícula blanco de masa M está inicialmente en reposo, y es bombardeada por una partícula de masa m y energía total (incluyendo la energía en reposo) E_m. Se puede demostrar que la energía total disponible E_a en el sistema del centro de masas (incluyendo las energías en reposo de todas las partículas) está definida por

$$E_a^2 = 2Mc^2E_m + (Mc^2)^2 + (mc^2)^2 \qquad \text{(energía disponible)} \qquad (44.9)$$

Cuando las masas de las partículas blanco y proyectil son iguales, esto se simplifica a

$$E_a^2 = 2mc^2(E_m + mc^2) \qquad \text{(energía disponible, masas iguales)} \qquad (44.10)$$

En el *rango relativista extremo*, en el que la energía cinética de la partícula que bombardea es mucho mayor que su energía en reposo, la energía disponible tiene una restricción muy grande. Si las partículas del haz y del blanco tienen masas iguales, y E_m es mucho mayor que mc^2, se puede despreciar el segundo término en el paréntesis, en la ecuación (44.10). Entonces, E_a es

$$E_a = \sqrt{2mc^2E_m} \qquad \text{(energía disponible, masas iguales, } E_m \gg mc^2) \qquad (44.11)$$

44.7 El tevatrón, acelerador de 1 TeV (1000 GeV) en el Laboratorio Nacional del Acelerador Fermi, en Illinois. a) Una vista aérea del anillo del acelerador principal. b) Una parte del túnel principal. Se pueden ver el anillo superior original de imanes convencionales (azules y rojos) y el anillo más nuevo de imanes superconductores. El anillo convencional se usa para inyectar protones y antiprotones en el anillo superconductor. Los haces de protones y antiprotones viajan en direcciones opuestas cuando son acelerados hasta 0.980 TeV; después chocan en los puntos de interacción, dejando 1.96 TeV disponibles para crear nuevas partículas.

a)

b)

Ejemplo 44.3 Energía de umbral para producir piones

Un protón (energía en reposo 938 MeV) con energía cinética K, choca contra otro protón en reposo. Ambos protones sobreviven al choque pero, además, se produce un pión neutro (π^0, energía en reposo 135 MeV). ¿Cuál es la energía de umbral (el valor mínimo de K) necesario para este proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El estado final incluye los dos protones originales (masa m) y el pión (masa m_π). La energía de umbral corresponde al caso de energía mínima, en el cual las tres partículas están en reposo en el sistema del centro de masas.

PLANTEAR: La energía total disponible en este sistema debe ser al menos su energía total en reposo, $2mc^2 + m_\pi c^2$. Usaremos esto en la ecuación (44.10), y despejaremos la energía total E_m del protón proyectil; la energía cinética K (la incógnita) es la energía total menos la energía del protón en reposo, mc^2.

EJECUTAR: Sustituimos $E_a = 2mc^2 + m_\pi c^2$ en la ecuación (44.10), simplificamos y despejamos E_m:

$$4m^2c^4 + 4mm_\pi c^4 + m_\pi^2c^4 = 2mc^2E_m + 2(mc^2)^2$$

$$E_m = mc^2 + m_\pi c^2\left(2 + \frac{m_\pi}{2m}\right)$$

continúa

El primer término de la ecuación de E_m es la energía en reposo del protón proyectil, y los términos restantes representan su energía cinética. Vemos que la energía cinética debe ser algo mayor que el doble de la energía en reposo del pión que deseamos crear. Sustituyendo $mc^2 = 938$ MeV y $m_\pi c^2 = 135$ MeV en esta ecuación, se ve que $m_\pi/2m = 0.072$, y

$$E_m = mc^2 + (135\text{ MeV})(2 + 0.072) = mc^2 + 280\text{ MeV}$$

Para crear un pión con 135 MeV de energía en reposo, un protón proyectil necesita tener una energía cinética mínima de 280 MeV.

EVALUAR: El lector debería comparar este resultado con el del ejemplo 37.12 (sección 37.8) en donde sólo se necesitaban 67.5 MeV de energía cinética en cada protón, en un choque de frente. En la siguiente subsección describiremos las ventajas de esos choques.

Ejemplo 44.4 Aumento de la energía disponible

a) El acelerador del Fermilab se diseñó originalmente para una energía de haz para protones de 800 GeV (800×10^9 eV) en un blanco estacionario. Calcule la energía disponible en un choque protón-protón. *b*) Si aumenta la energía del haz de protones a 980 GeV, ¿cuál será la energía disponible?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El ejemplo tiene que ver con la energía disponible en un experimento de choque con blanco estacionario.

PLANTEAR: La incógnita es la energía disponible E_a. En los incisos *a*) y *b*), las dos partículas son idénticas, y la energía E_m del haz es mucho mayor que la energía en reposo del protón, $mc^2 = 938$ MeV $= 0.938$ GeV, por lo que se puede usar con seguridad la ecuación (44.11).

EJECUTAR: *a*) Cuando $E_m = 800$ GeV,

$$E_a = \sqrt{2(0.938\text{ GeV})(800\text{ GeV})} = 38.7\text{ GeV}$$

b) Cuando $E_m = 980$ GeV,

$$E_a = \sqrt{2(0.938\text{ GeV})(980\text{ GeV})} = 42.9\text{ GeV}$$

EVALUAR: Con un blanco de protón estacionario, al aumentar 200 GeV la energía del haz de protones, ¡la energía disponible sólo aumenta 4.2 GeV! Esto demuestra una gran limitación de los experimentos en los que una de las partículas que chocan está inicialmente en reposo. A continuación describiremos la forma en que los físicos pueden superar estas limitaciones.

Choque de haces

La limitación ilustrada por el ejemplo 44.4 se contrarresta en experimentos de *choque de haces*. En ellos, no hay blanco estacionario; en cambio, se enfocan rayos de partículas que se mueven en direcciones opuestas, con precisión, para que choquen entre sí y pueda considerar que los choques son de frente. En general, las dos partículas que chocan tienen cantidades de movimiento de igual magnitud y dirección opuesta, por lo que la cantidad de movimiento total es cero. En consecuencia, el sistema del laboratorio también es el sistema de centro de masas, y se maximiza la cantidad disponible de energía. Si un haz contiene partículas y el otro antipartículas (por ejemplo, electrones y positrones o protones y antiprotones), la energía disponible E_a es la energía *total* de las dos partículas que chocan.

Los choques de haces de máxima energía disponibles en la actualidad son los del tevatrón en el Fermilab (figura 44.7). Un haz de protones de 980 GeV (0.980 TeV) circula en torno a un anillo en dirección contraria a otro haz de antiprotones de 0.980 TeV. Para guiar a los haces para que choquen entre sí se usan imanes, en varios puntos en torno al anillo. La energía disponible en los choques de frente que se producen es 2(0.980 TeV) = 1.96 TeV. Estos haces que chocan se usaron en el descubrimiento del quark tapa, que se describirá en la sección 44.4.

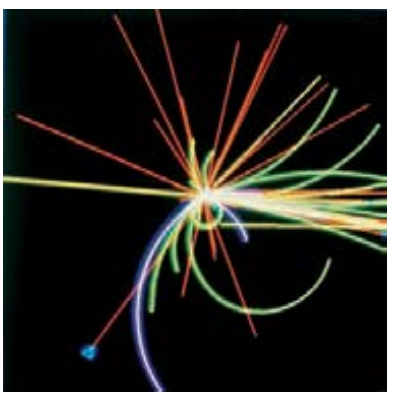
Otros laboratorios usan choques de haces de electrones y positrones. Un diseño frecuente usa *anillos de almacenamiento*, donde se mantienen circulando lotes de electrones y positrones, en direcciones contrarias en torno a un túnel circular que les da muchas oportunidades para interactuar. En la actualidad, el anillo de almacenamiento e^+e^- más grande es el Gran Colisionador Electrón-Positrón (LEP, de *large electron-positron collider*), situado en un túnel subterráneo de 27 km (unas 17 millas) de circunferencia, en el Laboratorio Europeo de Física de Partículas (CERN) en Ginebra, Suiza. La energía total disponible E_a es 180 GeV. En experimentos donde se usó un anillo de almacenamiento e^+e^- de menor energía, en el Centro del Acelerador Lineal de Stanford (SLAC) se determinaron las propiedades del quark encanto, que se usaron para descubrir el leptón tau, partícula que se relaciona mucho con el electrón y el muón. (En la sección 44.4 veremos cómo los físicos sistematizan sus conocimientos sobre estas partículas y otras muchas más.)

Se podrá disponer de haces en colisión con energías todavía mayores en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) en el CERN, que usará el mismo túnel que el LEP; pero acelerará haces de protones de 7 TeV para hacerlos chocar, con una energía disponible de 14 TeV. También será posible hacer chocar electrones del LEP con protones del LHC, obteniendo una energía disponible de 1.5 TeV. El LHC está programado para entrar en operación en 2007.

Detectores

De ordinario no se pueden ver ni sentir las partículas subatómicas ni los fotones individuales. Entonces, ¿cómo se miden sus propiedades? Se ha diseñado una gran variedad de dispositivos. Muchos detectores aprovechan la ionización causada por las partículas cargadas cuando atraviesan un gas, un líquido o un sólido. Los iones que quedan a lo largo de la trayectoria de una partícula funcionan como centros de agrupamiento de gotitas de líquido en el vapor sobresaturado dentro de una cámara de niebla (figura 44.1), o causan la formación de pequeños volúmenes de vapor dentro del líquido sobrecalentado de una cámara de burbujas (figura 44.3a). En un sólido semiconductor, la ionización puede adoptar la forma de pares electrón-hueco. En la sección 42.7 describimos su detección. Las *cámaras de alambres* contienen conjuntos de alambres muy cercanos entre sí que detectan los iones. La información sobre la carga reunida y el tiempo, para cada alambre, se procesa con computadoras, para reconstruir las trayectorias de las partículas (figura 44.8). La fotografía de inicio del capítulo 28 muestra un arreglo de detectores para la construcción bajo LHC. El arreglo completo incluye una variedad de detectores diferentes para medir las propiedades de diferentes tipos de partículas.

44.8 Esta imagen generada en computadora muestra un resultado normal de un choque protón-antiprotón en el Tevatrón, registrado por el detector del colisionador. Las partículas producidas en el choque son piones, kaones, muones y otras más, cada una indicada con un color distinto.



Experimentos con rayos cósmicos

Grandes cantidades de unas partículas llamadas *rayos cósmicos* bombardean la Tierra en forma continua, desde fuentes dentro y más allá de nuestra galaxia. Esas partículas consisten principalmente en neutrinos, protones y los núcleos más pesados, con energías que van desde menos de 1 MeV hasta más de 10^{20} eV. La atmósfera y el campo magnético terrestres nos protegen contra gran parte de esa radiación. Sin embargo, eso quiere decir que los experimentos con rayos cósmicos se hacen con frecuencia fuera o arriba de toda o la mayoría de la atmósfera, mediante cohetes o globos estratosféricos.

En contraste, los detectores de neutrinos se colocan bajo la superficie terrestre, en túneles o minas, o se sumergen en el mar a gran profundidad. Esto se hace para eliminar todos los demás tipos de partículas, para que sólo los neutrinos, que solamente interactúan débilmente con la materia, lleguen al detector. Se necesitaría un blindaje de plomo de un año luz de espesor para absorber una cantidad apreciable de un haz de neutrinos. Así, los detectores de neutrinos consisten en gigantescas cantidades de materia: el detector Super-Kamiokande busca destellos de luz producidos cuando un neutrino interactúa en un tanque que contiene 5×10^7 kg de agua (véase la sección 44.5).

Los rayos cósmicos fueron importantes en la física de partículas inicial, y su estudio actual nos brinda información importante acerca del resto del Universo. Aunque los rayos cósmicos proporcionan una fuente de partículas de alta energía que no depende de los aceleradores costosos, la mayoría de los físicos de partículas usan aceleradores, porque las partículas de alta energía que necesitan son muy pocas y demasiado aleatorias en los rayos cósmicos.

Evalúe su comprensión de la sección 44.2 En un experimento de colisión de haces, un electrón de 90 GeV choca de frente contra un positrón de 90 GeV. El electrón y el positrón se aniquilan entre sí y forman un solo fotón virtual, que después se transforma en otras partículas. ¿Ese fotón virtual obedece la misma relación $E = pc$ que los fotones reales?

44.3 Partículas e interacciones

Hemos mencionado el conjunto de partículas subatómicas que se conocían en 1947: fotones, electrones, positrones, protones, neutrones, muones y piones. Desde entonces, se han descubierto literalmente cientos de partículas adicionales, en experimentos con

Activ Online Physics
19.5 Física de partículas

aceleradores. La gran mayoría de las partículas conocidas son *inestables* y decaen en forma espontánea, formando otras partículas. Las partículas de todas clases, sean estables o inestables, se pueden crear o destruir en interacciones. Cada interacción de esas implica el intercambio de partículas virtuales, que sólo existen con la energía prestada que permite el principio de incertidumbre.

Aunque el mundo de las partículas subatómicas y sus interacciones es complejo, algunos resultados clave ponen orden y simplicidad en el aparente caos. Una simplificación clave es que sólo hay cuatro clases de interacciones fundamentales, y cada una está mediada o transmitida por el intercambio de ciertas partículas virtuales características. Además, no todas las partículas responden a las cuatro clases de interacción. En esta sección examinaremos con más detalle las interacciones fundamentales, y veremos la forma en que los físicos clasifican las partículas de acuerdo con la forma en la que interactúan.

Cuatro fuerzas y sus partículas mediadoras

44.9 Las ligas que nos enlazan se originan en las interacciones fundamentales de la naturaleza. Los núcleos en el interior de nuestros organismos están unidos por la interacción fuerte. La interacción electromagnética enlaza núcleos y electrones, formando átomos; enlaza los átomos para formar moléculas y enlaza las moléculas para formarnos a nosotros.

En la sección 5.5 describimos por primera vez las cuatro clases fundamentales de fuerzas, o interacciones (figura 44.9). Son, en orden de intensidad decreciente, las siguientes:

1. La interacción fuerte.
2. La interacción electromagnética.
3. La interacción débil.
4. La interacción gravitacional.

Las interacciones *electromagnética* y *gravitacional* son conocidas ya desde la física clásica. Ambas se caracterizan por una dependencia $1/r^2$ con respecto a la distancia. En este esquema, las partículas mediadoras en ambas interacciones tienen masa cero y son estables, como las partículas ordinarias. La partícula mediadora de la interacción electromagnética es el conocido fotón, que tiene espín 1. (Eso quiere decir que su número cuántico espín es $s = 1$, por lo que la magnitud de su cantidad de movimiento angular espín es $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$.) La partícula para la fuerza gravitacional es el *gravitón* con espín 2 ($s = 2$, $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$). Todavía no se ha observado experimentalmente el gravitón, ya que la fuerza gravitacional es mucho más débil que la fuerza electromagnética. Por ejemplo, la atracción gravitacional entre dos protones es menor que su repulsión eléctrica en un factor aproximado de 10^{36}. La fuerza gravitacional es de importancia primaria en la estructura de las estrellas, y en el comportamiento del Universo a grandes escalas, pero no se cree que juegue un papel importante en las interacciones entre partículas con las energías disponibles en la actualidad.

Las otras dos fuerzas son menos familiares. Una, la que se suele llamar *interacción fuerte*, es la que causa la fuerza nuclear y también la producción de piones y otras partículas en los choques de alta energía. En el nivel más fundamental, la partícula mediadora para la interacción fuerte se llama *gluón*. Sin embargo, la fuerza entre los nucleones se describe con facilidad en términos de mesones como partículas mediadoras. En la sección 44.4 describiremos al gluón sin masa y con espín 1.

La ecuación (44.4) es una función posible de energía potencial para la fuerza nuclear. La intensidad de la interacción se describe con la constante f^2, cuya unidad es energía multiplicada por distancia. Una base de comparación mejor con otras fuerzas es la relación adimensional $f^2/\hbar c$, llamada *constante de acoplamiento* para la interacción. (Le invitamos a que verifique que esta relación es un número puro, por lo que debe tener el mismo valor en todos los sistemas de unidades.) El comportamiento observado de las fuerzas nucleares parece indicar que $f^2/\hbar c \approx 1$. La constante de acoplamiento adimensional para las interacciones *electromagnéticas* es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = 7.297 \times 10^{-3} = \frac{1}{137.0} \tag{44.12}$$

Así, la interacción fuerte es unas 100 veces más fuerte que la interacción electromagnética y, sin embargo, se desvanece en función de la distancia con más rapidez que $1/r^2$.

La cuarta interacción se llama interacción *débil.* Es responsable del decaimiento beta, como es la conversión de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino.

También es responsable del decaimiento de muchas partículas inestables (piones en muones, muones en electrones, etcétera). Sus partículas mediadoras son W^+, W^- y Z^0 de corta vida. En 1983 se confirmó la existencia de esas partículas con experimentos en el CERN, por los que Carlo Rubbia y Simon van der Meer obtuvieron el Premio Nóbel de 1984. Las $W^\pm$ y Z^0 tienen espín 1, como el fotón y el gluón, pero *sí* tienen masa. De hecho, tienen masas enormes, 80.4 GeV/c^2 para las W y 91.2 GeV/c^2 para la Z^0. Con partículas mediadoras tan masivas, la interacción débil tiene un alcance mucho menor que la interacción fuerte. También hace honor a su nombre, porque es más débil que la interacción fuerte en un factor aproximado de 10^9.

En la tabla 44.1 se comparan las propiedades principales de estas cuatro interacciones fundamentales.

Más partículas

En la sección 44.1 mencionamos los descubrimientos de los muones en 1937 y los piones en 1947. Las cargas eléctricas de los muones y los piones cargados tienen la misma magnitud e que la carga del electrón. El muón positivo μ^+ es la antipartícula del muón negativo μ^-. Cada uno tiene espín $\frac{1}{2}$, como el del electrón, y una masa aproximada de 207 m_e = 106 MeV/c^2. Los muones son inestables; cada uno decae, con una vida de 2.2×10^{-6} s, en un electrón del mismo signo, un neutrino y un antineutrino.

Hay tres tipos de piones, todos con espín 0; *no* tienen cantidad de movimiento angular espín. El π^+ y el π^- tienen masas de $273m_e = 140$ MeV/c^2. Son inestables; cada $\pi^\pm$ decae, con una duración de 2.6×10^{-8} s, en un muón del mismo signo junto con un neutrino, el π^+, y un antineutrino, el π^-. El π^0 es algo menos masivo, 264 m_e = 135 MeV/c^2 y decae con una vida de 8.4×10^{-17} s en dos fotones. Los π^+ y π^- son antipartículas entre sí, mientras que el π^0 es su propia antipartícula. (Esto es, no hay diferencia entre partícula y antipartícula para el π^0.)

La existencia del *antiprotón* $\bar{p}$ ya se sospechaba desde el descubrimiento del positrón. El $\bar{p}$ fue encontrado en 1955, cuando se crearon pares protón-antiprotón $(p\bar{p})$ usando un haz de protones de 6 GeV del bevatrón de la Universidad de California, en Berkeley. El *antineutrón* $\bar{n}$ fue observado más tarde. Después de la década de 1960, a medida que se desarrollaban aceleradores con mayores energías y detectores más complejos, se identificó una verdadera familia de nuevas partículas inestables. Para describirlas y clasificarlas se necesita una pequeña lista de términos nuevos.

Al principio, las partículas se clasificaban en tres categorías según su masa: 1) leptones ("los ligeros", como los electrones); 2) mesones ("los intermedios", como los piones), y 3) los bariones ("los pesados", como los nucleones y las partículas más masivas). No obstante, este esquema se ha reemplazado por uno más útil, en el que las partículas se clasifican en función de sus *interacciones*. Por ejemplo, los *hadrones* (que incluyen mesones y bariones) tienen interacciones fuertes, y los *leptones* no.

En la descripción que sigue también haremos la distinción entre **fermiones**, que tienen espín semientero, y los **bosones**, que tienen espín cero o entero. Los fermiones obedecen al principio de exclusión, en el que se basa la función de distribución de Fermi-Dirac (véase la sección 42.5). Los bosones no obedecen el principio de exclusión y tienen una función de distribución distinta, la distribución Bose-Einstein.

Tabla 44.1 Cuatro interacciones fundamentales

Interacción	Intensidad relativa	Alcance	Partícula mediadora			
			Nombre	Masa	Carga	Espín
Fuerte	1	Corto $(\sim 1\text{ fm})$	Gluón	0	0	1
Electromagnética	$\frac{1}{137}$	Largo $(1/r^2)$	Fotón	0	0	1
Débil	10^{-9}	Corto $(\sim 0.001\text{ fm})$	$W^\pm$, Z^0	80.4, 91.2 GeV/c^2	$\pm e$, 0	1
Gravitacional	10^{-38}	Largo $(1/r^2)$	Gravitón	0	0	2

Leptones

Los **leptones**, que no tienen interacciones fuertes, comprenden seis partículas: el electrón (e^-) y su neutrino (ν_e), el muón (μ^-) y su neutrino (ν_μ) y la partícula tau (τ^-) y su neutrino (ν_τ). Cada una de las seis partículas tiene una antipartícula distinta. Todos los leptones tienen espín $\frac{1}{2}$, y por ello son fermiones. La familia de leptones se ve en la tabla 44.2. Los tau tienen masa $3478m_e = 1777\ \text{MeV}/c^2$. Los tau y los muones son inestables; un τ^- decae en un μ^- más un neutrino tau y un antineutrino de muón, o un electrón más un neutrino de tau y un antineutrino de electrón. Un μ^- decae en un electrón más un neutrino de muón y un antineutrino de electrón. Tienen vidas relativamente largas, porque sus decaimientos están mediados por la interacción débil. A pesar de su carga cero, un neutrino es distinto de un antineutrino. La cantidad de movimiento angular espín de un neutrino tiene un componente que es opuesto a su cantidad de movimiento lineal, mientras que para un antineutrino ese componente es paralelo a su cantidad de movimiento lineal. Como los neutrinos son tan elusivos, los físicos sólo han podido establecer límites superiores para las masas en reposo de ν_e, ν_μ y ν_τ. Hasta fecha reciente se creía que las masas en reposo de los neutrinos en realidad eran cero. Hoy se cuenta con bastante evidencia de que tienen masas pequeñas, pero distintas de cero. Después regresaremos a este punto y sus implicaciones.

Los leptones obedecen un *principio de conservación*. En correspondencia con los tres pares de leptones hay tres números leptónicos: L_e, L_μ y L_τ. Al electrón e^- y al neutrino electrónico $\bar{\nu}_e$ se les asigna $L_e = 1$, y a sus antipartículas e^+ y ν_e se les asigna $L_e = -1$. Las asignaciones correspondientes de L_μ y L_τ se hacen a las partículas μ y τ, y a sus neutrinos. **En todas las interacciones se conserva cada número leptónico por separado.** Por ejemplo, en el decaimiento del μ^-, los números leptónicos son

$$\begin{array}{ccccccc} \mu^- & \rightarrow & e^- & + & \bar{\nu}_e & + & \nu_\mu \\ L_\mu = 1 & & L_e = 1 & & L_e = -1 & & L_\mu = 1 \end{array}$$

Estos principios de conservación no tienen contraparte en la física clásica.

Tabla 44.2 Los seis leptones

Nombre de la partícula	Símbolo	Anti-partícula	Masa (MeV/c^2)	L_e	L_μ	L_τ	Vida (s)	Modos principales de decaimiento
Electrón	e^-	e^+	0.511	+1	0	0	Estable	
Neutrino electrónico	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$<3 \times 10^{-6}$	+1	0	0	Estable	
Muón	μ^-	μ^+	105.7	0	+1	0	2.20×10^{-6}	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
Neutrino muónico	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	<0.19	0	+1	0	Estable	
Tau	τ^-	τ^+	1777	0	0	+1	2.9×10^{-13}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$ o $e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$
Neutrino tauónico	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	<18.2	0	0	+1	Estable	

Ejemplo 44.5 Conservación del número leptónico

Compruebe la conservación de los números leptónicos para los siguientes esquemas de decaimiento:

a) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$

b) $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$

c) $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \nu_e$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para que se conserve el número leptónico, cada una de las cantidades L_e, L_μ y L_τ deben tener el mismo valor antes del decaimiento que después de éste.

PLANTEAR: Usaremos la tabla 44.2 para determinar los números leptónicos L_e, L_μ y L_τ para cada partícula, y después compararemos el valor total de cada número leptónico antes y después del proceso.

EJECUTAR: En cada uno de los tres decaimientos no hay partículas τ ni neutrinos τ, por lo que $L_\tau = 0$ antes y después de cada decaimiento; en consecuencia se conserva L_τ.

a) Los números leptónicos iniciales son $L_e = 0$ y $L_\mu = -1$. Los valores finales son $L_e = -1 + 1 + 0 = 0$ y $L_\mu = 0 + 0 + (-1) = -1$. Se conservan todos los números leptónicos.

b) Todos los números leptónicos son cero al principio (el π^- *no* es un leptón). Los valores finales son $L_\mu = 1 + (-1) = 0$ y $L_e = 0$. De nuevo se conservan todos los números leptónicos.

c) Los L de estado inicial de nuevo son todos cero; en el estado final, $L_e = 0 + (-1) + 1 = 0$ y $L_\mu = 1 + 0 + 0 = 1$. Entonces, *no* se conserva L_μ.

EVALUAR: Los decaimientos *a*) y *b*), que son consistentes con la conservación del número leptónico, se observan en la naturaleza. El decaimiento *c*), que viola la conservación de L_μ, *nunca* se ha observado. Los físicos usaron estos resultados experimentales y muchos otros para deducir el principio que deben conservarse los tres números leptónicos.

Hadrones

Los **hadrones**, partículas que interactúan fuertemente, son una familia más compleja que los leptones. Cada hadrón tiene una antipartícula, que con frecuencia se indica con la raya superior, como el antiprotón $\bar{p}$. Hay dos subclases de hadrones: *los mesones* y *los bariones*. La tabla 44.3 muestra algunos de los muchos hadrones que se conocen en la actualidad. (Después explicaremos lo que quiere decir *extrañeza* y *contenido de quarks*, en esta sección y en la siguiente.)

Entre los mesones están los piones que ya hemos mencionado, los mesones K *o kaones*, los mesones η, y otros más que describiremos después. Los mesones tienen espín 0 o 1 y, en consecuencia, todos son bosones. No hay mesones estables; todos pueden decaer en partículas menos masivas, y lo hacen, obedeciendo en esos decaimientos todas las leyes de conservación.

Los **bariones** incluyen los nucleones y varias partículas llamadas *hiperones*, como la Λ, Σ, Ξ y Ω. Éstas se asemejan a los nucleones, pero son más masivas. Los bariones tienen espín semientero y, por lo tanto, todos son fermiones. El único barión estable es el protón; un neutrón libre decae en un protón, y los hiperones decaen en otros hiperones o en nucleones, por diversos procesos. Los bariones obedecen el principio de *conservación del número bariónico*, análogo a la conservación del número leptónico, de nuevo sin contraparte en la física clásica. Se asigna un número bariónico $B = 1$ a cada barión (p, n, Λ, Σ, etcétera) y $B = -1$ a cada antibarión ($\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}$, etcétera).

En todas las interacciones se conserva el número bariónico total.

Este principio es la razón por la que se conserva el número de masa A en todas las reacciones nucleares que estudiamos en el capítulo 43.

Tabla 44.3 Algunos hadrones y sus propiedades

Partícula	Masa (MeV/c^2)	Relación de carga Q/e	Espín	Número bariónico B	Extrañeza S	Vida promedio (s)	Modos típicos de decaimiento	Contenido de quarks
Mesones								
π^0	135.0	0	0	0	0	8.4×10^{-17}	$\gamma\gamma$	$u\bar{u}, d\bar{d}$
π^+	139.6	+1	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$	$u\bar{d}$
π^-	139.6	−1	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu$	$\bar{u}d$
K^+	493.7	+1	0	0	+1	1.24×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$	$u\bar{s}$
K^-	493.7	−1	0	0	−1	1.24×10^{-8}	$\mu^-\bar{\nu}_\mu$	$\bar{u}s$
η^0	547.3	0	0	0	0	$\approx 10^{-18}$	$\gamma\gamma$	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$
Bariones								
p	938.3	+1	$\frac{1}{2}$	1	0	Estable	—	uud
n	939.6	0	$\frac{1}{2}$	1	0	886	$pe^-\bar{\nu}_e$	udd
Λ^0	1116	0	$\frac{1}{2}$	1	−1	2.63×10^{-10}	$p\pi^-$ o $n\pi^0$	uds
Σ^+	1189	+1	$\frac{1}{2}$	1	−1	8.02×10^{-11}	$p\pi^0$ o $n\pi^+$	uus
Σ^0	1193	0	$\frac{1}{2}$	1	−1	7.4×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$	uds
Σ^-	1197	−1	$\frac{1}{2}$	1	−1	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$	dds
Ξ^0	1315	0	$\frac{1}{2}$	1	−2	2.90×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^0$	uss
Ξ^-	1321	−1	$\frac{1}{2}$	1	−2	1.64×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^-$	dss
Δ^{++}	1232	+2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\approx 10^{-23}$	$p\pi^+$	uuu
Ω^-	1672	−1	$\frac{3}{2}$	1	−3	8.2×10^{-11}	Λ^0K^-	sss
Λ_c^+	2285	+1	$\frac{1}{2}$	1	0	2.0×10^{-13}	$pK^-\pi^+$	udc

Ejemplo 44.6 Conservación del número bariónico

¿Cuál de las siguientes reacciones obedece el principio de conservación de bariones?

a) $n + p \rightarrow n + p + p + \bar{p}$

b) $n + p \rightarrow n + p + \bar{p}$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo se parece al ejemplo 44.5: sólo necesitamos comparar el número bariónico total antes del proceso con el número bariónico total después del proceso.

PLANTEAR: La tabla 44.3 lista todos los números bariónicos necesarios.

EJECUTAR: En ambas reacciones el número bariónico inicial es $1 + 1 = 2$.

a) El número bariónico final es $1 + 1 + 1 + (-1) = 2$. Se conserva el número bariónico.

b) Para esta reacción, el número bariónico final es $1 + 1 + (-1) = 1$. El número bariónico *no* se conserva.

EVALUAR: La reacción *a*) puede efectuarse y lo hace, siempre que haya energía suficiente en el choque n + p. La reacción *b*), que viola el principio de conservación, nunca se ha observado. ¿Puede usted demostrar que esta reacción también viola la ley de conservación de carga eléctrica?

Ejemplo 44.7 Creación de antiprotones

Los antiprotones se pueden producir bombardeando un blanco de protón estacionario (hidrógeno líquido) con un haz de protones. Calcule la energía mínima del haz necesaria para que suceda esta reacción.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La reacción debe satisfacer la conservación del número bariónico, de la carga y de la energía.

PLANTEAR: Como los protones del blanco y del haz tienen masa igual, y el blanco está en reposo, determinamos la energía mínima E_m del protón que bombardea, usando la ecuación (44.10).

EJECUTAR: La conservación de la carga y la conservación del número bariónico prohíben la creación de un antiprotón por sí mismo; debe ser creado como parte de un par protón-antiprotón. La reacción adecuada es:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$$

Para que esta reacción se efectúe, la energía mínima disponible E_a en la ecuación (44.10) es la energía final en reposo, $4mc^2$. Con esa sustitución, la ecuación (44.10) obtiene

$$(4mc^2)^2 = 2mc^2(E_m + mc^2)$$
$$E_m = 7mc^2$$

EVALUAR: La energía E_m de la partícula proyectil incluye la energía en reposo mc^2, por lo que su energía *cinética* mínima debe ser $6mc^2 = 6(938\ \text{MeV}) = 5.63\ \text{GeV}$.

La búsqueda del antiprotón fue una de las razones principales de la construcción del bevatrón en la Universidad de California, en Berkeley, con haz de energía de 6 GeV. La búsqueda tuvo éxito; en 1959, Emilio Segré y Owen Chamberlain fueron galardonados con el Premio Nóbel por su descubrimiento.

Extrañeza

Los mesones K y los hiperones Λ y Σ fueron descubiertos durante los últimos años de la década de 1950. Por su extraño comportamiento se llamaron *partículas extrañas*. Se produjeron en choques de alta energía, como $\pi^- + p$, y un mesón K y un hiperón siempre se producían *juntos*. La frecuencia relativamente alta de producción de esas partículas parecía indicar que se trataba de un proceso de interacción *fuerte*; sin embargo, sus vidas relativamente largas parecían indicar que su decaimiento era un proceso de interacción *débil*. La K^0 parecía tener *dos* vidas, una de unos 9×10^{-11} s y la otra unas 600 veces mayor. ¿Eran los mesones K hadrones fuertemente interactuantes, o no lo eran?

La búsqueda de la respuesta condujo a los físicos a introducir una cantidad nueva llamada **extrañeza**. A los hiperones Λ^0 y $\Sigma^{\pm,0}$ se les asignó un número cuántico extrañeza $S = -1$, y a los mesones asociados K^0 y K^+ se les asignó $S = +1$. Las antipartículas correspondientes tenían extrañeza opuesta, $S = +1$ para $\bar{\Lambda}^0$ y $\bar{\Sigma}^{\pm,0}$ y $S = -1$ para $\bar{K}^0$ y K^-. Entonces, la extrañeza se *conservaba* en procesos de producción como

$$p + \pi^- \rightarrow \Sigma^- + K^+$$
$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

El proceso

$$p + \pi^- \rightarrow p + K^-$$

no conserva la extrañeza y no sucede.

Cuando las partículas extrañas decaen individualmente, en general la extrañeza *no* se conserva. Entre los procesos característicos están

$$\Sigma^+ \rightarrow \mathrm{n} + \pi^+$$
$$\Lambda^0 \rightarrow \mathrm{p} + \pi^-$$
$$\mathrm{K}^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^-$$

En cada uno de estos decaimientos, la extrañeza inicial es 1 o -1, y el valor final es cero. Todas las observaciones de esas partículas coinciden en la conclusión de que *la extrañeza se conserva en interacciones fuertes, pero puede cambiar a cero o a una unidad en interacciones débiles.* No hay contraparte en la física clásica del número cuántico extrañeza.

CUIDADO **Extrañeza *versus* espín** Tenga precaución de no confundirse con el símbolo S de extrañeza, con el símbolo idéntico de la magnitud de la cantidad de movimiento angular espín.

Leyes de conservación

El decaimiento de las partículas extrañas es nuestro primer ejemplo de una ley de conservación condicional, aquella que se obedece en algunas interacciones y en otras no. Repasemos *todas* las leyes de conservación que conocemos, y veamos qué conclusiones obtendremos de ellas.

Algunas leyes de conservación se obedecen en *todas* las interacciones. Entre ellas están las conocidas leyes de conservación de energía, cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular y carga eléctrica. Se llaman *leyes de conservación absolutas*. También se conserva el número bariónico y los tres números leptónicos en todas las interacciones. La extrañeza se conserva en las interacciones fuerte y electromagnética, pero *no* en todas las interacciones débiles.

Hay otras dos cantidades, que se conservan en algunas interacciones, pero no en todas, y son útiles para clasificar las partículas y sus interacciones. Una es el *isoespín*, una cantidad con la que se describe la independencia entre las interacciones fuertes y la carga. La otra es la *paridad*, que describe el comportamiento comparativo de dos sistemas que son imágenes especulares entre sí. El isoespín se conserva en las interacciones fuertes, que son independientes de la carga, pero no en las interacciones electromagnéticas o débiles. (La interacción electromagnética desde luego que *no* es independiente de la carga.) La paridad se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero no en las débiles. Los físicos chino-estadounidenses T. D. Lee y C. N. Yang recibieron el Premio Nóbel en 1957 por establecer las bases teóricas de la no conservación de la paridad en las interacciones débiles.

Esta descripción demuestra que las leyes de conservación son otra base para clasificar las partículas y sus interacciones. Cada ley de conservación se asocia también con una propiedad de *simetría* del sistema. Un ejemplo familiar es el momento angular. Si un sistema está en un ambiente que tiene simetría esférica, no podrá actuar sobre él un par de torsión, porque la dirección de ese par violaría la simetría. En ese sistema, se *conserva* la cantidad de movimiento angular total. Cuando se viola una ley de conservación se describe con frecuencia como *interacción de ruptura de simetría.*

Evalúe su comprensión de la sección 44.3 De acuerdo con la conservación de la energía, una partícula de masa m y energía en reposo mc^2 puede decaer sólo si los productos del decaimiento tienen una masa total menor que m. (La energía restante se transforma en la energía cinética de los productos del decaimiento.) Entonces, ¿por qué un protón no puede decaer y formar mesones menos masivos?

44.4 Los quarks y las ocho maneras

Los leptones forman un paquete bastante pulcro: tres partículas y tres neutrinos, cada uno con su antipartícula y una ley de conservación que relaciona sus números. Los físicos creen que los leptones son genuinamente partículas fundamentales. En

comparación, la familia de los hadrones es un desorden. La tabla 44.3 sólo contiene una muestra de los más de 100 hadrones que se han descubierto desde 1960, y se ha aclarado que esas partículas *no* representan el nivel fundamental de la estructura de la materia.

Nuestro conocimiento actual de la estructura de los hadrones se basa en una propuesta hecha primero en 1964 por el físico estadounidense Murray Gell-Mann y colaboradores. En ella los hadrones no son partículas fundamentales, sino estructuras compuestas cuyos componentes son fermiones de espín $\frac{1}{2}$ llamados **quarks**. (Esta palabra se encuentra en el renglón "¡Tres quarks para Muster Mark!" de *Finnegans Wake*, por James Joyce.) Cada barión está formado por tres quarks ($\boldsymbol{qqq}$), y cada antibarión por tres antiquarks ($\boldsymbol{\overline{q}\overline{q}\overline{q}}$), además, cada mesón por un par quark-antiquark ($\boldsymbol{q\overline{q}}$). La tabla 44.3 de la sección anterior muestra el contenido de quarks de muchos hadrones. No parecen ser necesarias otras composiciones. En este esquema se requiere que los quarks tengan cargas eléctricas de magnitudes $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de la carga electrónica e, antes se creía que era la unidad mínima de carga. Además, cada quark tiene un valor fraccionario $\frac{1}{3}$ de su número bariónico B, y cada antiquark tiene un número bariónico de $-\frac{1}{3}$. En un mesón se combinan un quark y un antiquark con número bariónico neto 0 y pueden tener componentes de cantidad de movimiento angular espín paralelos, para formar un mesón de espín 1, o antiparalelos para formar un mesón de espín 0. De igual modo, los tres quarks en un barión se combinan con un número bariónico neto de 1 y pueden formar un barión con espín $\frac{1}{2}$ o un barión con espín $\frac{3}{2}$.

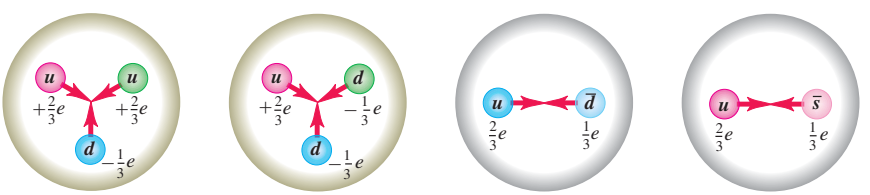
Los tres quarks originales

En 1964 la primera teoría de los quarks incluía tres tipos de quarks, llamados *sabores,* nombrados como $\boldsymbol{u}$ (arriba-up), $\boldsymbol{d}$ (abajo-down) y $\boldsymbol{s}$ (*extraño-strange*). Sus propiedades principales se muestran en la tabla 44.4. Los antiquarks correspondientes $\boldsymbol{\overline{u}}$, $\boldsymbol{\overline{d}}$ y $\boldsymbol{\overline{s}}$ tienen valores contrarios de carga Q, B y S. Los protones, los neutrones, los mesones π y K, y varios hiperones, se pueden formar con esos tres quarks. Por ejemplo, el contenido de quarks del protón es $\boldsymbol{uud}$. Al consultar la tabla 44.4 se observa que los valores de Q/e suman 1, y los valores del número bariónico B también suman uno, como era de esperarse. El neutrón es $\boldsymbol{udd}$ con $Q = 0$ y $B = 1$. El mesón π^+ es $\boldsymbol{u\overline{d}}$, con $Q/e = 1$ y $B = 0$, y el mesón K^+ es $\boldsymbol{u\overline{s}}$. Al comprobar los valores de S para el contenido de quarks se ve que el protón, neutrón y π^+ tienen extrañeza 0 y que el K^+ tiene extrañeza 1, que coincide con la tabla 44.3. El antiprotón es $\boldsymbol{\overline{p}} = \boldsymbol{\overline{u}\overline{u}\overline{d}}$, el pión negativo es $\pi^- = \boldsymbol{\overline{u}d}$, y así sucesivamente. El contenido de quarks también se puede utilizar para explicar las propiedades dinámicas de los hadrones, como sus estados excitados y momentos magnéticos. La figura 44.10 muestra el contenido de quarks de dos bariones y dos mesones.

Tabla 44.4 Propiedades de los tres quarks originales

Símbolo	Q/e	Espín	Número bariónico, B	Extrañeza, S	Encanto, C	Fondez, B'	Tapez, T
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	−1	0	0	0

44.10 Contenido de quarks de cuatro hadrones distintos. No se muestran las diversas combinaciones de color necesarias para la neutralidad del color.



Protón (p) Neutrón (n) Pión positivo (π^+) Kaón positivo (K^+)

Ejemplo 44.8 Determinación del contenido de quarks de los bariones

Dado que los bariones sólo contienen: $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{s}$, $\overline{\boldsymbol{u}}$, $\overline{\boldsymbol{d}}$ y/o $\overline{\boldsymbol{s}}$, determine el contenido de quarks para *a*) Σ^+ y *b*) $\overline{\Lambda}^0$. Ambas partículas Σ^+ y Λ^0 son bariones con extrañeza $S = -1$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Utilizaremos la idea de que la carga total de cada barión es la suma de las cargas de los quarks individuales, y lo mismo sucede para el número bariónico y la extrañeza.

PLANTEAR: Usaremos las propiedades de los quarks que aparecen en la tabla 44.4.

EJECUTAR: Los bariones contienen tres quarks; si $S = -1$, un quark, y sólo uno de los tres, debe ser un quark s.

a) La Σ^+ tiene $Q/e = +1$, por lo que los otros dos quarks deben ser **u** ambos. Por consiguiente, el contenido de quarks de Σ^+ es $\boldsymbol{uus}$.

b) Primero se determina el contenido de quarks de Λ^0. Para que la carga total sea cero, los otros dos quarks deben ser $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{d}$, por lo que el contenido de quarks de la Λ^0 es $\boldsymbol{uds}$. La $\overline{\Lambda}^0$ es la antipartícula de la Λ^0, y entonces su contenido de quarks es $\overline{\boldsymbol{u}}\overline{\boldsymbol{d}}\overline{\boldsymbol{s}}$.

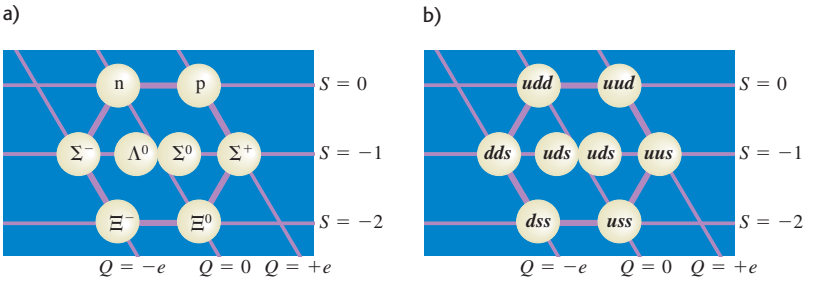
EVALUAR: Note que mientras que Λ^0 y $\overline{\Lambda}^0$ son eléctricamente neutras, y ambas tienen la misma masa, son partículas distintas: Λ^0 tiene $B = 1$ y $S = -1$, mientras que $\overline{\Lambda}^0$ tiene $B = -1$ y $S = 1$.

Motivación del modelo de quarks

¿Qué hizo que los físicos sospecharan que los hadrones estaban formados por algo más pequeño? El momento magnético del neutrón (véase la sección 43.1) fue una de las primeras razones. En la sección 27.7 vimos que un momento magnético se debe a una corriente circulante (un movimiento de la carga eléctrica). Pero el neutrón *no* tiene carga o, para ser más exactos, no tiene carga *total*. Podría estar formado por partículas menores cuyas cargas sumen cero. El movimiento cuántico de esas partículas dentro del neutrón le comunicarían así su sorprendente momento magnético distinto de cero. Para verificar esta hipótesis "viendo" el interior de un neutrón, necesitamos un sensor cuya longitud de onda sea mucho menor que el tamaño de un neutrón, que es más o menos de un femtómetro. Este sensor no debería afectarse por la interacción fuerte, para que no interactúe con el neutrón en su totalidad, sino que penetre en él e interactúe de forma electromagnética con esas supuestas partículas cargadas más pequeñas. Un sensor con esas propiedades es un electrón, con energía superior a 10 GeV. En experimentos hechos en el SLAC, esos electrones fueron dispersados por neutrones y protones, y contribuyeron a demostrar que los nucleones en realidad están formados por partículas puntuales de carga fraccionaria y espín $\frac{1}{2}$.

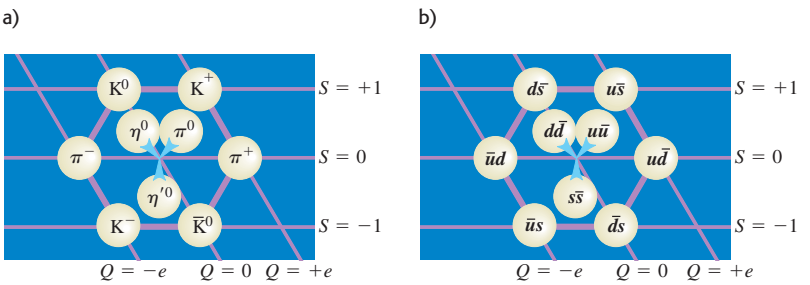
El óctuple camino

Las consideraciones de simetría desempeñan un papel muy prominente en la teoría de partículas. Veamos dos ejemplos. Imagine los ocho bariones con espín $\frac{1}{2}$ que hemos mencionado: el p y n conocidos, las extrañas Λ^0, Σ^+, Σ^0 y Σ^-, y las doblemente extrañas: Ξ^0 y Ξ^-. Para cada una graficamos el valor de la extrañeza S en función del valor de la carga Q en la figura 44.11. El resultado es una figura hexagonal. Una gráfica similar para los nueve mesones de espín 0 (la tabla 44.3 menciona seis de ellos, y otros tres no están ahí) se muestra en la figura 44.12 (véase la siguiente página); ¡las partículas quedan exactamente en la misma figura hexagonal! En cada gráfica, todas las partículas tienen masas dentro de más o menos $\pm 200\ \text{MeV}/c^2$, o el valor medio (promedio) de la masa de esa gráfica, y las variaciones se deben a diferencias en las masas de los quarks y en las energías potenciales internas.



44.11 **a)** Gráfica de valores de S y Q para bariones de espín $\frac{1}{2}$ que muestra el patrón de simetría del óctuple camino. **b)** Contenido de quarks de cada barión con espín $\frac{1}{2}$. Los contenidos de quarks de Σ^0 y Λ^0 son iguales; la Σ^0 es un estado excitado de la Λ^0 y puede decaer en ella emitiendo fotones.

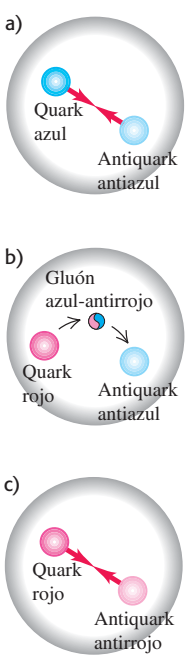
44.12 a) Gráfica de valores de S y Q para nueve mesones con espín 0, que muestra el patrón de simetría del óctuple camino. Cada partícula está en el lado opuesto del hexágono con respecto a su antipartícula; cada una de las tres partículas en el centro es su propia antipartícula. b) Contenido de quark de cada mesón de espín 0. Las partículas en el centro son distintas mezclas de los tres pares quark-antiquark mostrados.



Las simetrías pueden conducir a estos patrones y otros semejantes, que reciben el nombre colectivo de **óctuple camino**. En 1961 las descubrieron en forma independiente Murray Gell-Mann y Yu'val Ne'eman. (El nombre es una referencia un poco irreverente al Óctuple Noble Sendero, un conjunto de principios de la vida correcta en el budismo.) Un patrón parecido para los bariones de espín $\frac{3}{2}$ contiene *diez* partículas, arregladas en un patrón triangular como los pinos en una mesa de boliche. Cuando fue descubierta esta pauta por primera vez, faltaba una de las partículas. De cualquier modo, Gell-Mann le asignó un nombre (Ω^-), y predijo las propiedades que debería tener; también describió los experimentos con los que se debería buscar. Tres años después, se encontró la partícula durante experimentos realizados en el Laboratorio Nacional de Brookhaven, lo cual fue un éxito espectacular de la teoría de Gell-Mann. Toda la serie de eventos recuerda la forma en la que Mendeleev usó los huecos de la tabla periódica de los elementos para predecir las propiedades de los elementos no descubiertos y para guiar a los químicos en la búsqueda de ellos.

¿Qué es lo que une a los quarks entre sí? Las interacciones de atracción entre los quarks están mediadas por bosones sin masa y con espín 1, llamados **gluones** en forma muy parecida a como los fotones son mediadores de la interacción electromagnética, o a como los piones median la fuerza nucleón-nucleón, en la vieja teoría de Yukawa.

44.13 a) Un pión que contiene un quark azul y un antiquark antiazul. b) El quark azul emite un gluón azul-antirrojo, y se cambia a un quark rojo. c) El gluón es absorbido por el antiquark antiazul, que se transforma en un antiquark antirrojo. Ahora, el pión consiste en un par de quarks *rojo-antirrojo*. El estado cuántico real del pión es una superposición igual de pares rojo-antirrojo, verde-antiverde y azul-antiazul.



Color

Los quarks que tienen espín $\frac{1}{2}$ son fermiones y como tales están sujetos al principio de exclusión. Parecería que con ello se prohíbe a un barión que tenga dos o tres quarks con el mismo sabor y el mismo componente de espín. Para evitar tal dificultad, se supone que cada quark se presenta en tres variedades, caprichosamente llamadas *colores*. Los nombres frecuentes son rojo, verde y azul. El principio de exclusión se aplica por separado a cada color. Un barión siempre contiene un quark rojo, uno verde y uno azul, por lo que el barión mismo no tiene color neto. Cada gluón tiene una combinación de color-anticolor (por ejemplo, azul-antirrojo) que le permite transmitir color al intercambiarlo, y se conserva el color durante la emisión y absorción de un gluón por un quark. El proceso de intercambio de gluón cambia los colores de los quarks de tal manera que siempre hay un quark de cada color en cada barión. El color de un quark individual cambia continuamente mientras se intercambian los gluones.

Procesos similares tienen lugar en los mesones como, por ejemplo, en los piones. Los pares quark-antiquark de los mesones tienen color y anticolor que se cancelan (por ejemplo, azul y antiazul), por lo que los mesones no tienen color neto. Suponga que al principio, un pión está formado por un quark azul y un antiquark antiazul. El quark azul puede transformarse en quark rojo emitiendo un gluón virtual azul-antirrojo. Entonces, el gluón se absorbe en el antiquark antiazul y lo convierte en un antiquark antirrojo (figura 44.13). En cada emisión y absorción se conserva el color, pero un par azul-antiazul se transformó en un par rojo-antirrojo. Esos cambios suceden en forma continua, por lo que hay que imaginarse que un pión es una superposición de tres estados cuánticos: azul-antiazul, verde-antiverde y rojo-antirrojo. En mayor escala, la interacción fuerte entre los nucleones fue descrita en la sección 44.3, como debida al intercambio de mesones virtuales. En términos de quarks y gluones, esos mesones virtuales mediadores son sistemas quark-antiquark unidos por el intercambio de gluones.

La teoría de las interacciones fuertes se llama *cromodinámica cuántica* (QCD, del inglés, *quantum chromodynamics*). Hasta ahora, nadie ha podido aislar un quark individual para estudiarlo. La mayoría de las teorías QCD contienen fenómenos asociados con el enlace de quarks, lo que hace imposible obtener un quark libre. Un conjunto impresionante de pruebas experimentales respalda lo correcto de la estructura de quarks en los hadrones, y la hipótesis de que la cromodinámica cuántica es la clave para comprender las interacciones fuertes.

Tres quarks más

Antes de descubrir las partículas tau, se conocían cuatro leptones. Este hecho, junto con algunas velocidades de decaimiento intrigantes, condujo a especular que podría haber un cuarto sabor de quark. A este quark se le representa por c (de *charmed*, el quark encanto o encantado); tiene $Q/e = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $S = 0$ y un número cuántico nuevo, el **encanto** $C = +1$. Esto fue confirmado en 1974, por la observación de un mesón, tanto en SLAC como en el Brookhaven National Laboratory, que hoy se llama ψ, con masa de 3097 MeV/c^2. Se observó que este mesón tiene varios modos de decaimiento; decae en e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ o en hadrones. Se encontró que su vida promedio es aproximadamente de 10^{-20} s. Estos resultados son consistentes con que ψ sea un sistema $\boldsymbol{c\bar{c}}$ de espín 1. Casi inmediatamente después de esto, se observaron mesones similares de mayor masa y se identificaron como estados excitados del sistema $\boldsymbol{c\bar{c}}$. Pocos años después, también se observaron mesones individuales con número cuántico encanto neto distinto de cero. Esos mesones, D^0 $(\boldsymbol{c\bar{u}})$ y $\boldsymbol{D^+}$ $(\boldsymbol{c\bar{d}})$, y sus estados excitados hoy están firmemente establecidos. También se ha observado un barión encantado, Λ_c^+ $(\boldsymbol{udc})$.

En 1977 en Brookhaven se descubrió un mesón de masa 9460 MeV/c^2, llamado ypsilon (Υ). Como tenía propiedades parecidas a ψ, se creyó que en realidad ese mesón era el sistema enlazado de un quark nuevo, $\boldsymbol{b}$ (el quark *fondo*), y su antiquark $\boldsymbol{\bar{b}}$. El quark fondo tiene el valor 1 de un nuevo número cuántico B' (no confundirlo con el número bariónico B), llamado *fondez*. Los estados excitados del Υ se observaron pronto, y en la actualidad los mesones B^+ $(\boldsymbol{bu})$ y B^0 $(\boldsymbol{\bar{b}d})$ están bien establecidos.

Con cinco sabores de quark ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$) y seis sabores de leptones (e, μ, τ, ν_e, ν_μ y ν_τ) surge una atractiva conjetura de que la naturaleza es simétrica en sus bloques de construcción y que, por consiguiente, debería haber un *sexto* quark. Este quark, llamado t (tapa) tendría $Q/e = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, y un nuevo número cuántico, $T = 1$. En 1995 los investigadores que usaron dos detectores distintos en el Tevatrón del Fermilab anunciaron el descubrimiento del quark tapa. Los científicos hicieron chocar protones de 0.9 TeV contra antiprotones de 0.9 TeV, pero aun con la energía disponible de 1.8 TeV, y se detectó un par tapa-antitapa $(\boldsymbol{t\bar{t}})$ ¡en menos de dos de cada 10^{11} colisiones! La tabla 44.5 es una lista de algunas propiedades de los seis quarks. Cada uno tiene su antiquark correspondiente con valores opuestos de Q, B, S, C, B' y T.

Tabla 44.5 Propiedades de los seis quarks

Símbolo	Q/e	Espín	Número bariónico, B	Extrañeza, S	Encanto, C	Fondez B'	Tapez, T
$\boldsymbol{u}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\boldsymbol{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$\boldsymbol{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	−1	0	0	0
$\boldsymbol{c}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	+1	0	0
$\boldsymbol{b}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	+1	0
$\boldsymbol{t}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	+1

Evalúe su comprensión de la sección 44.4 ¿Es posible tener un barión con carga $Q = +e$ y extrañeza $S = -2$? ¿Por qué?

44.5 El modelo estándar y más allá

Las partículas e interacciones que hemos descrito en este capítulo dan una imagen detallada de los bloques fundamentales de construcción de la naturaleza. Hay bastante confianza en que esta imagen es básicamente correcta, como para llamarla **modelo estándar**.

El modelo estándar comprende tres familias de partículas: 1) los seis leptones, que no tienen interacciones fuertes; 2) los seis quarks, con los que se forman todos los hadrones; y 3) las partículas intermediarias en las diversas interacciones. Esos mediadores son los gluones para la interacción fuerte entre los quarks, fotones para la interacción electromagnética, las partículas $W^{\pm}$ y Z^0 para la interacción débil, y el gravitón para la interacción gravitacional.

Unificación electrodébil

Desde hace mucho tiempo, los físicos teóricos han soñado en combinar todas las interacciones de la naturaleza en una sola teoría unificada. Como primer paso, Einstein dedicó gran parte de su vida tratando de desarrollar una teoría de campo que unificase la gravitación y el electromagnetismo, aunque sólo logró un éxito parcial.

Entre 1961 y 1967 Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg desarrollaron una teoría que unifica las fuerzas débil y electromagnética. Un resultado de su **teoría electrodébil** es una predicción de las partículas mediadoras de la fuerza débil, los bosones Z^0 y $W^{\pm}$, incluyendo sus masas. La idea básica es que la diferencia de masas entre los fotones (masa cero) y los bosones débiles ($\approx$100 GeV/c^2) hace que las interacciones electromagnéticas y débiles se comporten en forma muy distinta a energías bajas. Sin embargo, a energías suficientemente altas (bastante mayores que 100 GeV), desaparece la distinción, y las dos se funden en una sola interacción. Esta predicción se verificó experimentalmente en 1983, por dos grupos que trabajaban en el colisionador $p\bar{p}$ del CERN, como se mencionó en la sección 44.3. Se encontraron los bosones débiles, de nuevo con ayuda de la descripción teórica elaborada, y sus masas que se observaron, concordaron con las predicciones de la teoría electrodébil, una bella convergencia de teoría y experimentos. La teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica forman la columna vertebral del modelo estándar. En 1979 Glashow, Salam y Weinberg recibieron el Premio Nobel.

Una dificultad más de la teoría electrodébil es que los fotones no tienen masa, pero los bosones débiles son muy masivos. Para explicar la simetría rota entre estos mediadores de interacción, se propuso una partícula llamada bosón de Higgs. Se esperaba que su masa fuera menor que 1 TeV/c^2, pero para producirla en el laboratorio se necesitaría mucho mayor energía disponible. La búsqueda de la partícula (o partículas) de Higgs será parte de la misión del Gran Colisionador de Hadrones en el CERN.

Teorías de la gran unificación

Quizá con energías suficientemente grandes, la interacción fuerte y la interacción electrodébil tengan una convergencia parecida a la que hay entre las interacciones electromagnéticas y débiles. Si es así, se pueden unificar para elaborar una teoría detallada de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Esos esquemas, llamados **teorías de la gran unificación** o teorías GUT (*grand unified theories*) se basan mucho en consideraciones de simetría, y todavía son especulativas.

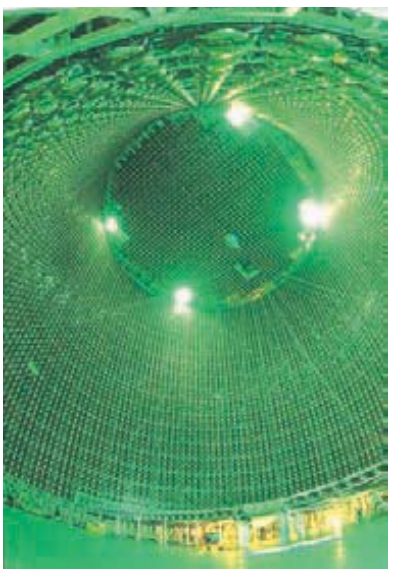
Una propiedad interesante de algunas teorías de gran unificación es que predicen el decaimiento del protón (violando la conservación del número bariónico), con una vida media (promedio) estimada de más de 10^{28} años. (En comparación, se estima que la edad del Universo es del orden de 10^{10} años.) Con una vida de 10^{28} años, se esperaría que seis toneladas métricas de protones tuvieran sólo un decaimiento por día, por lo que se deben examinar cantidades gigantescas de material. Algunos de los detectores de neutrinos que mencionamos en la sección 44.2 originalmente buscaron, sin encontrar, pruebas del decaimiento de los protones. No obstante, el trabajo experi-

mental prosigue y las estimaciones actuales establecen que la vida del protón es de más de 10^{30} años. También, algunas GUT predicen la existencia de monopolos magnéticos, que ya hemos mencionado en el capítulo 27. Hasta el presente, no hay pruebas experimentales de que existan los monopolos magnéticos, pero la búsqueda continúa.

En el modelo estándar, los neutrinos tienen masa cero. Los valores distintos de cero son controversiales, porque los experimentos para determinar las masas de neutrinos son difíciles, tanto de efectuar como de analizar. En la mayoría de las GUT los neutrinos *deben* tener masas distintas de cero. Si los neutrinos sí tienen masa, pueden existir transiciones llamadas *oscilaciones de neutrino*, en las que un tipo de neutrino (ν_e, ν_μ o ν_τ) se convierte en otro tipo. En 1998 los investigadores que usaban el detector de neutrinos Super-Kamiokande en Japón (figura 44.14) informaron sobre el descubrimiento de oscilaciones entre neutrinos muónicos y neutrinos tauónicos. Mediciones posteriores en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury, en Canadá, confirmaron la existencia de oscilaciones de neutrinos. Este descubrimiento es la primera evidencia de una nueva física, más allá de la predicha por el modelo estándar.

El descubrimiento de oscilaciones de neutrinos aclaró un antiguo misterio acerca del Sol. Desde la década de 1960, los físicos han estado usando detectores sensibles para buscar neutrinos electrónicos producidos por las reacciones de fusión nuclear en el núcleo solar (véase la sección 43.8). Sin embargo, el flujo observado de neutrinos solares sólo tiene la tercera parte de su valor predicho. La solución de este misterio se logró en 2002, gracias a los físicos que laboraban en el Observatorio de Neutrinos en Sudbury, el cual puede detectar neutrinos de los tres sabores. Los resultados demostraron que el flujo combinado de los neutrinos solares de *todos* los sabores es igual a la predicción teórica del flujo de los neutrinos *electrónicos*. La explicación es que en realidad el Sol produce neutrinos electrónicos, con la rapidez que indica la teoría; pero dos tercios de esos neutrinos electrónicos se transforman en neutrinos muónicos o tauónicos al atravesar e interactuar con el material del Sol.

44.14 Esta foto muestra el interior del detector de neutrinos Super-Kamiokande, en Japón. Al funcionar, el detector se llena con 5×10^7 kg de agua. Un neutrino que pase por el detector puede producir un débil destello luminoso, que es detectado por los 13,000 tubos fotomultiplicadores que recubren las paredes del detector. Los datos de ese detector fueron los primeros en indicar que los neutrinos tienen masa.



Teorías supersimétricas y teorías de todo

El sueño final de los teóricos es unificar las cuatro interacciones fundamentales, agregando la gravitación a las interacciones fuerte y electrodébil, que se incluyen en las teorías de la gran unificación. Esa teoría unificada recibe el pretencioso nombre de teoría de todo (TOE, del inglés, *theory of everything*). Sucede que un ingrediente esencial de esas teorías es un continuo de espacio-tiempo con más de cuatro dimensiones. Las dimensiones adicionales están "enrolladas" en estructuras extremadamente diminutas, que generalmente no percibimos. De acuerdo con la escala de esas estructuras, puede ser que los aceleradores de partículas de la siguiente generación revelen la presencia de dimensiones adicionales.

Otro ingrediente de muchas teorías es la *supersimetría*, que asigna a cada bosón y cada fermión un "supersocio" de la otra clase de espín. Por ejemplo, el socio supersimétrico propuesto para el electrón de espín $\frac{1}{2}$ es una partícula de espín 0 llamada *selectrón*, y el del fotón de espín 1 es un *fotino* de espín $\frac{1}{2}$. Hasta ahora no se han descubierto partículas supersocias, quizá porque son demasiado masivas para producirse en los aceleradores de la presente generación. Dentro de pocos años, nuevos datos del Gran Colisionador de Hadrones, y otros aceleradores propuestos, nos ayudarán a decidir si esas intrigantes teorías tienen méritos, o si la naturaleza es todavía más exótica de lo que imaginamos.

Evalúe su comprensión de la sección 44.5 Un aspecto del modelo estándar es que un quark ***d*** puede transformarse en un quark ***u***, un electrón y un antineutrino, por medio de la interacción débil. Si esto sucede a un quark ***d*** dentro de un neutrón, ¿qué clase de partícula permanece adelante además del electrón y el antineutrino? i) un protón; ii) a Σ^-; iii) a Σ^+; iv) a Λ^0 o a Σ^0; v) cualquiera de éstas.

44.6 El Universo en expansión

En las últimas dos secciones de este capítulo exploraremos en forma breve las relaciones entre la historia antigua del Universo y las interacciones de las partículas fundamentales. Es notable que haya relaciones tan estrechas entre la física a la mínima escala, que hemos explorado experimentalmente (el alcance de la interacción débil, del orden de 10^{-18} m) y la física a la máxima escala (el Universo mismo, del orden al menos de 10^{26} m).

Las interacciones gravitacionales juegan un papel esencial en el comportamiento del Universo en gran escala. Uno de los grandes logros de la mecánica newtoniana, incluyendo la ley de la gravitación, fue la comprensión que permitió tener del movimiento de los planetas en el sistema solar. Las pruebas astronómicas, como las observaciones de los movimientos de las estrellas binarias en torno a su centro de masa común, indica que las interacciones gravitacionales también se dan en sistemas astronómicos mayores, incluyendo estrellas, galaxias y nebulosas.

Hasta principios del siglo xx, se supuso que el Universo era *estático*; que las estrellas podían moverse entre sí, pero no se pensaba en que hubiera una expansión o contracción general. Pero las estrellas tienen atracciones gravitacionales. Si al principio estuviera todo quieto en el Universo, ¿por qué la gravedad no simplemente lo uniría todo en un gran todo? Newton mismo reconoció la seriedad de esta molesta pregunta.

En 1912 Vesto Slipher inició mediciones en el Observatorio Lowell en Arizona, y las continuó Edwin Hubble, en la década de 1920, con ayuda de Milton Humason en Mount Wilson, California; éstas indicaban que el Universo *no* era estático. Los movimientos de las galaxias pueden medirse en relación con la Tierra, observando los desplazamientos en las longitudes de onda de sus espectros. Para las galaxias lejanas, esos desplazamientos siempre son hacia longitudes de onda mayores, por lo que parecen estarse alejando de nosotros y entre sí. Los astrónomos supusieron primero que eran corrimientos Doppler, y usaron una relación entre la longitud de onda λ_0 de la luz, medida hoy de una fuente que se aleja a la rapidez v y la longitud de onda λ_S, a partir del marco de referencia en reposo, de donde se emitió. Podemos deducir esta relación invirtiendo la ecuación (37.25) para el efecto Doppler, haciendo los cambios de subíndices y usando $\lambda = c/f$; el resultado es

$$\lambda_0 = \lambda_S \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \tag{44.13}$$

Las longitudes de onda desde fuentes que retroceden siempre están desplazadas hacia las longitudes de onda mayores; este aumento de λ se llama **corrimiento al rojo**. De la ecuación (44.13) se puede despejar v. El resultado es

$$v = \frac{(\lambda_0/\lambda_S)^2 - 1}{(\lambda_0/\lambda_S)^2 + 1} c \tag{44.14}$$

CUIDADO **Corrimiento al rojo, no corrimiento Doppler** Las ecuaciones (44.13) y (44.14) son de la teoría *especial* de la relatividad y se refieren al efecto Doppler. Como veremos, el corrimiento al rojo desde galaxias *lejanas* se debe a un efecto que explica la teoría *general* de la relatividad, y *no* es un corrimiento Doppler. Sin embargo, a medida que la relación v/c y el cambio fraccionario de la longitud de onda $(\lambda_0 - \lambda_S)/\lambda_S$ se hacen pequeños, las ecuaciones de la teoría general tienden a las ecuaciones (44.13) y (44.14), y se pueden usar esas ecuaciones.

Ejemplo 44.9 Rapidez de recesión (alejamiento) de una galaxia

Las líneas espectrales de varios elementos se detectan en la luz de una galaxia en la constelación Osa Mayor. Una línea ultravioleta del calcio simplemente ionizado ($\lambda_S = 393$ nm) se observa con una longitud de onda $\lambda_0 = 414$ nm, desplazada a la parte visible del espectro. ¿Con qué rapidez esta galaxia se está alejando de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre corrimiento al rojo y rapidez de recesión para una galaxia distante.

PLANTEAR: Los datos son la longitud de onda a la que se emite la luz, y la longitud de onda que detectamos en la Tierra. Los usaremos en la ecuación (44.14) para determinar la rapidez de retroceso v de la galaxia, siempre que el desplazamiento fraccionario de la longitud de onda no sea muy grande.

EJECUTAR: Primero calcularemos $\lambda_0/\lambda_S = (414\text{ nm})/(393\text{ nm}) = 1.053$. Sólo es un aumento de 5.3%, por lo que se puede usar la ecuación (44.14) con exactitud razonable.

$$v = \frac{(1.053)^2 - 1}{(1.053)^2 + 1}c = 0.0516c = 1.55 \times 10^7\text{ m/s}$$

EVALUAR: La galaxia se aleja de la Tierra a 5.16% de la rapidez de la luz. Note que más que hacer este cálculo, con frecuencia los astrónomos citan la rapidez de retroceso en función del *corrimiento al rojo*, que se define como $z = (\lambda_0 - \lambda_S)/\lambda_S = (\lambda_0/\lambda_S) - 1$. Entonces, esta galaxia tiene un corrimiento al rojo $z = 0.053$.

La ley de Hubble

El análisis de los corrimientos al rojo para muchas galaxias lejanas condujo a Edwin Hubble a una notable conclusión: la rapidez de retroceso v de una galaxia es proporcional a su distancia r de nosotros (figura 44.15). A esta relación se le llama actualmente **ley de Hubble**, cuyo enunciado simbólico es

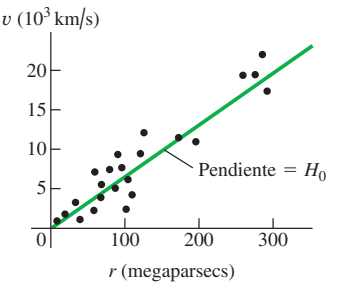
$$v = H_0 r \tag{44.15}$$

donde H_0 es una cantidad experimental conocida como *constante de Hubble*, ya que en determinado momento es constante en todo el espacio. La determinación de H_0 ha sido un objetivo clave del telescopio espacial Hubble, que puede medir distancias a galaxias con exactitud sin precedente. El mejor valor actual es $2.3 \times 10^{-18}\text{ s}^{-1}$, con una incertidumbre del 5%.

Las distancias astronómicas se miden con frecuencia en *parsecs* (pc); un parsec es la distancia a la cual dos objetos a 1.50×10^{11} m de distancia (la distancia promedio de la Tierra al Sol) entre sí se ven separados por un arco segundo (1/3600°). Una distancia de 1 pc es igual a 3.26 *años luz* (al), donde 1 al $= 9.46 \times 10^{15}$ m es la distancia que recorre la luz en un año. La constante de Hubble se suele expresar en las unidades mezcladas (km/s)/Mpc, kilómetros por segundo por megaparsec, donde 1 Mpc $= 10^6$ pc:

$$H_0 = (2.3 \times 10^{-18}\text{ s}^{-1})\left(\frac{9.46 \times 10^{15}\text{ km}}{1\text{ ly}}\right)\left(\frac{3.26\text{ ly}}{1\text{ pc}}\right)\left(\frac{10^6\text{ pc}}{1\text{ Mpc}}\right) = 71\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

44.15 Gráfica de rapidez de recesión en función de la distancia, para varias galaxias. La recta de mejor ajuste representa la ley de Hubble. La pendiente de esa recta es la constante de Hubble, H_0.



Ejemplo 44.10 Determinación de la distancia con la ley de Hubble

Calcule la distancia de la galaxia del ejemplo 44.9 a la Tierra, con la ley de Hubble.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La ley de Hubble relaciona el corrimiento al rojo de una galaxia distante con su distancia a la Tierra.

PLANTEAR: Despejaremos la distancia r de la ecuación (44.15), y después sustituiremos el valor de la rapidez de retroceso v del ejemplo 44.9.

EJECUTAR: Usando $H_0 = 71$ (km/s)/Mpc $= 7.1 \times 10^4$ (m/s)/Mpc,

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{1.55 \times 10^7\text{ m/s}}{7.1 \times 10^4\text{ (m/s)/Mpc}}$$
$$= 220\text{ Mpc} = 2.2 \times 10^8\text{ pc} = 7.1 \times 10^8\text{ ly} = 6.7 \times 10^{24}\text{ m}$$

EVALUAR: Una distancia de 220 millones de parsecs (710 millones de años luz) es verdaderamente inmensa, y muchas galaxias están mucho más alejadas. En contraste, la galaxia más cercana a nosotros es la Enana de Sagitario, a sólo 80,000 años luz; tan cerca que se mantiene en órbita gravitacional en torno a nuestra galaxia. Para apreciar la inmensidad de esta distancia relativamente pequeña, imagine que nuestra nave espacial no tripulada, la más rápida, ha recorrido más o menos 0.001 años luz desde nuestro planeta.

Otro aspecto de las observaciones de Hubble fue que *en todas direcciones*, las galaxias lejanas parecían estarse alejando de nosotros. No hay razón particular para pensar que nuestra galaxia está en el centro exacto del Universo. Si viviéramos en alguna otra galaxia, cualquier otra galaxia lejana aún parecería estarse alejando. Esto

es, en determinado momento, el *Universo se ve más o menos igual, independientemente de dónde estemos en él*. A esta importante idea se le llama **principio cosmológico**. Hay fluctuaciones locales de densidad pero, en promedio, el Universo se ve igual desde todos los lugares. Entonces, la constante de Hubble es constante en el espacio, aunque no necesariamente es constante en el tiempo, y las leyes de la física son iguales donde quiera.

El Big Bang

La ley de Hubble parece indicar que en cierto momento del pasado, toda la materia del Universo estaba mucho más concentrada de lo que hoy está. Luego, estalló en una inmensa explosión llamada Gran Explosión o **Big Bang**, dando a toda la materia más o menos las velocidades que hoy observamos. ¿Cuándo sucedió eso? De acuerdo con la ley de Hubble, la materia a una distancia r de nosotros está viajando a una rapidez $v = H_0 r$. El tiempo t que necesita para recorrer la distancia r es

$$t = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = \frac{1}{H_0} = 4.3 \times 10^{17}\ \text{s} = 1.4 \times 10^{10}\ \text{años}$$

Según esta hipótesis, el Big Bang sucedió hace unos 14 mil millones de años. Se supone que todas las rapideces son *constantes* después del Big Bang; esto es, no se tienen en cuenta cambios en la razón de expansión debida a la atracción gravitacional ni a otros efectos. Más adelante regresaremos a este punto. Sin embargo, por ahora notaremos que la edad de la Tierra, determinada por el fechado radiactivo (véase la sección 43.4) es de 4600 millones (4.6×10^9) de años. ¡Es reconfortante saber que nuestra sencilla hipótesis nos diga que el Universo es más viejo que la Tierra!

Espacio en expansión

La teoría general de la relatividad adopta una perspectiva radicalmente distinta de la expansión que acabamos de describir. De acuerdo con ella, la mayor longitud de onda *no* se debe a un corrimiento Doppler cuando el Universo se expande y penetra en un hueco antes vacío. Más bien, el aumento se debe a la *expansión misma del espacio* y de todo en el espacio intergaláctico, incluyendo las longitudes de onda de la luz que llegan a nosotros desde fuentes lejanas. No es fácil captar este concepto, y si no lo ha visto usted antes, quizá le parecerá como algo engañoso.

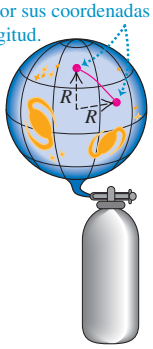
Veamos una analogía que puede ayudar a desarrollar cierta intuición sobre este punto. Imagine que todos somos bichos que nos arrastramos sobre una superficie horizontal. No podemos dejar la superficie y podemos ver en cualquier dirección sobre la superficie, pero no hacia arriba ni hacia abajo. Entonces estamos viviendo en un mundo bidimensional; algunos han llamado *planolandia* a este mundo. Si la superficie es plana, podemos ubicar nuestra posición con dos coordenadas cartesianas (x, y). Si el plano se extiende indefinidamente en las direcciones x y y, decimos que nuestro espacio tiene una extensión *infinita*, o que *no está acotado*. No importa lo lejos que vayamos, nunca habrá un borde ni una frontera.

Un hábitat alterno para nosotros sería la superficie de una esfera de radio R. El espacio seguiría pareciendo infinito, en el sentido de que podríamos arrastrarnos eternamente sin llegar nunca a un borde o a una frontera. Sin embargo, en este caso el espacio es *finito* o *acotado*. Para describir la ubicación de un punto en este espacio podríamos seguir usando dos coordenadas: latitud y longitud, o las coordenadas esféricas θ y ϕ, que se ven en la figura 40.23.

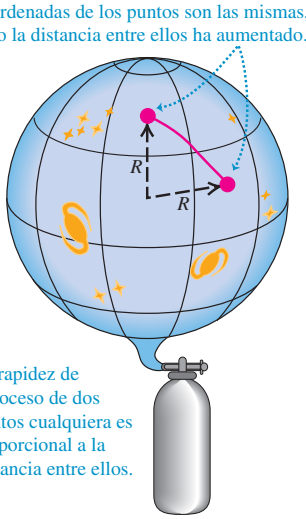
Ahora supongamos que la superficie esférica es la de un globo (figura 44.16). Al inflarlo cada vez más, el radio R aumenta, las coordenadas de un punto no cambian, y sin embargo, la distancia entre dos puntos cualesquiera se hace más y más grande. Además, a medida que R aumenta, la *rapidez de cambio* de la distancia entre dos puntos (su rapidez de retroceso) es proporcional a su alejamiento. *La rapidez de retroceso es proporcional a la distancia*, al igual que en la ley de Hubble. Por ejemplo, la distancia de Pittsburgh a Miami es el doble de la de Pittsburgh a Boston. Si la Tierra comenzara a hincharse, Miami se alejaría de Pittsburgh al doble de velocidad que Boston.

44.16 Un globo que se infla es una analogía para un universo en expansión.

a) Los puntos (que representan galaxias) en la superficie de un globo esférico se identifican por sus coordenadas de latitud y longitud.



b) El radio R del globo ha aumentado. Las coordenadas de los puntos son las mismas, pero la distancia entre ellos ha aumentado.



La rapidez de retroceso de dos puntos cualquiera es proporcional a la distancia entre ellos.

Vemos que aunque la cantidad R no es alguna de las dos coordenadas que definen la posición de un punto en la superficie del globo; sin embargo, juega un papel esencial en cualquier descripción de la distancia. Es el radio de curvatura de nuestro espacio de dos dimensiones, y también es un *factor de escala* variable que cambia a medida que se expande ese Universo bidimensional.

No es tan fácil generalizar esta imagen a tres dimensiones. Debemos imaginar nuestro espacio tridimensional como incrustado en un espacio con cuatro o más dimensiones, así como visualizamos planilandia bidimensionalmente incrustada en un espacio cartesiano tridimensional. Nuestro espacio real es tridimensional, *no es cartesiano*; para describir sus características en cualquier región pequeña se necesita al menos un parámetro adicional, la curvatura del espacio, que es análoga al radio de la esfera. En cierto sentido, este factor de escala, al que continuaremos llamando R, describe el *tamaño* del Universo, igual que el radio de la esfera describía el tamaño del Universo bidimensional esférico. Después regresaremos a la cuestión de que si el Universo está acotado o no.

Cualquier longitud que se mida en el espacio intergaláctico es proporcional a R, por lo que aumenta la longitud de onda de la luz que llega a nosotros desde una galaxia distante, junto con todas las demás dimensiones, a medida que se expande el Universo. Esto es,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{R_0}{R} \tag{44.16}$$

Los subíndices cero indican los valores de la longitud de onda y el factor de escala *ahora*, de igual manera que H_0 es el valor actual de la constante de Hubble. Las cantidades λ y R sin subíndices son los valores en *cualquier* momento: pasado, presente o futuro. En el caso descrito en el ejemplo 44.9, $\lambda_0 = 414$ nm y $\lambda = \lambda_S = 393$ nm, por lo que la ecuación (44.16) da como resultado $R_0/R = 1.053$. Esto es, el factor de escala *hoy* (R_0) es 5.3% mayor de lo que era hace 710 millones de años, cuando esa galaxia de la Osa Mayor emitió la luz. Este aumento de longitud de onda en el tiempo, cuando aumenta el factor de escala en nuestro Universo en expansión se llama *corrimiento al rojo cosmológico*. Cuanto más alejado está un objeto, más tardará la luz en llegar a nosotros y el cambio de R y λ será mayor. La relación de longitudes de onda máxima medida hasta hoy, para las galaxias, es de aproximadamente 7, lo cual indica que el volumen del espacio mismo es unas $7^3 \approx 340$ veces mayor que cuando se emitió la luz. *No* trate de sustituir $\lambda_0/\lambda_S = 7$ en la ecuación (44.14) para determinar la rapidez de retroceso; esa ecuación sólo es exacta para pequeños corrimientos al rojo cosmológico y $v \ll c$. El valor real de v depende de la densidad del Universo, del valor de H_0 y de la historia de la expansión del Universo.

Le sorprenderá al lector lo siguiente: si la distancia a nosotros, según la ley de Hubble, es suficientemente grande, ¡la rapidez de retroceso será mayor que la rapidez de la luz! Eso *no* viola la teoría especial de la relatividad, porque la rapidez de retroceso *no* es causada por el movimiento del objeto astronómico en relación con algunas coordenadas en su región del espacio. Más bien, puede ser que $v > c$ cuando dos conjuntos de coordenadas se alejan lo suficientemente rápido a medida que se expande el espacio mismo. En otras palabras, hay objetos cuyas coordenadas se han estado alejando de nuestras coordenadas tan rápido que la luz de ellos no ha tenido tiempo suficiente, en toda la historia del Universo, para llegar a nosotros. Lo que vemos sólo es el Universo *observable*; no tenemos pruebas directas de lo que queda más allá de su horizonte.

CUIDADO **El Universo no se expande hacia el vacío** El globo que se muestra en la figura 44.16 se expande hacia el espacio vacío que lo rodea. Es una concepción falsa muy frecuente considerar el Universo de la misma forma que una colección de galaxias grande pero finita, que se expande hacia espacio que no está ocupado. ¡La realidad es muy diferente! Toda la evidencia acumulada muestra que nuestro Universo es *infinito*: no tiene fronteras ni límites, por lo que no hay nada "afuera" de él ni "se expande hacia" alguna cosa. La expansión del Universo simplemente significa que está aumentando el factor de escala del Universo. Una buena analogía bidimensional es pensar que el Universo es como una hoja elástica plana e infinitamente grande, que se estira y se expande mucho, similar a la superficie del globo de la figura 44.16. En cierto sentido, ¡el Universo infinito simplemente se está volviendo más infinito!

Densidad crítica

Hemos mencionado que la ley de la gravitación no es consistente con un Universo estático. Necesitamos buscar el papel de la gravedad en un Universo *en expansión*. Las atracciones gravitacionales deberían desacelerar la expansión inicial, pero, ¿cuánto? Si esas atracciones son suficientemente intensas, el Universo debería expandirse cada vez con más lentitud, en cierto momento detenerse y después comenzar a contraerse, quizás otra vez todo, en lo que se ha llamado la Gran Implosión (*Big Crunch*). Por otro lado, si las fuerzas gravitacionales son mucho más débiles, sólo desaceleran un poco la expansión, y el Universo debería continuar expandiéndose eternamente.

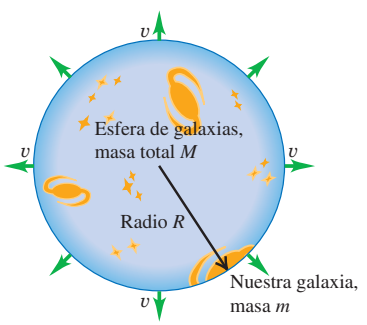
El caso se parece al problema de la rapidez de escape de un proyectil disparado desde la Tierra. En el ejemplo 12.5 (sección 12.3) estudiamos este problema; ahora sería una ocasión excelente para repasar la explicación. La energía total $E = K + U$, cuando un proyectil de masa m y rapidez v está a una distancia r del centro de la Tierra (masa m_E) es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_E}{r}$$

Si E es positiva, el proyectil tiene suficiente energía cinética para alejarse infinitamente de la Tierra ($r \to \infty$) y tener algo de energía cinética sobrante o residual. Si E es negativa, la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ se vuelve cero, y el proyectil se detiene cuando $r = -Gmm_E/E$. En ese caso, no es posible un valor mayor de r y el proyectil no puede escapar de la gravedad terrestre.

Se puede hacer un análisis parecido para el Universo. El que éste continúe expandiéndose en forma indefinida debería depender de la *densidad* media de la materia. Si ésta es relativamente densa, habrá una gran cantidad de atracción gravitacional para desacelerar y, en cierto momento, detener la expansión, y hacer que el Universo se vuelva a contraer. Si no es así, la expansión debería continuar en forma indefinida. Se puede deducir una ecuación para determinar la *densidad crítica* p_c necesaria para detener apenas la expansión.

44.17 Una esfera imaginaria de galaxias. La fuerza gravitacional neta que ejercen las demás galaxias sobre la nuestra (en la superficie de la esfera) es la misma que si toda su masa estuviera concentrada en el centro de la esfera. (Como el Universo es infinito, también hay un infinito de galaxias fuera de esta esfera.)



Veamos un cálculo basado en la mecánica newtoniana; no es correcto desde el punto de vista relativista, pero ilustra la idea. Imagine una gran esfera de radio R que contiene muchas galaxias (figura 44.17), con masa total M. Suponga que nuestra propia galaxia tiene masa m y está ubicada en la superficie de esa esfera. De acuerdo con el principio cosmológico, la distribución promedio de la materia dentro de la esfera es uniforme. La fuerza gravitacional total sobre nuestra galaxia no es otra que la fuerza debida a la masa M dentro de la esfera. La fuerza sobre nuestra galaxia y la energía potencial U debidas a esta distribución con simetría esférica son iguales que si m y M fueran puntos, por lo que $U = -GmM/R$, como en la sección 12.3. La fuerza neta de toda la distribución uniforme de la masa *fuera* de la esfera es cero, por lo que no la tomaremos en cuenta.

La energía total E (cinética más potencial) de nuestra galaxia es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} \tag{44.17}$$

Si E es *positiva*, nuestra galaxia tendrá energía suficiente para escapar de la atracción gravitacional de la masa M en el interior de la esfera; en este caso, el Universo estaría eternamente en expansión. Si E es negativa, nuestra galaxia no podría escapar, y el Universo al final se debería contraer. El paso entre esos dos casos sucede cuando $E = 0$, por lo que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R} \tag{44.18}$$

La masa M total dentro de la esfera, es el volumen $4\pi R^3/3$ por la densidad ρ_c:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c$$

Supondremos que la rapidez v de nuestra galaxia, en relación con el centro de la esfera, se determina con la ley de Hubble: $v = H_0R$. Se sustituyen esas ecuaciones de M y v en la ecuación (44.18), y se obtiene

$$\frac{1}{2}m(H_0R)^2 = \frac{Gm}{R}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_c\right) \qquad \text{o bien,}$$

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad \text{(densidad crítica del Universo)} \tag{44.19}$$

Ésta es la *densidad crítica*. Si la densidad media es menor que ρ_c, el Universo continuará expandiéndose en forma indefinida; si es mayor, terminará por detenerse y comenzar a contraerse.

Sustituyendo los datos numéricos en la ecuación (44.19) se ve que

$$\rho_c = \frac{3(2.3 \times 10^{-18}\,\text{s}^{-1})^2}{8\pi(6.67 \times 10^{-11}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2)} = 6.3 \times 10^{-27}\,\text{kg/m}^3$$

La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, por lo que esta densidad equivale a unos cuatro átomos de hidrógeno por metro cúbico.

Materia oscura, energía oscura y el Universo que acelera

Los astrónomos han hecho extensos estudios de la densidad media de la materia en el Universo. Una forma de hacerlo es contar la cantidad de galaxias en una porción del cielo. Con base en la masa de una estrella media y la cantidad de estrellas en una galaxia media, este sistema da una estimación de la densidad promedio de la materia *luminosa* en el Universo, esto es, materia que emite radiación electromagnética. (El lector es materia luminosa, porque emite radiación infrarroja como consecuencia de su temperatura; véase las secciones 17.7 y 38.8.) También es necesario tener en cuenta otra materia luminosa en una galaxia, incluyendo el tenue gas y polvo que hay entre las estrellas.

Otra técnica es estudiar los movimientos de galaxias dentro de cúmulos de galaxias (figura 44.18). Los movimientos son tan lentos que en realidad no vemos que las galaxias cambien posiciones dentro de un cúmulo. Sin embargo, las observaciones indican que las distintas galaxias dentro de un cúmulo tienen corrimientos al rojo un poco distintos, lo cual indica que se mueven en relación con el centro de masa del cúmulo. Las rapideces de esos movimientos se relacionan con la fuerza gravitacional que ejercen los demás miembros del cúmulo sobre cada galaxia, la cual a su vez depende de la masa total del cúmulo. Al medir esas rapideces, los astrónomos pueden determinar la densidad media de *todos* los tipos de materia dentro del cúmulo, aunque la materia emita radiación electromagnética o no.

44.18 Las manchas brillantes de esta imagen no son estrellas, sino galaxias completas. Forman parte de un cúmulo de galaxias a unos 1000 Mpc (330 Mal [mega-años luz]) de distancia. Cuando las galaxias emitieron la luz con que se hizo esta imagen, el factor de escala del Universo era aproximadamente 25% menor del que es actualmente.

Las observaciones que usan estas y otras técnicas demuestran que la densidad media de *toda* la materia en el Universo es el 26% de la densidad crítica, pero que la densidad media de la materia *luminosa* sólo es el 4% de la densidad crítica. En otras palabras, la mayoría de la materia en el Universo no es luminosa, pues no emite radiación electromagnética de *ninguna* clase. En la actualidad, la naturaleza de esta **materia oscura** es un notable misterio. Algunos candidatos propuestos como materia oscura son las WIMP (partículas masivas débilmente interactuantes; *weakly interacting massive particles*, que son partículas subatómicas hipotéticas mucho más masivas que las que se producen en los experimentos en los aceleradores) y los MACHO (objetos masivos de halo compacto; *massive compact halo objects,* que incluyen objetos como agujeros negros que podrían formar "halos" en torno a galaxias). Sea cual fuere la naturaleza real de la materia oscura, ésta es la forma más predominante de materia en el Universo. Por cada kilogramo de materia ordinaria de lo que ha sido el tema de la mayoría de este libro (incluyendo electrones, protones, átomos, moléculas, bloques en planos inclinados, planetas y estrellas) hay *cinco y medio* kilogramos de materia oscura.

Como la densidad promedio de la materia en el Universo es menor que la densidad crítica, parecería justo llegar a la conclusión de que el Universo seguirá expandiéndose

eternamente, y que la atracción gravitacional entre la materia en distintas partes del Universo debería desacelerar la expansión (aunque no lo suficiente como para detenerla). Una forma de probar esta predicción consiste en examinar los corrimientos al rojo de objetos extremadamente lejanos. Cuando los astrónomos ven una galaxia a 10^9 años luz de distancia, la luz que reciben ha estado viajando durante 10^9 años, por lo que ven 10^9 años en el pasado. Si la expansión del Universo se ha desacelerado, debe haber sido más rápida en el pasado. Así, se esperaría que las galaxias muy lejanas tengan corrimientos al rojo *mayores* que los que predice la ley de Hubble, ecuación (44.15).

Sólo hasta la década de 1990 fue posible medir con exactitud tanto las distancias como los corrimientos al rojo de galaxias extremadamente lejanas. Los resultados han sido muy sorprendentes: ¡Las galaxias muy lejanas tienen en realidad *menores* corrimientos al rojo que los que predice la ley de Hubble! La implicación es que la expansión del Universo era más lenta en el pasado que ahora, así que ha estado *acelerándose*, más que desacelerándose.

Si la atracción gravitacional debería desacelerar la expansión, ¿por qué entonces se está acelerando? La explicación que acepta la mayoría de los astrónomos y los físicos es que, en el espacio, está difundida una clase de energía que no tiene efecto gravitacional y que no emite radiación electromagnética, sino más bien que funciona como una clase de "antigravedad" que produce una *repulsión* universal. Esta energía invisible e inmaterial se llama **energía oscura**. Como lo indica su nombre, la naturaleza de la energía oscura se entiende poco, aunque es tema de investigaciones muy extensas.

Las observaciones indican que la densidad de la *energía* oscura (medida, digamos, en joules por metro cúbico) es 74% de la densidad crítica multiplicada por c^2; esto es, es igual a $0.74\rho_c c^2$. Como se describió, la densidad promedio de la materia de todas clases es 26% de la densidad crítica. De acuerdo con la relación $E = mc^2$ de Einstein, la densidad media de *energía* de materia en el Universo es, entonces, $0.26\rho_c c^2$. Como la densidad de energía de la energía oscura es casi tres veces mayor que la de la materia, la expansión del Universo continuará acelerándose. Esta expansión nunca se detendrá y el Universo nunca se contraerá.

Si tomamos en cuenta la energía de *todas* clases, la densidad media de energía del Universo es igual a $0.74\rho_c c^2 + 0.26\rho_c c^2 = 1.00\rho_c c^2$. De ella, el 74% es la misteriosa energía oscura, el 22% es la no menos misteriosa materia oscura y sólo el 4% es la bien comprendida materia ordinaria. ¡Qué poco conocemos el contenido de nuestro Universo!

¿Cuál es la importancia del resultado que, dentro de nuestros errores de observación, la densidad media de la energía en el Universo sea igual a $\rho_c c^2$? Nos dice que el Universo es infinito y no acotado, o apenas llega a serlo. Si la densidad media de energía fuera un poco mayor que $\rho_c c^2$, el Universo sería finito, como la superficie del globo que muestra la figura 44.16. En el momento de escribir esto, el error de observación, en la densidad media de la energía todavía es suficientemente grande como para no estar bien seguros de que el Universo *sea* ilimitado. La mejoría de esas mediciones será una importante tarea de los físicos y astrónomos en los años por venir.

Evalúe su comprensión de la sección 44.6 ¿Es correcto decir que el cuerpo de usted está hecho de materia "ordinaria"?

44.7 El principio del tiempo

¡Qué título tan raro tiene la última sección de este libro! En términos generales describiremos algunas de las teorías actuales acerca de la historia temprana del Universo, y su relación con las interacciones entre partículas fundamentales. Veremos que en el primer segundo tuvo lugar una cantidad asombrosa de acontecimientos. Se dejarán sin atar muchos cabos sueltos y muchas preguntas se quedarán sin respuesta. Ésta es, después de todo, una de las fronteras de la física teórica, que en forma continua produce nuevas teorías, nuevos descubrimientos y nuevas preguntas.

Temperaturas

El Universo inicial era extremadamente denso y caliente, y las energías medias de sus partículas eran intensamente grandes, todas de muchos órdenes de magnitud mayores que cualquier cosa que exista en el Universo actual. Se puede comparar la energía E de una partícula con la temperatura absoluta T usando el principio de equipartición (véase la sección 18.4):

$$E = \frac{3}{2}kT \tag{44.20}$$

donde k es la constante de Boltzmann, que con frecuencia representaremos en eV/K:

$$k = 8.617 \times 10^{-5}\,\text{eV/K}$$

Entonces, se puede reemplazar la ecuación (44.20) por $E \approx (10^{-4}\,\text{eV/K})T = (10^{-13}\,\text{GeV/K})T$ para manejar órdenes de magnitud.

Ejemplo 44.11 Temperatura y energía

a) ¿Cuál es la energía cinética media, en electrón volts, de las partículas a temperatura ambiente ($T = 290$ K) y en la superficie del Sol ($T = 5800$ K)? *b*) ¿Qué temperatura aproximada corresponde a la energía de ionización del átomo de hidrógeno, a la energía en reposo del electrón y a la energía en reposo del protón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo se nos pide utilizar el principio de equipartición.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (44.20) en cada parte, para determinar la incógnita, T.

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (44.20):

$$E = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(8.617 \times 10^{-5}\,\text{eV/K})(290\,\text{K}) = 0.0375\,\text{eV}$$

La temperatura de la superficie del Sol es mayor, por un factor de (5800 K)/(290 K) = 20, y la energía cinética promedio ahí es 20(0.0375 eV) = 0.75 eV.

b) La energía de ionización del hidrógeno es 13.6 eV Si usamos la aproximación $E \approx (10^{-4}\,\text{eV/K})T$, resulta

$$T \approx \frac{E}{10^{-4}\,\text{eV/K}} = \frac{13.6\,\text{eV}}{10^{-4}\,\text{eV/K}} \approx 10^{5}\,\text{K}$$

Las energías en reposo del electrón y el protón son 0.511 MeV y 938 MeV, respectivamente. Al repetir el cálculo con esos valores resultan temperaturas de 10^{10} K como energía en reposo del electrón, y 10^{13} K como energía en reposo del protón.

EVALUAR: En el interior del Sol hay temperaturas mayores que 10^5 K, de manera que allá la mayor parte del hidrógeno está ionizado. Las temperaturas de 10^{10} K o 10^{13} K no se encuentran en el Sistema Solar; como veremos después, al principio las temperaturas eran así de grandes en el Universo.

Desacoplamiento de interacciones

La evolución del Universo se ha caracterizado por un aumento continuo del factor de escala R, que podemos imaginar que con algo de aproximación caracteriza el *tamaño* del Universo, y por una disminución correspondiente en la densidad promedio. Cuando aumentó la energía potencial gravitacional durante la expansión, hubo *decrementos* correspondientes en la temperatura y en la energía cinética media de las partículas. A medida que esto sucedía, las interacciones básicas se desacoplaron en forma progresiva.

Para entender los desacoplamientos, recuerde que la unificación de las interacciones electromagnética y débil se presenta a energías suficientemente grandes como para que las diferencias de masa entre los diversos bosones con espín 1, que median las interacciones, se consideren insignificantes en comparación. La interacción electromagnética está definida por el fotón sin masa, y la interacción débil está definida por los bosones débiles $W^{\pm}$ y Z^0, cuyas masas son del orden de 100 GeV/c^2. A energías mucho *menores* que 100 GeV, las dos interacciones parecen muy diferentes, pero a energías mucho *mayores* que 100 GeV forman parte de una sola interacción.

Las teorías de gran unificación (teorías GUT) establecen un comportamiento parecido para la interacción fuerte. Se unifica con la interacción electrodébil a energías del orden de 10^{14} GeV, y a menores energías las dos parecen muy distintas. Una de las razones por la que las GUT todavía son muy especulativas es que no hay forma de efectuar experimentos controlados con energías de esta magnitud, que es

mayor, en un factor de 10^{11}, que las energías disponibles en cualquiera de los aceleradores actuales.

Por último, a energías suficientemente grandes, y distancias cortas, se supone que la gravitación se unifica con las otras tres interacciones. Se cree que la distancia a lo que esto ocurre es del orden de 10^{-35} m. Esta distancia, llamada *longitud de Planck* l_P, se determina por la rapidez de la luz c y las constantes fundamentales de la mecánica cuántica y la gravitación, h y G, respectivamente. La longitud de Planck l_P se define como

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35}\ \text{m} \tag{44.21}$$

El lector debería verificar que esta combinación de constantes sí tiene unidades de longitud. El *tiempo de Planck*, $t_P = l_P/c$, es el tiempo que necesita la luz para recorrer la distancia l_P:

$$t_P = \frac{l_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 0.539 \times 10^{-43}\ \text{s} \tag{44.22}$$

Si mentalmente retrocedemos en el tiempo, debemos detenernos al llegar a $t = 10^{-43}$ s, porque no contamos con una teoría adecuada que unifique las cuatro interacciones. Así que hasta ahora no tenemos forma de conocer cómo se comportaba el Universo cuando el tiempo era menor que el tiempo de Planck, o cuando su tamaño era menor que la longitud de Planck.

El modelo estándar de la historia del Universo

La siguiente descripción se llama *modelo estándar* de la historia del Universo. Quizás el título suene algo optimista, pero indica que hay áreas apreciables de la teoría que se basan en fundamentos experimentales, y que tienen una aceptación bastante general. La figura de las páginas 1542 y 1543 es una descripción gráfica de esa historia, con los tamaños, las energías de partícula y las temperaturas características de diferentes tiempos. Si usted consulta a menudo esta figura le ayudará a entender la siguiente descripción.

En este modelo estándar, la temperatura del Universo en el momento $t = 10^{-43}$ s (el tiempo de Planck) era de unos 10^{32} K, y la energía media por partícula era, aproximadamente,

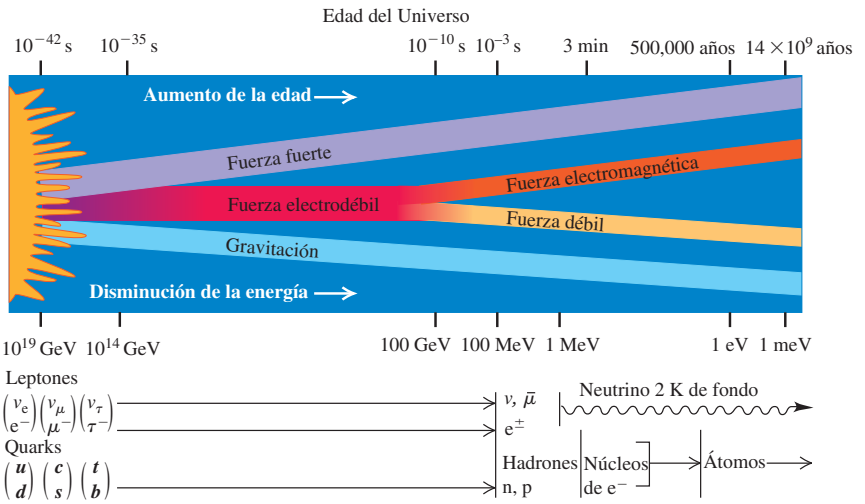
$$E \approx (10^{-13}\ \text{GeV/K})(10^{32}\ \text{K}) = 10^{19}\ \text{GeV}$$

En una teoría totalmente unificada, ésta fue más o menos la energía, y para valores menores la gravedad se comienza a comportar como una interacción separada. Este momento marcó la transición entre cualquier TOE (teoría de todo) propuesta y el periodo GUT (de gran unificación).

Durante el periodo GUT, más o menos de $t = 10^{-43}$ a 10^{-35} s, las fuerzas fuerte y electrodébil todavía estaban unificadas y el Universo consistía en una masa de quarks y leptones transformándose entre sí, con tanta libertad que no había distinción entre las dos familias de partículas. Otras partículas, mucho más masivas, podrían también haberse formado y destruido libremente. Una característica importante de las GUT es que a energías suficientemente grandes, no se conserva el número bariónico. (Ya mencionamos antes el decaimiento propuesto del protón, que todavía no se ha observado.) Así, al final del periodo GUT, las cantidades de quarks y antiquarks pudieron haber sido distintas. Este punto tiene implicaciones importantes. Al terminar esta sección regresaremos a él.

Cuando $t = 10^{-35}$ s, la temperatura había disminuido a unos 10^{27} K y la energía media a unos 10^{14} GeV. A esta energía, la fuerza fuerte se separó de la fuerza electrodébil (figura 44.19), y los números bariónico y leptónico comenzaron a conservarse por separado. En algunos modelos, llamados *modelos inflacionarios*, esta separación de la fuerza fuerte fue análoga a un *cambio de fase*, como la ebullición de un líquido, con un calor de vaporización asociado. Imagine que se parece a la ebullición de un núcleo pesado, separando las partículas más allá del corto alcance de la fuerza nuclear. Como consecuencia, los modelos inflacionarios predicen que hubo una expansión

44.19 Esquema que muestra los tiempos y las energías en los que se cree que las diversas interacciones se desacoplaron. La escala de energía es hacia atrás, porque la energía media disminuyó a medida que aumentó la edad del Universo.



muy rápida. En uno de los modelos, el factor de escala R aumentó en un factor de 10^{50} en 10^{-32} s.

Cuando $t = 10^{-32}$ s, el Universo era una mezcla de quarks, leptones y los bosones mediadores (gluones, fotones y los bosones débiles $W^{\pm}$ y Z^0). Continuó expandiéndose y enfriándose desde el periodo inflacionario hasta $t = 10^{-6}$ s, cuando la temperatura aproximada era unos 10^{13} K y las energías normales eran de 1 GeV (comparables a la energía en reposo de un nucleón; véase el ejemplo 44.11). En ese momento, los quarks comenzaron a unirse entre sí para formar nucleones y antinucleones. También había todavía fotones, con energía suficiente, para producir pares nucleón-antinucleón para equilibrar el proceso de aniquilación nucleón-antinucleón. Sin embargo, más o menos cuando $t = 10^{-2}$ s, la mayoría de las energías de los fotones bajaron mucho con respecto a la energía de umbral para la producción de esos pares. Hubo un pequeño exceso de nucleones con respecto a los antinucleones y la consecuencia fue que casi todos los antinucleones y la mayoría de los nucleones se aniquilaron entre sí. Se estableció así un equilibrio similar después, entre la producción de pares electrón-positrón a partir de fotones, y la aniquilación de tales pares. Cuando $t = 14$ s, la energía media bajó hasta más o menos 1 MeV, menor que la energía de umbral para la producción de pares e^+e^-. Al cesar la producción de pares, casi todos los positrones restantes fueron aniquilados, dejando al Universo con mucho más protones y electrones que sus antipartículas.

Hasta más o menos cuando $t = 1$ s, los neutrones y neutrinos se podían producir en la reacción endoérgica

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

Después de ese momento, la mayoría de los electrones ya no tenían energía suficiente para esta reacción. También disminuyó la energía media de los neutrinos y, a medida que se expandía el Universo, cesaron las reacciones de equilibrio que implicaban *absorción* de neutrinos (las cuales sucedían con probabilidades decrecientes). En ese momento, de hecho, el flujo de neutrinos y antineutrinos por el Universo se desacopló del resto del mismo Universo. Debido a las probabilidades extraordinariamente bajas de absorción de neutrinos, la mayor parte de ese flujo todavía existe, aunque enfriado mucho por la expansión. El modelo estándar del Universo predice una temperatura actual de esos neutrinos de 2 K, aproximadamente, pero todavía nadie ha podido efectuar un experimento que compruebe tal predicción.

Nucleosíntesis

Más o menos en $t = 1$ s, la relación de protones a neutrones fue determinada por el factor de la distribución de Boltzmann, $e^{-\Delta E/kT}$, donde ΔE es la diferencia entre las

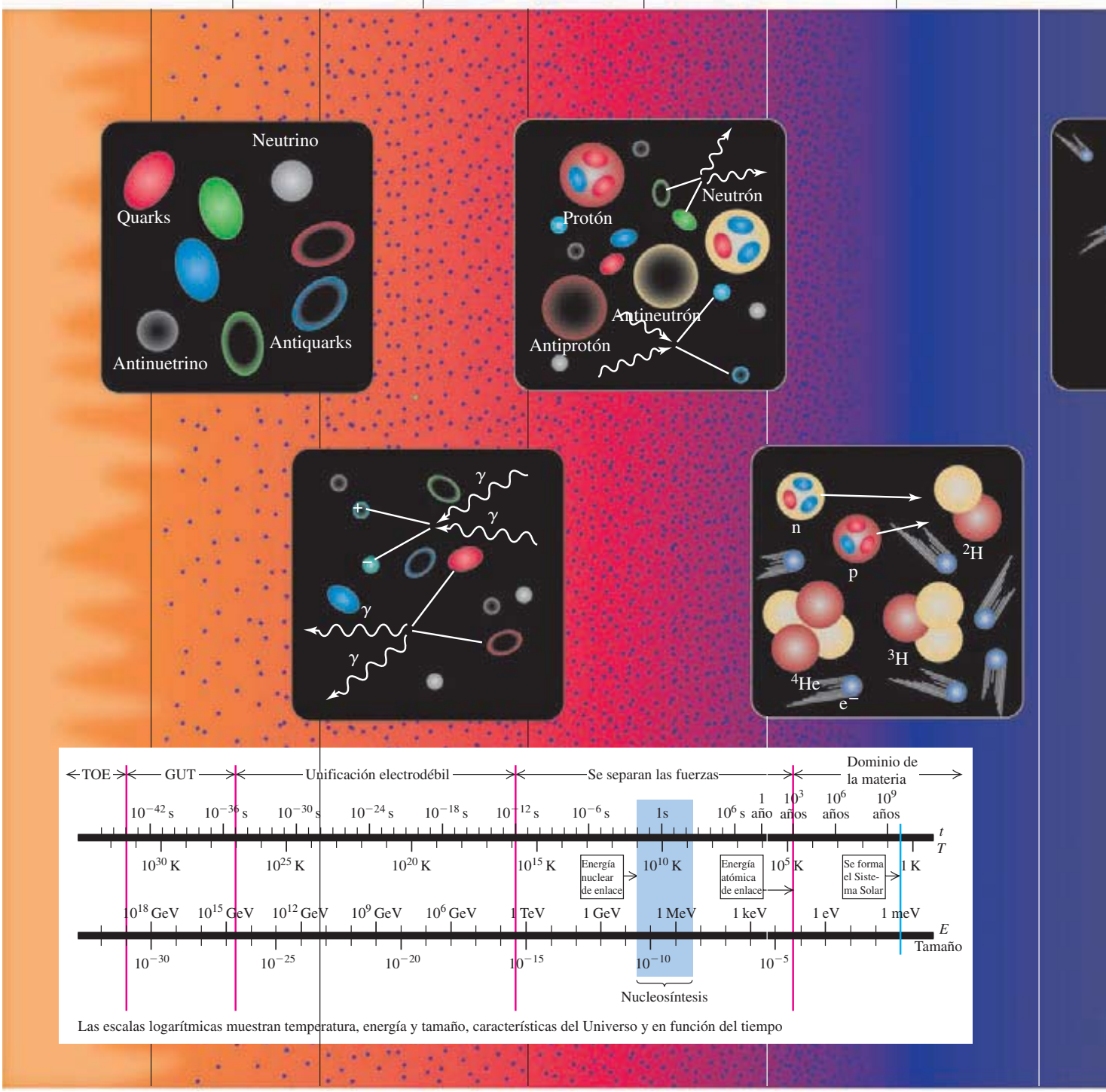
EDAD DE QUARKS Y GLUONES (Periodo GUT)
Concentración densa de materia y antimateria; gravedad, una fuerza separada; más quarks que antiquarks.
Periodo inflacionario (10^{-35} s): expansión rápida, la interacción fuerte se separa de la fuerza electrodébil

EDAD DE LEPTONES
Leptones diferentes de quarks; los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 median la fuerza débil (10^{-12} s)

EDAD DE NUCLEONES Y ANTINUCLEONES
Los quarks se combinan para formar nucleones y antinucleones; energía demasiado baja para producir pares nucleón-antinucleón a los 10^{-2} s

EDAD DE LA NUCLEOSÍNTESIS
Deuterones estables; materia 74% H, 25% He, 1% núcleos más pesados

BIG BANG 10^{-43} s 10^{-32} s 10^{-6} s 225 s 10^{3} s



Las escalas logarítmicas muestran temperatura, energía y tamaño, características del Universo y en función del tiempo

Una breve historia del Universo

EDAD DE LOS IONES
Gas en expansión y enfriamiento de H y He ionizados

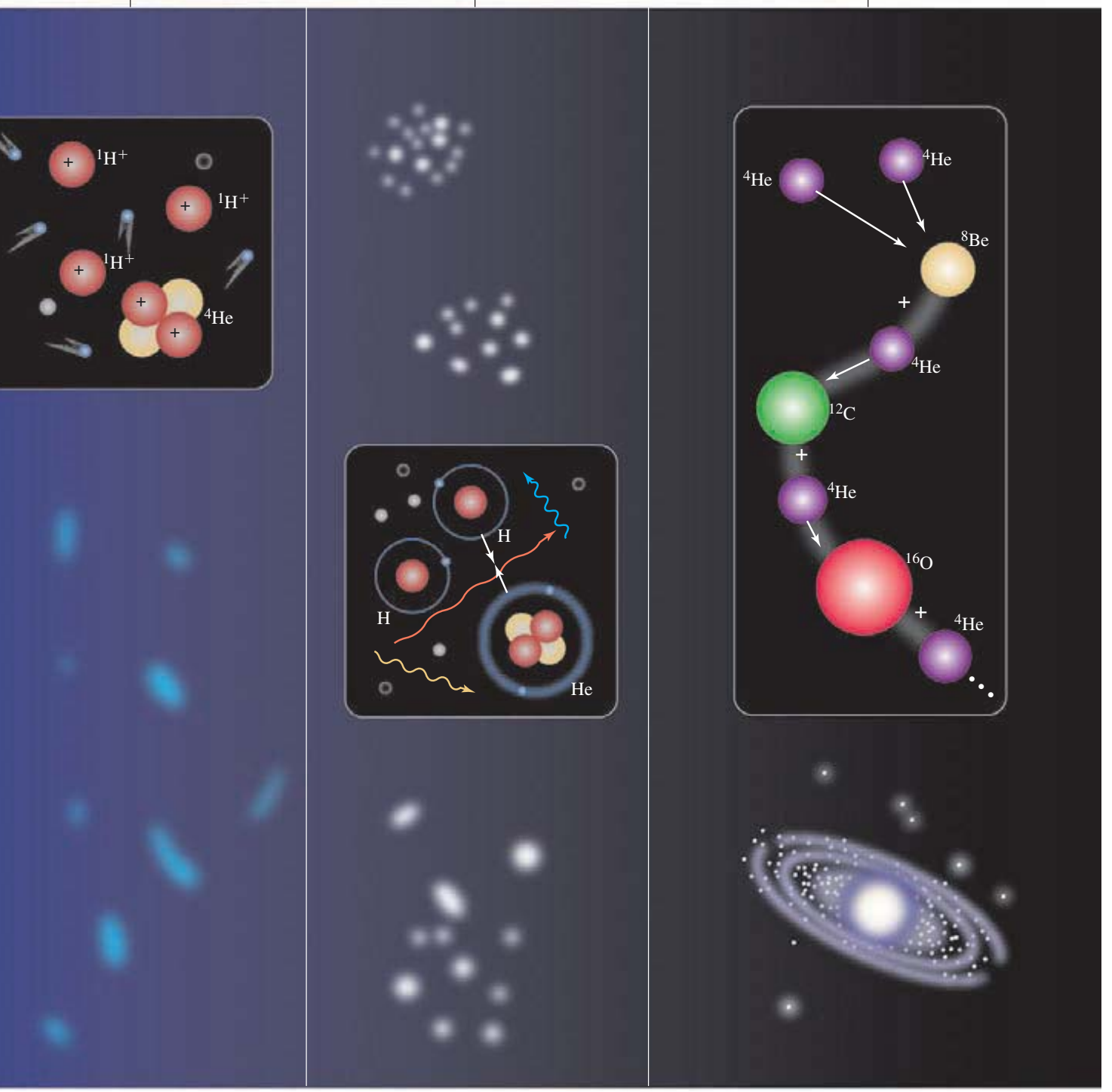
EDAD DE LOS ÁTOMOS
Se forman átomos neutros; el Universo se vuelve transparente a la mayoría de la luz

EDAD DE ESTRELLAS Y GALAXIAS
Comienza la fusión termonuclear en las estrellas, formándose así núcleos más pesados

10^{13} s

10^{15} s

AHORA



energías en reposo de neutrones y protones, $\Delta E = 1.294$ MeV. A una temperatura aproximada de 10^{10} K, este factor de distribución da como resultado unas 4.5 veces más protones que neutrones. Sin embargo, como hemos dicho, los neutrones libres (con una vida de 887 s) decaen espontáneamente a protones. Este decaimiento causó un aumento de la relación protones a neutrones hasta cuando $t = 225$ s. En ese momento, la temperatura promedio era unos 10^9 K y la energía media era bastante menor que 2 MeV.

Esta distribución de energía fue crítica porque la energía de enlace del *deuterón* (un neutrón y un protón enlazados) es de 2.22 MeV (véase la sección 43.2). Un neutrón ligado en un deuterón no decae espontáneamente. A medida que disminuía la energía promedio, se pudieron combinar un protón y un neutrón para formar un deuterón, y hubo cada vez menos fotones con 2.22 MeV o más energía, para separar de nuevo los deuterones. En consecuencia, la combinación de protones y neutrones para formar deuterones detuvo el decaimiento de los neutrones libres.

La formación de deuterones, iniciada más o menos cuando $t = 225$ s, marcó el principio de la formación de núcleos, *o nucleosíntesis*. En ese momento había más o menos siete protones por cada neutrón. El deuterón (^{2}H) puede absorber un neutrón y formar un tritón (^{3}H), o absorber un protón y formar ^{3}He. Entonces, el ^{3}H puede absorber un protón y ^{3}He también puede absorber un neutrón y, en cada caso, se produce ^{4}He (la partícula alfa). Es posible también que se formen unos pocos núcleos de ^{7}Li por fusión de los núcleos ^{3}H y ^{4}He. De acuerdo con la teoría, en esencia todo el ^{1}H y el ^{4}He en el Universo actual se formaron en esos momentos. Pero después, la formación de núcleos casi llegó a detenerse. La razón es que *ningún* núclido con número de masa $A = 5$ tiene una vida media mayor que 10^{-21} s. Simplemente, las partículas alfa no absorben en forma permanente neutrones ni protones. El núclido ^{8}Be que se forma por fusión de dos núcleos de ^{4}He es inestable, y su vida media es extremadamente corta, de unos 7×10^{-17} s. Advierta que en ese momento, la energía media todavía era demasiado grande como para que los electrones se enlazaran a los núcleos; todavía no había átomos.

Ejemplo conceptual 44.12 La abundancia relativa del hidrógeno y el helio en el Universo

Casi todos los protones y los neutrones, en la relación de siete a uno cuando $t = 225$ s, formaron ^{4}He o permanecieron como ^{1}H. Después de ese tiempo, ¿cuál fue la abundancia relativa, en masa, de ^{1}H y ^{4}He?

SOLUCIÓN

El núcleo ^{4}He contiene dos protones y dos neutrones. Por cada dos neutrones tenemos 14 protones. Los dos neutrones y dos de los 14 protones forman un núcleo de ^{4}He, dejando 12 protones (núcleos de ^{1}H). Entonces, en ese momento había 12 núcleos de ^{1}H por cada núcleo de ^{4}He. Las masas del ^{1}H y el ^{4}He son, aproximadamente, 1 u y 4 u, respectivamente, por lo que había 12 u de ^{1}H por cada 4 u de ^{4}He. Por consiguiente, había una mezcla de 75% de ^{1}H y 25% de ^{4}He en masa. Este resultado concuerda muy bien con estimaciones de la relación actual H–He en el Universo, lo que es una confirmación importante de esta parte de la teoría.

No se efectuó más nucleosíntesis, sino hasta mucho después, cuando el tiempo era $t = 10^{13}$ s (unos 380,000 años). En ese momento, la temperatura aproximada era de unos 3000 K y la energía media era de unos pocos décimos de electrón volts. Como las energías de ionización de los *átomos* de hidrógeno y helio son de 13.6 eV y 24.5 eV, respectivamente, casi todo el hidrógeno y el helio eran eléctricamente neutros (no ionizados). Anuladas las repulsiones eléctricas de los núcleos, la atracción gravitacional pudo unir en forma gradual los átomos neutros, para formar nubes de gas y finalmente estrellas. Se cree que las reacciones termonucleares en las estrellas han producido todos los núcleos más masivos. En la sección 43.8 describimos un ciclo de reacciones termonucleares en el que el ^{1}H se transforma en ^{4}He; este ciclo es una de las fuentes de energía que irradian las estrellas.

A medida que una estrella consume su hidrógeno, la presión gravitacional hacia el interior supera la radiación hacia el exterior y la presión del gas, y el núcleo de la estrella se comienza a contraer. Al hacerlo, la energía potencial gravitacional disminuye y las energías cinéticas de los átomos de la estrella aumentan. En las estrellas con masa suficiente, hay energía y densidad suficientes para iniciar otro proceso, llamado *fusión del helio*. Primero, dos núcleos de ^{4}He se funden para formar ^{8}Be. La vida media

extremadamente corta de este núclido inestable se compensa con la densidad del núcleo estelar, y con una probabilidad que suele ser grande, de absorción de otro núcleo de ^{4}He con energía específica; es una clase de efecto de resonancia. Así, una fracción razonable de los núcleos de ^{8}Be se funde con ^{4}He para formar el núclido estable ^{12}C. El resultado neto es la fusión de los tres núcleos ^{4}He para formar un ^{12}C, el *proceso triple alfa.* Después, fusiones sucesivas con ^{4}He forman: ^{16}O, ^{20}Ne y ^{24}Mg. Todas esas reacciones son exoérgicas. Liberan energía y calientan la estrella, y el ^{12}C y el ^{16}O se pueden fusionar y formar elementos cada vez con mayor número atómico.

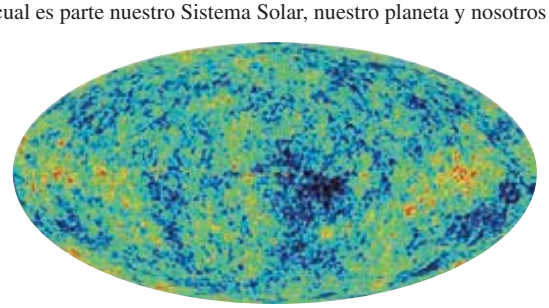
Para los núclidos que se pueden formar de esa manera, la energía de enlace por nucleón es máxima cuando el número de masa es $A = 56$, con el núclido ^{56}Fe, por lo que las reacciones exoérgicas de fusión se detienen con el Fe. Pero otras captaciones de neutrón, seguidas por decaimientos beta, pueden continuar la síntesis de núcleos más masivos. Si la estrella tiene la masa suficiente, al final puede explotar como una *supernova*, mandando al espacio los elementos pesados que se produjeron en los procesos anteriores (figura 44.20; véase también la figura 37.7). En el espacio, los desechos y demás materia interestelar pueden agruparse de forma gravitacional y formar una nueva generación de estrellas y planetas. Nuestro Sol es una estrella de "segunda generación", como ésas. Eso quiere decir que los planetas del Sol, y todo lo que hay en ellos (incluyendo a usted) contiene materia que hace mucho tiempo explotó al espacio como supernova.

44.20 En la constelación Cygnus, la Nebulosa del Velo es un residuo de una explosión de supernova ocurrida hace más de 20,000 años. El gas es expulsado de la supernova y todavía se mueve con mucha rapidez. Las colisiones entre este gas en rápido movimiento y el material tenue del espacio interestelar excitan el gas y lo hace brillar. Esta parte de la nebulosa tiene una longitud aproximada de 40 años luz (12 pc).

Radiación de fondo

En 1965 Arno Penzias y Robert Wilson, al trabajar en la división de comunicaciones satelitales de los Bell Telephone Laboratories en New Jersey, dirigieron hacia el firmamento una antena de microondas, y localizaron una señal de fondo que aparentemente no tenía una dirección preferida. (Esta señal produce aproximadamente el 1% de la "estática" que usted observa en una pantalla de TV cuando la sintoniza en un canal sin usar.) Investigaciones posteriores demostraron que la radiación que se recibe tiene un espectro de frecuencia que se ajusta a la ley de radiación de cuerpo negro de Planck, ecuación (38.32) (véase la sección 38.8). La longitud de onda de intensidad máxima es de 1.063 mm (en la región de microondas del espectro), con una temperatura absoluta correspondiente $T = 2.725$ K. Penzias y Wilson llamaron a los físicos de la cercana universidad de Princeton, que habían iniciado el diseño de una antena para buscar la radiación residual de la evolución inicial del Universo. Ya mencionamos que los átomos neutros se formaron más o menos cuando $t = 380{,}000$ años, cuando la temperatura era de 3000 K. Con mucho menos partículas cargadas presentes que antes, el Universo se volvió transparente en ese momento a la radiación electromagnética de longitud de onda larga. La radiación de cuerpo negro de 3000 K sobrevivió, por consiguiente, enfriándose hasta su temperatura actual de 2.725 K cuando el Universo se expandió. La *radiación cósmica de fondo* está entre las confirmaciones experimentales más concluyentes de la teoría del Big Bang. La figura 44.21 muestra un mapa moderno de esa radiación cósmica de fondo.

44.21 Este mapa en falsos colores muestra la radiación de microondas en todo el cielo que se formó como un óvalo. Cuando esta radiación fue emitida 380,000 años después del Big Bang, las regiones indicadas en azul eran un poco más frías y más densas que sus alrededores; dentro de esas regiones se formaron las galaxias, incluyendo la Vía Láctea, de la cual es parte nuestro Sistema Solar, nuestro planeta y nosotros mismos.



Ejemplo 44.13 Expansión del Universo

Aproximadamente, ¿en qué factor se ha expandido el Universo desde que $t = 380{,}000$ años?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos la idea de que cuando se expandió el Universo, todas las longitudes de onda intergalácticas se expandieron con él.

PLANTEAR: La ley de desplazamiento de Wien, ecuación (38.30), relaciona el máximo de longitud de onda de la radiación del cuerpo negro con la temperatura. Dadas las temperaturas de la radiación cósmica de fondo hoy y cuando $t = 380{,}000$ años, se puede determinar el factor por el cual han cambiado las longitudes de onda y, en consecuencia, determinar el factor por el cual se ha expandido el Universo.

EJECUTAR: La ecuación (38.30) se puede despejar para ver que la longitud de onda λ_m máxima es inversamente proporcional a la temperatura absoluta:

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{T}$$

A medida que se expande el Universo, todas las longitudes de onda (incluyendo λ_m) aumentan en proporción con el factor de escala R. La temperatura disminuyó en un factor de (3000 K)/(2.7 K) y, por lo tanto, λ_m y el factor de escala deben haber *aumentado* en ese factor. Así, entre $t = 380{,}000$ años y el presente, el Universo se expandió en un factor de (3000 K)/(2.7 K), más o menos 1100.

EVALUAR: Nuestros resultados indican que desde que $t = 380{,}000$ años, todo volumen intergaláctico ha aumentado en un factor de $(1100)^3 = 1.3 \times 10^9$. También indican que cuando la radiación cósmica fue emitida, la longitud de onda de su máximo de intensidad era (1.063 mm)/1100 = 967 nm, en la región infrarroja del espectro.

Materia y antimateria

Una de las propiedades más notables de nuestro Universo es la asimetría entre materia y antimateria. Se pensaría que el Universo debería tener igual cantidad de protones que de antiprotones, y de electrones que de positrones; sin embargo, parece que ése no es el caso. No hay pruebas de la existencia de cantidades apreciables de antimateria (materia formada por antiprotones, antineutrones y positrones) en algún lugar del Universo. Las teorías del Universo primitivo deben explicar este desequilibrio.

Hemos mencionado que la mayoría de las teorías de gran unificación incluyen la violación del número bariónico a energías en las que convergen las interacciones fuerte y electrodébil. Si la simetría partícula-antipartícula también se viola, contaremos con un mecanismo para hacer más quarks que antiquarks, más leptones que antileptones, y al final, más materia que antimateria. Un problema grave es que cualquier asimetría que se cree en esta forma durante la era de gran unificación, se borraría por la interacción electrodébil después de terminar esa era. En ese caso, debe haber algún mecanismo que produzca asimetría partícula-antipartícula en un momento *posterior*. El problema de la asimetría de materia-antimateria todavía está bastante abierto.

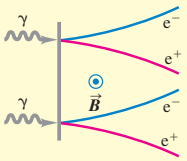
Esperamos que esta descripción cualitativa le haya proporcionado a usted un indicio de las relaciones estrechas entre la física de partículas y la cosmología. Todavía quedan muchas preguntas sin respuesta, en este activo campo de investigación. ¿La densidad de energía del Universo es igual a $\rho_c c^2$, o hay diferencias pequeñas, pero importantes? ¿Qué es la energía oscura? ¿La densidad de la energía oscura ha permanecido constante en la historia del Universo o ha cambiado? ¿Qué es la materia oscura y por qué es tan difícil detectar por otros medios que no sean la fuerza gravitacional? ¿Qué sucedió durante los primeros 10^{-43} s después del Big Bang? ¿Podemos tener pruebas para que las interacciones fuerte y electrodébil sufran una gran unificación a altas energías? La búsqueda de respuestas para estas y muchas otras preguntas acerca de nuestro mundo físico continúa siendo una de las aventuras más estimulantes de la mente humana.

Evalúe su comprensión de la sección 44.7 ¿Con un telescopio de suficiente potencia, podríamos detectar fotones antes de $t = 380{,}000$ años?

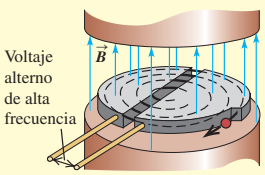
CAPÍTULO 44 RESUMEN

Partículas fundamentales: Cada partícula tiene una antipartícula; algunas partículas son sus propias antipartículas. Las partículas pueden crearse y destruirse; algunas de ellas (incluyendo electrones y positrones) sólo en pares, o en conjunto con otras partículas y antipartículas.

Las partículas sirven como mediadoras de las interacciones fundamentales. El fotón es el mediador de la interacción electromagnética. Yukawa propuso la existencia de mesones para mediar la interacción nuclear. Las partículas mediadoras que sólo pueden existir a causa del principio de incertidumbre para la energía se llaman partículas virtuales. (Véase el ejemplo 44.1.)

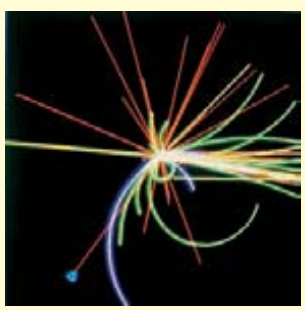


Aceleradores y detectores de la partícula: Los ciclotrones, sincrotrones y aceleradores lineales se usan para acelerar partículas cargadas hasta altas energías, para experimentos con interacciones entre partículas. Sólo parte de la energía del haz está disponible para causar reacciones con blancos en reposo. Este problema se evita en experimentos con haces en colisión. (Véanse los ejemplos 44.2 a 44.4.)

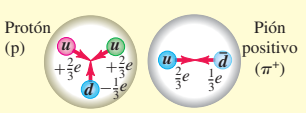


Partículas e interacciones: En la naturaleza hay cuatro interacciones fundamentales: las interacciones fuerte, electromagnética, débil y gravitacional. Las partículas se pueden describir en términos de sus interacciones y cantidades que se conservan en todas o en algunas de las interacciones.

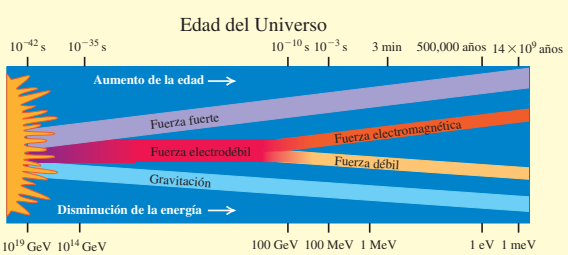
Los fermiones tienen espines semienteros; los bosones tienen espines enteros. Los leptones, que son fermiones, no tienen interacciones fuertes. A las partículas que tienen interacciones fuertes se les llama hadrones e incluyen los mesones, que siempre son bosones, y los bariones, que siempre son fermiones. Hay leyes de conservación de tres números leptónicos distintos, y para el número bariónico. Los números cuánticos adicionales, incluyendo la extrañeza y el encanto, se conservan en algunas interacciones pero no en otras. (Véanse los ejemplos 44.5 a 44.7.)



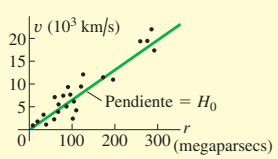
Quarks: Los hadrones están formados por quarks. Se cree que hay seis tipos de quarks. La interacción entre los quarks está mediada por gluones. Los quarks y los gluones tienen un atributo llamado color. (Véase el ejemplo 44.8.)



La simetría y unificación de las interacciones: Las consideraciones de simetría juegan un papel central en todas las teorías de partículas fundamentales. Las interacciones electromagnética y débil se unifican a altas temperaturas en la interacción electrodébil. En las teorías de gran unificación también la interacción fuerte se unifica con esas interacciones, pero a energías mucho mayores.



La expansión del Universo y su composición: La ley de Hubble indica que las galaxias se están alejando entre sí y que el Universo se está expandiendo. De acuerdo con las observaciones, la rapidez de expansión se está acelerando debido a la presencia de energía oscura, que forma hasta el 74% de la energía del Universo. Sólo el 4% de la energía en el Universo está en forma de materia ordinaria; el 22% restante es materia oscura, cuya naturaleza se entiende poco. (Véanse los ejemplos 44.9 y 44.10.)



La historia del Universo: En el modelo estándar del Universo, un Big Bang originó las primeras partículas fundamentales, que al final se unieron en los átomos más ligeros, a medida que el Universo se expandió y enfrió. La radiación cósmica de fondo es una reliquia del momento en el que se formaron esos átomos. Los elementos más pesados fueron fabricados mucho tiempo después, por reacciones de fusión en el interior de las estrellas. (Véanse los ejemplos 44.11 a 44.13.)

Términos clave

antipartícula, *1512*
mesón, *1514*
muón, *1514*
pión, *1514*
fermión, *1521*
bosón, *1521*
leptón, *1522*
hadrón, *1523*
barión, *1523*
extrañeza, *1524*
quark, *1526*
óctuple camino, *1528*
gluón, *1528*
encanto, *1529*
modelo estándar, *1530*
teoría electrodébi1, *1530*
teoría de la gran unificación, *1530*
corrimiento al rojo, *1532*
ley de Hubble, *1533*
principio cosmológico, *1534*
Big Bang, *1534*
materia oscura, *1537*
energía oscura, *1538*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Sólo el 4% de la masa y la energía del Universo está en la forma de materia "normal" u "ordinaria". Del resto, el 22% es la llamada materia oscura que se entiende poco y el 74% es la aún más misteriosa energía oscura.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

44.1 Respuestas: i), iii), ii), iv) Cuanto más masiva sea la partícula virtual, menor será su periodo de vida y menor será la distancia que puede viajar durante ese periodo.

44.2 Respuesta: no En un choque de frente entre un electrón y un positrón de igual energía, la cantidad de movimiento neta es cero. Como se conservan tanto cantidad de movimiento como energía en el choque, el fotón virtual también tiene una cantidad de movimiento $p = 0$, pero una energía $E = 90\ \text{GeV} + 90\ \text{GeV} = 180\ \text{GeV}$. En consecuencia, definitivamente la relación $E = pc$ *no* es cierta para este fotón virtual. De hecho, es un distintivo de las partículas virtuales de todas clases que no necesitan tener la misma relación entre energía y cantidad de movimiento, como debe ser para las partículas reales.

44.3 Respuesta: no Todos los mesones tienen número bariónico $B = 0$, mientras que un protón tiene $B = 1$. El decaimiento de un protón en uno o más mesones necesitaría que el número bariónico *no* se conservara. No se ha observado nunca una violación de este principio de conservación, por lo que el decaimiento propuesto es imposible. (Como se describió en la sección 44.5, no se han encontrado pruebas que sugieran que el protón decaiga de *cualquier* manera.)

44.4 Respuesta: no Sólo el quark s, con $S = -1$, tiene extrañeza distinta de cero. Para que un barión tenga $S = -2$, debe tener dos quarks s y un quark de diferente sabor. Como cada quark s tiene la carga $-\frac{1}{3}e$, el quark sin extrañeza debe tener carga $+\frac{4}{3}e$ para que la carga neta sea igual a $+e$. Pero *ningún* quark tiene la carga $+\frac{4}{3}e$, de modo que es imposible el barión propuesto.

44.5 Respuesta: i) Si un quark $\boldsymbol{d}$ en un neutrón (contenido de quarks $\boldsymbol{udd}$) sufre el proceso $\boldsymbol{d} \rightarrow \boldsymbol{u} + e^- + \bar{\nu}_e$, el barión que queda tiene el contenido de quarks $\boldsymbol{uud}$, por lo que es un protón (véase la figura 44.11). Un electrón es igual a una partícula β^- y entonces el resultado neto es un decaimiento beta menos: $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e$. Así, en el modelo estándar, el decaimiento beta menos de un núcleo es un proceso en el que un quark dentro del núcleo sufre un cambio de sabor de $\boldsymbol{d}$ a $\boldsymbol{u}$.

44.6 Respuestas: sí… y no El material del cual está formado nuestro cuerpo es ordinario para nosotros en la Tierra. Sin embargo, desde la perspectiva más amplia del Universo como un todo, el material del que estamos hechos es bastante *extraordinario*: sólo el 4% de la masa y la energía en el Universo está en la forma de átomos.

44.7 Respuesta: no Antes de $t = 380{,}000$ años, la temperatura era tan alta que los átomos no podrían formarse, así que los protones y electrones tenían completa libertad. Esas partículas cargadas eran muy efectivas para dispersar los fotones, por lo que la luz no se podía propagar muy lejos, y el Universo era opaco. Los fotones más antiguos que podemos detectar datan del momento cuando el tiempo $t = 380{,}000$ años, así fue como los átomos se formaron y el Universo se volvió transparente.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** MP

Preguntas para discusión

P44.1. ¿Es posible que algunas partes del Universo contengan antimateria, cuyos átomos tengan núcleos formados por antiprotones y antineutrones rodeados por positrones? ¿Cómo podríamos detectar actualmente esta antimateria sin en realidad estar allá? ¿Podemos detectar esos antiátomos identificando la luz que emiten, si está formada por antifotones? Explique por qué. ¿Qué problemas se presentarían si en realidad *sí fuéramos* allá?

P44.2. Según el principio de incertidumbre de Heinserberg, ¿es posible crear pares partícula-antipartícula que existan durante periodos extremadamente cortos antes de aniquilarse? ¿Esto significa que el espacio vacío en realidad está vacío?

P44.3. Cuando se descubrieron durante las décadas de 1930 y 1940, había confusión acerca de las identidades de los piones y los muones. ¿Cuáles son las semejanzas? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?
P44.4. La fuerza gravitacional entre dos electrones es más débil que la fuerza eléctrica por un factor del orden de 10^{-40}. Sin embargo, las interacciones gravitacionales de la materia se observaron y analizaron, y se comprendieron, mucho antes que las interacciones eléctricas. ¿Por qué?
P44.5. Cuando un π^0 decae en dos fotones, ¿qué sucede con los quarks que lo formaban?
P44.6. ¿Por qué un electrón no puede decaer en dos fotones? ¿Y en dos neutrinos?
P44.7. Según el modelo estándar de las partículas fundamentales, ¿cuáles son las semejanzas entre bariones y leptones? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?
P44.8. Según el modelo estándar de las partículas fundamentales, ¿cuáles son las semejanzas entre quarks y leptones? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?
P44.9. ¿Cuáles son las ventajas de los aceleradores de haces para colisión, en comparación con los de blancos estacionarios? ¿Cuáles son las desventajas más importantes?
P44.10. ¿El Universo tiene un centro? Explique por qué.
P44.11. ¿Tiene sentido preguntarse "Si el Universo está en expansión, ¿hacia adónde se expande?"
P44.12. Suponga que el Universo tenga un borde. Si se coloca usted en ese borde, en un experimento mental, explique por qué esta hipótesis viola el principio cosmológico.
P44.13. Explique por qué el principio cosmológico indica que H_0 tiene el mismo valor en cualquier punto del espacio, pero no requiere que sea constante en el tiempo.

Ejercicios

Sección 44.1 Partículas fundamentales y su historia

44.1. Un electrón y un positrón se mueven uno hacia el otro, y la rapidez de cada uno es 0.500 c en el marco de referencia del laboratorio. *a*) ¿Cuál es la energía cinética de cada partícula? *b*) El e^+ y el e^- se encuentran de frente y se aniquilan. ¿Cuál es la energía que produce cada fotón? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda de cada fotón? ¿Cómo se compara la longitud de onda de los fotones cuando la energía cinética inicial del e^+ y el e^- es insignificantemente baja (véase el ejemplo 44.1)?
44.2. En el ejemplo 44.1, ¿cuál es la rapidez de un positrón cuya energía cinética es 5.00 MeV? Exprese su resultado en función de la rapidez de la luz.
44.3. Un pión neutro en reposo decae en dos fotones. Calcule la energía, frecuencia y longitud de onda aproximadas de cada fotón. ¿En qué parte del espectro electromagnético está cada fotón? (Use la masa del pión expresada en función de la masa del electrón en la sección 44.1.)
44.4. Dos fotones de igual energía chocan de frente y se aniquilan entre sí, produciendo un par $\mu^+\mu^-$. La masa de cada muón se expresa en términos de la masa del electrón en la sección 44.1. *a*) Calcule la longitud de onda máxima que deben tener los fotones para que esto suceda. Si los fotones tienen esa longitud de onda, describa el movimiento del μ^+ y el μ^- inmediatamente después de que se producen. *b*) ¿Qué sucede si los fotones tienen menor longitud de onda que esa máxima, pero sin embargo se aniquilan y producen pares de $\mu^+\mu^-$?
44.5. Un pión positivo en reposo decae formando un muón positivo y un neutrino. *a*) Aproximadamente, ¿cuánta energía se desprende en el decaimiento? (Suponga que el neutrino tiene masa cero en reposo. Use las masas del muón y el pión que se dan en la sección 44.1, en función de la masa del electrón.) *b*) ¿Por qué un muón positivo no puede decaer y formar un pión positivo?
44.6. *a*) Un protón y un antiprotón se aniquilan y producen dos fotones. Calcule la energía, frecuencia y longitud de onda de cada fotón emitido en el marco de referencia del centro de masas: *a*) si las energías cinéticas iniciales del protón y el antiprotón son despreciables. *b*) Si cada partícula tiene una energía cinética inicial de 830 MeV.
44.7. Un muón negativo en reposo decae a un par electrón-positrón y dos neutrinos. ¿Aproximadamente cuánta energía se libera en el decaimiento? (Suponga que el neutrino tiene masa cero.)
44.8. Las ecuaciones (44.1) y (44.2) describen dos reacciones nucleares que implican neutrones. *a*) ¿Estas reacciones son endoérgicas o exoérgicas? *b*) ¿Cuánta energía se libera (o se absorbe) en cada una de ellas? *c*) ¿Cada una de las dos reacciones tiene energía cinética de umbral? (Consulte la tabla 43.2.)
44.9. "¡Potencia máxima, Scotty!" La nave espacial *Enterprise* del cine y la televisión, está impulsada por la combinación controlada de materia y antimateria. Si todo el abastecimiento de combustible de 400 kg de antimateria del *Enterprise* se combina con materia, ¿cuánta energía se libera? ¿Cómo se compara esto con el consumo de energía anual de Estados Unidos, que es aproximadamente de 1.0×10^{20} J?

Sección 44.2 Aceleradores y detectores de partículas

44.10. Un electrón con una energía total de 20.0 GeV choca contra un positrón estacionario. *a*) ¿Cuál es la energía disponible? *b*) Si el electrón y el positrón se aceleran en un colisionador, ¿qué energía total corresponde a la misma energía disponible del inciso *a*)?
44.11. Los deuterones en un ciclotrón describen un círculo de 32.0 cm de radio, justo antes de salir de las des. La frecuencia del voltaje alterno aplicado es de 9.00 MHz. Calcule *a*) el campo magnético y *b*) la energía cinética y la rapidez de los deuterones al salir.
44.12. El campo magnético de un ciclotrón que acelera protones es 1.30 T. *a*) ¿Cuántas veces por segundo debería invertirse el potencial entre las des? (Esto es el doble de la frecuencia de los protones que circulan.) *b*) El radio máximo del ciclotrón es 0.250 m. ¿Cuál es la rapidez máxima del protón? *c*) ¿A través de qué diferencia de potencial debe acelerarse el protón desde el reposo, para comunicarle la misma rapidez que la calculada en el inciso *b*)?
44.13. *a*) Un haz de partículas alfa de alta energía choca contra un blanco estacionario de helio gaseoso. ¿Cuál debe ser la energía total de un haz, si la energía disponible en la colisión es 16.0 GeV? *b*) En cambio, ¿cuál debe ser la energía de cada haz para producir la misma energía disponible en un experimento con colisión de haces?
44.14. *a*) ¿Cuál es la rapidez de un protón cuya energía total es 1000 GeV? *b*) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de un protón con la rapidez calculada en el inciso *a*), en un campo magnético de 4.00 T? Use la ecuación no relativista (44.7) y también la ecuación relativista correcta, y compare los resultados.
44.15. En el ejemplo 44.4, demostramos que un haz de protones con una energía de 800 GeV produce una energía disponible de 38.7 GeV para choques contra un blanco de protones estacionario. *a*) Se le pide que diseñe una mejora del acelerador, que duplique la energía total disponible en choques con blanco estacionario. ¿Qué energía de haz se requiere? *b*) En un experimento de haces en colisión, ¿qué energía total se necesita en cada haz para que la energía disponible sea de 2(38.7 GeV) = 77.4 GeV?
44.16. Calcule la energía de haz mínima en un colisionador protón-protón para iniciar la reacción $p + p \rightarrow p + p + \eta^0$. La energía en reposo de la η^0 es 547.3 MeV (véase la tabla 44.3).

Sección 44.3 Partículas e interacciones

44.17. ¿Cuál es la masa (en kg) de la Z^0? ¿Cuál es la relación de la masa de la Z^0 a la masa del protón?

44.18. La tabla 44.3 muestra que una Σ^0 decae en una Λ^0 y un fotón. *a*) Calcule la energía del fotón emitido en este decaimiento, si la Λ^0 está en reposo. *b*) ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento del fotón? ¿Es razonable no tener en cuenta la cantidad de movimiento ni la energía cinética finales de la Λ^0? Explique por qué.

44.19. Si una Σ^+ en reposo decae en un protón y un π^0, ¿cuál es la energía cinética total de los productos de decaimiento?

44.20. El descubrimiento de la partícula Ω^- ayudó a confirmar el óctuplo camino de Gell-Mann. Si una Ω^- decae en una Λ^0 y K', ¿cuál será la energía cinética total de los productos del decaimiento?

44.21. ¿En cuáles de los siguientes decaimientos se conservan los tres números leptónicos? Para cada caso explique su razonamiento. *a*) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$; *b*) $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$; *c*) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \gamma$; *d*) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

44.22. ¿En cuál de las siguientes reacciones o decaimientos se conserva el número bariónico? Para cada caso, explique su razonamiento. *a*) $p + p \rightarrow p + e^+$; *b*) $p + n \rightarrow 2e^+ + e^-$; *c*) $p \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$; *d*) $p + \bar{p} \rightarrow 2\gamma$.

44.23. ¿En cuál de las siguientes reacciones o decaimientos se conserva la extrañeza? Para cada caso explique su razonamiento. *a*) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; *b*) $n + K^+ \rightarrow p + \pi^0$; *c*) $K^+ + K^- \rightarrow \pi^0 + \pi^0$; *d*) $p + K^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$.

44.24. *a*) Demuestre que la constante de acoplamiento para la interacción electromagnética, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, es adimensional y tiene el valor numérico 1/137.0. *b*) Demuestre que en el modelo de Bohr (véase la sección 38.5), la rapidez orbital de un electrón en la órbita $n = 1$ es igual a c por la constante de acoplamiento, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$.

44.25. Demuestre que la constante de acoplamiento de la fuerza nuclear, $f^2/\hbar c$, es adimensional.

Sección 44.4 Los quarks y las ocho maneras

44.26. Nueve de los bariones con espín $\frac{3}{2}$ son cuatro partículas Δ, cada una con 1232 MeV/c^2 de masa, extrañeza 0 y cargas $+2e$, $+e$, 0 y $-e$; tres partículas Σ^*, cada una con 1385 MeV/c^2 de masa, extrañeza -1 y cargas $+e$, 0 y $-e$; y dos partículas Ξ^*, cada una con 1530 MeV/c^2 de masa, extrañeza -2 y cargas 0 y $-e$. *a*) Dibuje esas partículas en una gráfica de S en función de Q. Deduzca los valores de Q y S del décimo barión con espín $\frac{3}{2}$, la partícula Ω^- e indíquela en su diagrama. También, identifique las partículas con sus masas. La masa de la Ω^- es 1672 MeV/c^2. ¿Es consistente este valor con su diagrama? *b*) Deduzca las combinaciones de los tres quarks (de ***d***, ***u*** y ***s***) que comprende cada una de estas diez partículas. Vuelva a trazar la gráfica de S en función de Q del inciso *a*), con cada partícula identificada por su contenido de quarks. ¿Qué regularidades observa usted?

44.27. Determine la carga eléctrica, el número bariónico, así como los números cuánticos de extrañeza y encanto, para las siguientes combinaciones de quarks *a*) ***uds***; *b*) $\boldsymbol{c\bar{u}}$; *c*) ***ddd*** y *d*) $\boldsymbol{d\bar{c}}$. Explique su razonamiento.

44.28. ¿Cuál es la energía cinética total de decaimiento cuando una partícula ypsilon en reposo decae a $\tau^+ + \tau^-$?

44.29. El contenido de quarks del neutrón es ***udd***. *a*) ¿Cuál es el contenido de quarks del antineutrón? Explique su razonamiento. *b*) ¿Es el neutrón su propia antipartícula? ¿Por qué? *c*) El contenido de quarks de la ψ es $\boldsymbol{c\bar{c}}$. ¿La ψ es su propia antipartícula? Explique por qué.

44.30. Dado que cada partícula sólo contiene combinaciones de: ***u***, ***d***, ***s***, $\boldsymbol{\bar{u}}$, $\boldsymbol{\bar{d}}$ y $\boldsymbol{\bar{s}}$, use el método del ejemplo 44.8 para deducir el contenido de quarks de *a*) una partícula de carga $+e$, número bariónico 0 y extrañeza $+1$; *b*) una partícula con carga $+e$, número bariónico -1 y extrañeza $+1$; y *c*) una partícula con carga 0, número bariónico $+1$ y extrañeza -2.

44.31. En una interacción, la fuerza débil puede cambiar el sabor del quark. Explique cómo el decaimiento β^+ cambia el sabor de los quarks. Si un protón sufre decaimiento β^+, determine la reacción del decaimiento.

Sección 44.6 El Universo en expansión

44.32. Parámetro de corrimiento al rojo. La definición del parámetro z de corrimiento al rojo se presenta en el ejemplo 44.9. Demuestre que la ecuación (44.13) puede escribirse en la forma $1 + z = (\lfloor 1 + \beta \rfloor / \lfloor 1 - \beta \rfloor)^{1/2}$, donde $\beta = v/c$. *b*) El parámetro de corrimiento al rojo observado en una galaxia es $z = 0.500$. Calcule la rapidez de la galaxia en relación con la Tierra, si el corrimiento se debe al efecto Doppler. *c*) Use la ley de Hubble para calcular la distancia de esta galaxia a la Tierra.

44.33. El espectro del átomo de sodio se detecta en la luz de una galaxia lejana. *a*) Si la línea de 590.0 nm presenta corrimiento al rojo hasta 658.5 nm, ¿a qué rapidez se aleja esa galaxia de la Tierra? *b*) Use la ley de Hubble para calcular la distancia de la Tierra a la galaxia.

44.34. *a*) De acuerdo con la ley de Hubble, ¿cuál es la distancia r hasta las galaxias que se alejan de nosotros con una rapidez c? *b*) Explique por qué la distancia calculada en el inciso *a*) es el tamaño de nuestro Universo observable (sin tomar en cuenta desaceleración alguna en la expansión del Universo debida a la atracción gravitatoria).

44.35. Una galaxia en la constelación de Piscis está a 5210 Mal (millones de años luz) de la Tierra. *a*) Use la ley de Hubble para calcular la rapidez con que esa galaxia se está alejando de la Tierra. *b*) ¿Qué relación de corrimiento al rojo, λ_0/λ_S, se espera en la luz de esa galaxia?

44.36. La densidad crítica del Universo es de 6.3×10^{-27} kg/m^3. *a*) Suponiendo que todo el Universo fuera de hidrógeno, exprese la densidad crítica en el número de átomos de H por metro cúbico. *b*) Si la densidad del Universo fuera igual a la densidad crítica, ¿cuántos átomos en promedio esperaría usted encontrar en un recinto de dimensiones 4 m $\times$ 7 m $\times$ 3 m? *c*) Compare su respuesta del inciso *b*) con el número de átomos que encontraría en el mismo recinto bajo las condiciones normales de la Tierra.

Sección 44.7 El principio del tiempo

44.37. Calcule la energía desprendida en cada una de las siguientes reacciones: *a*) $p + {}^2H \rightarrow {}^3He$; *b*) $n + {}^3He \rightarrow {}^4He$.

44.38. Calcule la energía (en MeV) desprendida en el proceso triple alfa $3\ {}^4He \rightarrow {}^{12}C$.

44.39. Calcule la energía de reacción Q (en MeV) para la reacción $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$. ¿Es esta reacción endoérgica o exoérgica?

44.40. Calcule la energía de reacción Q (en MeV) para la reacción de núcleo-síntesis.

$$^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{16}_{8}O$$

¿Esta reacción es endoérgica o exoérgica?

44.41. La radiación de cuerpo negro, de 2.728 K, tiene longitud de onda del máximo a 1.062 mm. ¿Cuál es la longitud de onda del máximo, cuando $t = 700{,}000$ años, cuando la temperatura era 3000 K?

44.42. *a*) Demuestre que la ecuación de la longitud de Planck, $\sqrt{\hbar G/c^3}$, tiene dimensiones de longitud. *b*) Evalúe el valor numérico de $\sqrt{\hbar G/c^3}$, y compruebe el valor dado por la ecuación (44.21).

Problemas

44.43. En el gran colisionador de hadrones, cada protón se acelerará hasta tener una energía cinética de 7.0 TeV. *a*) En los haces en colisión, ¿cuál es la energía disponible E_a en una colisión? *b*) En un experimento con blanco fijo, en el que un haz de protones incide sobre un blanco de protones estacionarios, ¿cuál debe ser la energía total (en TeV) de las partículas del haz, para producir la misma energía disponible que en el inciso *a*)?

44.44. Un protón y un antiprotón chocan de frente con energías cinéticas iguales. En el marco de referencia del centro de masas, se producen dos rayos γ con longitudes de onda de 0.780 fm (femtómetros). Calcule la energía cinética del protón incidente.

44.45. Comparación entre las intensidades de las cuatro fuerzas. Tanto las interacciones fuertes como las débiles son fuerzas de corto alcance que tienen un intervalo de 1 fm. Si usted tiene dos protones separados por esta distancia, estarán influidos por las cuatro fuerzas (o interacciones) fundamentales. *a*) Calcule la intensidad de las interacciones eléctrica y gravitacional que influirán en cada uno de estos protones. *b*) Use la información obtenida acerca de las cuatro fuerzas al principio de la sección 44.3, para estimar las intensidades aproximadas de las interacciones fuertes y débil sobre cada uno de estos protones. *c*) Ordene estas fuerzas de mayor a menor intensidad. *d*) Exprese cada fuerza como un múltiplo de la más débil de las cuatro.

44.46. Calcule la energía cinética de umbral para la reacción $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$ dado que un haz de π^- incide en un blanco de protones estacionarios. La K^0 tiene una masa de 497.7 MeV/c^2.

44.47. Calcule la energía cinética de umbral para la reacción $p + p \rightarrow p + p + K^+ + K^-$ dado que un haz de protones incide en un blanco de protones estacionarios.

44.48. Un mesón η^0 en reposo decae en tres mesones π. *a*) ¿Cuáles son las combinaciones permitidas de π^0, π^+ y π^- como productos de decaimiento? *b*) Calcule la energía cinética total de los mesones π.

44.49. Aniquilación del par. Considere el caso donde un electrón e^- y un positrón e^+ se aniquilan entre sí y producen fotones. Suponga que estas dos partículas chocan de frente con rapideces iguales pero bajas. *a*) Demuestre que no es posible que se produzca sólo un fotón. (*Sugerencia:* considere la ley de la conservación que debe ser verdadera en cualquier choque.) *b*) Demuestre que si sólo se producen dos fotones, deben viajar en direcciones opuestas y tener energía igual. *c*) Calcule la longitud de onda de cada uno de los fotones del inciso *b*). ¿En qué parte del espectro electromagnético están?

44.50. *a*) ¿Qué energía se libera cuando un pión negativo (π^-) en reposo decae a productos estables (véase las tablas 44.2 y 44.3, en la sección 44.3)? *b*) ¿Por qué los antineutrinos y el neutrino se llevan la mayoría de esa energía?

44.51. A cada una de las siguientes reacciones le falta una sola partícula. Calcule el número bariónico, carga, extrañeza y los tres números leptónicos (cuando sea necesario) de la partícula que falta, y con ellos identifíquela. *a*) $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + ?$; *b*) $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + ?$; *c*) $p + \overline{p} \rightarrow n + ?$; *d*) $\overline{\nu}_\mu + p \rightarrow n + ?$

44.52. Estime el ancho de energía (incertidumbre en la energía) de la ψ, si su duración media es 7.6×10^{-21} s. ¿Qué fracción es esta incertidumbre de su energía en reposo?

44.53. El mesón ϕ tiene 1019.4 MeV/c^2 de masa, y un ancho medido de energía de 4.4 MeV/c^2. Aplique el principio de incertidumbre y la ecuación (39.13) para estimar la vida del mesón ϕ.

44.54. Un mesón ϕ (véase el problema 44.53) en reposo decae a través de $\phi \rightarrow K^+ + K^-$. Su extrañeza es 0. *a*) Calcule la energía cinética del mesón K^+. (Suponga que los dos productos de decaimiento comparten por igual la energía cinética, porque sus masas son iguales.) *b*) Sugiera una razón por la que no se observa el decaimiento $\phi \rightarrow K^+ + K^- + \pi^0$. *c*) Sugiera razones por las que no se hayan observado los decaimientos: $\phi \rightarrow K^+ + \pi^-$ y $\phi \rightarrow K^+ + \mu^-$.

44.55. Decaimiento del protón. El decaimiento del protón es una propiedad de algunas teorías de la gran unificación. Un decaimiento posible sería $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$, que viola la conservación tanto del número bariónico como del número leptónico, así que se espera que la vida del protón sea muy larga. Suponga que la vida media del protón fuera 1.0×10^{18} años. *a*) Calcule la energía depositada, por kilogramo de tejido corporal (en rad), debida al decaimiento de los protones de su organismo, en un año. Modele su organismo como formado totalmente por agua. Sólo los dos protones en los átomos de hidrógeno de cada molécula de H_2O decaerían en la manera indicada. ¿Ve usted por qué? Suponga que la π^0 decae en dos rayos γ, que el positrón se aniquila con un electrón, y que toda la energía producida en el decaimiento primario y de esos decaimientos secundarios permanecen en su organismo. *b*) Calcule la dosis equivalente (en rem) suponiendo una EBR de 1.0 para todos los productos de la radiación, y compárela con el 0.1 rem debido al fondo natural, y con el límite de 5.0 rem para trabajadores industriales. Con base en su cálculo ¿puede ser la vida del protón tan corta como 1.0×10^{18} años?

44.56. Una partícula Ξ^- en reposo decae en una Λ^0 y una π^-. *a*) Calcule la energía cinética total de los productos de decaimiento. *b*) ¿Qué fracción de la energía se queda en cada partícula? (Para simplificar, use ecuaciones no relativistas para la cantidad de movimiento y la energía cinética.)

44.57. Acerca del modelo de globo esférico para un Universo bidimensional en expansión (véase la figura 44.16 en la sección 44.6). La distancia mínima entre dos puntos en la superficie, medida a lo largo de la superficie, es la longitud del arco r, donde $r = R\theta$. A medida que se infla el globo, aumenta su radio R, pero el ángulo θ entre los dos puntos permanece constante. *a*) Explique por qué en cualquier momento $(dR/dt)/R$ es el mismo para todos los puntos en el globo. *b*) Demuestre que $v = dr/dt$ es directamente proporcional a r en cualquier momento. *c*) De acuerdo con su respuesta en el inciso *b*), ¿cuál es la expresión de la constante de Hubble H_0 en función de R y de dR/dt? *d*) La ecuación de H_0 que dedujo usted en el inciso *c*) es constante en el espacio. ¿Cómo debería depender R del tiempo, para que H_0 sea constante en el tiempo? *e*) ¿Es consistente su respuesta en el inciso *d*) con la atracción gravitacional de la materia en el Universo?

44.58. Suponga que todas las condiciones son las mismas que en el problema 44.57, excepto que $v = dr/dt$ es constante para determinada θ, y que H_0 no es constante en el tiempo. En ese caso, demuestre que la constante de Hubble es $H_0 = 1/t$ y, en consecuencia, que el valor actual es $1/T$, donde T es la edad del Universo.

Problemas de desafío

44.59. Imagine un choque en el que una partícula estacionaria de masa M es bombardeada por una partícula de masa m, rapidez v_0 y energía total (incluyendo la energía en reposo) E_m. *a*) Use la transformación de Lorentz para expresar las velocidades v_m y v_M de las partículas m y M, en función de la rapidez v_{cm} del centro de masas. *b*) Aproveche que la cantidad de movimiento total es cero en un marco de referencia del centro de masas, para obtener una ecuación para determinar v_{cm} en función de m, M y v_0. *c*) Combine los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener la ecuación (44.9), de la energía total en el marco de referencia del centro de masas.

44.60. Un hiperón Λ^0 en reposo decae en un neutrón y un π^0. *a*) Calcule la energía cinética total de los productos de decaimiento. *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética total se queda en cada partícula? (*Sugerencia:* use las ecuaciones relativistas de cantidad de movimiento y de energía cinética.)